Malin comme un...blob

1 Introduction

L'espèce *Physarum polycephalum*, affectueusement surnommée "le blob", fascine les biologistes...et le grand public. On trouve ces charmantes créatures dans les sous-bois de nos régions. Ce n'est ni un champignon, ni un végétal, ni un animal. Bien qu'unicellulaire, il peut croître de plusieurs centimètres par heure. Il ne s'agit pas d'une colonie bactérienne mais bien d'une seule cellule de taille macroscopique. Cependant, cette super-cellule unique possède un grand nombre de noyaux dans son cytoplasme. Son mode de reproduction fait intervenir 720 genres différents ! Il possède toutefois un point commun avec les humains : il (ou elle, ou... ?) apprécie les champignons et les flocons d'avoine ! c'est donc un être hétérotrophe.

Pour faire connaissance, voici quelques références :
- Article wikipedia :
  `https://fr.wikipedia.org/wiki/Physarum_polycephalum`
- Video d'un documentaire d'Arte sur le blob :
  `https://youtu.be/B1DCzlWB1lM`

Récemment les chercheurs ont découvert que non seulement le blob était capable de "sentir" sa nourriture (sensibilité aux gradients chimiques) et d'orienter sa croissance vers elle, mais qu'il était également capable de développer des stratégies optimales pour interconnecter différentes sources de nourriture au gros de son "corps". Des scientifiques japonais ont ainsi montré que le blob pouvait retrouver la structure du réseau de chemin de fer japonais, considéré comme l'un des plus performant au monde, si de la nourriture était disposée sur une carte aux endroits figurant les grandes villes. Dans leur publication, ils proposent un modèle expliquant cet exploit. En plus de faire progresser notre connaissance de l'éthologie des blob, ces résultats sont un nouvel exemple de phénomène *d'émergence*. Comme pour une colonie de fourmis, des règles simples appliquées à un grand ensemble d'agents (ici les "ramifications" du blob) permettent de faire émerger un comportement collectif non-trivial.

Nous vous proposons d'implémenter et de jouer avec le modèle proposé par l'équipe du Professeur T. Nakagaki [1]. A défaut de vous sensibiliser à la diversité du vivant, ce sera l'occasion de voir comment résoudre un problème de calcul de débit sur un réseau complexe. Ceci est bien sûr utile en hydrodynamique, mais aussi en électrocinétique !

2 Présentation du model

On suppose qu'initialement le blob est un réseau de N noeuds tous équivalents. Ils sont numérotés de 0 à N. Ces noeuds sont reliés entre eux par des branches dans lesquelles circuleront les nutriments. Les branches ont des longueurs variables mais ont au départ toutes le même diamètre r. Le débit Q_{ij} dans la branche reliant le noeud i au noeud j est donné par la loi de Poiseuille :

$$Q_{ij} = \frac{\pi r^4}{8\eta L_{ij}}(p_j - p_i) = \frac{D_{ij}}{L_{ij}}(p_j - p_i) \tag{1}$$

où, L_{ij} est la longueur de la branche, η est la viscosité du liquide, p_j et p_i les pressions au niveau des noeuds j et i. Au niveau du noeud i, le débit est positif lorsque le fluide va vers celui-ci. Comme la viscosité est la même partout, on introduit la conductivité D_{ij} comme indiqué dans la formule.

En certains noeuds, on place des sources et des puits de nutriment. Si le noeud k est une source, $\sum_j Q_{kj} = I_k < 0$. Ici I_k est le débit total sortant du noeud (donc négatif). La somme court sur les noeuds j

1. A. Tero *et al.*, Science **327** p 439-432

directement reliés au noeud k. De même, si le noeud l est un puits, $\sum_j Q_{lj} = I_l > 0$. Pour les autres noeuds i, la conservation du débit s'écrit : $\sum_j Q_{ij} = I_i = 0$. Enfin, tout ce qui rentre dans le réseau doit en resortir. Ceci conduit à la relation : $\sum_k I_k + \sum_l I_l = 0$.

On remarque qu'il est alors possible de déterminer les pressions p_i de tous les noeuds du réseau en résolvant un système de N équations à N inconnues. Sous une forme matricielle, ce système s'écrit $AP = I$ où A est une matrice $(N \times N)$ (à déterminer !), P un vecteur à N dimensions dont la composante i est la pression p_i au niveau du noeud i, et I est un vecteur à N dimensions dont chaque composante i est le débit total I_i au niveau du noeud i. En résolvant ce système on obtient toutes les pressions, et ainsi on peut calculer les débits Q_{ij} dans chaque branche, à l'aide de la loi de Poiseuille.

Le "modèle du blob" fait intervenir l'hypothèse suivante. Le rayon r de chaque branche évolue au cours du temps sous l'effet de deux phénomènes. Spontanément, le rayon d'une branche tend à diminuer avec le temps. En revanche si un débit Q_{ij} non nul s'écoule dans la branche, son rayon est non seulement stabilisé, mais il sera d'autant plus grand que le débit sera élevé (jusqu'à un certain point). Plus précisément, la conductivité D_{ij} évolue avec le temps t de la manière suivante :

$$\frac{dD_{ij}}{dt} = f(Q_{ij}) - \frac{D_{ij}}{\tau} \tag{2}$$

Avec τ, le temps caractéristique de disparition d'une branche et f une fonction modélisant la réponse de la branche au débit la traversant :

$$f(Q) = \frac{|Q|^\gamma}{1 + |Q|^\gamma} \tag{3}$$

3 Conseils

On supposera qu'au début du problème le blob forme un réseau "serré" de noeuds (voir l'exemple de la figure 2). On peut démarrer de la manière suivante : chaque noeud i est relié à 4 voisins j (à gauche, à droite, en haut, en bas). On peut supposer que les noeuds sont disposés suivant une grille carré, puis que leur position exacte est choisie aléatoirement au voisinage des points de cette grille. Les distances L_{ij} sont alors potentiellement toutes différentes. En revanche, initialement, les conductivités D_{ij} sont toutes les mêmes : $D_{ij} = 1$.

1. On suppose que $\tau = 1$ et $\gamma = 1.8$. Commencez par analyser le comportement de D_{ij} pour une seule branche, en fonction du temps. Comment évolue $D_{ij}(t)$ si le débit Q_{ij} est nul ? A quoi ressemble la fonction $f(Q)$? Vers quelle valeur tend $D_{ij}(t)$ lorsque le débit est non nul ?
2. Vous pourrez créer ensuite des fonctions python destinées à générer un réseau comportant $N = n \times n$ noeuds comme indiqué précédemment, puis à le représenter graphiquement (noeuds mais aussi branche). On peut imaginer qu'une branche sera tracée avec un trait d'autant plus épais que le débit dans celle-ci sera important.
3. Ecrire des fonctions résolvant le système d'équations donnant les pressions aux différents noeuds, puis donnant le débit dans chaque branche. Attention, lorsque vous chercherez à écrire la matrice A, les noeuds sur les bords n'ont que deux (coins du réseau) ou trois (bords du réseau) voisins. Vous pourrez tester les mérites des fonctions de résolution `np.linalg.solve` et `np.linalg.lstsq`. Pour tester votre technique de résolution, choisir parmi les noeuds une source k et un puits l de telle sorte que $I_l = -I_k = 1$. Déterminer les débits dans tout le réseau.
4. Vous êtes maintenant prêts à mettre en place le modèle du Blob ! Sur un réseau, on choisit des noeuds qui seront les sources et les puits. A chaque pas de temps $dt << \tau$, on calcule la pression et le débit en chaque noeud et chaque branche du réseau respectivement. Ces débits sont utilisés pour calculer le changement de conductivité des branches pour le pas de temps suivant :

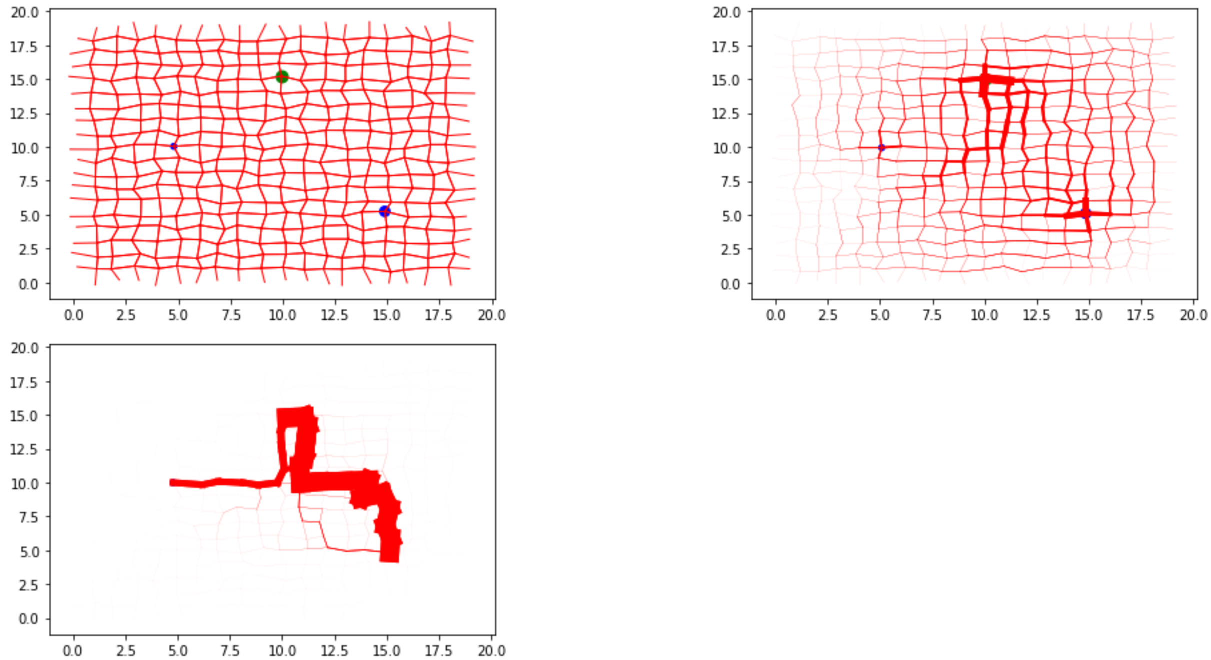

FIGURE 1 – Evolution du Blob en présence de deux sources (points bleu) et d'un puits (point vert) de nourriture. Chaque trait rouge représente une branche du réseau. L'épaisseur du trait est proportionnelle au débit traversant la branche. En haut : Situation initiale. Milieu : après 100 intérations. Bas : Après 1000 intérations.

$$D_{ij}(t+dt) \approx D_{ij}(t) + (f(Q_{ij}) - \frac{D_{ij}(t)}{\tau})dt \tag{4}$$

Le processus est ensuite itéré un grand nombre de fois.

Pour aller au delà :

- Vous pouvez essayer de voir ce qu'il se passe avec plusieurs sources et plusieurs puits.
- Quelle sera l'influence de τ ? de γ ? des débits imposés ?
- Vous pouvez ensuite vous rapprocher du modèle réellement développé par les chercheurs japonais. Dans la réalité, la nourriture est utilisée par l'ensemble du blob, il n'y a donc pas de "puits" mais que des sources de nutriments. Pour modéliser cet aspects, les chercheurs ont procédé ainsi. On choisit K noeuds dans le réseau (les sources de nourriture). A chaque pas de temps, on tire au hasard un de ces noeuds pour être une source et un autre pour être un puits. On calcule ensuite le débit partout et on fait évoluer en conséquence la conductivité.
- vous pouvez essayer d'autres formes de maillages (triangulation de Delaunay...)

4 Référent

Olivier Guilbaud, olivier.guilbaud@u-psud.fr