# Feuille de cours 2 : Interpolation de Lagrange

### 1. Thèorème d'existence et unicité

**Théorème :** Si $x_1, \dots x_N$ sont $N$ réels distincts, l'application linéaire : $\mathbb{R}_{N-1}[X] \to \mathbb{R}^N$ définie par $\Phi(P) = (P(x_1), \dots, P(x_N))$ est bijective (c'est un isomorphisme).

Si $y_1, \dots y_N$ sont $N$ réels quelconques donnés, l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$ (c'est-à-dire de dégré $\leq N$) tel que $P(x_k) = y_k$ pour $k \in [1; n]$ est appelé Polynôme d'Interpolation de Lagrange aux points $(x_1, y_1)$, $\dots$ $(x_N, y_N)$.

Si $y_k = f(x_k)$ pour tout $k \in [1, N]$ où $f$ est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ qui contient les $x_k$, on dit que $P$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ aux points $x_1, \dots x_N$.

### 2. Erreur d'interpolation

**Théorème :** Soit a, b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Etant donné $N$ points $x_1, \dots x_N$ distincts de $[a, b]$, on note $P(X) \in \mathbb{R}_{N-1}[X]$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ aux points $x_1, \dots, x_N$. Si $f$ est $N$ fois dérivable sur $]a, b[$, alors pour chaque $x \in [a, b]$ il existe $t \in ]a, b[$ tel que

$$f(x) - P(x) = (x - x_1) \dots (x - x_N) \frac{f^{(N)}(t)}{N!}.$$

On en déduit en particulier l'estimation grossière suivante :

$$|f(x) - P(x)| \leq \frac{(b-a)^N}{(N-1)N!} \sup |f^{(N)}|.$$

La convergence uniforme de l'erreur d'interpolation vers 0 lorsque $N \to +\infty$ n'est donc pas assurée si les dérivées successives de $f$ ne sont pas bornées indépendamment de $N$.

### 3. Expression de l'interpolé dans la base canonique : Matrice de Vandermonde

On se ramène à la résolution du système linéaire suivant : on cherche $(a_0, a_1, \dots, a_{N-1}) \in \mathbb{R}^N$ tel que, pour tout $i \in [1, N]$

$$P(x_i) = a_{N-1} x_i^{N-1} + a_{N-2} x_i^{N-2} + \dots + a_2 x_i^2 + a_1 x_i + a_0 = y_i.$$

Ce système s'écrit aussi sous forme matricielle :

$$MA = Y,$$

où $A = (a_0 \ a_1 \ \dots \ a_{N-1})^t$, $Y = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_N)^t$ et $M$ est la matrice de Vandermonde définie comme suit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & \cdots & x_N^{N-1}. \end{pmatrix}$$

### 4. Expression de l'interpolé avec la méthode de Lagrange

Pour chaque $i \in [1, N]$ on définit le polynôme de degré $N-1$

$$L_i(X) = \prod_{k \in [1,n] \setminus \{i\}} \left( \frac{X - x_k}{x_i - x_k} \right).$$

Pour tous $i, j$ dans $[1, n]$ on a $L_i(x_j) = 1$ si $i = j$ et $L_i(x_j) = 0$ si $i \neq j$.

Les polynômes $L_1, \dots, L_N$ forment une base de $\mathbb{R}_{N-1}[X]$ et le polynôme $P$ d'interpolation de Lagrange aux points $(x_1, y_1), \dots (x_N, y_N)$ s'écrit

$$P(X) = \sum_{i=1}^{N} y_i L_i(X).$$

**5. Evaluation de l'interpolé en un point : l'algorithme de Horner**

On veut calculer efficacement l'image d'un nombre réel $x$ par une fonction polynomiale associée à un polynôme $P$ de degré $N$ :

$$P(X) = a_N X^N + a_{N-1} X^{N-1} + \cdots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0.$$

L'écriture du polynôme suggère de procéder itérativement en sommant chacun des monômes évalué en x, ce qui implique de calculer à chaque fois une exponentielle dont le coût est prohibitif.

La méthode dite de la factorisation de Horner permet d'évaluer $P(X)$ en effectuant seulement $N$ additions et $N$ multiplications ; elle consiste à écrire le polynôme $P(X)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} P(X) &= (a_N X^{N-1} + a_{N-1} X^{N-2} + \cdots + a_2 X + a_1) X + a_0 \\ &= (\dots (a_N X + a_{N-1}) X + a_{N-2}) X + \cdots + a_2) X + a_1) X + a_0. \end{aligned}$$

On peut construire une suite de polynômes $P_k(X)$ par la relation de récurrence suivante, où le dernier terme $P_N(X)$ de la suite est égal au polynôme $P(X)$ :

$$P_0(X) := a_N, \quad P_k(X) = P_{k-1}(X) X + a_{N-k}, \quad \text{si } 1 \leq k \leq N.$$

**6. Le phénomène de Runge**

On peut montrer que si la fonction $f$ est développable sur $\mathbb{R}$ en série entière (par exemple $f(x) = \exp(x)$ ou $f(x) = \cos(x)$), le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f$ aux points $x_1, \dots, x_N$ de l'intervalle $[a, b]$ converge uniformément vers $f$ sur $[a, b]$ lorsque $N$ tend tend vers l'infini, quelle que soit la répartition des points d'interpolation (deux à deux distincts) dans $[a, b]$.

Mais ceci n'est pas vrai dans le cas général (pour toute fonction $f$). Par exemple, dans chacun des cas suivants (avec des points d'interpolation équirépartis dans $[a, b]$) :

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad \text{sur } [a, b] = [0, 1],$$

$$f(x) = |x| \quad \text{ou} \quad f(x) = \frac{1}{4x^2 + 1}, \quad \text{sur } [a, b] = [-1, 1],$$

on a

$$\max_{t \in [a,b]} |P_N(t) - f(t)| \to +\infty \quad \text{lorsque } N \to +\infty.$$

C'est ce qu'on appelle le phénomène de Runge.

On peut néanmoins montrer que si $f$ est lipschitzienne sur $[-1, 1]$ et si on choisit pour points d'interpolation les zéros $x_1, \dots, x_N$ du $N$-ième polynôme de Tchebychev $T_N$, alors

$$\max_{t \in [-1,1]} |P_N(t) - f(t)| \to 0 \quad \text{lorsque } N \to +\infty.$$