CORRIGÉ RISQUES MULTIPLES 1

Exercice 3.1 *Démontrer que la fonction* $C^{\perp}(u_1, u_2) = u_1 u_2$ *avec* $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$ *est bien une copule. Elle se dénomme la copule produit.*

La copule produit a pour expression $C^{\perp}(u_1, u_2) = u_1 u_2$ avec $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$. Elle est bien une fonction copule car :

1. $C^{\perp}(u, 1) = C^{\perp}(0, u) = u * 0 = 0 * u = 0 \; \forall u \in [0, 1]$,
2. $C^{\perp}(u, 1) = C^{\perp}(1, u) = u * 1 = 1 * u = u \; \forall u \in [0, 1]$,
3. $C^{\perp}$ est 2-increasing : en effet $v_1 v_2 - u_1 v_2 - v_1 u_2 + u_1 u_2 = (v_1 - u_1)(v_2 - u_2) \geq 0 \; \forall (u_1, u_2) \in [0, 1]^2, (v_1, v_2) \in [0, 1]^2$ tel que $0 \leq u_1 \leq v_1 \leq 1$ et $0 \leq u_2 \leq v_2 \leq 1$.

Exercice 3.2 *Soit la distribution logistique bivariée de Gumbel définie sur* $\mathbb{R}^2$ *par* $F(x_1, x_2) = (1 + e^{-x_1} + e^{-x_2})^{-1}$. *Extraire la fonction copule à l'aide du théorème de Sklar.*

Les lois marginales sont définies par $F_1(x_1) = F(x_1, \infty) = (1 + e^{-x_1})^{-1}$ et $F_2(x_2) = (1 + e^{-x_2})^{-1}$. Nous obtenons les fonctions inverses suivantes :

$$F_1^{-1}(u_1) = \ln u_1 - \ln(1 - u_1) = \ln \frac{u_1}{1 - u_1}$$

$$F_2^{-1}(u_2) = \ln u_2 - \ln(1 - u_2)$$

Nous obtenons la fonction copule logistique de Gumbel suivante :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) \\ &= \left(1 + \frac{1 - u_1}{u_1} + \frac{1 - u_2}{u_2}\right)^{-1} = \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2} \end{aligned}$$

Exercice 3.3 *Déterminer si la copule logistique de Gumbel a des dépendances de queue à gauche et à droite.*

La copule logistique de Gumbel a une dépendance de queue à gauche :

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0^+} \frac{C(u, u)}{u} = \lim_{u \to 0^+} \frac{u^2}{2u^2 - u^3} = \lim_{u \to 0^+} \frac{1}{2 - u} = \frac{1}{2}$$

En revanche, elle n'a pas de dépendance de queue à droite :

$$\begin{aligned} \lambda_U &= \lim_{u \to 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \to 1^-} \left(1 - 2u + \frac{u}{2 - u}\right) \frac{1}{1 - u} \\ &= \lim_{u \to 1^-} \frac{(1 - 2u)(2 - u) + u}{(2 - u)(1 - u)} = \lim_{u \to 1^-} 2 \frac{1 - 2u + u^2}{(2 - u)(1 - u)} \\ &= \lim_{u \to 1^-} 2 \frac{(1 - u)^2}{(2 - u)(1 - u)} = \lim_{u \to 1^-} 2 \frac{1 - u}{2 - u} = 0 \end{aligned}$$

Exercice 3.4 *La copule logistique de Gumbel est un cas particulier d'une copule Archimédienne. Laquelle ? Même question pour la copule produit.*

La copule logistique de Gumbel est un cas particulier de la copule Clayton pour $\theta = 1$. En effet :

$$\begin{aligned}
C(u_1, u_2) &= (u_1^{-1} + u_2^{-1} - 1)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - 1} \\
&= \frac{1}{\frac{u_2}{u_1 u_2} + \frac{u_1}{u_1 u_2} - \frac{u_1 u_2}{u_1 u_2}} = \frac{u_1 u_2}{u_1 + u_2 - u_1 u_2}
\end{aligned}$$

La copule produit est un cas particulier de la copule Gumbel pour $\theta = 1$. En effet :

$$C(u_1, u_2) = \exp[\ln u_1 + \ln u_2] = \exp[\ln(u_1 u_2)] = u_1 u_2$$