Contrôle optimal du véhicule Educ Eco

(tentative) d'application du **principe du Minimum de Pontryagin** pour trouver une trajectoire de vitesse optimale

Pierre Haessig - 11 décembre 2012

In [28]:
```
%load_ext sympyprinting
from sympy import *
from IPython.core.display import display, display_latex
```

In [141]:
```
# Variables
t, dt, T = symbols('t dt T')
l, dl, L = symbols('l dl L')
v, u = symbols('v f_{mot}')
p1, p2 = symbols('p_1 p_2')
# Parameters
# m: masse en kg
# gam: accélération de la pesanteur en m/s²
# fr: force de frottement des pneus en N
# c: coefficient de frottement aérodyn, en N/(m/s)²
# a: coeff de perte moteur: en W/N²
m, gam, fr, c, a = symbols('m gamma f_r c a')
# Functions:
#f1, f2, g, H = symbols('f_1 f_2 g H')
s = symbols('s', cls=Function) # s = slope = dz/dl [en m/m]
```

In [222]:
```
def disp_eq(a,b):
    '''Latex display of a=b equality'''
    display_latex(r'$$ %s = %s $$' % (a, latex(b)), raw=True)
disp_eq('a', a)
```

$$a = a$$

---

1) Cas d'une modélisation fonction de l'abscisse curviligne

1.a) Description du système : dynamique et coût

vecteur d'état : $x(l) = v(l), t(l)$, cad vitesse et temps de passage

avec *conditions initiales*:

- $v(0) = v_0$ (par exemple $v(0) = 0$ pour un départ arrêté)
- $t(0) = 0$ (démarrage du chrono)

et *condition finale* :

- $t(L) = T_{max}$ (avec L/T_{max} = 30 km/h)

par contre la vitesse finale $v(L)$ est libre

In [326]:
```
# dv/dl [en 1/s]
f1 = 1/(m*v)*(u - fr - c*v**2 - m*gam*s(l))
# note : m*v s'exprime en N.s
disp_eq(r'\frac{dv}{dl}', f1)
```

$$\frac{dv}{dl} = \frac{-cv^2 - f_r + f_{mot} - \gamma m \operatorname{s}(l)}{mv}$$

In [327]:
```
# dt/dl [en s/m]
f2 = 1/v
disp_eq(r'\frac{dt}{dl}', f2)
```

$$\frac{dt}{dl} = \frac{1}{v}$$

In [328]:
```
# Fonction coût instantanné en [N]
g = u + a*u**2/v
disp_eq(r'g(x,u)', g)
```

$$g(x,u) = \frac{af_{mot}^2}{v} + f_{mot}$$

1.b) Hamiltonien

$H(x, u, p) = g(x, u) + p \cdot f(x, u)$

Ici, l'Hamiltonien s'exprime en J/m cad en Newton (force)

In [329]:
```
# Hamiltonien: H(x, u, p) = g + p.f
H = g + (p1*f1 + p2*f2)
disp_eq(r'H(x,u,p)', H)
```

$$H(x,u,p) = \frac{af_{mot}^2}{v} + f_{mot} + \frac{p_2}{v} + \frac{p_1\left(-cv^2 - f_r + f_{mot} - \gamma m \operatorname{s}(l)\right)}{mv}$$

Note sur les unités des états adjoints:

- si $[p_1.f_1] = N$, c'est que $[p_1] = N.s = kg.m/s$ (cad une "impulsion", "momentum")
- si $[p_2.f_2] = N$, c'est que $[p_2] = N.m/s = W$ (cad une "puissance")

1.c) Équations adjointes

$$\frac{dp}{dl} = -\nabla_x H(x, u, p)$$

(2 équations)

avec une *condition finale*

- $p_1(L) = 0$

In [330]:
```
# dp1/dl = -dH/dv [N/(m/s)]
f3 = -H.diff(v)
disp_eq(r'\frac{dp_1}{dl}',f3)
```

$$\frac{dp_1}{dl} = \frac{af_{mot}^2}{v^2} + 2\frac{cp_1}{m} + \frac{p_2}{v^2} + \frac{p_1\left(-cv^2 - f_r + f_{mot} - \gamma m\,\mathrm{s}\left(l\right)\right)}{mv^2}$$

In [331]:
```
# dp2/dl = -dH/dt [N/s]
f4 = -H.diff(t)
disp_eq(r'\frac{dp_2}{dl}',f4)
```

$$\frac{dp_2}{dl} = 0$$

In [332]:
```
# dp0/dl = -dH/dl [N/m]
disp_eq(r'\frac{dp_0}{dt} = -\frac{dH}{dl}',-H.diff(l))
```

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{dH}{dl} = \frac{\gamma p_1 \frac{\partial}{\partial l}\,\mathrm{s}\left(l\right)}{v}$$

Remarque :

Comme le système (exprimé spatialement) n'est *pas stationnaire*, l'Hamiltonien n'est *pas constant sur la trajectoire optimale*.

1d) Contrôle optimal

u^* obtenu par l'annulation de dH/du

On récupère $u^*(x, p)$

In [333]:
```
disp_eq(r'\frac{dH}{du}', H.diff(u))
u_opt = solve(H.diff(u),u)[0]
disp_eq(r'u^*(x,p)', u_opt)
```

$$\frac{dH}{du} = 2\frac{af_{mot}}{v} + 1 + \frac{p_1}{mv}$$

$$u^*(x, p) = -\frac{mv + p_1}{2am}$$

In [334]:
```
# State and adjoint equations:
disp_eq(r'\frac{dv^*}{dl}',f1.subs(u, u_opt))
disp_eq(r'\frac{dx^*}{dl}',f2.subs(u, u_opt))
disp_eq(r'\frac{dp_1}{dl}',f3.subs(u, u_opt))
disp_eq(r'\frac{dp_2}{dl}',f4.subs(u, u_opt))
```

$$\frac{dv^*}{dl} = \frac{-cv^2 - f_r - \gamma m \operatorname{s}\left(l\right) - \frac{mv+p_1}{2am}}{mv}$$

$$\frac{dx^*}{dl} = \frac{1}{v}$$

$$\frac{dp_1}{dl} = 2\frac{cp_1}{m} + \frac{p_2}{v^2} + \frac{p_1\left(-cv^2 - f_r - \gamma m \operatorname{s}\left(l\right) - \frac{mv+p_1}{2am}\right)}{mv^2} + \frac{\left(mv + p_1\right)^2}{4am^2v^2}$$

$$\frac{dp_2}{dl} = 0$$

In [335]:
```
# Hamiltonien avec u* substitué
disp_eq(r'H(x^*, p^*)', H.subs(u, u_opt))
```

$$H(x^*, p^*) = \frac{p_2}{v} + \frac{p_1\left(-cv^2 - f_r - \gamma m \operatorname{s}\left(l\right) - \frac{mv+p_1}{2am}\right)}{mv} - \frac{mv + p_1}{2am} + \frac{\left(mv + p_1\right)^2}{4am^2v}$$

---

2) Cas d'une modélisation fonction du temps

2.a) Description du système : dynamique et coût

vecteur d'état, fonction du temps t : $x(t) = v(t), l(t)$, cad vitesse et abcisse curviligne

avec *conditions initiales*

- $v(0) = v_0$ à choisir (par exemple $v(0) = 0$ pour un départ arrêté)
- $l(0) = 0$

et *condition finale*

- $l(T_{max}) = L$

In [336]:
```
# dv/dt = 1/m * Somme(forces) en [N/kg = m/s²]
f1 = (1/m)*(u - fr - c*v**2 - m*gam*s(l))
disp_eq(r'\frac{dv}{dt}', f1)
```

$$\frac{dv}{dt} = \frac{-cv^2 - f_r + f_{mot} - \gamma m \operatorname{s}\left(l\right)}{m}$$

In [337]:
```
# dl/dt en [m/s]
f2 = v
disp_eq(r'\frac{dl}{dt}', f2)
```

$$\frac{dl}{dt} = v$$

In [338]:
```
# Fonction coût instantanné en [W]
g = u*v + a*u**2
disp_eq(r'g(x,u)', g)
```

$$g(x, u) = af_{mot}^2 + f_{mot}v$$

2.b) Hamiltonien

$H(x, u, p) = g(x, u) + p \cdot f(x, u)$

Ici, l'Hamiltonien s'exprime en W (puissance)

In [339]:
```
# Hamiltonien: H(x, u, p) = g + p.f
H = g + (p1*f1 + p2*f2)
disp_eq(r'H(x,u,p)', H)
```

$$H(x, u, p) = af_{mot}^2 + f_{mot}v + p_2 v + \frac{p_1 \left(-cv^2 - f_r + f_{mot} - \gamma m \operatorname{s}(l)\right)}{m}$$

Note sur les unités des états adjoints:

- si $[p_1.f_1] = W$, c'est que $[p_1] = W.kg/N = kg.m/s$ (cad une "impulsion", "momentum")
- si $[p_2.f_2] = W$, c'est que $[p_2] = W.s/m = N$ (cad une "force")

2c) Équations adjointes

$\frac{dp}{dt} = -\nabla_x H(x, u, p)$

(2 équations)

avec une *condition finale*

- $p_1(T_{max}) = 0$

In [340]:
```
# dp1/dt = -dH/dv [N]
f3 = -H.diff(v)
disp_eq(r'\frac{dp_1}{dt}',f3)
```

$$\frac{dp_1}{dt} = 2\frac{cp_1 v}{m} - f_{mot} - p_2$$

In [341]:
```
# dp2/dt = -dH/dl [W/m=N/s]
f4 = -H.diff(l)
disp_eq(r'\frac{dp_2}{dt}',f4)
```

$$\frac{dp_2}{dt} = \gamma p_1 \frac{\partial}{\partial l} \mathrm{s}(l)$$

In [342]:
```
# dp0/dt = -dH/dt [W/s]
disp_eq(r'\frac{dp_0}{dt}=-\frac{dH}{dt}',-H.diff(t))
```

$$\frac{dp_0}{dt} = -\frac{dH}{dt} = 0$$

Remarque

Comme le système (exprimé temporellement) est *stationnaire*, on constate que l'Hamiltonien est *constant sur la trajectoire optimale*.

$H(x^*(t), u^*(t), p(t)) = C$, pour tout $t \in [0, T_{max}]$

et la constante C est à déterminer.

Remarque 2

Dans tous les cas, $H(x^*(t), u^*(t), p(t)) = -\nabla_t J^*(t, x^\star(t)) = -p_0(t)$

2d) Contrôle optimal

u^* obtenu par l'annulation de $\frac{dH}{du}$

On récupère $u^*(x, p)$

In [343]:
```
disp_eq(r'\frac{dH}{du}', H.diff(u))
u_opt = solve(H.diff(u),u)[0]
disp_eq(r'u^*(x,p)', u_opt)
```

$$\frac{dH}{du} = 2af_{mot} + v + \frac{p_1}{m}$$

$$u^*(x, p) = -\frac{mv + p_1}{2am}$$

In [344]:
```
# State and adjoint equations:
disp_eq(r'\frac{dv^*}{dt}',f1.subs(u, u_opt))
disp_eq(r'\frac{dx^*}{dt}',f2.subs(u, u_opt))
disp_eq(r'\frac{dp_1}{dt}',f3.subs(u, u_opt))
disp_eq(r'\frac{dp_2}{dt}',f4.subs(u, u_opt))
```

$$\frac{dv^*}{dt} = \frac{-cv^2 - f_r - \gamma m\,\mathrm{s}\left(l\right) - \frac{mv+p_1}{2am}}{m}$$

$$\frac{dx^*}{dt} = v$$

$$\frac{dp_1}{dt} = 2\,\frac{cp_1 v}{m} - p_2 + \frac{mv + p_1}{2am}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \gamma p_1 \frac{\partial}{\partial l}\,\mathrm{s}\left(l\right)$$

In [345]:
```
# Hamiltonien
disp_eq(r'H(x^*, p^*)=C', H.subs(u, u_opt))
```

$$H(x^*, p^*) = C = p_2 v + \frac{p_1\left(-cv^2 - f_r - \gamma m\,\mathrm{s}\left(l\right) - \frac{mv+p_1}{2am}\right)}{m} - \frac{v\left(mv + p_1\right)}{2am} + \frac{\left(mv + p_1\right)^2}{4am^2}$$

In [ ]: