

# Sur les valeurs du polynôme de Deuring modulo p

Pierre Chrétien

Janvier 2026

## 1 Position du problème

Soit  $p \geq 3$  premier. Soit

$$E_\lambda : y^2 = x(x - \lambda)(x - 1), \quad \lambda \in \mathbb{F}_p \setminus \{0, 1\},$$

une courbe elliptique sous forme de Legendre. Il est bien connu (voir [Sil09], Theorem V.4.1) que  $E_\lambda$  est supersingulièr si et seulement si  $\lambda$  est racine de

$$H_p(x) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^2 x^i = 0, \quad \text{où } m = \frac{p-1}{2}.$$

Néanmoins, la répartition des valeurs de  $H_p(x)$ ,  $x \in \mathbb{F}_p$ , est remarquable de symétrie. En effet,  $H_p(\lambda)$  est intimement lié à la trace du Frobenius de  $E_\lambda/\mathbb{F}_p$  d'une part et  $|E_\lambda(\mathbb{F}_p)| \in 4\mathbb{Z}$  d'autre part (voir [AT02]).

Le but de ces notes personnelles est de clarifier en un seul document ces liens ainsi que d'expliquer certains arguments de [AT02]. En particulier on propose des versions complètes des preuves de [AT02] les plus élémentaires possibles, ne faisant pas référence à la 2-descente et en esquivant le plus possible la cohomologie galoisienne.

## 2 Comptage des points de $E$

Nous suivrons [Sil09] IV.4. Ici  $q = p^r$ ,  $p \geq 3$  et  $r \geq 1$ . Soit  $E/\mathbb{F}_q : y^2 = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , avec

$$E(\mathbb{F}_q) = \{(x, y) \in \mathbb{F}_q^2 \mid y^2 = f(x)\} \cup \{\mathcal{O}\}.$$

Déterminons une expression de  $|E(\mathbb{F}_q)|$ . Soit

$$\begin{aligned} \chi : \mathbb{F}_q &\longrightarrow \{-1, 0, 1\} \\ y &\longmapsto \begin{cases} -1 & \text{si } y \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2, \\ 0 & \text{si } y = 0, \\ 1 & \text{si } y \in (\mathbb{F}_q^\times)^2. \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit

$$|E(\mathbb{F}_q)| = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} (1 + \chi(f(x))) + 1.$$

En effet

- $f(x) \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2 \iff y^2 = f(x)$  n'a pas de solution sur  $\mathbb{F}_q$  ;
- $f(x) = 0 \iff y^2 = f(x)$  a une solution sur  $\mathbb{F}_q$  ;
- $f(x) \in (\mathbb{F}_q^\times)^2 \iff y^2 = f(x)$  a deux solutions distinctes sur  $\mathbb{F}_q$ .

De plus  $\mathbb{F}_q^\times$  est cyclique et

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{F}_q^\times &\longrightarrow (\mathbb{F}_q^\times)^2 \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

a pour noyau  $\text{Ker}(\psi) = \{x \in \mathbb{F}_q^\times \mid x^2 = 1\} = \{\pm 1\}$  ( car  $q > 2$  ). Donc  $|(\mathbb{F}_q^\times)^2| = \frac{q-1}{2}$  et  $(\mathbb{F}_q^\times)^2$  est l'unique sous-groupe d'ordre  $\frac{q-1}{2}$  de  $\mathbb{F}_q^\times = \langle \alpha \rangle$ , i.e.  $(\mathbb{F}_q^\times)^2 = \langle \alpha^2 \rangle$ .

**Proposition 1.**  $\forall y \in \mathbb{F}_q$ ,  $\chi(y) = y^{\frac{q-1}{2}}$  en tant qu'égalité dans  $\mathbb{F}_q$ .

**Preuve.** Tout d'abord,  $\chi(0) = 0 = 0^{\frac{q-1}{2}}$ .

Soit  $y \in \mathbb{F}_q^\times$ ,  $\chi(y) = 1 \iff y \in (\mathbb{F}_q^\times)^2 \iff y = (\alpha^2)^i$ ,  $i \in \mathbb{Z} \iff y^{\frac{q-1}{2}} = 1$ . Détaillons cette dernière équivalence.  
Soit  $y \in \mathbb{F}_q^\times$  tel que  $y = (\alpha^2)^i$ , alors  $y^{\frac{q-1}{2}} = \alpha^{(q-1)i} = 1$  car  $\langle \alpha \rangle = \mathbb{F}_q^\times$ . Réciproquement,

$$y^{\frac{q-1}{2}} = 1 \Rightarrow o(y) \mid \frac{q-1}{2},$$

donc  $y$  est dans l'unique sous-groupe d'ordre  $\frac{q-1}{2}$  du groupe cyclique  $\mathbb{F}_q^\times$ , c'est-à-dire  $y \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$ .

□

Ainsi,

$$|E(\mathbb{F}_q)| = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} (1 + \chi(f(x))) + 1 \quad \text{dans } \mathbb{Z}.$$

$$\boxed{|E(\mathbb{F}_q)| = 1 + q + \sum_{x \in \mathbb{F}_q} f(x)^{\frac{q-1}{2}} \quad (\dagger)} \quad \text{dans } \mathbb{F}_q.$$

**Proposition 2.**

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_q} x^i = \begin{cases} -1 & \text{si } q-1 \mid i, \\ 0 & \text{si } q-1 \nmid i. \end{cases}$$

**Preuve.** Vu que  $\mathbb{F}_q^\times$  est cyclique d'ordre  $q-1$ , il suffit d'étudier les cas  $0 \leq i < q-1$ . Les polynômes de Newton sont  $p_k = \sum_{j=1}^{q-1} x_j^k$  dans  $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_{q-1}]$  et  $\sigma_k$  les polynômes symétriques élémentaires dans  $\mathbb{F}_q[x_1, \dots, x_{q-1}]$ . Les relations de Newton donnent (voir [Fre01])

$$p_d = \sum_{k=1}^{d-1} (-1)^{k-1} \sigma_k p_{d-k} + (-1)^{d+1} d \sigma_d.$$

Puisque  $\mathbb{F}_q = \{x \in \overline{\mathbb{F}_p} \mid x^q - x = 0\}$ ,  $\mathbb{F}_q^\times = \{x \in \mathbb{F}_q \mid x^{q-1} - 1 = 0\}$ , le polynôme  $X^{q-1} - 1$  a pour fonctions symétriques élémentaires en ses racines  $\sigma_1 = \dots = \sigma_{q-2} = 0$ ,  $\sigma_{q-1} = (-1)^q$ .

Ici,  $p_1 = p_2 = \dots = p_{q-2} = 0$  et  $p_{q-1} = \sum_{x \in \mathbb{F}_q} x^{q-1} = 0^{q-1} + \sum_{x \in \mathbb{F}_q^\times} x^{q-1} = 0 + \sum_{x \in \mathbb{F}_q^\times} 1 = q-1 = -1$ .

□

Donc dans la relation  $(\dagger)$  seuls les monômes de  $f(x)^{\frac{q-1}{2}}$  de degré un multiple de  $q-1$  contribuent à la somme. Or  $\deg f(x) = 3$ , donc

$$\deg f(x)^{\frac{q-1}{2}} = \frac{3}{2}(q-1)$$

et les seuls multiples entiers de  $q-1$  dans  $[0; \frac{3}{2}(q-1)]$  sont 0 et  $q-1$ . Si on note  $\alpha$  le coefficient constant de  $f(x)^{\frac{q-1}{2}}$  alors  $\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \alpha = q\alpha = 0$  donc seul le monôme de degré  $q-1$  contribue dans la somme  $(\dagger)$ . Soit  $A_q$  le coefficient de  $x^{q-1}$  dans  $f(x)^{\frac{q-1}{2}}$ . La discussion précédente fournit

$$\boxed{|E(\mathbb{F}_q)| = 1 - A_q \quad \text{dans } \mathbb{F}_q}$$

**Proposition 3.** Pour tout  $r \in \mathbb{N}$ , en notant  $A_{p^r}$  le coefficient de  $x^{p^r-1}$  dans  $f(x)^{\frac{p^r-1}{2}}$ , on a

$$A_{p^{r+1}} = A_{p^r} \cdot A_p$$

**Preuve.** Soit

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{F}_q.$$

$$(*) \quad f(x)^{\frac{p^{r+1}-1}{2}} = f(x)^{\frac{p^{r+1}-p^r+p^r-1}{2}} = f(x)^{\frac{p^r(p-1)}{2}} \cdot f(x)^{\frac{p^r-1}{2}} = (f(x)^{\frac{p-1}{2}})^{p^r} \cdot f(x)^{\frac{p^r-1}{2}}$$

$$= \left[ \sum_{i=0}^{\frac{3}{2}(p-1)} \alpha_i x^i \right]^{p^r} \cdot \left[ \sum_{j=0}^{\frac{3}{2}(p^r-1)} \beta_j x^j \right] = \sum_{i=0}^{\frac{3}{2}(p-1)} \alpha_i^{p^r} x^{ip^r} \cdot \sum_{j=0}^{\frac{3}{2}(p^r-1)} \beta_j x^j$$

dont tout monôme est de la forme

$$\gamma_{ij} x^{ip^r+j}, \quad i \in \left[0, \frac{3}{2}(p-1)\right], j \in \left[0, \frac{3}{2}(p^r-1)\right]$$

Étudions les solutions  $i, j$  d'une équation de la forme

$$(**) \quad p^{r+1} - 1 = j + ip^r$$

On a

$$(**) \Rightarrow j = p^r(p - i) - 1 \Rightarrow j \equiv -1 \pmod{p^r}$$

or

$$j = kp^r - 1 \leq \frac{3}{2}(p^r - 1) \Rightarrow 2kp^r - 2 \leq 3p^r - 3 \Rightarrow 1 \leq p^r(3 - 2k) \Rightarrow 3 - 2k \geq 0 \Rightarrow k \leq \frac{3}{2}.$$

De plus

$$0 \leq j = kp^r - 1 \Rightarrow kp^r \geq 1 \Rightarrow k > 0$$

Donc  $k = 1$ , i.e.  $j = p^r - 1$ . L'équation  $(**)$  se lit alors

$$p^{r+1} - 1 = p^r - 1 + ip^r \Rightarrow p^{r+1} = p^r(i + 1) \Rightarrow i = p - 1.$$

En conclusion, dans le développement  $(*)$ , le coefficient  $A_{p^{r+1}}$  du monôme de degré  $p^{r+1} - 1$  de  $f(x)^{\frac{p^{r+1}-1}{2}}$  ne provient que du produit des monômes de degré  $p^r(p - 1)$  (resp.  $p^r - 1$ ) de  $f(x)^{\frac{p^r(p-1)}{2}}$  (resp.  $f(x)^{\frac{p^r-1}{2}}$ ). On a donc

$$A_{p^{r+1}} = A_{p^r} \cdot (A_p)^{p^r}.$$

□

**Proposition 4.** Pour  $q = p^n$

$$A_q = A_p^{\frac{q-1}{p-1}}.$$

### 3 Nombre de points rationnels d'une courbe sous forme de Legendre

#### 3.1 Le polynôme de Deuring

Nous nous restreignons désormais au cas  $q = p$  et

$$E_\lambda/\mathbb{F}_p : \quad y^2 = x(x - 1)(x - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{F}_p \setminus \{0, 1\}.$$

D'après le paragraphe précédent  $|E_\lambda(\mathbb{F}_p)| = 1 - A_p \pmod{p}$  où  $A_p$  est le coefficient de  $x^{p-1}$  de  $(x(x - 1)(x - \lambda))^{\frac{p-1}{2}}$ . Posons  $m = \frac{p-1}{2}$ . Le coefficient de  $x^{p-1}$  de  $[x(x - 1)(x - \lambda)]^m$  est le coefficient de  $x^m$  de  $(x - 1)^m(x - \lambda)^m$ . Or

$$(x - 1)^m(x - \lambda)^m = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i x^{m-i} \cdot \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-\lambda)^j x^{m-j}.$$

Les monômes de degré  $m$  de ce produit sont obtenus pour  $i$  et  $j$  tels que

$$m - i + m - j = m \iff m = i + j \iff j = m - i.$$

Le coefficient de  $x^m$  dans  $(x - 1)^m(x - \lambda)^m$  est donc

$$A_p = \sum_{j=0}^m \binom{m}{m-j} (-1)^{m-j} \binom{m}{j} (-\lambda)^j = (-1)^m \sum_{j=0}^m \binom{m}{j}^2 \lambda^j.$$

Donc

$$\boxed{|E_\lambda(\mathbb{F}_p)| = 1 - (-1)^m H_p(\lambda) \pmod{p}}$$

où

$$H_p(X) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^2 X^i, \quad m = \frac{p-1}{2}.$$

### 3.2 Cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$

La courbe  $E_\lambda$  décrit une courbe elliptique si et seulement si  $\lambda \notin \{0; 1\}$ . Ces deux valeurs sont donc traitées de manière indépendante dans ce paragraphe. On a  $H_p(0) = 1$ . Déterminons

$$H_p(1) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^2 \mod p$$

**Proposition 5.**

$$\sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^2 = \binom{2m}{m} = (-1)^m \mod p$$

**Preuve.** Soit  $m \in \mathbb{N}$ .

$$(1+x)^m(1+x)^m = (1+x)^{2m} \iff \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} x^i \cdot \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} x^j = \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} x^k.$$

Le coefficient de  $x^m$  de chaque membre vaut

$$\sum_{\substack{i+j=m \\ 0 \leq i, j \leq m}} \binom{m}{i} \binom{m}{j} = \binom{2m}{m} \iff \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \binom{m}{m-i} = \binom{2m}{m} \iff \sum_{i=0}^m \binom{m}{i}^2 = \binom{2m}{m}.$$

De plus

$$\binom{p-1}{i} \equiv (-1)^i \mod p, \quad 0 \leq i \leq p-1.$$

En effet,  $\binom{p-1}{0} = 1 \equiv (-1)^0 \mod p$  et  $\binom{p-1}{p-1} = 1 \equiv (-1)^{p-1} \mod p$ . De plus, pour  $0 \leq i \leq p-2$ ,

$$\binom{p-1}{i} + \binom{p-1}{i+1} = \binom{p}{i+1} \equiv 0 \mod p$$

D'où  $\binom{p-1}{i+1} \equiv -\binom{p-1}{i} \mod p$  qui donne  $\binom{p-1}{i} \equiv (-1)^i \mod p$ .

□

**Proposition 6.**

$$H_p(1) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \mod p$$

On notera

$$H_p(1) \equiv 1 \mod p \iff m \text{ est pair} \iff (-1)^{\frac{p-1}{2}} = 1 \iff -1 \in \mathbb{F}_p^2,$$

$$H_p(1) \equiv -1 \mod p \iff m \text{ est impair} \iff (-1)^{\frac{p-1}{2}} = -1 \iff -1 \notin \mathbb{F}_p^2.$$

## 4 Courbes de Legendre et isogénies

On se limitera désormais au cas  $p \geq 5$ . Le comportement remarquable de  $\{H_p(a), a \in \mathbb{F}_p \setminus \{0, 1\}\}$  et plus précisément de  $(H_p(2), H_p(3), \dots, H_p(p-1))$  provient de [AT02] et des résultats intermédiaires qui y sont exposés. On recopie le résultat principal de [AT02].

**Théorème 1.** Soit  $E/\mathbb{F}_q$  une courbe elliptique. On note  $q = r^2$ ,  $r \in \mathbb{N}$ , si  $q$  est un carré.

$$E \sim_{\mathbb{F}_q} E_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{F}_q \iff |E(\mathbb{F}_q)| \in 4\mathbb{Z} \setminus \{(r+1)^2\}$$

D'après le théorème d'isogénie de Tate,

$$E \sim_{\mathbb{F}_q} E_\lambda \iff |E(\mathbb{F}_q)| = |E_\lambda(\mathbb{F}_q)|$$

On a donc une description des ordres possibles pour  $|E_\lambda(\mathbb{F}_q)|$  quand  $\lambda$  varie. Nous allons nous contenter de suivre la preuve de [AT02] et d'expliquer les points délicats dans le cas qui nous intéresse, à savoir  $q = p$ . Nous allons donc prouver le corollaire suivant.

**Théorème 2.** Soit  $E/\mathbb{F}_p$  une courbe elliptique.

$$E \sim_{\mathbb{F}_p} E_\lambda, \quad \lambda \in \mathbb{F}_p \iff |E(\mathbb{F}_p)| \in 4\mathbb{Z}$$

## 4.1 Classes d'isomorphismes

Il est bien connu (voir [Sil09] III 1.7 et sa preuve)

$$E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \simeq_{\overline{\mathbb{F}}_p} E_\gamma : y^2 = x(x-1)(x-\gamma)$$

$$\iff \gamma \in \left\{ \lambda, 1-\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, 1-\frac{1}{1-\lambda} \right\}.$$

Ce qui donne une description complète des classes d'isomorphisme des courbes sous forme de Legendre. Néanmoins :

1. ce n'est une description que sur  $\overline{\mathbb{F}}_p$ ,
2. la relation d'isomorphisme (même sur  $\mathbb{F}_p$ ) n'est pas la bonne relation d'équivalence pour étudier  $|E(\mathbb{F}_p)|$ .

**Théorème 3** (Tate). Soient  $E_1, E_2$  des courbes elliptiques sur  $\mathbb{F}_q$ ,  $q = p^n$ . Il existe une isogénie  $\mathbb{F}_q$ -rationnelle  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2 \iff |E_1(\mathbb{F}_q)| = |E_2(\mathbb{F}_q)|$

La bonne relation d'équivalence à considérer pour le sujet qui nous intéresse est donc  $E_1 \sim_{\mathbb{F}_p} E_2$ . Nous avons cependant besoin de comprendre un certain nombre de relations provenant d'isomorphismes sur  $\mathbb{F}_p$ . Nous collectons dans ce paragraphe des résultats sur ce sujet. À partir de maintenant,  $E_1 \simeq E_2$  signifiera un isomorphisme  $\mathbb{F}_p$ -rationnel de courbes elliptiques  $E_1/\mathbb{F}_p, E_2/\mathbb{F}_p$ . De même,  $E_1 \sim E_2$  signifiera une isogénie  $\mathbb{F}_p$ -rationnelle de courbes elliptiques  $E_1/\mathbb{F}_p, E_2/\mathbb{F}_p$ . La courbe

$$E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{F}_p \setminus \{0; 1\}$$

a toute sa 2-torsion  $\mathbb{F}_p$ -rationnelle

$$E_\lambda[2] = \{(0, 0), (1, 0), (\lambda, 0), \mathcal{O}\} \subset E_\lambda(\mathbb{F}_p).$$

**Proposition 7.** Soit  $E/\mathbb{F}_p : y^2 = x(x-\alpha)(x-\beta)$  une courbe elliptique.

$$\exists \lambda \in \mathbb{F}_p \quad / \quad E \simeq E_\lambda \iff \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha-\beta)\} \cap \mathbb{F}_p^2 \neq \emptyset$$

Dans ce cas on dit que  $E$  est *Legendre isomorphe*.

**Preuve.** Remarquons que  $E/\mathbb{F}_p$  telle que  $E[2] \subset E(\mathbb{F}_p)$  a un modèle  $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ ,  $a, b, c \in \mathbb{F}_p$  et l'automorphisme

$$\begin{cases} x \mapsto x+a \\ y \mapsto y \end{cases}$$

ramène au modèle  $E : y^2 = x(x-\alpha)(x-\beta)$ ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_p$ . On traite donc dans cet énoncé des courbes elliptiques sur  $\mathbb{F}_p$  ayant leur 2-torsion rationnelle. On étudie les isomorphismes de courbes elliptiques suivants

$$\begin{aligned} y^2 &= x(x-\alpha)(x-\beta) \simeq y^2 = x(x-1)(x-\lambda) \\ \iff y^2 &= x^3 - (\alpha+\beta)x^2 + \alpha\beta x \simeq y^2 = x^3 - (1+\lambda)x^2 + \lambda x \end{aligned}$$

L'expression d'un isomorphisme de courbes elliptiques sous forme de Weiestrass est bien connue. Par exemple [Sil09] III, Table 3. fournit

$$\iff (S) : \begin{cases} u \cdot 0 = 2s \\ -u^2(\alpha+\beta) = -(1+\lambda) + 3R - \lambda s^2, \\ u^3 \cdot 0 = 2t, \\ u^4 \alpha \beta = \lambda - 2R(1+\lambda) + 3R^2 - 2st, \\ u^6 \cdot 0 = R\lambda - R^2(1+\lambda) + R^3 - t^2. \end{cases} \iff (S) : \begin{cases} -u^2(\alpha+\beta) = -(1+\lambda) + 3R, \\ u^4 \alpha \beta = \lambda - 2R(1+\lambda) + 3R^2, \\ 0 = R(\lambda - (1+\lambda)R + R^2). \end{cases}$$

Or  $0 = R(\lambda - (1+\lambda)R + R^2) \iff R \in \{0, 1, \lambda\}$ .

- Si  $R = 0$  :

$$(S) \iff \begin{cases} u^2(\alpha+\beta) = 1+\lambda, \\ u^4 \alpha \beta = \lambda, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta = \frac{1}{u^2} + \frac{\lambda}{u^2}, \\ \alpha \beta = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\lambda}{u^2}. \end{cases} \iff \{\alpha, \beta\} = \left\{ \frac{1}{u^2}, \frac{\lambda}{u^2} \right\}.$$

- Si  $R = \lambda$  :

$$(S) \iff \begin{cases} u^2(\alpha + \beta) = 1 - 2\lambda, \\ u^4\alpha\beta = \lambda^2 - \lambda, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-\lambda}{u^2} + \frac{1 - \lambda}{u^2}, \\ \alpha\beta = \frac{-\lambda}{u^2} \cdot \frac{1 - \lambda}{u^2}. \end{cases} \iff \{\alpha, \beta\} = \left\{ \frac{-\lambda}{u^2}, \frac{1 - \lambda}{u^2} \right\}.$$

Auquel cas  $\alpha - \beta$  ou  $\beta - \alpha$  vaut  $\frac{1 - \lambda}{u^2} - \frac{-\lambda}{u^2} = \frac{1}{u^2}$ .

- Si  $R = 1$  :

$$(S) \iff \begin{cases} u^2(\alpha + \beta) = \lambda - 2, \\ u^4\alpha\beta = 1 - \lambda, \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{-1}{u^2} + \frac{\lambda - 1}{u^2}, \\ \alpha\beta = \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{\lambda - 1}{u^2}. \end{cases} \iff \{\alpha, \beta\} = \left\{ \frac{-1}{u^2}, \frac{\lambda - 1}{u^2} \right\}.$$

Auquel cas  $-\alpha$  ou  $-\beta$  vaut  $\frac{1}{u^2}$ .

□

**Proposition 8.** Soit  $E/\mathbb{F}_p : y^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$  une courbe elliptique. Alors

$$(\gamma, 0) \in 2E(\mathbb{F}_p) \iff \gamma - \alpha, \gamma - \beta \in (\mathbb{F}_p^\times)^2$$

**Preuve.** [AT02] renvoie à [Sil09] §X.1 qui traite de la 2-descente (dans le cas des corps de nombres donc) ou à [Sch95] qui n'énonce un résultat que pour les courbes hyperelliptiques. L'appendice A à la fin de cette note propose un exposé minimal des notions nécessaires, il s'agit encore de résultats bien connus.

□

## 4.2 Twists quadratiques

**Définition 1.** Soit  $E/k : y^2 = f(x)$  une courbe elliptique. Soit  $\alpha \in k^\times$  alors

$$E^{(\alpha)} : \alpha y^2 = f(x)$$

défini une courbe elliptique appelée *twist quadratique* de  $E$  par  $\alpha$ .

**Remarque 1.** 1. Pour  $\alpha \neq 1$ ,  $\alpha y^2 = f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \simeq y^2 = x^3 + \alpha ax^2 + \alpha^2 bx + \alpha^3 c$  par

$$\varphi(x, y) = \left( \frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\alpha^2} \right)$$

Notons que  $\varphi$  est un isomorphisme de courbes algébriques mais pas un isomorphisme de courbes elliptiques.

2. Le twist est trivial si et seulement si on a un isomorphisme  $k$ -rationnel de courbes elliptiques  $E \simeq_k E^{(\alpha)}$ .

3. Soit  $E/\mathbb{F}_q$  et  $\alpha \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2$  alors  $|E(\mathbb{F}_q)| + |E^{(\alpha)}(\mathbb{F}_q)| = q + 2$ .

**Proposition 9.** Soit  $E/k$  une courbe elliptique et  $\alpha \in k^\times \setminus (k^\times)^2$ .

$$E \simeq E^{(\alpha)} \implies j(E) = 1728 \quad \text{et} \quad k(\alpha) = k(\sqrt{-1})$$

**Preuve.** On suppose ici que  $k = p \geq 5$  bien que le résultat reste vrai pour  $p = 3$ . Cette restriction permet de donner un modèle de  $E/k$  sous forme de Weierstrass courte, ce qui simplifie l'expression de  $j(E)$  et donc la preuve ci-dessous. Les formules pour  $p = 3$  sont disponibles dans [Sil09] Appendix A.

Soit

$$E/k : y^2 = x^3 + Ax + B \quad \text{alors} \quad j(E) = 1728 \frac{4A^3}{4A^3 + 27B^2}.$$

Si  $E \simeq E^{(\alpha)}$ , alors  $E^{(\alpha)}$  a pour modèle  $y^2 = x^3 + \alpha^2 Ax + \alpha^3 B$ . Un isomorphisme  $\varphi : E \rightarrow E^{(\alpha)}$  est de la forme  $\varphi(x, y) = (u^2 x, u^3 y)$ ,  $u \in (k^\times)$  et vérifie

$$\begin{cases} \frac{A}{u^4} = \alpha^2 A, \\ \frac{B}{u^6} = \alpha^3 B. \end{cases}$$

- Si  $A \neq 0$  et  $B \neq 0$ , alors

$$\begin{cases} \alpha^2 = \frac{1}{u^4}, \\ \alpha^3 = \frac{1}{u^6}, \end{cases} \implies \alpha = \left(\frac{1}{u}\right)^2 \in (k^\times)^2.$$

ce qui est absurde.

- Si  $A = 0$ , alors  $B \neq 0$  sinon  $E$  n'est pas lisse en  $(0, 0)$ . On a

$$\alpha^3 = \frac{1}{u^6} \implies \alpha = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{u^6} = \left(\frac{1}{\alpha u^3}\right)^2 \in (k^\times)^2.$$

ce qui est absurde.

- Donc  $B = 0$ , d'où  $j(E) = 1728$ . De plus  $A \neq 0$ , d'où  $\alpha^2 = \frac{1}{u^4}$  donc  $\alpha \in \{\frac{1}{u^2}; -\frac{1}{u^2}\}$ . Or  $\alpha \notin (k^\times)^2$  donc  $\alpha = -\frac{1}{u^2}$ . En particulier  $k(\sqrt{\alpha}) = k(\sqrt{-1})$ .

□

**Proposition 10.**  $\forall \lambda \in \mathbb{F}_q \setminus \{0; 1\}$

$$E_\lambda^{(-1)} \simeq E_{1-\lambda} \quad E_\lambda^{(\lambda)} \simeq E_{1/\lambda} \quad E_\lambda^{(1-\lambda)} \simeq E_{\lambda/(1-\lambda)}$$

**Preuve.** 1.  $E_\lambda : y^2 = x(x-1)(x-\lambda) = x^3 - (1+\lambda)x^2 + \lambda x$ . Donc

$$E_\lambda^{(-1)} : y^2 = x^3 + (1+\lambda)x^2 + \lambda x = x(x+1)(x+\lambda).$$

Et  $\varphi(x, y) = (x-1, y)$  fournit un isomorphisme  $E_\lambda^{(-1)} \simeq E_{1-\lambda}$ .

2.  $E_\lambda^{(\lambda)} : y^2 = x^3 - (1+\lambda)\lambda x^2 + \lambda^3 x = x(x-\lambda)(x-\lambda^2)$  et  $E_{1/\lambda} : y^2 = x(x-1)(x-\frac{1}{\lambda})$ . Donc  $\varphi(x, y) = (\lambda^2 x, \lambda^3 y)$  fournit  $E_\lambda^{(\lambda)} \simeq E_{1/\lambda}$ .

3.  $E_\lambda^{(1-\lambda)} : y^2 = x^3 - (1+\lambda)(1-\lambda)x^2 + \lambda(1-\lambda)^2 x = x(x-(1-\lambda))(x-\lambda(1-\lambda))$ .

On vérifie que  $\varphi(x, y) = ((1-\lambda)^2 x + \lambda(1-\lambda), (1-\lambda)^3 y)$  fournit  $E_\lambda^{(1-\lambda)} \simeq E_{\lambda/(1-\lambda)}$ . En effet

$$\begin{aligned} \varphi(y^2) &= \varphi(x) \varphi(x-(1-\lambda)) \varphi(x-\lambda(1-\lambda)) \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda)^6 y^2 = [(1-\lambda)^2 x + \lambda(1-\lambda)][(1-\lambda)^2 x + \lambda(1-\lambda) - (1-\lambda)][(1-\lambda)^2 x] \\ &\Leftrightarrow y^2 = \left(x + \frac{\lambda}{1-\lambda}\right) \left(x + \frac{\lambda}{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}\right) x = x(x-1) \left(x - \frac{\lambda}{\lambda-1}\right). \end{aligned}$$

□

**Proposition 11.** Soit  $\lambda \in \mathbb{F}_q \setminus \{0, 1, -1, 2, \frac{1}{2}\}$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (a)  $E_\lambda \simeq E_\mu$  pour tout  $\mu \in \left\{\lambda, 1-\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ .
- (b)  $-1, \lambda, 1-\lambda \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$ .
- (c)  $E_\lambda[4](\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ .

Si  $E_\lambda^{(\alpha)} / \mathbb{F}_q$  n'est pas Legendre isomorphe pour un  $\alpha \in \mathbb{F}_q^\times$ , alors les assertions précédentes sont satisfaites.

**Preuve.** L'hypothèse sur  $\lambda$  assure que  $-1 \notin \left\{\lambda, \dots, \frac{\lambda}{\lambda-1}\right\}$ , donc  $j(E_\lambda) \neq 1728$ , (voir [Sil09] III 1.7).

(a)  $\Rightarrow$  (b) Supposons que  $-1$  ou  $\lambda$  ou  $1-\lambda \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2$ . D'après la proposition 9, comme  $j(E_\lambda) \neq 1728$

$$E_\lambda^{(-1)} \not\simeq E_\lambda \text{ ou } E_\lambda^{(\lambda)} \not\simeq E_\lambda \text{ ou } E_\lambda^{(1-\lambda)} \not\simeq E_\lambda.$$

Ce qui, avec la Proposition 10 contredit (a). Donc  $-1, \lambda, 1-\lambda \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$ .

(b)  $\Rightarrow$  (a) Si  $\alpha \in (k^\times)^2$ , alors  $E^{(\alpha)} \simeq_k E$ . Donc si  $-1, \lambda, 1 - \lambda \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$

$$E_\lambda^{(-1)} \simeq E_\lambda, \quad E_\lambda^{(\lambda)} \simeq E_\lambda, \quad E_\lambda^{(1-\lambda)} \simeq E_\lambda.$$

Or

$$E_\lambda^{(-1)} \simeq E_{1-\lambda}, \quad E_\lambda^{(\lambda)} \simeq E_{1/\lambda}, \quad E_\lambda^{(1-\lambda)} \simeq E_{\lambda/(1-\lambda)}.$$

De plus  $\frac{\lambda}{1-\lambda} = \frac{-\lambda}{1-\lambda} \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$ , donc

$$E_{\lambda/(1-\lambda)} \simeq E_{\lambda/(1-\lambda)}^{\lambda/(1-\lambda)} \simeq E_{(1-\lambda)/\lambda} \simeq E_{1-1/\lambda}.$$

Enfin,  $1 - \lambda \in (\mathbb{F}_q^\times)^2 \Rightarrow E_{1-\lambda} \simeq E_{1-\lambda}^{(1-\lambda)} \simeq E_{1/(1-\lambda)}$ .

(b)  $\Rightarrow$  (c) On a

$$0 - 1, 0 - \lambda, 1 - \lambda, 1 - 0, \lambda - 0, \lambda - 1 \in (\mathbb{F}_q^\times)^2.$$

D'après la Proposition 8,  $(0, 0), (1, 0), (\lambda, 0) \in 2E_\lambda(\mathbb{F}_q)$ . Par exemple,

$$(0, 0) = 2P_0, \quad P_0 \in E_\lambda(\mathbb{F}_q),$$

et  $-P_0 \in E_\lambda(\mathbb{F}_q)$ . Or  $P_0 \neq -P_0$ , sinon  $2P_0 = \mathcal{O}$ , ce qui est absurde. Donc,  $P_0 \in E_\lambda[4](\mathbb{F}_q)$  et  $P_0, -P_0, 2P_0$  sont trois éléments distincts de  $E_\lambda[4](\mathbb{F}_q)$ . De même avec les points

$$(1, 0) = 2P_1, \quad (\lambda, 0) = 2P_\lambda, \quad P_1, P_\lambda \in E_\lambda[4](\mathbb{F}_q).$$

Donc  $|E_\lambda[4](\mathbb{F}_q)| > 10$  et  $E_\lambda[4](\mathbb{F}_q)$  est un sous-groupe de  $E_\lambda[4](\bar{\mathbb{F}}_q) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ . Par conséquent

$$E_\lambda[4](\mathbb{F}_q) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

(c)  $\Rightarrow$  (b) On a  $E_\lambda[4](\mathbb{F}_q) = E_\lambda[4](\bar{\mathbb{F}}_q)$ . De plus  $[2] : E_\lambda(\bar{\mathbb{F}}_q) \rightarrow E_\lambda(\bar{\mathbb{F}}_q)$  est surjective. Ainsi,

$$\forall P \in E_\lambda[2](\bar{\mathbb{F}}_q), \quad \exists Q \in E_\lambda(\bar{\mathbb{F}}_q) / 2Q = P$$

Soit  $P \in E_\lambda$  tel que  $2P = \mathcal{O}$ , et  $Q$  tel que  $2Q = P$ , en particulier  $Q \in E_\lambda[4](\bar{\mathbb{F}}_q) = E_\lambda[4](\mathbb{F}_q)$  i.e. toute la 2-torsion est dans  $2E_\lambda(\mathbb{F}_q)$ . La proposition 8 assure

$$0 - 1, 0 - \lambda, 1 - 0, 1 - \lambda, \lambda - 0, \lambda - 1 \in (\mathbb{F}_q^\times)^2,$$

i.e.

$$-1, \lambda, 1 - \lambda \in (\mathbb{F}_q^\times)^2.$$

Nous avons prouvé que les assertions (a), (b) et (c) sont équivalentes. Si  $\alpha \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$ , alors  $E_\lambda^{(\alpha)} \simeq E_\lambda$  donc  $E_\lambda^{(\alpha)}$  est Legendre isomorphe. Supposons donc que  $E_\lambda^{(\alpha)}$  ne soit pas Legendre isomorphe, en particulier  $\alpha \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2$ . Supposons par l'absurde que  $-1 \notin (\mathbb{F}_q^\times)^2$ .

$$|\mathbb{F}_q^\times / (\mathbb{F}_q^\times)^2| = 2 \Rightarrow \frac{\alpha}{-1} \in (\mathbb{F}_q^\times)^2,$$

En notant  $\delta^2 = -\alpha$ ,  $\delta \in \mathbb{F}_q^\times$ , on a un isomorphisme

$$\begin{aligned} \varphi : E_\lambda^{(-1)} &\xrightarrow{\sim} E_\lambda^{(\alpha)} \\ (x, y) &\mapsto \left( \frac{x}{\delta^2}, \frac{y}{\delta^3} \right), \end{aligned}$$

On en déduit  $E_\lambda^{(\alpha)} \simeq E_\lambda^{(-1)} \simeq E_{1-\lambda}$ , ce qui est absurde car  $E_\lambda^{(\alpha)}$  n'est pas Legendre isomorphe. Donc  $-1 \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$ . De même  $\lambda, 1 - \lambda \in (\mathbb{F}_q^\times)^2$ .

□

### 4.3 Preuve du résultat principal

**Preuve.** Supposons que  $E/\mathbb{F}_p \sim E_\lambda/\mathbb{F}_p$ , avec  $\lambda \in \mathbb{F}_p$ . Alors  $|E(\mathbb{F}_p)| = |E_\lambda(\mathbb{F}_p)|$ . Or  $E_\lambda[2](\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , donc

$$|E(\mathbb{F}_p)| \in 4\mathbb{Z}$$

Inversement, supposons que  $|E(\mathbb{F}_p)| \in 4\mathbb{Z}$ . Si  $E[2](\mathbb{F}_p) \neq E[2](\bar{\mathbb{F}}_p)$ , alors  $E[2](\mathbb{F}_p)$  ne contient pas de sous-groupe isomorphe à  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Or

$$E(\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n_2\mathbb{Z}, \quad n_1 \mid n_2.$$

Si  $2 \mid n_1$ , alors  $2 \mid n_2$  et  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \subset E(\mathbb{F}_p)$ , c'est absurde, d'où  $2 \nmid n_1$  et  $4 \mid n_2$ . Ainsi,  $E(\mathbb{F}_p)$  contient un élément  $P$  d'ordre 4, en particulier  $2P \in E[2](\mathbb{F}_p) \subsetneq E[2](\bar{\mathbb{F}}_p)$ . Soit  $Q \in E[2](\bar{\mathbb{F}}_p) \setminus E[2](\mathbb{F}_p)$  et

$$\varphi : E \longrightarrow E/\langle 2P \rangle = \tilde{E}$$

l'isogénie quotient. Notons pour plus tard que  $\varphi$  et  $\tilde{E}$  sont définies sur  $\mathbb{F}_p$ . Montrons que  $\tilde{E}[2](\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

- D'abord

$$\begin{cases} 2\varphi(P) = \varphi(2P) = \mathcal{O} \\ \varphi(P) \neq \mathcal{O} \text{ car } P \notin \langle 2P \rangle. \end{cases} \Rightarrow \circ(\varphi(P)) = 2.$$

- Ensuite

$$\begin{cases} 2\varphi(Q) = \varphi(2Q) = \varphi(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \text{ car } Q \in E[2] \\ \varphi(Q) \neq \mathcal{O} \text{ car } Q \notin \langle 2P \rangle. \end{cases} \Rightarrow \circ(\varphi(Q)) = 2.$$

- Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $E[2](\mathbb{F}_{p^n}) = E[2](\bar{\mathbb{F}}_p)$ , et soit  $\sigma$  un générateur de  $\text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$ . Puisque  $Q \notin \langle 2P \rangle$  on a

$$E[2](\mathbb{F}_{p^n}) = \langle 2P, Q \rangle$$

En particulier, comme  $\sigma(Q) \in E[2](\mathbb{F}_{p^n})$

$$\sigma(Q) = Q + 2P,$$

en effet si  $\sigma(Q) = Q$ , alors  $Q \in E(\mathbb{F}_p)$ , et si  $\sigma(Q) = 2P$ , alors  $Q = \sigma^{-1}(2P) \in E(\mathbb{F}_p)$ . D'où

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi(Q)) &= \varphi(\sigma(Q)) && \text{car } \varphi \text{ est } \mathbb{F}_p\text{-rationnelle} \\ &= \varphi(Q + 2P) = \varphi(Q) + \varphi(2P) = \varphi(Q) + \mathcal{O} = \varphi(Q) \end{aligned}$$

Donc  $\varphi(Q) \in \tilde{E}(\mathbb{F}_p)$ . Par conséquent,

$$\tilde{E}[2](\mathbb{F}_p) = \langle \varphi(P), \varphi(Q) \rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

En effet,

$$\langle \varphi(P) \rangle = \langle \varphi(Q) \rangle \iff \varphi(P) = \varphi(Q) \iff P - Q \in \langle 2P \rangle \iff Q = P \text{ ou } Q = 3P,$$

ce qui est absurde.

Ainsi, l'isogénie  $\varphi : E \longrightarrow \tilde{E}$  permet de supposer qu'à  $\mathbb{F}_p$ -isogénie près

$$E[2](\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

On peut écrire un modèle  $E : y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$ ,  $a, b, c \in \mathbb{F}_p$  puis appliquer l'isomorphisme  $(x, y) \mapsto (x+a, y)$  pour obtenir le modèle

$$E/\mathbb{F}_p : \quad y^2 = x(x-\alpha)(x-\beta), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}_p.$$

De plus,

$$\begin{aligned} E^{(\alpha)} : \quad y^2 &= x^3 - \alpha(\alpha+\beta)x^2 + \alpha^3\beta x \simeq E_{\beta/\alpha} : y^2 = x^3 - \left(1 + \frac{\beta}{\alpha}\right)x^2 + \frac{\beta}{\alpha}x \\ (x, y) &\mapsto (\alpha^2 x, \alpha^3 y). \end{aligned}$$

Donc  $E^{(\alpha)} \simeq E_\lambda$ ,  $\lambda = \frac{\beta}{\alpha} \in \mathbb{F}_p$ . Si  $\alpha \in (\mathbb{F}_p^\times)^2$  alors  $E \simeq E^{(\alpha)} \simeq E_\lambda$  et la preuve est complète. On suppose à partir de maintenant que  $\alpha \notin (\mathbb{F}_p^\times)^2$ . On examine les cas supersinguliers et ordinaires séparément.

- Si  $E$  est supersingulière, alors

$$|E(\mathbb{F}_p)| = p + 1 - t \quad \text{et} \quad p \mid t.$$

Or

$$\begin{cases} |t| \leq 2\sqrt{p} \\ t = kp, \end{cases} \Rightarrow k^2 p^2 \leq 4p \Rightarrow k^2 p \leq 4.$$

Si  $p \geq 5$ , alors  $k = 0$ , i.e.  $|E(\mathbb{F}_p)| = p + 1$ . Si  $p = 3$ , alors  $k \in \{-1, 0, 1\}$ , cependant

$$\begin{cases} k = 1 \Rightarrow t = p \Rightarrow |E(\mathbb{F}_p)| = 1 \notin 4\mathbb{Z}, \\ k = -1 \Rightarrow |E(\mathbb{F}_p)| = 2p + 1 \notin 4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Donc  $k = 0$  i.e.  $|E(\mathbb{F}_p)| = p + 1$ . Or  $\alpha \notin (\mathbb{F}_p^\times)^2$ , d'où  $|E^{(\alpha)}(\mathbb{F}_p)| + |E(\mathbb{F}_p)| = 2p + 2$ , i.e.

$$|E^{(\alpha)}(\mathbb{F}_p)| = p + 1 = |E(\mathbb{F}_p)|.$$

D'après le théorème de Tate,  $E \sim E^{(\alpha)}$ . On a donc  $E \sim E^{(\alpha)} \sim E_\lambda$ , i.e.  $E$  est Legendre isogène sur  $\mathbb{F}_p$ .

- Si  $E$  est ordinaire. On distingue deux cas

(a) Si  $E_\lambda^{(\alpha)}$  est Legendre isogène, c'est-à-dire  $E_\lambda^{(\alpha)} \sim E_\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{F}_p$ . En notant  $\text{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E)$  la trace du Frobenius de  $E/\mathbb{F}_p$

$$\text{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E) = -\text{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E^{(\alpha)}) = -\text{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E_\lambda) = +\text{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E_\lambda^{(\alpha)}),$$

car  $E^{(\alpha)} \simeq E_\lambda$  et  $\alpha \notin (\mathbb{F}_p^\times)^2$ . Donc, d'après le théorème de Tate  $E \sim E_\lambda^{(\alpha)}$ . D'où  $E \sim E_\lambda^{(\alpha)} \sim E_\mu$  i.e.  $E$  est Legendre isogène sur  $\mathbb{F}_p$ .

(b) Si  $E_\lambda^{(\alpha)}$  n'est pas Legendre isogène, alors la proposition 11 assure que

$$\begin{cases} E_\lambda[4](\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, \\ -1 \in (\mathbb{F}_p^\times)^2. \end{cases}$$

De plus,

$$|E_\lambda(\mathbb{F}_p)| = 2^\alpha \cdot \prod_{p_i \text{ premier} \geq 3} p_i^{m_i}, \quad \alpha \geq 4,$$

Alors le théorème de Rück [Rü87] donne l'existence d'une courbe  $E'/\mathbb{F}_p$  telle que

$$\begin{cases} E_\lambda \sim E', \\ E'[4](\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}. \end{cases}$$

En effet,  $a = 1$  vérifie  $0 \leq a \leq \min(v_2(p-1), \lfloor \alpha/2 \rfloor)$ , d'où l'existence de  $E'$  telle que

$$E'[2^{\alpha-1}](\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{\alpha-1}\mathbb{Z}.$$

Donc

$$E'[4](\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Soit  $P \in E'(\mathbb{F}_p)$  d'ordre 4 et  $Q = 2P$ , i.e.  $Q \in E'[2](\mathbb{F}_p)$ . Quitte à effectuer  $(x, y) \mapsto (x - x_Q, y)$ , on peut supposer qu'on a un modèle  $E' : y^2 = x(x - \alpha')(x - \beta')$ ,  $\alpha', \beta' \in \mathbb{F}_p$ , avec  $(0, 0) \in 2E'(\mathbb{F}_p)$ . La proposition 8 assure alors

$$0 - \alpha' \in (\mathbb{F}_p^\times)^2.$$

Donc

$$\frac{-\alpha'}{-1} = \alpha' \in (\mathbb{F}_p^\times)^2, \quad \text{i.e.} \quad \alpha' = \delta^2, \quad \delta \in \mathbb{F}_p.$$

On a alors avec  $\lambda' = \frac{\beta'}{\alpha'}$

$$\begin{aligned} E' : y^2 &= x^3 - (\alpha' + \beta')x^2 + \alpha'\beta'x \simeq E_{\lambda'} : y^2 = x^3 - \left(1 + \frac{\beta'}{\alpha'}\right)x^2 + \frac{\beta'}{\alpha'}x \\ &\quad (x, y) \longmapsto (\delta^2 x, \delta^3 y). \end{aligned}$$

Or

$$E_{\lambda'}[4](\mathbb{F}_p) \simeq E'[4](\mathbb{F}_p) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}.$$

Donc la proposition 11 donne

$$\forall \gamma \in \mathbb{F}_p^\times, \quad E_{\lambda'}^{(\gamma)} \text{ est Legendre isomorphe.}$$

En particulier,  $E_{\lambda'}^{(\alpha)}$  est Legendre isomorphe, i.e  $E_{\lambda'}^{(\alpha)} \simeq E_\mu$ . Enfin, on récapitule

$$E^{(\alpha)} \sim E_\lambda \sim E' \sim E_{\lambda'}, \quad \alpha \notin (\mathbb{F}_p^\times)^2.$$

D'où

$$\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E) = -\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E^{(\alpha)}) = -\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E_{\lambda'}) = +\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E_{\lambda'}^{(\alpha)})$$

Donc  $E \sim E_{\lambda'}^{(\alpha)} \sim E_\mu$ , i.e.  $E$  est Legendre isogène sur  $\mathbb{F}_p$ .

□

## 5 Remarques finales

Les paragraphes précédents nous ont appris

$$\begin{cases} |E_\lambda(\mathbb{F}_p)| = 1 - (-1)^m H_p(\lambda) \pmod{p} \\ |E_\lambda(\mathbb{F}_p)| \in 4\mathbb{Z}. \end{cases}$$

1. En notant  $t$  la trace du Frobenius de  $E_\lambda/\mathbb{F}_p$ , on a  $|E_\lambda(\mathbb{F}_p)| = p + 1 - t$ , d'où  $t = p + 1 + 4k$ . La borne de Hasse donne  $|t| < 2\sqrt{p}$ .

$$\begin{aligned} |t| < 2\sqrt{p} &\iff t^2 < 4p \iff (p + 1 + 4k)^2 < (2\sqrt{p})^2 \\ &\iff (p + 1 + 4k + 2\sqrt{p})(p + 1 + 4k - 2\sqrt{p}) < 0 \\ &\iff (4k + (\sqrt{p} + 1)^2)(4k + (\sqrt{p} - 1)^2) < 0 \\ &\iff k \in \mathbb{Z} \cap \left[ -\frac{(\sqrt{p} + 1)^2}{4}; -\frac{(\sqrt{p} - 1)^2}{4} \right] \\ &\iff k \in \left[ \left[ -\frac{(\sqrt{p} + 1)^2}{4} \right]; \left[ -\frac{(\sqrt{p} - 1)^2}{4} \right] \right]. \end{aligned}$$

D'où

$$|E_\lambda(\mathbb{F}_p)| \in \left[ -4 \left[ -\frac{(\sqrt{p} - 1)^2}{4} \right]; -4 \left[ -\frac{(\sqrt{p} + 1)^2}{4} \right] \right].$$

Tous les multiples de 4 de cet intervalle apparaissent comme ordre d'une courbe sous forme de Legendre sur  $\mathbb{F}_p$ .

2. De plus les valeurs apparaissant dans  $(H_p(\lambda) \pmod{p}; \lambda \in \mathbb{F}_p^2 \setminus \{0, 1\})$  sont soumises aux conditions

$$m \text{ est pair} \iff \frac{p-1}{2} = 2\ell \iff p = 4\ell + 1 \iff p + 1 - t = 4\ell + 2 - t \iff t \equiv 2 \pmod{4}.$$

De même  $m$  est impair  $\iff t \equiv 0 \pmod{4}$ .

3. On remarque les symétries suivantes

$$(H_p(\lambda) \pmod{p}; \lambda \in \mathbb{F}_p^2 \setminus \{0, 1\}) \text{ est un palindrôme} \iff m \text{ est pair.}$$

En effet

$$m \text{ est pair} \iff (-1) \in (\mathbb{F}_p^\times)^2 \Rightarrow E_\lambda \simeq E_\lambda^{(-1)} \simeq E_{1-\lambda} \Rightarrow H_p(1-\lambda) = H_p(\lambda).$$

De même, on a le résultat

$$m \text{ est impair} \iff (-1) \notin (\mathbb{F}_p^\times)^2 \Rightarrow \mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E_\lambda) = -\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E_\lambda^{(-1)}) = -\mathrm{Tr}_{\mathbb{F}_p}(E_{1-\lambda}) \Rightarrow H_p(\lambda) = -H_p(1-\lambda).$$

## A Couplages de Weil, de Kummer et conséquences

Soit  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$ ,  $(m, p) = 1$  où  $p = \text{car } K$ . Soit  $E/K$  une courbe elliptique, on a  $E[m] = E[m](\overline{K}) \simeq (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^2$ .

**Proposition 12.** Le couplage de Weil

$$e_m : E[m] \times E[m] \longrightarrow \mu_m$$

est bilinéaire, alterné, non dégénéré et invariant sous l'action de Galois. En particulier

$$\begin{cases} \forall S \in E[m], e_m(S, T) = 1 \Rightarrow T = \mathcal{O}, \\ \forall \sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K), e_m(S, T)^\sigma = e_m(S^\sigma, T^\sigma). \end{cases}$$

**Proposition 13.** Le couplage de Kummer

$$\begin{aligned} \kappa : E(K) \times \text{Gal}(\overline{K}/K) &\longrightarrow E[m] \\ (P, \sigma) &\longmapsto Q^\sigma - Q, \quad \text{où } Q \in E(\overline{K}) / [m]Q = P \end{aligned}$$

est bilinéaire, son noyau à gauche est  $mE(K)$  et induit

$$\begin{aligned} \delta_E : E(K)/mE(K) &\longrightarrow \text{Hom}(\text{Gal}(\overline{K}/K), E[m]) \\ P &\longmapsto \delta_E(P) : \begin{cases} \text{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow E[m], \\ \sigma \longmapsto \kappa(P, \sigma). \end{cases} \end{aligned}$$

**Théorème 4** (Hilbert 90). Supposons que  $\mu_m \subset K$ . Alors

$$\begin{aligned} \delta_K : K^\times/(K^\times)^m &\xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mu_m) \\ b &\longmapsto \delta_K(b) : \begin{cases} \text{Gal}(\overline{K}/K) \longrightarrow \mu_m, \\ \sigma \longmapsto \frac{\sigma(\beta)}{\beta}, \quad \text{où } \beta^m = b. \end{cases} \end{aligned}$$

Des trois résultats précédents, on en déduit la construction suivante. Soient  $P \in E(K)$  et  $T \in E[m]$ , alors

$$\begin{aligned} \text{Gal}(\overline{K}/K) &\longrightarrow \mu_m \\ \sigma &\longmapsto e_m(\delta_E(P)(\sigma), T) \end{aligned}$$

définit un élément de  $\text{Hom}(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mu_m)$ , le théorème 90 de Hilbert assure l'existence d'un unique  $b = b(P, T)$  tel que  $e_m(\delta_E(P)(\sigma), T) = \delta_K(b(P, T))(\sigma)$ .

**Théorème 5.** Il existe une application bilinéaire

$$b : \frac{E(K)}{mE(K)} \times E[m] \longrightarrow \frac{K^\times}{(K^\times)^m}$$

tel que  $b(P, T)$  soit l'unique classe vérifiant

$$\forall \sigma \in \text{Gal}(\overline{K}/K), \quad e_m(\delta_E(P)(\sigma), T) = \delta_K(b(P, T))(\sigma)$$

Le noyau de  $b$  à gauche est trivial. Pour  $T \in E[m]$ , soient  $f_T, g_T \in K(E)$  tels que

$$\begin{cases} \text{div}(f_T) = m(T) - m(\mathcal{O}), \\ f_T \circ [m] = g_T^m. \end{cases}$$

Alors, pour tout  $P \neq T$ ,

$$b(P, T) \equiv f_T(P) \pmod{(K^\times)^m}$$

**Remarque 2.** 1. Si  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  agit trivialement sur le  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$ -module  $M$ , alors

$$\begin{cases} H^0(\text{Gal}(\overline{K}/K), M) = M, \\ H^1(\text{Gal}(\overline{K}/K), M) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{K}/K), M). \end{cases}$$

L'hypothèse  $\mu_m \subset K$  de la proposition provient de cette remarque.

2. Notons la mention de morphismes de groupes continus ci-dessus. Le groupe  $\text{Gal}(\overline{K}/K)$  est profini et les groupes  $E[m]$ ,  $\mu_m$  sont finis, donc

$$\begin{cases} \text{Hom}(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mu_m) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{K}/K), \mu_m), \\ \text{Hom}(\text{Gal}(\overline{K}/K), E[m]) = \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\overline{K}/K), E[m]). \end{cases}$$

Revenons à la preuve de la proposition 8. Soient  $m = 2$ ,  $p \geq 3$  premier et

$$E/\mathbb{F}_p : y^2 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma), \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{F}_p.$$

Alors  $f_{P_\alpha} = x - \alpha \in \mathbb{F}_p(E)$  a pour diviseur  $\text{div}(f_{P_\alpha}) = 2(P_\alpha) - 2(\mathcal{O})$ , où  $P_\alpha = (\alpha, 0) \in E(\mathbb{F}_p)$ . De plus, en notant

$$\begin{cases} S_1 &= \alpha + \beta + \gamma, \\ S_2 &= \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma, \end{cases}$$

on a par un long calcul à partir des règles de calcul de l'addition sur  $E$

$$f_{P_\alpha} \circ [2](x, y) = \left[ \frac{x^2 - \alpha x - 2x^2 + 2S_1x - S_2}{2y} \right]^2 = g_{P_\alpha}^2(x, y).$$

Donc, pour tout  $Q \neq P_\alpha$ ,  $b(Q, P_\alpha) \equiv f_{P_\alpha}(Q) \pmod{(\mathbb{F}_p^\times)^2}$ . De même pour  $P_\beta$  et  $P_\gamma$ . On a donc la caractérisation

$$Q \in 2E(\mathbb{F}_p) \Leftrightarrow \forall P \in E[2], \quad b(Q, P) \equiv 0$$

Ainsi,

$$P_\gamma = (\gamma, 0) \in 2E(\mathbb{F}_p) \iff \begin{cases} b(P_\gamma, P_\alpha) \equiv 0, \\ b(P_\gamma, P_\beta) \equiv 0, \\ b(P_\gamma, P_\gamma) \equiv 0. \end{cases}$$

Or :

- $b(P_\gamma, P_\alpha) = f_{P_\alpha}(P_\gamma) = \gamma - \alpha$ .
- $b(P_\gamma, P_\beta) = f_{P_\beta}(P_\gamma) = \gamma - \beta$ .
- $b(P_\gamma, P_\gamma) = b(P_\gamma, P_\gamma + P_\alpha - P_\alpha) = b(P_\gamma, P_\gamma + P_\alpha) b(P_\gamma, P_\alpha)^{-1} = b(P_\gamma, P_\beta) b(P_\gamma, P_\alpha)^{-1} = \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \alpha}$

Ainsi

$$P_\gamma = (\gamma, 0) \in 2E(\mathbb{F}_p) \iff \gamma - \alpha, \gamma - \beta \in (\mathbb{F}_p^\times)^2.$$

## References

- [AT02] Roland Auer and Jaap Top. Legendre elliptic curves over finite fields. *Journal of Number Theory*, 95(2):303–312, 2002.
- [Fre01] Jean Fresnel. *Anneaux*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, 2001.
- [Rü87] H.-G. Rück. A note on elliptic curves over finitefields. *Math. Comp.*, 1987.
- [Sch95] E. F. Schaefer. 2-descent on the jacobians of hyperelliptic curves. *J. Number Th.*, 1995.
- [Sil09] Joseph H Silverman. *The Arithmetic of Elliptic Curves*. Graduate texts in mathematics. Springer, Dordrecht, 2009.