CORRIGÉ RISQUES MULTIPLES 2

Exercice 5.1 *Sous les hypothèses classiques de la théorie des options dans le cadre de Black et Scholes, écrire D_t sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, en notant P_t (respectivement C_t) le prix du put (call) sur la valeur de la firme V_t de prix d'exercice L et de maturité T.*
Indication : utiliser la formule de parité call-put $C_t - P_t = V_t - Le^{-r(T-t)}$.

$$\begin{aligned}
D_t &= e^{-r(T-t)}L - e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(L-V_T)^+|\mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)}L - P_t \\
&= V_t - C_t \\
&= V_t - V_t\Phi(d_1) + Le^{-r(T-t)}\Phi(d_0) \\
&= V_t(1-\Phi(d_1)) + Le^{-r(T-t)}\Phi(d_0) \\
&= V_t\Phi(-d_1) + Le^{-r(T-t)}\Phi(d_0)
\end{aligned}$$

avec $\Phi(.)$ la fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite, $d_0 = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\left(r - \dfrac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \ln\dfrac{V_t}{L}\right]$ et $d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T-t}$.

Exercice 5.2 *La probabilité de défaut, notée PD, est définie de la manière suivante sous la probabilité risque-neutre $PD = \mathbb{Q}\left[V_T \leq L\right]$. Calculer cette probabilité de défaut PD en t.*

$$\begin{aligned}
PD &= \mathbb{Q}\left[V_T \leq L\right] \\
&= \mathbb{Q}\left[V_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\bar{W}_{T-t}\right) \leq L\right] \\
&= \mathbb{Q}\left[\bar{W}_{T-t} \leq \frac{1}{\sigma}\left(\ln\frac{L}{V_t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right)\right] \\
&= \Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\frac{L}{V_t} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right]\right) \\
&= \Phi(-d_0)
\end{aligned}$$

Car $\bar{W}_{T-t} \sim \mathcal{N}\left(0, \sqrt{T-t}\right)$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{T-t}}\bar{W}_{T-t} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 5.3 *Déterminer la volatilité σ_E du processus E_t en fonction de la volatilité du processus de la valeur de l'entreprise V_t.*
Indication : utiliser le lemme d'Itô.

A partir du lemme d'Itô et de l'équation suivante :

$$E_t = f(t, V_t) = V_t\Phi(d_1) - Le^{-r(T-t)}\Phi(d_0) \tag{1}$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
dE_t = df(t, V_t) &= \frac{\partial}{\partial t}f(t, V_t)dt + \frac{\partial}{\partial x}f(t,x)dV_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x)V_t^2\sigma^2 dt \\
&= \left(-rLe^{-r(T-t)}\Phi(d_0) + rV_t\Phi(d_1)\right)dt + V_t\sigma\Phi(d_1)d\bar{W}_t
\end{aligned}$$

La volatilité σ_E du processus E_t vaut ainsi :

$$\sigma_E = \sigma \frac{V_t}{E_t} \Phi(d_1) \tag{2}$$

Il reste à résoudre en V_t et σ le système composé des 2 équations (1) et (2).

Exercice 5.4 *Déterminer l'expression de la probabilité de défaut en fonction de l'intensité de défaut.*

La probabilité de défaut est la probabilité qu'il y ait au moins un saut :

$$PD = \mathbb{P}[N_T \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[N_T = 0] = 1 - e^{-\lambda T}$$

Exercice 5.5 *Donner la valorisation d'une obligation risquée en* 0*, en notant* $\bar{\lambda}$ *l'intensité de défaut sous la probabilité risque-neutre.*

En $t = 0$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} D_0 &= e^{-rT}\mathbb{Q}[T < \tau] \\ &= e^{-rT}\mathbb{Q}[N_T = 0] \\ &= e^{-rT}e^{-\bar{\lambda}T} \\ &= e^{-(r+\bar{\lambda})T} \end{aligned}$$

Exercice 5.6 *Donner la valorisation d'une obligation risquée en* 0 *avec un taux de recouvrement* δ*.*

Soit à la date $t = 0$:

$$\begin{aligned} D_0^\delta &= e^{-(r+\bar{\lambda})T} + \delta e^{-rT}\left(1 - \mathbb{Q}[T < \tau]\right) \\ &= e^{-(r+\bar{\lambda})T} + \delta e^{-rT}\left(1 - e^{-\bar{\lambda}T}\right) \\ &= \delta B_0 + (1-\delta) D_0 \end{aligned}$$

avec B_0 un zéro-coupon sans risque.
Le détenteur de l'obligation reçoit la fraction δ du nominal quoiqu'il arrive, plus le reste $1 - \delta$ en cas de non-défaut.