Attribution de performance

Modèles de Brinson *et al.*

Pierre Clauss

Executive Master Asset Management
Université Paris Dauphine et ENSAE
Niveau 1

Objectif de la formation

Ce cours de 6 heures va se concentrer sur les modèles de Brinson pour analyser l'attribution de performance d'un portefeuille benchmarké. L'objectif est de maitriser ces modèles dans le cadre de portefeuilles actions et multi-devises. Le cours s'appuiera sur des ateliers Excel pour comprendre et analyser les résultats des modèles d'attribution de performance.

Table des matières

INTRODUCTION

La gestion active nécessite une analyse précise des générateurs de performance. Cette analyse ex-post est classiquement accompagnée d'une analyse du risque du portefeuille géré. Les premiers modèles d'analyse d'attribution de performance ont été développés dans les années 70 avec Fama (1972) qui avait construit un modèle d'attribution distinguant le risque du portefeuille et la sélectivité des titres le composant. Cette approche était fondée sur la théorie moderne du portefeuille issue des travaux de Markowitz (1952). Mais malgré ses fondements théoriques solides, cette démarche était difficile à implémenter dans l'industrie.

Dans les années 80, Brinson, Hood et Beebower (1986) vont développer une technique qui va devenir très populaire pour évaluer l'attribution de performance d'un portefeuille relativement à son benchmark en distinguant les effets allocation et sélection des titres en plus de l'interaction entre ces générateurs de performance.
L'attribution de performance va devenir un outil clé pour comprendre et analyser une gestion active pour le gérant, ses clients ou encore son management.
Seules sont nécessaires les positions des portefeuilles et benchmark ainsi que leurs rentabilités. L'attribution est déterminée pour une gestion top-down sur classes d'actifs, zones géographiques ou encore secteurs.

Après avoir étudié le modèle de Brinson sur une période, nous l'étudierons sur plusieurs périodes. Nous étudierons enfin un modèle déterminant la contribution des devises.

CHAPITRE 1

LE MODÈLE DE BRINSON SUR UNE PÉRIODE

1.1 Les 3 générateurs de la performance arithmétique

Nous posons les notations suivantes pour le portefeuille et son benchmark.
La rentabilité du portefeuille investi sur n classes d'actifs est :

$$r = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i \tag{1.1}$$

avec ω_i le poids du portefeuille investi dans la classe d'actifs i. Nous supposons que la somme des poids est égale à 1. r_i est la rentabilité des actifs du portefeuille investis dans la classe d'actifs i.

La rentabilité du benchmark investi sur n classes d'actifs est :

$$b = \sum_{i=1}^{n} W_i b_i \tag{1.2}$$

avec W_i le poids du benchmark investi dans la classe d'actifs i. Nous supposons que la somme des poids est également égale à 1. b_i est la rentabilité des actifs du benchmark investis dans la classe d'actifs i.

L'idée du modèle de Brinson est alors de quantifier les générateurs de la performance du portefeuille relativement au benchmark à savoir $r - b$. Ceci correspond donc à l'excès de rentabilité arithmétique. Le modèle suppose que le gérant actif crée de la valeur à l'aide de l'allocation entre classes d'actifs et de la sélection des titres au sein de ces classes d'actifs.

1.1.1 Allocation

L'allocation va permettre au gérant de prendre des positions différentes sur les classes d'actifs (ou zones géographiques ou secteurs) relativement au benchmark. Le gérant va alors sur-pondérer ou sous-pondérer les classes d'actifs relativement aux positions du benchmark. L'objectif est pour le gérant de sur-pondérer les classes d'actifs qui vont sur-performer et sous-pondérer celles qui vont sous-performer. Ces paris vont alors créer ou détruire de la valeur suivant que les choix seront judicieux. C'est l'enjeu de l'isolation de l'attribution de performance issue de l'allocation. Brinson, Hood et Beebower (1986) appellent cela l'*impact timing* ; aujourd'hui on va plus parler d'allocation d'actifs.

Pour déterminer l'impact de l'allocation sur la performance, nous déterminons un portefeuille intermédiaire isolant l'allocation. Ce fonds *allocation* va appliquer les poids du portefeuille sur les rentabilités des classes d'actifs du benchmark : ceci permet donc bien d'isoler l'allocation de la sélection. Ce fonds intermédiaire a pour rentabilité :

$$b_A = \sum_{i=1}^{n} \omega_i b_i \tag{1.3}$$

La contribution de l'allocation A est alors déterminée par la différence entre le fonds allocation et le benchmark :

$$A = b_A - b = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i - W_i)\, b_i \tag{1.4}$$

Et la contribution de l'allocation d'actifs sur la classe i est définie par :

$$A_i = (\omega_i - W_i)\, b_i \tag{1.5}$$

1.1.2 Sélection

Le gérant va chercher à créer de la valeur à l'aide également d'une sélection de titres judicieux au sein d'une classe d'actifs en sur-pondérant cette fois les titres les plus performants et en sous-pondérant ceux qui sont sous-performants.

Pour isoler la sélection, nous allons définir un autre portefeuille intermédiaire, le fonds *sélection*. Cette fois-ci, les poids alloués aux classes d'actifs vont être ceux du benchmark que l'on va appliquer aux rentabilités des classes d'actifs du portefeuille. En conséquence, nous allons neutraliser l'allocation pour ne conserver que la sélection des titres au sein des classes d'actifs du portefeuille.
Ce fonds intermédiaire a pour rentabilité :

$$r_S = \sum_{i=1}^{n} W_i r_i \tag{1.6}$$

La contribution de la sélection S est alors déterminée par la différence entre le fonds sélection et le benchmark :

$$S = r_S - b = \sum_{i=1}^{n} W_i\,(r_i - b_i) \tag{1.7}$$

Et la contribution de la sélection dans la classe i est définie par :

$$S_i = W_i\,(r_i - b_i) \tag{1.8}$$

1.1.3 Interaction

L'allocation et la sélection ne vont pas en revanche expliquer totalement la différence $r - b$. Nous avons besoin d'un troisième terme : l'interaction. Ce terme est appelé originellement par Brinson, Hood et Beebower (1986) *autre*.

$$r - b = r_S - b + b_A - b + r - r_S - b_A + b \tag{1.9}$$

L'interaction I est donc égale à : $I = r - r_S - b_A + b$. Nous pouvons la réécrire de la manière suivante :

$$I = r - r_S - b_A + b = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i - \sum_{i=1}^{n} W_i r_i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i b_i + \sum_{i=1}^{n} W_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i - W_i)(r_i - b_i) \tag{1.10}$$

Et la contribution de l'interaction pour la classe i est définie par :

$$I_i = (\omega_i - W_i)(r_i - b_i) \tag{1.11}$$

Ainsi, au final, nous décomposons $r - b = A + S + I$.

Exercice 1.1 *A partir des poids et rentabilités définis sur 3 zones géographiques, déterminer les 3 générateurs de performance de Brinson au global et pour chaque classe d'actifs. Cet exemple est inspiré de Bacon (2004).*

	Poids portefeuille	Poids benchmark	Rentabilité portefeuille	Rentabilité benchmark
Actions France	40%	40%	20%	10%
Actions US	30%	20%	-5%	-4%
Actions Brésil	30%	40%	6%	8%

TABLE 1.1 – Exemple d'un portefeuille et de son benchmark sur une période

1.2 Le modèle de Brinson et Fachler

L'un des inconvénients du modèle de Brinson, Hood et Beebower (1986) est qu'il compare chaque pari d'allocation à la classe d'actifs du benchmark alors que le gérant peut parfois en réalité se comparer au benchmark dans son entier. Dans le modèle de Brinson, Hood et Beebower (1986), une sur-pondération de classes d'actifs sur une catégorie qui sur-performe générera une attribution positive et une sur-pondération sur une catégorie qui sous-performe générera une attribution négative alors que ce pari peut néanmoins fournir une rentabilité plus importante que celle du benchmark. Le modèle de Brinson et Fachler (1985) va remédier à cela : ainsi un pari sur une classe d'actifs ayant une rentabilité négative mais qui sur-performe le benchmark aura un effet positif sur la performance du portefeuille.

L'effet allocation global ne va pas changer ; seuls les effets individuels d'allocation, c'est-à-dire sur chaque classe d'actifs, vont évoluer. En effet, nous pouvons réécrire l'excès de rendement entre le fonds allocation et le benchmark précédent de la manière suivante :

$$A = b_A - b = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i - W_i) b_i = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i - W_i)(b_i - b) \tag{1.12}$$

En effet, $\sum_{i=1}^{n}(\omega_i - W_i)\,b = b\sum_{i=1}^{n}(\omega_i - W_i) = 0$ puisque les sommes des poids sont égaux à 1.
Et la contribution de l'allocation d'actifs sur la classe i devient :

$$A_i = (\omega_i - W_i)\,(b_i - b) \tag{1.13}$$

Exercice 1.2 *Calculer les nouveaux effets individuels d'allocation à partir de l'exemple précédent.*

1.3 Intégrer l'effet interaction dans la sélection

L'effet interaction est nécessaire dans les 2 modèles précédents mais n'a pas beaucoup de valeur en terme d'analyse, voire est complexe à analyser. Le gérant ne va pas chercher à créer de la valeur à l'aide de l'interaction entre l'allocation et la sélection. Dans une gestion active top-down, le gérant va d'abord allouer puis sélectionner. Et sa sélection est déterminée après l'allocation ; en d'autres termes, la sélection de titres réalisée par un stock-picker par exemple sera impactée par le poids des actifs choisi par l'allocataire si les 2 processus sont distingués.

La contribution de la sélection devient alors la différence entre le portefeuille et le fonds allocation :

$$S = r - b_A = \sum_{i=1}^{n}\omega_i\,(r_i - b_i) \tag{1.14}$$

On a remplacé dans la formule initiale de Brinson, Hood et Beebower (1986) W_i par ω_i.
Et la contribution de la sélection dans la classe i est alors décrite par :

$$S_i = \omega_i\,(r_i - b_i) \tag{1.15}$$

Ainsi, au final, nous décomposons $r - b = A + S$ en faisant disparaître l'interaction.

Exercice 1.3 *Calculer les nouvelles contributions de la sélection en y intégrant l'interaction à partir de l'exemple précédent.*

1.4 Attribution géométrique

L'excès de rendement arithmétique explique la valeur créée par le portefeuille par rapport au benchmark et relativement au montant initial investi qui est supposé similaire pour les 2 ; l'excès de rendement géométrique explique cette même valeur créée mais relativement au montant que l'investisseur aurait obtenu s'il avait investi dans le benchmark. Au lieu d'étudier $r - b$, nous étudions pour l'attribution géométrique $\frac{1+r}{1+b} - 1$.

Il est possible d'écrire cette formule de la manière suivante en notant g l'excès :

$$g = \frac{1+r}{1+b} - 1 = \frac{1+r}{1+b} - \frac{1+b}{1+b} = \frac{r-b}{1+b} \tag{1.16}$$

L'excès de rendement arithmétique est donc plus important pour les marchés haussiers (dans ce cas $b > 0$) que l'excès de rendement géométrique.

En outre, l'excès de rendement géométrique possède trois principes essentiels : la proportionnalité, la conversion et la composition (ce dernier principe sera important pour l'attribution de performance sur plusieurs périodes étudiée dans le prochain chapitre).

La contribution de l'allocation est alors déterminée par :

$$A^G = \frac{1+b_A}{1+b} - 1 = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i - W_i) \left(\frac{1+b_i}{1+b} - 1 \right) \tag{1.17}$$

Et la contribution de l'allocation d'actifs sur la classe i est définie par :

$$A_i^G = (\omega_i - W_i) \left(\frac{1+b_i}{1+b} - 1 \right) \tag{1.18}$$

De la même manière, la contribution de la sélection est déterminée par :

$$S^G = \frac{1+r}{1+b_A} - 1 = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \left(\frac{1+r_i}{1+b_i} - 1 \right) \frac{1+b_i}{1+b_A} \tag{1.19}$$

Et la contribution de la sélection sur la classe i est définie par :

$$S_i^G = \omega_i \left(\frac{1+r_i}{1+b_i} - 1 \right) \frac{1+b_i}{1+b_A} \tag{1.20}$$

Cette formulation est moins directe que pour l'allocation puisqu'il y a un terme supplémentaire $\frac{1+b_i}{1+b_A}$. On peut la simplifier de la manière suivante :

$$S_i^G = \omega_i \frac{r_i - b_i}{1+b_A} \tag{1.21}$$

Nous pouvons composer les effets allocation et sélection de la manière suivante :

$$\frac{1+r}{1+b} - 1 = \frac{1+r}{1+b_A} \frac{1+b_A}{1+b} - 1 = (1+S^G)(1+A^G) - 1 \tag{1.22}$$

Exercice 1.4 *Calculer les attributions géométriques à partir de l'exemple précédent.*

Chapitre 2

Le modèle de Brinson sur plusieurs périodes

2.1 Attribution géométrique

Pour les excès géométriques, la composition des rendements dans le temps est aisée puisque le principe de composition est conservé :

$$\frac{1+r}{1+b} - 1 = \prod_{t=1}^{T}(1 + A_t^G) \prod_{t=1}^{T}(1 + S_t^G) - 1 \tag{2.1}$$

Les effets totaux de chaque sous-période se cumulent donc très bien.

2.2 Attribution arithmétique et algorithme de lissage

En revanche, l'excès de rentabilité arithmétique pour une période totale ne peut pas être décomposé par les excès de rentabilité pour chaque sous-période. Les facteurs d'attribution étudiés précédemment pour l'excès arithmétique ne peuvent donc pas s'additionner pour déterminer les attributs de la performance sur une période complète. Il va falloir alors utiliser ce que l'on va appeler des algorithmes de lissage.
Nous allons étudier la méthode de Carino (1999) et du GRAP (1997).

2.2.1 Méthode de Carino

Carino (1999) va développer une méthode simple pour décomposer les rentabilités des sous-périodes en utilisant les rentabilités logarithmiques qui permettent de se composer aisément dans le temps. En effet, entre les périodes 1 jusqu'à T, nous pouvons décomposer la rentabilité totale r de la manière suivante :

$$\ln(1 + r) = \ln(1 + r_1) + \ln(1 + r_2) + \ldots + \ln(1 + r_T) \tag{2.2}$$

Carino (1999) introduit alors 2 facteurs k et k_t :

$$k = \frac{\ln(1 + r) - \ln(1 + b)}{r - b} \tag{2.3}$$

$$k_t = \frac{\ln(1 + r_t) - \ln(1 + b_t)}{r_t - b_t} \tag{2.4}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\ln(1 + r) - \ln(1 + b) = \sum_{t=1}^{T} k_t(r_t - b_t) \tag{2.5}$$

Et l'excès de rendement arithmétique :

$$r - b = \sum_{t=1}^{T} \frac{k_t}{k}(r_t - b_t) \tag{2.6}$$

Comme on peut décomposer (cf. chapitre 1) l'excès de rentabilité arithmétique de la sous-période t de la manière suivante (en intégrant l'interaction dans la sélection) $r_t - b_t = A_t + S_t$, nous obtenons la décomposition suivante pour l'excès de rentabilité arithmétique sur la période totale :

$$r - b = \sum_{t=1}^{T} \frac{k_t}{k} A_t + \sum_{t=1}^{T} \frac{k_t}{k} S_t \tag{2.7}$$

L'inconvénient de cette méthode est que si nous augmentons d'une sous-période, il nous faut recalculer le facteur k et cela fera évoluer les précédents attributs, ce qui peut sembler contre-intuitif.

Exercice 2.1 *Déterminer les 3 effets pour chacun des 4 trimestres ci-dessous de manière indépendante à l'aide du modèle de Brinson et Fachler intégrant l'interaction. Puis à l'aide de l'algorithme de lissage de Carino (1999). Cet exemple est inspiré de Bacon (2004).*

	Poids portefeuille	Poids benchmark	Rentabilité portefeuille	Rentabilité benchmark
Premier trimestre				
Actions France	40%	40%	20%	10%
Actions US	30%	20%	-5%	-4%
Actions Brésil	30%	40%	6%	8%
Deuxième trimestre				
Actions France	70%	40%	-5%	-7%
Actions US	20%	30%	3%	4%
Actions Brésil	10%	30%	-5%	10%
Troisième trimestre				
Actions France	30%	50%	-20%	-25%
Actions US	50%	40%	8%	5%
Actions Brésil	20%	10%	-15%	-20%
Quatrième trimestre				
Actions France	30%	40%	10%	5%
Actions US	50%	40%	-7%	-5%
Actions Brésil	20%	20%	25%	10%

TABLE 2.1 – Exemple d'un portefeuille et de son benchmark sur plusieurs périodes

2.2.2 Méthode du GRAP

Le GRAP (1997) propose une méthode alternative de lissage de l'excès de rendement arithmétique. Est défini tout d'abord l'excès $a_t = r_t - b_t$. Sur 2 sous-périodes, nous obtenons :

$$\begin{aligned} 1 + r &= (1 + r_1)(1 + r_2) \\ &= (1 + b_1 + a_1)(1 + b_2 + a_2) \\ &= (1 + b_1 + a_1)(1 + b_2) + (1 + b_1 + a_1)a_2 \\ &= (1 + b_1)(1 + b_2) + a_1(1 + b_2) + (1 + r_1)a_2 \\ &= (1 + b) + a_1(1 + b_2) + (1 + r_1)a_2 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$r - b = a = a_1(1 + b_2) + (1 + r_1)a_2 \tag{2.8}$$

On peut analyser cette formulation comme l'excès de rendement de la première période qui est investi dans la benchmark pour la seconde période et l'excès de rendement pour la seconde période qui est cumulé à partir du rendement du portefeuille sur la première période.
Cela peut être généralisé sur T périodes :

$$r - b = \sum_{i=1}^{T} a_i \prod_{t=1}^{i-1}(1 + r_t) \prod_{t=i+1}^{T}(1 + b_t) \tag{2.9}$$

L'excès de rendement se cumule à partir des rendements du portefeuille précédant puis se réinvestit sur le benchmark pour les périodes suivantes. Il s'ensuit, en intégrant l'interaction dans la sélection, que :

$$r - b = \sum_{i=1}^{T}(A_i + S_i) \prod_{t=1}^{i-1}(1 + r_t) \prod_{t=i+1}^{T}(1 + b_t) \tag{2.10}$$

Là encore, si l'on augmente la période, il faudra recalculer les effets de toutes les sous-périodes.

CHAPITRE 3

ATTRIBUTION MULTI-DEVISES

3.1 Un modèle simplifié

Notons S_t^i le taux de change de la monnaie i à la date t. La rentabilité de la devise s'écrit :

$$c_i = \frac{S_{t+1}^i}{S_t^i} - 1 \tag{3.1}$$

Nous pouvons écrire la rentabilité du portefeuille r considérée dans la devise de référence à l'aide des rentabilités r_i considérées aussi dans la devise de référence :

$$r = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (r_{Li} + c_i) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (r_i - c_i) + \sum_{i=1}^{n} \omega_i c_i \tag{3.2}$$

avec r_{Li} la rentabilité dans la devise locale i qui s'approxime par la formule $r_{Li} \approx r_i - c_i$ c'est-à-dire la différence entre la rentabilité de l'actif i dans la devise de référence et la rentabilité de la devise.
Nous pouvons décomposer de la même manière la rentabilité du benchmark b considéré dans la devise de référence :

$$b = \sum_{i=1}^{n} W_i b_i = \sum_{i=1}^{n} W_i (b_{Li} + c_i) = \sum_{i=1}^{n} W_i (b_i - c_i) + \sum_{i=1}^{n} W_i c_i \tag{3.3}$$

avec b_i la rentabilité considérée dans la devise de référence et b_{Li} la rentabilité dans la devise locale i qui s'approxime par la formule $b_{Li} = b_i - c_i$.
Nous pouvons alors définir la contribution individuelle pour l'effet allocation issue du modèle de Brinson et Fachler (1985) :

$$A_i = (\omega_i - W_i)(b_{Li} - b_L) \tag{3.4}$$

avec $b_L = \sum_{i=1}^{n} W_i b_{Li}$ correspondant à la rentabilité du benchmark en devise locale.
L'effet sélection intégrant l'interaction s'écrit :

$$S_i = \omega_i (r_{Li} - b_{Li}) = \omega_i (r_i - b_i) \tag{3.5}$$

Enfin, la contribution issue de la devise i est déterminée avec la même logique que l'allocation :

$$C_i = (\omega_i - W_i)(c_i - c) \tag{3.6}$$

avec $c = \sum_{i=1}^{n} W_i c_i$ qui correspond à la moyenne pondérée pour le benchmark des rentabilités des devises.

Exercice 3.1 *Déterminer les 3 attributs de performance (allocation, sélection, devise) pour le portefeuille suivant selon le modèle simplifié d'attribution multi-devises. Pour cela, il sera nécessaire de déterminer en amont les rentabilités en devise de référence (l'euro) du portefeuille et du benchmark. Cet exemple est inspiré de Bacon (2004).*

	Poids portefeuille	Poids benchmark	Rentabilité locale portf	Rentabilité locale bench	Rentabilité devise
Actions France	40%	40%	20%	10%	0
Actions US	30%	20%	-5%	-4%	15%
Actions Brésil	30%	40%	6%	8%	20%

TABLE 3.1 – Exemple d'un portefeuille, de son benchmark et des effets devises

3.2 Autres modèles plus complexes

D'autres modèles Ankrim et Hensel (1992) et Karnosky et Singer (1994) considèrent que la rentabilité d'une devise est composée de 2 éléments : le *currency surprise* inconnu à l'avance, et le *forward premium* qui lui est anticipé par le différentiel de taux d'intérêt entre les devises considérées. Ces modèles vont donc ajouter la couverture du risque de change via l'ajout de contrats forwards.

Bibliographie

Ankrim, E., Hensel, C., 1992, Multicurrency performance attribution, *Financial Analysts Journal*, 50, 29-35.

Bacon, C., 2004, *Practical portfolio performance measurement and attribution*, John Wiley & Sons.

Brinson, G., Fachler, N., 1985, Measuring non-US equity portfolio performance, *Journal of Portfolio Management*, 11, 73-76.

Brinson, G., Hood, R., Beebower, G., 1986, Determinants of portfolio performance, *Financial Analysts Journal*, 51, 39-44.

Carino, D., 1999, Combining attribution effects over time, *Journal of Performance Measurement*, 3, 5-14.

Fama, E., 1972, Components of investment performance, *Journal of Finance*, 17, 551-567.

GRAP, 1997, Synthèse des modèles d'attribution de performance, Groupe de Recherche en Attribution de Performance, Paris.

Karnosky, D., Singer, B., 1994, Global asset management and performance attribution, *Research Foundation of the Institute of Chartered Financial Analysts*, 73-76.

Markowitz, H.M., 1952, Portfolio selection, *Journal of Finance*, 7, 77-91.