

Proposition de corrigé

Concours : Concours Centrale-Supélec

Année : 2020

Filière : PSI

Épreuve : Sciences Industrielles pour l'Ingénieur

Ceci est une proposition de corrigé des concours de CPGE, réalisée bénévolement par des enseignants de Sciences Industrielles de l'Ingénieur et d'Informatique, membres de l'[UPSTI](#) (Union des Professeurs de Sciences et Techniques Industrielles).

La distribution et la publication de ce document sont strictement interdites !

Conditions de diffusion

Ce document n'a pas vocation à être diffusé, et sa consultation est exclusivement réservée aux adhérents de l'UPSTI.

Les adhérents peuvent en revanche s'en inspirer librement pour toute utilisation pédagogique.

Si vous constatez que ce document est disponible en téléchargement sur un site tiers, veuillez s'il vous plaît nous en informer [à cette adresse](#), afin que nous puissions protéger efficacement le travail de nos adhérents.

Licence et Copyright

Toute représentation ou reproduction (même partielle) de ce document faite sans l'accord de l'UPSTI est **interdite**. Seuls le téléchargement et la copie privée à usage personnel sont autorisés (protection au titre des [droits d'auteur](#)).

L'équipe UPSTI

Robotisation du désherbage mécanique des vignes

Corrigé UPSTI



<https://vitibot.fr/img/bakus-vigne.jpg>

1 Génération des consignes d'orientation des roues avant et arrière pour le guidage du robot Bakus

- Objectif

Élaborer les lois permettant de générer les consignes d'orientation à envoyer à chacune des quatre roues orientables du robot, afin qu'il puisse se déplacer le long d'un rang de vigne avec la même précision qu'un tracteur piloté par un chauffeur.

1.1 Changement de variables $(y_{G_2}, \theta) \rightarrow (y_F, y_R)$

- Objectif

Simplifier l'approche du problème d'asservissement du couple de variables (y_{G_2}, θ) au point de fonctionnement $(0, 0)$ à l'aide d'un changement de variables approprié.

Question 1 À partir de la figure A uniquement :

- déterminer les expressions linéarisées à l'ordre 1 de y_F et y_R , notées respectivement (E1) et (E2) en fonction de y_{G_2} , θ et L puis en déduire l'expression de θ en fonction de y_F , y_R et L notée (E3) ;
- déduire de ces résultats que chercher à asservir le couple de variables (y_{G_2}, θ) au point de fonctionnement $(0, 0)$ est équivalent à asservir (y_F, y_R) au même point de fonctionnement.

Expression (E1)

En se plaçant dans le quadrilatère $FF_0G_0G_2$, on a $\overrightarrow{FF_0} + \overrightarrow{F_0G_0} + \overrightarrow{G_0G_2} + \overrightarrow{G_2F} = \vec{0}$.

Tout d'abord, on a $\overrightarrow{G_0F_0} = L \cos \theta \vec{x}_0$. On a alors : $y_F \vec{y}_0 - L \cos \theta \vec{x}_0 - y_{G_2} \vec{y}_0 + L \vec{x}_2 = \vec{0}$.

On demande d'exprimer y_F ; donc on projette cette expression suivant \vec{y}_0 . On obtient donc $y_F - y_{G_2} + L \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 = 0$ soit $y_F - y_{G_2} + L \sin \theta = 0$ et $y_F - y_{G_2} + L \theta = 0$ (E1).

Expression (E2)

En se plaçant dans le quadrilatère $G_2G_0R_0R$, on a $\overrightarrow{G_2G_0} + \overrightarrow{G_0R_0} + \overrightarrow{R_0R} + \overrightarrow{RG_2} = \vec{0}$.

On a de même $\overrightarrow{R_0G_0} = L \cos \theta \vec{x}_0$. On a alors : $y_{G_2} \vec{y}_0 - L \cos \theta \vec{x}_0 - y_R \vec{y}_0 + L \vec{x}_2 = \vec{0}$.

On demande d'exprimer y_R ; donc on projette cette expression suivant \vec{y}_0 . On obtient donc $y_{G_2} - y_R + L \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 = 0$ soit $y_{G_2} - y_R + L \sin \theta = 0$ et $y_{G_2} - y_R + L \theta = 0$ (E2).

Expression (E3)

On a d'une part $y_{G_2} = y_F + L \theta$ (E1) et d'autre part $y_{G_2} = y_R - L \theta$ (E2). En conséquence, $y_F + L \theta = y_R - L \theta$ soit $\theta = \frac{y_R - y_F}{2L}$ (E3).

Méthode plus rapide pour déterminer (E1) et (E2)

- $y_F = \overrightarrow{OF} \cdot \vec{y}_0 = (\overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{G_2F}) \cdot \vec{y}_0$. On obtient alors : $y_F = y_{G_2} + L \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 = y_{G_2} + L \sin \theta$ (E1).
- $y_R = \overrightarrow{OR} \cdot \vec{y}_0 = (\overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{G_2R}) \cdot \vec{y}_0$. On obtient alors : $y_R = y_{G_2} - L \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_0 = y_{G_2} - L \sin \theta$ (E2).

Bilan

Autour du point de fonctionnement en linéarisant les relations géométriques on obtient un système linéaire de deux équations. En effet,

$$\begin{cases} y_F = y_{G_2} + L \theta \\ y_R = y_{G_2} - L \theta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_F \\ y_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -L \\ 1 & L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{G_2} \\ \theta \end{pmatrix}.$$

On a alors 2 relations indépendantes (E1) et (E2) pour 4 paramètres. Il y a donc deux mobilités. On peut donc choisir de piloter ou d'imposer deux couples paramètres au choix par exemple (y_{G_2}, θ) ou (y_F, y_R) .

Au point de fonctionnement $(0, 0)$, piloter un couple de variables (y_{G_2}, θ) permet de piloter de façon unique un couple (y_F, y_R) . Réciproquement, piloter un couple de variables (y_F, y_R) permet de piloter de façon unique un couple (y_{G_2}, θ) .

1.2 Modélisation cinématique étendue du robot

- Objectif

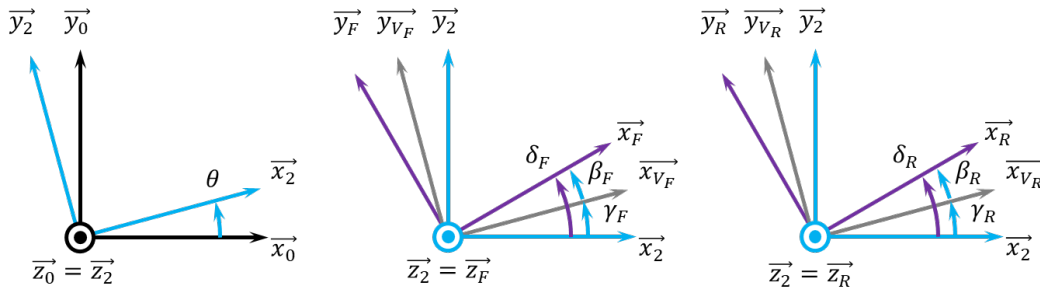
Établir un modèle exploitable décrivant les déplacements du robot Bakus sur le sol naturel, c'est-à-dire en tenant compte d'un éventuel glissement des roues sur le sol lorsqu'il est en dévers (phénomène de dérive latérale et angulaire).

1.2.1 Notations et hypothèses

1.2.2 Mise en équation du modèle cinématique étendu du robot Bakus

Question 2 À partir de la figure A, déterminer les relations donnant les expressions de :

- \dot{y}_F et \dot{y}_R en fonction de V_F , V_R , θ , δ_F , δ_R , β_F et β_R ;
- \dot{x}_{G_2} en fonction de V_{G_2} , γ_{G_2} et θ .



Expression de \dot{y}_F

On a $\vec{V}_{2/0}(F) = \vec{V}_F = \dot{x}_F \vec{x}_0 + \dot{y}_F \vec{y}_0$ (problème plan). Par ailleurs, en projetant \vec{V}_F dans la base \mathcal{B}_0 , on a $\vec{V}_F = V_F \vec{x}_{V_F} = V_F (\cos(\gamma_F + \theta) \vec{x}_0 + \sin(\gamma_F + \theta) \vec{y}_0)$. Enfin, $\delta_F = \gamma_F + \beta_F \Leftrightarrow \gamma_F = \delta_F - \beta_F$. En projetant $\vec{V}_{2/0}(F)$ sur \vec{y}_0 on a $V_F \sin(\delta_F - \beta_F + \theta) = \dot{y}_F$.

Autre méthode :

$$\dot{y}_F = \frac{d}{dt} [\vec{OF}]_{R_0} \cdot \vec{y}_0 = \vec{V}_{2/0}(F) \cdot \vec{y}_0 = V_F \vec{x}_{V_F} \cdot \vec{y}_0 = V_F \sin(\theta + \gamma_F) = V_F \sin(\delta_F - \beta_F + \gamma_F)$$

Expression de \dot{y}_R

De manière analogue, on a $V_R \sin(\delta_R - \beta_R + \theta) = \dot{y}_R$.

Expression de \dot{x}_{G_2}

On a $\vec{V}_{2/0}(G_2) = \vec{V}_G = \dot{x}_{G_2} \vec{x}_0 + \dot{y}_{G_2} \vec{y}_0$. Par ailleurs, en projetant \vec{V}_{G_2} dans la base \mathcal{B}_0 , on a $\vec{V}_{G_2} = V_{G_2} \vec{x}_{V_{G_2}} = V_{G_2} (\cos(\gamma_{G_2} + \theta) \vec{x}_0 + \sin(\gamma_{G_2} + \theta) \vec{y}_0)$. En projetant $\vec{V}_{2/0}(G_2)$ sur \vec{x}_0 on a $V_{G_2} \cos(\gamma_{G_2} + \theta) = \dot{x}_{G_2}$.

Autre méthode :

$$\dot{x}_{G_2} = \frac{d}{dt} [\vec{OG_2}]_{R_0} \cdot \vec{x}_0 = \vec{V}_{2/0}(G_2) \cdot \vec{x}_0 = V_{G_2} \vec{x}_{V_{G_2}} \cdot \vec{x}_0 = V_{G_2} \cos(\theta + \gamma_{G_2})$$

Question 3 Montrer rigoureusement que $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_F \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_R \cdot \vec{x}_2$. En déduire une relation entre V_{G_2} , γ_{G_2} , V_F , γ_F , V_R et γ_R .

Le châssis 2 est considéré comme un solide indéformable. Le champ des vitesses de 2/0 est donc un champ de vitesse équiprojectif. On a donc $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_F \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_R \cdot \vec{x}_2$. En conséquences, $V_{G_2} \vec{x}_{V_{G_2}} \cdot \vec{x}_2 = V_F \vec{x}_{V_F} \cdot \vec{x}_2 = V_R \vec{x}_{V_R} \cdot \vec{x}_2 \Rightarrow V_{G_2} \cos \gamma_{G_2} = V_F \cos \gamma_F = V_R \cos \gamma_R$.

S'il s'agissait de remonter les propriétés d'équiprojectivité du champ des vitesses, on peut procéder comme suit.

- **Soit en passant par le point I_{20} :**

On a $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = (\vec{V}_{I_{20}} + \vec{GI}_{20} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}) \cdot \vec{x}_2$. $\vec{V}_{I_{20}} = \vec{0}$; donc $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = ((\rho \vec{y}_2 - (h+L) \vec{x}_2) \wedge \vec{\Omega}_{2/0}) \cdot \vec{x}_2 \cdot (\vec{x}_2 \wedge \vec{u}) \cdot \vec{x}_2 = 0$; donc $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = (\rho \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_2) \cdot \vec{x}_2 = \rho \dot{\theta}$.

De même, $\vec{V}_F \cdot \vec{x}_2 = (\vec{V}_{I_{20}} + \vec{FI}_{20} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}) \cdot \vec{x}_2 = ((\rho \vec{y}_2 - (h+2L) \vec{x}_2) \wedge \vec{\Omega}_{2/0}) \cdot \vec{x}_2 = (\rho \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_2) \cdot \vec{x}_2 = \rho \dot{\theta}$.

Enfin, $\vec{V}_R \cdot \vec{x}_2 = (\vec{V}_{I_{20}} + \vec{RI}_{20} \wedge \vec{\Omega}_{2/0}) \cdot \vec{x}_2 = ((\rho \vec{y}_2 - h \vec{x}_2) \wedge \vec{\Omega}_{2/0}) \cdot \vec{x}_2 = (\rho \vec{y}_2 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_2) \cdot \vec{x}_2 = \rho \dot{\theta}$.

On a donc $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_F \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_R \cdot \vec{x}_2 = \rho \dot{\theta}$.

- **Soit en passant par les trois points G_2 , F et R :**

$\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_{2/0}(G_2) \cdot \vec{x}_2 = (\vec{V}_{2/0}(F) + \vec{G_2F} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_{0,2}) \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_F \cdot \vec{x}_2 + (L \vec{x}_2 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_{0,2}) \cdot \vec{x}_2$ et $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_F \cdot \vec{x}_2$.

De même entre G_2 et R : $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_{2/0}(G_2) \cdot \vec{x}_2 = (\vec{V}_{2/0}(R) + \vec{G_2R} \wedge \dot{\theta} \vec{z}_{0,2}) \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_R \cdot \vec{x}_2 + (-L \vec{x}_2 \wedge \dot{\theta} \vec{z}_{0,2}) \cdot \vec{x}_2$ et $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = \vec{V}_R \cdot \vec{x}_2$.

Par ailleurs :

- $\vec{V}_{G_2} \cdot \vec{x}_2 = V_{G_2} \overrightarrow{x_{V_{G_2}}} \cdot \vec{x}_2 = V_{G_2} \cos \gamma_{G_2}$;
- $\vec{V}_F \cdot \vec{x}_2 = V_F \overrightarrow{x_{V_F}} \cdot \vec{x}_2 = V_F \cos \gamma_F$;
- $\vec{V}_R \cdot \vec{x}_2 = V_R \overrightarrow{x_{V_R}} \cdot \vec{x}_2 = V_R \cos \gamma_R$.

On a donc $V_{G_2} \cos \gamma_{G_2} = V_F \cos \gamma_F = V_R \cos \gamma_R$.

Question 4 À partir du résultat obtenu à la question 3, donner les expressions de V_F et V_R en fonction de V_{G_2} , δ_F , β_F , δ_R et β_R .

On a $V_F = V_{G_2} \frac{\cos \gamma_{G_2}}{\cos \gamma_F} = V_{G_2} \frac{\cos \gamma_{G_2}}{\cos (\delta_F - \beta_F)}$.

De même, $V_R = V_{G_2} \frac{\cos \gamma_{G_2}}{\cos \gamma_R} = V_{G_2} \frac{\cos \gamma_{G_2}}{\cos (\delta_R - \beta_R)}$.

Or, $\tan \gamma_{G_2} = \frac{\tan \gamma_F + \tan \gamma_R}{2}$ soit $\gamma_{G_2} = \arctan \left(\frac{\tan \gamma_F + \tan \gamma_R}{2} \right) = \arctan \left(\frac{\tan (\delta_F - \beta_F) + \tan (\delta_R - \beta_R)}{2} \right)$.

On injecte alors cette expression dans V_F et V_R :

$$V_F = V_{G_2} \frac{\cos \left(\arctan \left(\frac{\tan (\delta_F - \beta_F) + \tan (\delta_R - \beta_R)}{2} \right) \right)}{\cos (\delta_F - \beta_F)}$$

$$V_R = V_{G_2} \frac{\cos \left(\arctan \left(\frac{\tan (\delta_F - \beta_F) + \tan (\delta_R - \beta_R)}{2} \right) \right)}{\cos (\delta_R - \beta_R)}$$

Est-ce vraiment la solution attendue ?

1.3 Mesure en estimation des variables du modèle cinématique étendu

- Objectif -

Donner les moyens au robot de mesurer ou, à défaut, d'estimer les valeurs des variables δ_F , δ_R , y_{G_2} , θ , \dot{y}_F et \dot{y}_R et V_{G_2} du modèle cinématique étendu.

1.3.1 Variables mesurées directement par des capteurs dédiés

Question 5 Compte-tenu du contexte d'utilisation du robot, justifier l'intérêt d'avoir choisi des codeurs absolus plutôt que relatifs (incrémentaux) pour obtenir les valeurs mesurées de δ_F et δ_R .

Ne connaissant pas la technologie du codeur absolu, on ne voit pas clairement l'intérêt de choix par rapport à un codeur incrémental. Un critère de choix pourrait aussi être la résolution du codeur vis-à-vis de la précision attendue sur la position angulaire.

On pourrait aussi justifier le choix par la connaissance de l'angle à la mise à l'énergie qui ne nécessite pas de faire une initialisation avec un codeur absolu.

1.3.2 Variables estimées par analyse d'images des huit caméras TOF du robot

Question 6 À partir des équations (I.2) et (I.3), donner l'expression des variables estimées $\hat{\beta}_F$ et $\hat{\beta}_R$ en fonction des variables mesurées \dot{y}_F , \dot{y}_R , V_{G_2} , θ , δ_F et δ_R .

On a $\dot{y}_F = V_{G_2}(\theta + \delta_F - \beta_F)$ et $\dot{y}_R = V_{G_2}(\theta + \delta_R - \beta_R)$. Par conséquent, $\hat{\beta}_F = \theta + \delta_F - \frac{\dot{y}_F}{V_{G_2}}$ et $\hat{\beta}_R = \theta + \delta_R - \frac{\dot{y}_R}{V_{G_2}}$.

1.4 Génération des consignes d'orientation des roues (δ_F^*, δ_R^*) pour l'asservissement latéral et angulaire du robot enjambeur le long d'un rang de vigne

- Objectif

Établir les lois de génération de consigne de l'asservissement latéral du robot Bakus pour qu'il puisse suivre avec précision la trajectoire \mathcal{T} , malgré un glissement éventuel des roues sur le sol naturel

1.4.1 Passage du domaine temporel au domaine spatial : $t \rightarrow x_{G_2}$

- Objectif

Rendre le modèle cinématique étendu indépendant de la vitesse linéaire V_{G_2} du robot le long d'un rang de vigne, afin de découpler la gestion des écarts latéraux y_F et y_R et celui de la vitesse d'avance V_{G_2} .

Question 7 À partir des équations (E3), (I.1), (I.2) et (I.3) établies à partir du modèle cinématique étendu de la figure A, montrer que :

$$y'_F = \theta + \delta_F - \beta_F \quad (\text{I.4})$$

$$y'_R = \theta + \delta_R - \beta_R \quad (\text{I.5})$$

$$\theta' = \frac{y'_F - y'_R}{2L} \quad (\text{I.6})$$

On a les résultats suivants : $\theta = \frac{y_R - y_F}{2L}$ (E3), d'après (I.1), (I.2) et (I.3), $\dot{x}_{G_2} = V_{G_2}$, $\dot{y}_F = V_{G_2}(\theta + \delta_F - \beta_F)$ et $\dot{y}_R = V_{G_2}(\theta + \delta_R - \beta_R)$.

D'après (I.1), $\dot{x}_{G_2} = \frac{dx_{G_2}}{dt} = V_{G_2}$. Par ailleurs (**à confirmer**) on cherche $y'_F = \frac{dy_F}{dx_{G_2}} = \frac{dy_F}{dt} \cdot \frac{dt}{dx_{G_2}} = y'_F \cdot \frac{1}{V_{G_2}} = \theta + \delta_F - \beta_F$.

On montre de même que $y'_R = \theta + \delta_R - \beta_R$

$$\text{Enfin, } \theta' = \frac{d\theta}{dx_{G_2}} = \frac{\frac{dy_R}{dx_{G_2}} - \frac{dy_F}{dx_{G_2}}}{2L} = \frac{y'_R - y'_F}{2L}.$$

Attention : le sujet propose l'opposé de ce résultat.

1.4.2 Asservissement de la variable de déplacement latéral y_F à une consigne $y_F^* = 0$

- Objectif

Justifier le choix du modèle du comportement en déplacement latéral y_F du robot assurant sa convergence à une valeur de consigne y_F^* et son réglage

Question 8 Par analogie avec un modèle temporel usuel d'ordre 2 à identifier, de paramètres caractéristiques ω_{0F} , ξ_F et K_F :

- en justifiant la réponse, tracer l'allure de l'évolution de $y_F(x_{G_2})$ imposée par le modèle 1 (I.7) pour une consigne $y_F^* = 0$ en fonction de x_{G_2} , lorsque $y_F(x_{G_2} = 0) = y_{F0} > 0$ (y_{F0} étant une valeur constante), $y_F'(x_{G_2} = 0) = 0$, $K_{pF} = \frac{K_{dF}^2}{4}$ et $K_{dF} \simeq 5$;
- préciser sur le graphe les éléments caractéristiques de la courbe tracée pour $x_{G_2} = 0$;
- justifier pourquoi le paramètre K_{pF} a été réglé de telle sorte que $K_{pF} = \frac{K_{dF}^2}{4}$, compte-tenu du contexte de fonctionnement du robot enjambeur.

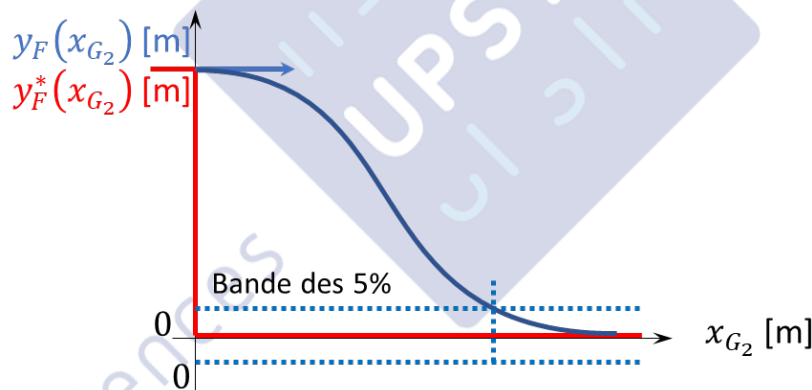
Identification des caractéristiques ω_{0F} , ξ_F et K_F

En utilisant l'analogie avec un modèle temporel, on a $s'' + 2\xi_F\omega_{0F}s' + \omega_{0F}^2s = K_F e\omega_0^2$ à identifier avec la relation $y_F'' + K_{dF}y_F' + K_{pF}y_F = K_{pF}y_F^*$. On a alors $\omega_{0F}^2 = K_{pF}$, $K_{pF} = K_F\omega_{0F}^2$ soit $K_F = 1$. De plus, $2\xi_F\omega_{0F} = K_{dF}$ soit $\xi_F = \frac{K_{dF}}{2\omega_{0F}} = \frac{K_{dF}}{2\sqrt{K_{pF}}}$.

On a donc $\omega_{0F} = \sqrt{K_{pF}}$, $\xi_F = \frac{K_{dF}}{2\sqrt{K_{pF}}}$ et $K_F = 1$.

Tracer de l'allure de l'évolution de $y_F(x_{G_2})$ En utilisant les valeurs proposées, $\xi_F = \frac{K_{dF}}{2\sqrt{K_{pF}}} \frac{K_{dF}}{2} = 1$

et $\omega_{0F} = \sqrt{\frac{5^2}{4}} = \frac{5}{2}$. L'allure de l'évolution de $y_F(x_{G_2})$ est donc celle d'un second ordre amorti. Il y a donc une tangente horizontale à l'origine (ce qui est confirmé par le fait qu'il soit indiqué que $y_F'(x_{G_2} = 0) = 0$).



Justifier que $K_{pF} = \frac{K_{dF}^2}{4}$ En ayant fait ce choix pour K_{pF} , on assure un $\xi = 1$ donc un système le plus rapide possible sans dépassement. Cela permet d'éviter les oscillations autour de la trajectoire cible et donc de limiter les problèmes de glissement.

Question 9 Expliquer ce que représente $x_{F_{r5\%}}$ dans le cas de ce modèle spatial (I.8), analogue du temps de réponse à 5% dans le cas d'un modèle temporel. Préciser son unité. Compte-tenu de la valeur prise précédemment pour le réglage de K_{pF} , donner alors une expression littérale approchée de $x_{F_{r5\%}}$ en fonction de K_{dF} . Effectuer l'application numérique et conclure sur la pertinence de la valeur numérique de K_{dF} , vu le contexte d'utilisation du robot enjambeur.

$x_{F_{r5\%}}$ représente la distance que met le robot à être à une distance inférieure à 5% de la trajectoire. Elle s'exprime en mètres (si toutes les distance sont en mètres).

D'après l'abaque du temps de réponse à 5% pour un système d'ordre 2, on a $\omega_{0F}x_{F_{r5\%}} \simeq 5$ pour $\xi_F = 1$ (ce résultat ne me semble pas exigible dans le programme de PCSI-PSI). On a alors $x_{F_{r5\%}} \simeq \frac{5}{\omega_{0F}}$

$$\simeq \frac{5}{\sqrt{K_{pF}}} \simeq \frac{5 \times 2}{K_{dF}} \simeq 2 \text{ m. Cela semble réaliste compte-tenu de la longueur des rangs de vignes.}$$

1.4.3 Génération des consignes d'orientation δ_F^* et δ_R^* des roues médianes

- Objectif -

Établir deux relations permettant de déterminer la consigne d'orientation de la roue médiane avant δ_F^* et celle de la roue médiane arrière δ_R^* (figure A).

Question 10 À partir des relations issues du modèle cinématique étendu du robot (figure A), de la relation issue du modèle 1 choisi pour le comportement de $y_F(x_{G_2})$, et en sachant que les relations (E1) et (E2) trouvées à la question 1 permettent de considérer que les valeurs des variables y_F et y_R sont connues si y_{G_2} et θ le sont aussi (trajectoire \mathcal{T} connue) :

- déterminer l'expression de y_F'' , en fonction de δ_F , β_F , δ_R , β_R et L . Pour ce faire, commencer par exprimer y_F'' à partir de la relation (I.4), en tenant compte de l'hypothèse relative aux valeurs de $\delta_F' - \beta_F'$;
- en tenant compte du point de fonctionnement souhaité, déterminer ensuite l'expression de δ_F de la roue médiane avant 5, en utilisant la relation (I.7), puis les relations (I.4) et (E3) ;
- en identifiant précisément les variables qui sont mesurées et estimées, et en supposant que les dispositifs d'orientation des roues fonctionnent parfaitement et assurent ainsi que $\delta_F^* = \delta_F$, montrer alors que l'expression de δ_F^* est de la forme $\delta_F^* = C_1\hat{\beta}_F + C_2(\delta_R - \hat{\beta}_R) + C_3y_F + C_4y_R$;
- donner les expressions littérales de C_1 , C_2 , C_3 et C_4 en fonction de K_{dF} , K_{pF} et L .

Déterminer l'expression de y_F'' , en fonction de δ_F , β_F , δ_R , β_R et L

D'après la relation (I.4), on a : $y_F' = \theta + \delta_F - \beta_F$. On alors $y_F'' = \frac{dy_F'}{dx_{G_2}} = \theta' + \delta_F' - \beta_F'$. En utilisant l'hypothèse $\delta_F' - \beta_F' \simeq 0$, on a alors $y_F'' = \theta'$ et donc $y_F'' = \frac{y_F' - y_R'}{2L}$ (I.6). On utilise alors (I.4) et (I.5) et donc $y_F'' = \frac{\theta + \delta_F - \beta_F - \theta - \delta_R + \beta_R}{2L} = \frac{\delta_F - \beta_F - \delta_R + \beta_R}{2L}$.

En prenant compte du résultat de la question 7, on a $y_F'' = \frac{-\delta_F + \beta_F + \delta_R - \beta_R}{2L}$. C'est cette expression que nous conserverons pour la suite.

Déterminer ensuite l'expression de δ_F

D'après (I.7), on a $y_F'' + K_{dF}y_F' + K_{pF}y_F = K_{pF}y_F^*$. En utilisant (I.4), $y_F'' + K_{dF}(\theta + \delta_F - \beta_F) + K_{pF}y_F = K_{pF}y_F^*$. Enfin en utilisant (E3), $y_F'' + K_{dF}\left(\frac{y_R - y_F}{2L} + \delta_F - \beta_F\right) + K_{pF}y_F = K_{pF}y_F^*$.

$$\text{On a donc } K_{dF}\delta_F = K_{pF}y_F^* - y_F'' - K_{pF}y_F - K_{dF}\left(\frac{y_R - y_F}{2L} - \beta_F\right)$$

$$\Leftrightarrow \delta_F = \frac{K_{pF}}{K_{dF}}y_F^* - \frac{y_F''}{K_{dF}} - \frac{K_{pF}}{K_{dF}}y_F - \left(\frac{y_R - y_F}{2L} - \beta_F\right).$$

Montrer que $\delta_F^* = C_1\hat{\beta}_F + C_2(\delta_R - \hat{\beta}_R) + C_3y_F + C_4y_R$

$$\text{En utilisant les relations précédentes, on a } \delta_F = \frac{K_{pF}}{K_{dF}}y_F^* - \frac{1}{K_{dF}}\left(\frac{-\delta_F + \delta_R - \beta_R + \beta_F}{2L}\right) - \frac{K_{pF}}{K_{dF}}y_F - \left(\frac{y_R - y_F}{2L} - \beta_F\right).$$

On peut montrer que $\hat{\beta}_F = \beta_F$ et $\hat{\beta}_R = \beta_R$.

$$(\text{En effet : } \hat{\beta}_F = \theta + \delta_F - \frac{\dot{y}_F}{V_{G_2}} = \frac{y_R - y_F}{2L} + \delta_F - \frac{\dot{y}_F}{V_{G_2}} = \frac{y_R - y_F}{2L} + \delta_F - \frac{V_{G_2}(\theta + \delta_F - \beta_F)}{V_{G_2}} = \frac{y_R - y_F}{2L} -$$

$$\left(\frac{y_R - y_F}{2L} - \beta_F\right) = \beta_F).$$

$$\text{On a donc } \delta_F = \frac{K_{pF}}{K_{dF}} y_F^* - \frac{1}{K_{dF}} \left(\frac{-\delta_F + \delta_R - \hat{\beta}_R + \hat{\beta}_F}{2L} \right) - \frac{K_{pF}}{K_{dF}} y_F - \frac{y_R - y_F}{2L} + \hat{\beta}_F$$

$$\Leftrightarrow \delta_F = \frac{K_{pF}}{K_{dF}} y_F^* - \frac{1}{2LK_{dF}} (-\delta_F + \delta_R - \hat{\beta}_R + \hat{\beta}_F) - \frac{K_{pF}}{K_{dF}} y_F - \frac{y_R}{2L} + \frac{y_F}{2L} + \hat{\beta}_F$$

$$\Leftrightarrow \delta_F = \frac{K_{pF}}{K_{dF}} y_F^* + \frac{\delta_F}{2LK_{dF}} + \left(1 - \frac{1}{2LK_{dF}}\right) \hat{\beta}_F + \frac{1}{2LK_{dF}} (-\delta_R + \hat{\beta}_R) + \left(\frac{1}{2L} - \frac{K_{pF}}{K_{dF}}\right) y_F - \frac{y_R}{2L}$$

$$\Leftrightarrow \delta_F \left(1 - \frac{1}{2LK_{dF}}\right) = \frac{K_{pF}}{K_{dF}} y_F^* + \left(1 - \frac{1}{2LK_{dF}}\right) \hat{\beta}_F + \frac{1}{2LK_{dF}} (-\delta_R + \hat{\beta}_R) + \left(\frac{1}{2L} - \frac{K_{pF}}{K_{dF}}\right) y_F - \frac{y_R}{2L}$$

$$\Leftrightarrow \delta_F = \frac{2LK_{pF}}{2LK_{dF} - 1} y_F^* + \hat{\beta}_F + \frac{1}{2LK_{dF} - 1} (-\delta_R + \hat{\beta}_R) + \frac{K_{dF} - 2LK_{pF}}{2LK_{dF} - 1} y_F - \frac{K_{dF}}{2LK_{dF} - 1} y_R$$

$$\Leftrightarrow \delta_F = \hat{\beta}_F + \frac{1}{1 - 2LK_{dF}} (\delta_R - \hat{\beta}_R) + \frac{K_{dF} - 2LK_{pF}}{2LK_{dF} - 1} y_F + \frac{K_{dF}}{1 - 2LK_{dF}} y_R + \frac{2LK_{pF}}{2LK_{dF} - 1} y_F^*$$

En faisant l'hypothèse que $y_F^* = 0$ (hypothèse qu'il semblerait manquer dans le sujet), on a $C_1 = 1$, $C_2 = \frac{1}{1 - 2LK_{dF}}$, $C_3 = \frac{K_{dF} - 2LK_{pF}}{-1 + 2LK_{dF}}$, $C_4 = \frac{K_{dF}}{1 - 2LK_{dF}}$.

2 Optimisation énergétique du mouvement de retrait d'une lame déca-vaillonneuse, choix d'un actionneur et conception de sa commande

- Objectif -

Adapter un outil intercep non motorisé utilisé avec les tracteurs traditionnels afin de concevoir un outil avec motorisation électrique pour le robot Bakus.

2.1 Modélisation du mouvement des lames, tracé numérique des relations entre paramètres géométriques d'entrée et de sortie puis estimation de la puissance épargnée

- Objectif -

Choisir un mécanisme de transformation du mouvement qui permette de diminuer d'au moins 15 % la puissance de cette action mécanique lorsque l'outil est en position moyenne de retrait par rapport à la position déployée : $\Delta\%P_{\text{sol} \rightarrow 4/0} > 15\%$ (II.1).

Question 11 Écrire sous forme vectorielle la relation de fermeture de la chaîne géométrique liée au modèle de la figure E et donner les équations scalaires associées en projection sur les vecteurs de la base \mathcal{B}_2 .

En se plaçant dans le quadrilatère O_3O_1AB et en écrivant la fermeture géométrique, on a $\overrightarrow{O_3O_1} + \overrightarrow{O_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO_3} = \vec{0} \Leftrightarrow -a\vec{x}_2 + b\vec{y}_2 - l_1\vec{x}_1 - l_4\vec{y}_4 + l_3\vec{x}_3 = \vec{0}$. On projette l'expression dans \mathcal{B}_2 et on a $-a\vec{x}_2 + b\vec{y}_2 - l_1(\cos\theta_{10}\vec{x}_2 + \sin\theta_{10}\vec{y}_2) - l_4(\cos\theta_{40}\vec{y}_2 - \sin\theta_{40}\vec{x}_2) + l_3(\cos\theta_{30}\vec{x}_2 + \sin\theta_{30}\vec{y}_2) = \vec{0}$.

$$\text{On a donc : } \begin{cases} -a - l_1 \cos \theta_{10} + l_4 \sin \theta_{40} + l_3 \cos \theta_{30} = 0 \\ b - l_1 \sin \theta_{10} - l_4 \cos \theta_{40} + l_3 \sin \theta_{30} = 0 \end{cases}.$$

Question 12 En exprimant les fonctions f_1 , f_2 et f_3 en fonction des paramètres l_1 , l_3 , l_4 , a , b , $\cos\theta_{10}$ et $\sin\theta_{10}$, montrer qu'il est possible d'obtenir à partir des équations de la question précédente une seule équation de la forme $f_1(\theta_{10}) - f_2(\theta_{10}) \sin(\theta_{40}) - f_3(\theta_{10}) \cos(\theta_{40}) = 0$.

Partant de la question précédente, éliminons θ_{30} : $\begin{cases} a + l_1 \cos \theta_{10} - l_4 \sin \theta_{40} = l_3 \cos \theta_{30} \\ -b + l_1 \sin \theta_{10} + l_4 \cos \theta_{40} = l_3 \sin \theta_{30} \end{cases}$. En élevant les deux expressions au carré et en sommant, on obtient : $(a + l_1 \cos \theta_{10} - l_4 \sin \theta_{40})^2 + (-b + l_1 \sin \theta_{10} + l_4 \cos \theta_{40})^2 = l_3^2$ et donc :

$$a^2 + l_1^2 \cos^2 \theta_{10} + l_4^2 \sin^2 \theta_{40} + 2al_1 \cos \theta_{10} - 2al_4 \sin \theta_{40} - 2l_1 l_4 \cos \theta_{10} \sin \theta_{40} + b^2 + l_1^2 \sin^2 \theta_{10} + l_4^2 \cos^2 \theta_{40} - 2bl_1 \sin \theta_{10} - 2bl_4 \cos \theta_{40} + l_1 \sin \theta_{10} l_4 \cos \theta_{40} = l_3^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 2al_1 \cos \theta_{10} - 2al_4 \sin \theta_{40} - 2l_1 l_4 \cos \theta_{10} \sin \theta_{40} + b^2 + l_1^2 + l_4^2 - 2bl_1 \sin \theta_{10} - 2bl_4 \cos \theta_{40} + l_1 \sin \theta_{10} l_4 \cos \theta_{40} = l_3^2$$

$$\Leftrightarrow -\sin \theta_{40} (2al_4 + 2l_1 l_4 \cos \theta_{10}) - \cos \theta_{40} (2bl_4 - l_1 \sin \theta_{10} l_4) + a^2 + 2al_1 \cos \theta_{10} + b^2 + l_1^2 + l_4^2 - 2bl_1 \sin \theta_{10} - l_3^2 = 0.$$

Au final : $\begin{cases} f_1(\theta_{10}) = a^2 + 2al_1 \cos \theta_{10} + b^2 + l_1^2 + l_4^2 - 2bl_1 \sin \theta_{10} - l_3^2 \\ f_2(\theta_{10}) = 2al_4 + 2l_1 l_4 \cos \theta_{10} \\ f_3(\theta_{10}) = 2bl_4 - l_1 \sin \theta_{10} l_4 \end{cases}$.

Question 13 En faisant l'hypothèse que quelle que soit la position de la lame $\vec{V}_{4/0}(B) \simeq V_{\max} \vec{x}_0$, exprimer sous forme littérale la puissance de l'action mécanique du sol sur l'outil dans son mouvement par rapport au sol 0 notée $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0}$ en fonction de F_{sol} , V_{\max} , α_4 et θ_{40} . Calculer alors la variation relative de cette puissance en pour cent notée $\Delta\% \mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0}$ entre la position moyenne de retrait ($\theta_{10} \simeq 0,3 \text{ rad}$) et la position déployée de l'intercep et conclure vis-à-vis de l'objectif de cette partie ($\Delta\% \mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0} > 15\%$).

Calcul de $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0}$

Par définition, on a $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0} = \{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow 4)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/0)\} = \left\{ \frac{\vec{R}_{\text{sol} \rightarrow 4}}{\mathcal{M}_{\text{sol} \rightarrow 4}(B)} \right\}_B \otimes \left\{ \frac{\vec{\Omega}_{4/0}}{\vec{V}_{4/0}(B)} \right\}_B$

$$= \left\{ \frac{-F_{\text{sol}} \vec{u}_4}{\vec{0}} \right\}_B \otimes \left\{ \frac{\dot{\theta}_{40} \vec{z}_0}{V_{\max} \vec{x}_0} \right\}_B = -F_{\text{sol}} \vec{u}_4 \cdot V_{\max} \vec{x}_0 = -F_{\text{sol}} \cdot V_{\max} \cos(\alpha_4 + \theta_{40}).$$

Variation relative de la puissance

Le calcul différentiel sur $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0}$ en fonction de θ_{40} seul paramètre variable ici donne : $d\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0} = F_{\text{sol}} V_{\max} \sin(\theta_{40} + \alpha_4) d\theta_{40}$.

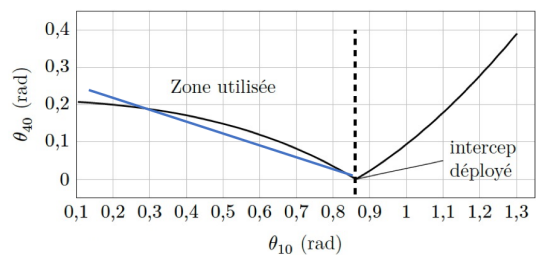
On obtient comme variation : $\Delta \mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0} = |F_{\text{sol}} V_{\max} \sin(\theta_{40} + \alpha_4)| \Delta \theta_{40} = |F_{\text{sol}} V_{\max} \sin(\theta_{40} + \alpha_4)| \frac{\Delta \theta_{40}}{\Delta \theta_{10}} \Delta \theta_{10}$.

Dans l'énoncé on demande de calculer la variation relative de cette puissance en pourcent notée $\Delta\% \mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0}$ que l'on peut interpréter par :

$$\Delta\% \mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0} = \frac{\Delta \mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0}}{\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0}(\theta_{10} = 0,3)} = \tan(\theta_{40} + \alpha_4) \Delta \theta_{40}.$$

Sur la courbe en relève : $\Delta \theta_{40} \approx 0,19 - 0 = 0,19 \text{ rad}$.

L'application numérique donne : $\Delta\% \mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/0} = \tan(0,19 + 0,65) \cdot 0,19 = 21\%$ ce qui est supérieur aux 15 % demandés par le cahier des charges.



2.2 Modélisation cinétique du mécanisme intercep, quantification de la dépense énergétique liée au retrait compte tenu des exigences du désherbage mécanique

- Objectif -

Ajouter, dimensionner et commander un actionneur électrique permettant d'assurer le mouvement de retrait puis le déploiement de la lame.

2.2.1 Expression de l'énergie cinétique du mécanisme intercep

- Objectif

Exprimer l'énergie cinétique du mécanisme intercep dans un référentiel galiléen en fonction du seul paramètre cinématique $\dot{\theta}_{40}$.

Question 14 Exprimer la projection du moment cinétique en G_4 du solide 4 dans son mouvement par rapport à 2 sur $\vec{z}_0 = \vec{z}_2$, notée $\overrightarrow{\sigma}_{4/2}(G_4) \cdot \vec{z}_2$, puis exprimer l'énergie cinétique du solide 4 dans son mouvement par rapport à 2, $\mathcal{E}_{c\ 4/2}$ en fonction de I_{zz} , $\dot{\theta}_{40}$, M_4 et $V_G = \left\| \overrightarrow{V}_{4/2}(G_4) \right\|$.

Expression du moment cinétique

On a en G_4 , centre d'inertie de la lame $\overrightarrow{\sigma}_{4/2}(G_4) \cdot \vec{z}_2 = \left(I(G_4, \text{lame}) \overrightarrow{\Omega}_{4/0} \right) \cdot \vec{z}_2 = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}_{G_4, B_4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_{40} \end{pmatrix}_{B_4}$.

$\vec{z}_2 = (-I_{xz}\vec{x}_4 - I_{yz}\vec{y}_4 + I_{zz}\vec{z}_4) \dot{\theta}_{40} \cdot \vec{z}_4 = \dot{\theta}_{40} I_{zz} \cdot \vec{z}_4$.

Expression de l'énergie cinétique Par définition, $\mathcal{E}_{c\ 4/2} = \frac{1}{2} \{ \sigma(4/2) \} \otimes \{ \mathcal{V}(4/2) \} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\overrightarrow{R}_{c\ 4/2}}{\overrightarrow{\sigma}_{4/2}(G_4)} \right\}_{G_4} \otimes \left\{ \frac{\overrightarrow{\Omega}_{4/2}}{\overrightarrow{V}_{4/2}(G_4)} \right\}_{G_4} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{M_4 \overrightarrow{V}_{4/2}(G_4)}{\overrightarrow{\sigma}_{4/2}(G_4)} \right\}_{G_4} \otimes \left\{ \frac{\dot{\theta}_{40} \vec{z}_2}{\overrightarrow{V}_{4/2}(G_4)} \right\}_{G_4} = \frac{1}{2} (M_4 V_G^2 + \dot{\theta}_{40}^2 I_{zz})$.

Question 15 Exprimer le vecteur vitesse du point G_4 fixe dans 4 dans son mouvement par rapport à 2, noté $\overrightarrow{V}_{4/2}(G_4)$, sous sa forme la plus simple.

Le point O_1 est fixe par rapport au solide 2 et le point G_4 est fixe par rapport au solide 4 on a donc,

$$\overrightarrow{V}_{4/2}(G_4) = \frac{d}{dt} [\overrightarrow{O_1 G_4}]_{B_2} = \frac{d}{dt} [-l_1 \vec{x}_1 + x_{G_4} \vec{x}_4 + y_{G_4} \vec{y}_4 + z_{G_4} \vec{z}_4]_{B_2}.$$

Par ailleurs, $\frac{d}{dt} [\vec{x}_1]_{B_2} = \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1$, $\frac{d}{dt} [\vec{x}_4]_{B_2} = \dot{\theta}_{40} \vec{y}_4$, $\frac{d}{dt} [\vec{y}_4]_{B_2} = -\dot{\theta}_{40} \vec{x}_4$ et $\frac{d}{dt} [\vec{z}_4]_{B_2} = \vec{0}$.

On a donc $\overrightarrow{V}_{4/2}(G_4) = -l_1 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 + x_{G_4} \dot{\theta}_{40} \vec{y}_4 - y_{G_4} \dot{\theta}_{40} \vec{x}_4$.

Question 16 En complément du programme de la figure 6, écrire une fonction Python `ktheta` qui prend en paramètre les tableaux `theta40` et `theta10` et renvoie un tableau image de la fonction $k_\theta(\theta_{40})$ telle que $\dot{\theta}_{10} = k_\theta(\theta_{40}) \dot{\theta}_{40}$.

On a $k_\theta = \frac{\dot{\theta}_{10}}{\dot{\theta}_{40}} = \frac{\frac{d\theta_{10}}{dt}}{\frac{d\theta_{40}}{dt}}$. On peut approximer k_θ par différence finie : $k_\theta \approx \frac{\frac{\Delta\theta_{10}}{\Delta t}}{\frac{\Delta\theta_{40}}{\Delta t}} \approx \frac{\Delta\theta_{10}}{\Delta\theta_{40}}$.

```
def ktheta(theta40, theta10):
    tktheta=[0]
    for i in range(1, len(theta40)):
        tktheta.append((theta40[i]-theta40[i-1])/(theta10[i]-theta10[i-1]))
    return tktheta
```

Question 17 Exprimer l'énergie cinétique du solide 4 dans son mouvement par rapport à 2, notée $\mathcal{E}_{c\ 4/2}$, en fonction de I_{zz} , $\dot{\theta}_{40}$, M_4 et $(d(\theta_{40}))^2$.

On a vu que $\mathcal{E}_{c\ 4/2} = \frac{1}{2} (m_4 V_G^2 + \dot{\theta}_{40}^2 I_{zz})$; donc $\mathcal{E}_{c\ 4/2} = \frac{1}{2} (M_4 (d(\theta_{40}))^2 \dot{\theta}_{40}^2 + \dot{\theta}_{40}^2 I_{zz})$.

Au final, $\mathcal{E}_{c\ 4/2} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_{40}^2 \left(M_4 (d(\theta_{40}))^2 + I_{zz} \right)$.

2.2.2 Implantation et choix de l'actionneur

- Objectif -

À partir de l'équation de mouvement du mécanisme intercep, identifier les cas extrêmes et choisir un actionneur.

Question 18 Exprimer sous forme littérale :

- la puissance des inter-efforts entre les solides 5 et 6 notée $\mathcal{P}_{5 \leftrightarrow 6}$ en fonction de F_{mot} et $\dot{\lambda}$;
- la puissance de l'action mécanique du sol sur 4 dans son mouvement par rapport à 2 notée $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/2}$ en fonction de F_{sol} , θ_{10} , θ_{40} , l_1 , l_4 , θ_{41} et α_4 .

Puissance $\mathcal{P}_{5 \leftrightarrow 6}$

Par définition, $\mathcal{P}_{5 \leftrightarrow 6} = \{\mathcal{T}(5 \rightarrow 6)\} \otimes \{\mathcal{V}(6/5)\}$. On a $\{\mathcal{T}(5 \rightarrow 6)\} = \left\{ \frac{F_{\text{mot}} \vec{x}_5 + Y_{56} \vec{y}_5 + Z_{56} \vec{z}_5}{\vec{\mathcal{M}}_{5 \rightarrow 6}(V_2)} \right\}_{V_2}$ et $\{\mathcal{V}(6/5)\} = \left\{ \frac{\vec{0}}{\frac{d}{dt} [\vec{V}_1 \vec{V}_2]_{B_5}} \right\}_{V_2} = \left\{ \frac{\vec{0}}{\dot{\lambda} \vec{x}_5} \right\}_{V_2}$. On a donc $\mathcal{P}_{5 \leftrightarrow 6} = F_{\text{mot}} \dot{\lambda}$.

Puissance $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/2}$

Par définition, on a $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/2} = \{\mathcal{T}(\text{sol} \rightarrow 4)\} \otimes \{\mathcal{V}(4/2)\} = \left\{ \frac{\vec{R}_{\text{sol} \rightarrow 4}}{\vec{\mathcal{M}}_{\text{sol} \rightarrow 4}(G_4)} \right\}_{G_4} \otimes \left\{ \frac{\vec{\Omega}_{4/2}}{\vec{V}_{4/2}(G_4)} \right\}_{G_4}$
 $= \left\{ \frac{-F_{\text{sol}} \vec{u}_4}{\vec{0} + \vec{G}_4 \vec{B} \wedge -F_{\text{sol}} \vec{u}_4} \right\}_{G_4} \otimes \left\{ \frac{\dot{\theta}_{40} \vec{z}_0}{\vec{V}_{4/2}(G_4)} \right\}_{G_4} = \left\{ \frac{-F_{\text{sol}} \vec{u}_4}{(-l_4 \vec{y}_4 - x_{G_4} \vec{x}_4 - y_{G_4} \vec{y}_4 - z_{G_4} \vec{z}_4) \wedge -F_{\text{sol}} \vec{u}_4} \right\}_{G_4} \otimes \left\{ \frac{\dot{\theta}_{40} \vec{z}_0}{\vec{V}_{4/2}(G_4)} \right\}_{G_4}$
 $= -F_{\text{sol}} \vec{u}_4 \cdot \vec{V}_{4/2}(G_4) + ((-l_4 \vec{y}_4 - x_{G_4} \vec{x}_4 - y_{G_4} \vec{y}_4 - z_{G_4} \vec{z}_4) \wedge -F_{\text{sol}} \vec{u}_4) \cdot \dot{\theta}_{40} \vec{z}_0$
 En utilisant les propriétés du produit mixte, on a $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/2} = -F_{\text{sol}} \vec{u}_4 \cdot \vec{V}_{4/2}(G_4) + ((-l_4 \vec{y}_4 - x_{G_4} \vec{x}_4 - y_{G_4} \vec{y}_4) \wedge -F_{\text{sol}} \vec{u}_4) \cdot \dot{\theta}_{40} \vec{z}_0$.

Par suite $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/2} = -F_{\text{sol}} \vec{u}_4 \cdot (-l_1 \dot{\theta}_{10} \vec{y}_1 + x_{G_4} \dot{\theta}_{40} \vec{y}_4 - y_{G_4} \dot{\theta}_{40} \vec{x}_4) + ((l_4 \vec{y}_4 + x_{G_4} \vec{x}_4 + y_{G_4} \vec{y}_4) \wedge \vec{u}_4) \cdot F_{\text{sol}} \dot{\theta}_{40} \vec{z}_0$
 $= -F_{\text{sol}} \left(-l_1 \dot{\theta}_{10} \cos \left(-\alpha_4 - \theta_{40} + \frac{\pi}{2} + \theta_{10} \right) + x_{G_4} \dot{\theta}_{40} \sin \alpha_4 - y_{G_4} \dot{\theta}_{40} \cos \alpha_4 \right) + (\sin \alpha_4 x_{G_4} - \cos \alpha_4 (l_4 + y_{G_4})) \cdot F_{\text{sol}} \dot{\theta}_{40}$
 $F_{\text{sol}} \dot{\theta}_{40} = -F_{\text{sol}} l_1 \dot{\theta}_{10} \sin(\theta_{10} - \alpha_4 - \theta_{40}) - l_4 F_{\text{sol}} \dot{\theta}_{40} \cos \alpha_4$.

En réalisant une fermeture angulaire, $\theta_{41} = \theta_{40} - \theta_{10}$ et $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/2} = F_{\text{sol}} l_1 \dot{\theta}_{10} \sin(\theta_{41} + \alpha_4) - l_4 F_{\text{sol}} \dot{\theta}_{40} \cos \alpha_4$.

Question 19 Exprimer la masse équivalente M_{eq} en fonction de I_{zz} , M_4 , $d(\theta_{40})$ et $k(\theta_{40})$ telle que l'énergie cinétique de l'ensemble $\{1+4+5+6\}$ dans son mouvement par rapport à 2 soit égale à $\frac{1}{2} M_{eq} \dot{\lambda}^2$.

Les masses et les inerties des solides 1, 5 et 6 étant négligeables, $\mathcal{E}_{c\ 1+4+5+6/2} = \mathcal{E}_{c\ 4/2} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_{40}^2 (M_4 (d(\theta_{40}))^2 + I_{zz})$ (Question 14).

On a alors $\mathcal{E}_{c\ 4/2} = \frac{1}{2} (k_{\lambda}(\theta_{40}))^2 \dot{\lambda}^2 (M_4 (d(\theta_{40}))^2 + I_{zz})$.

On a donc $M_{eq} = (k_{\lambda}(\theta_{40}))^2 (M_4 (d(\theta_{40}))^2 + I_{zz})$.

Question 20 En indiquant le système isolé et le théorème utilisé, exprimer littéralement F_{mot} en fonction de $\ddot{\lambda}$, M_{eq} , F_{sol} et $k_p(\theta_{40})$. Effectuer l'application numérique dans le pire des cas pour l'actionneur ($F_{\text{sol}} = F_{d\text{MAX}} = 5 \text{ kN}$), indiquer la position choisie pour la valeur de θ_{40} (figure 9) et l'état (1 ou 2 de la figure C) le plus critique.

Expression de F_{mot}

On isole $\{1+4+5+6\}$ et on applique le théorème de l'énergie cinétique.

Bilan des puissances extérieures :

- puissance de la pesanteur nulle (mouvement dans un plan orthogonal à \vec{g});
- puissance de l'action du sol sur la lame $\mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/2} = -F_{\text{sol}} k_p(\theta_{40}) \dot{\lambda}$.

Bilan des puissances intérieures :

- les liaisons sont parfaites. Elles ne dissipent donc pas de puissance;
- puissance $\mathcal{P}_{5 \leftrightarrow 6} = F_{\text{mot}} \dot{\lambda}$.

Calcul de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_{c\ 1+4+5+6/2} = \mathcal{E}_{c\ 4/2} = \frac{1}{2} M_{\text{eq}} \dot{\lambda}^2$.

On applique le théorème de l'énergie cinétique, et on obtient : $\frac{d\mathcal{E}_{c\ 4/2}}{dt} = \mathcal{P}_{5 \leftrightarrow 6} + \mathcal{P}_{\text{sol} \rightarrow 4/2} \Leftrightarrow M_{\text{eq}} \dot{\lambda} \ddot{\lambda} = F_{\text{mot}} \dot{\lambda} - F_{\text{sol}} k_p(\theta_{40}) \dot{\lambda} \Leftrightarrow M_{\text{eq}} \ddot{\lambda} = F_{\text{mot}} - F_{\text{sol}} k_p(\theta_{40})$ ($\dot{\lambda} \neq 0$).

Au final, $F_{\text{mot}} = M_{\text{eq}} \ddot{\lambda} + F_{\text{sol}} k_p(\theta_{40})$.

Application numérique

Dans le pire des cas, $F_{\text{sol}} = F_{d\text{MAX}} = 5 \text{ kN}$, $k_p(\theta_{40}) \simeq 3$ et $M_{\text{eq}} = 300 \text{ kg}$ pour $\theta_{40} = 0,21 \text{ rad}$.

- Dans l'état 1, asservissement du mouvement de retrait : $\ddot{\lambda} = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On a donc $F_{\text{mot}} = 300 \times 12 + 5000 \times 3 = 18\,600 \text{ N}$.
- Dans l'état 2, mouvement de déploiement en BO de vitesse : $\ddot{\lambda} = -10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On a donc $F_{\text{mot}} = 300 \times -10 + 5000 \times 3 = 12\,000 \text{ N}$.

L'état 1 est le plus critique.

Question 21 Conclure sur le choix de l'actionneur en proposant une des références du tableau 2.

En se basant sur l'effort maximal, le vérin 4 convient (avec une marge importante). Dans le pire des cas, l'accélération de 12 ms^{-2} dure $0,1 \text{ s}$. La vitesse atteinte est donc de $1,2 \text{ ms}^{-1}$; en se basant sur la vitesse maximale, le vérin 4 convient donc.

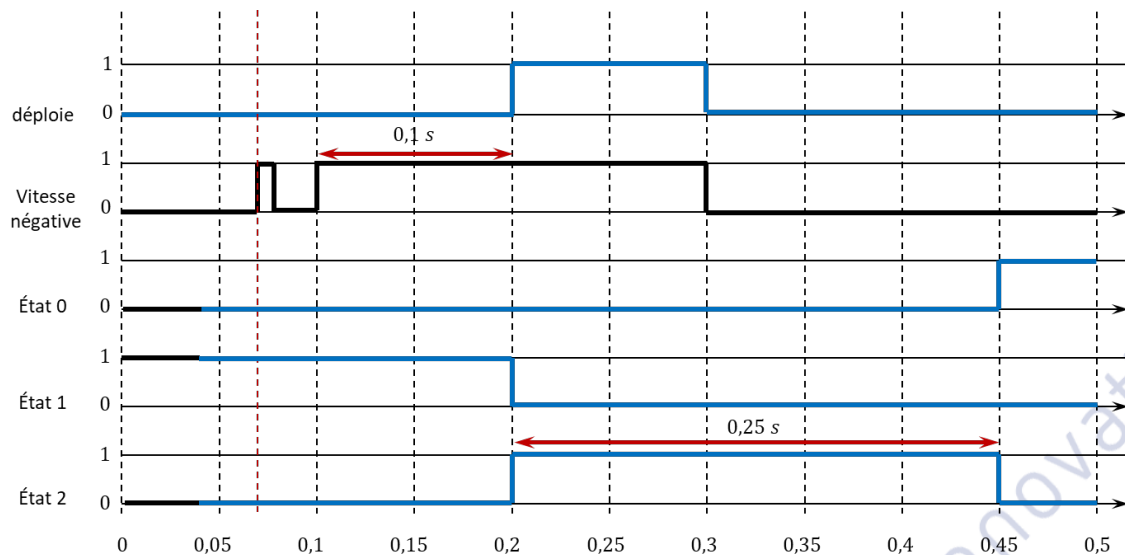
Tous les vérins ont la même course. Sous réserve que la course nécessaire au vérin soit inférieure à 400 mm , on choisit donc le vérin 4.

2.3 Commande de l'actionneur

- Objectif

Valider le pilotage séquentiel de l'actionneur et choisir un correcteur pour la boucle de vitesse vis-à-vis des exigences du désherbage mécanique.

Question 22 À partir du diagramme d'état de la figure C, compléter les chronogrammes de la figure D du document réponse. Justifier la pertinence de la prise en compte des deux événements « after(0,25 s) » et « after(0,1 s) » vis-à-vis de l'exigence 1.2 sur la protection des ceps en indiquant les problèmes qu'ils pallient. Justifier également que le choix d'une chaîne de transmission réversible permet d'assurer le déverrouillage de l'outil.



À 0,3 s, il semble que deux événements se produisent en même temps et ils correspondent à deux transitions de l'état "détection du retour de la barre palpeuse" : **after(0,1s)** et **!vitesse négative**.

Prise en compte des événements after

L'exigence 1.2 concerne la protection des ceps. Elles nécessitent :

- de déverrouiller les outils interceps si l'effort résistant à l'avancement dépasse un seuil F_d réglable entre 0,1 kN et 5 kN ;
- d'éviter les ceps en jouant sur le déploiement des lames.

Les deux événements « after(0,25 s) » et « after(0,1 s) » permettant alors de répondre à cette exigence :

- « after(0,1 s) » permet d'assigner la variable logique déploie à 1 si la vitesse reste négative plus de 0,1 s pour s'assurer qu'il y a bien un obstacle et éviter des fausses alertes ;
- « after(0,25 s) » permet de ne pas rester trop longtemps en mouvement de déploiement en BO (état 2) si la vitesse reste négative (suspicion de détection de cep). Si la vitesse redevient positive l'événement **!vitesse négative** se produit et on repasse en asservissement en vitesse sinon on bascule dans l'état déverrouillage.

Choix de la chaîne de transmission

La chaîne de transmission est réversible car le mode d'asservissement étant en vitesse et celle-ci pouvant être négative ou négative il faut pouvoir générer une commande bilatérale.

Question 23 Proposer, en justifiant la réponse, la forme du correcteur à choisir parmi K_P , $\frac{1}{T_i p}$, $K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}$ et $K_d \frac{1 + T_d p}{1 + \alpha T_d p}$ afin qu'un simple réglage manuel de la position de la barre palpeuse permette de satisfaire l'exigence 1.2.2 (il n'est pas demandé de régler les paramètres du correcteur choisi).

- On souhaite une erreur de trainage vis-à-vis d'une consigne en vitesse nulle, il faut donc que la classe de la FTBO de la boucle en vitesse soit au moins égale à 2. Il faut donc au moins une intégration supplémentaire dans la boucle ouverte. On peut donc choisir : $C(p) = \frac{1}{T_i p}$ ou $C(p) = K_i \frac{1 + T_i p}{T_i p}$.
- Avec ces deux types de correcteurs (intégral ou proportionnel intégral), on met en place une classe égale à 1 en amont de la perturbation, ainsi la précision de l'asservissement est insensible à une perturbation de type échelon ($-F_{sol} k_{pMAX}$) ou supposée constante.
- Ces deux types de correcteurs permettent de régler la bande passage de la boucle ouverte soit en jouant sur T_i pour le premier, soit sur K_i et/ou T_i pour le second.

- Un critère de stabilité non défini dans le sujet permettrait de choisir le second correcteur car il permettrait d'apporter un déphasage nul au delà d'une certaine pulsation et de permettre ainsi de régler correctement les marges de stabilité.

3 Synthèse

Question 24 À partir des courbes de la figure 11, issues de la simulation numérique effectuée :

- expliquer ce qui se passe physiquement au niveau du contact roues-sol au cours du temps ;
- analyser l'allure et l'amplitude des évolutions de δ_F et δ_R . Justifier si ce résultat est conforme à celui qui est attendu de la part du robot.
- La trajectoire à réaliser est une ligne droite suivant la direction \vec{x} .
- Après 3 m, les roues arrières tournent de $0,5^\circ$ dans le sens horaire (vers la droite). Les roues avant commencent à tourner dans le sens trigonométrique (vers la gauche). On a alors $\beta_F \simeq \delta_F$ et $\beta_R \simeq \delta_R$. On peut donc supposer que les roues avant adhèrent alors que les roues arrières glissent. Cette situation crée un écart du véhicule dans la direction $-\vec{y}$.
- Après 6 m, toutes les roues tournent dans le sens positif. Cela permet au véhicule de revenir sur sa trajectoire et cela au bout de 20 m.
- Il est alors nécessaire de remettre les roues droites. Au début de cette phase, les roues arrières glissent légèrement, puis toutes les roues tournent dans le sens horaires afin de revenir en position droite.

Durant la trajectoire l'amplitude de δ_F et δ_R est inférieure à 6° , ce qui est conforme avec l'hypothèse d'angles faibles. De plus, l'hypothèse $\delta'_F \simeq \delta'_R$ (page 7 du sujet) est vérifiée.

Question 25 À partir des courbes issues de la simulation numérique effectuée (figures 11 et 12) :

- vérifier si les hypothèses émises (relatives à la valeur des différents angles, ainsi qu'à leur variation le long de la trajectoire à suivre), afin de déterminer des lois simples pour obtenir les valeurs d'angle de consigne d'orientation des roues avant et arrière δ_F^* et δ_R^* , sont validées. Justifier quantitativement la réponse ;
- conclure quant à la validité des lois de génération de consigne d'orientation des roues proposées et des valeurs des paramètres K_{dF} , K_{pF} et K_{dR} retenues, vis-à-vis du cahier des charges en terme de précision de guidage du robot enjambeur ;
- conclure quant à l'aptitude du robot Bakus à pouvoir désherber mécaniquement sous un rang de vigne à l'aide d'un outil intercep, en tenant compte de l'exigence de guidage.
- Lorsque les roues arrières glissent, y_{G_2} devient négatif donc l'engin dévie sur la droite et θ est positif donc son orientation est dans le sens trigonométrique.
- Au bout de 25 s, θ et y_{G_2} sont nuls donc le véhicule est bien dirigés selon \vec{x}_0 .
- La stratégie de commande de l'engin semble donc fonctionner. Le centre de gravité reste à moins de 4,1 mm de la position médiane et avec $|\theta| < 0,1^\circ$ on obtient en position extrême $y_R = L \tan \theta$. Il faudrait la valeur de L pour conclure.
- La précision de guidage du robot enjambeur semble satisfaisante puisque $|y_{G_2}| < 4,1 \text{ mm}$ alors que le cahier des charges avec l'exigence 1.1.3 demandait $|y_{G_2}| < 2 \text{ cm}$ ainsi les valeurs des paramètres K_{dF} , K_{pF} et K_{dR} retenues semblent correctes.
- Ainsi le robot Bakus semble tout à fait capable de désherber mécaniquement sous un rang de vigne à partir des exigences proposées dans le sujet.