#### **DIPAM**

# **GESTION STRUCTUREE**

**Pierre CLAUSS** 

# Table des matières

| INTRODUCTION    | 3  |
|-----------------|----|
| STRUCTURES OBPI | 5  |
| STRUCTURE CPPI  | 14 |
| CONCLUSION      | 18 |
| BIBLIOGRAPHIE   | 19 |
| INDEX           | 20 |

### Introduction

### Taxonomie des fonds structurés

Avant la crise des subprimes, la structuration était la *success story* de l'ingénierie financière. Univers de produits complexes développés par des ingénieurs chevronnés, elle a permis l'émergence d'une industrie financière innovante allant de la *titrisation* (opération avantageuse pour les banques pour faire sortir de leur bilan des crédits dont elles ne souhaitaient plus supporter le risque) aux *fonds structurés* et que nous allons développer dans cette formation.

La crise a révélé les excès et les limites de la structuration. Ses intérêts n'ont néanmoins pas disparu pour autant. Un de ses premiers intérêts est de pouvoir fournir à un investisseur un profil de rentabilités non linéaire, c'est-à-dire ayant une distribution des rentabilités tronquée au niveau des pertes. Pour créer ce genre de profil convexe, l'utilisation des produits dérivés peut se révéler essentiel.

Structurer peut être défini comme assembler des produits financiers dans un but précis et déterminé dès le début pour l'investisseur. Dans le cadre de la gestion d'actifs, les *fonds structurés* sont « des portefeuilles dont le profil de gain peut certes dépendre de l'évolution du marché mais qui est défini à l'avance » (Alphonse *et al.*, 2013). Les gérants de portefeuille peuvent être avides de ces produits certes complexes mais leur fournissant une protection plus ou moins importante de capital. Ils peuvent les faire développer par des Banques de Financement et d'Investissement mais aussi les construire par eux-mêmes. Il faut donc savoir les auditer dans le premier cas pour éviter de payer un prix trop élevé, et savoir les construire dans le second cas.

Nous pouvons définir deux grandes familles de fonds structurés :

- i. les fonds à base d'options (*Option-Based Portfolio Insurance* OBPI) qui sont caractérisés par un engagement ferme sur la garantie de capital et la performance délivrée à la maturité à l'aide des produits dérivés; une formule mathématique permet de déterminer cet engagement. On les appelle ainsi *fonds à formule*. Trois types de fonds à formule existent: les fonds garantis (100% garantis), les fonds protégés (moins de 100% garantis) et les fonds à promesse qui n'offrent aucune garantie mais une asymétrie attractive de couple performance/garantie (par exemple une promesse de gain de 10% maximum avec une protection du capital jusqu'à une baisse non pas de 10% mais de 20% du sous-jacent).
- ii. les fonds à base d'une *gestion à coussin* (*Constant Proportion Portfolio Insurance* CPPI). L'engagement est alors ferme seulement sur la garantie de capital mais il n'y a pas de formule mathématique déterminant la performance. Ces fonds structurés sont gérés de manière active contrairement aux précédents gérés de manière passive.

Les produits structurés peuvent être raffinés bien entendu (utilisation d'options asiatiques, options à barrière, call spread ou options américaines concernant les *fonds* à *formule* – cliquets ou multiplicateur dynamique concernant les fonds à base d'une *gestion* à *coussin*). Mais la philosophie de la formation est bien d'être précis sur les éléments fondamentaux de portefeuilles simples pour pouvoir comprendre plus facilement les produits exotiques ou hybrides. Nous allons donc nous intéresser aux structures OBPI avec formule vanille et CPPI classique. Pour cela, nous allons utiliser un même exemple lors des 2 chapitres qui traiteront des structures OBPI et CPPI. Nous définissons un horizon de gestion T égal à 2 ans ainsi qu'une valeur plancher  $F_T$  en-dessous de laquelle la valeur du portefeuille ne doit pas se trouver à l'horizon. Nous choisissons de garantir le capital initial du portefeuille à savoir  $F_T = V_0 = 100$  avec  $V_0$  la valeur initiale du portefeuille garanti. Le taux d'intérêt est supposé constant et égal à  $r_f = 2\%$  par an. Nous supposons enfin qu'il n'y a pas de coûts de transaction. Nous discrétisons enfin par souci de simplicité les 2 années en 8 sous-périodes distinctes.

### Chapitre 1

### Structures OBPI

#### 1. Définition

Définissons tout d'abord la valeur plancher sous laquelle nous ne souhaitons pas descendre pour assurer un portefeuille. Elle n'est pas fixe pour toute la période : en effet, pour garantir  $F_T=100\,$  dans 2 ans, il est nécessaire de garantir avant T la valeur actualisée du plancher. Ainsi en  $t\leq T$ , nous avons :

$$F_t = \frac{F_T}{\left(1 + r_f\right)^{T - t}}$$

Pour assurer un portefeuille, on peut investir dans un actif sans risque la valeur actualisée du plancher. Si on investit  $F_0 = 96.12$  dans un actif sans risque, nous aurons la garantie d'avoir  $F_T = 100$  dans les 2 ans avec le taux de 2%.

Néanmoins, l'investisseur souhaite en plus de la garantie profiter de la potentielle hausse des marchés actions. On va donc investir le capital qui nous reste au départ (aussi appelé coussin), c'est-à-dire 100-96.12=3.88 en actif risqué. Et il existe un produit financier qui permet d'obtenir une hausse beaucoup plus importante que son sous-jacent, si ce dernier augmente : c'est le call européen. En effet, grâce à son effet de levier, si l'on investit 3.88 en call, on gagnera plus si le sous-jacent augmente que si on investit directement dans le sous-jacent. L'objectif est la garantie et la participation à la hausse donc on peut se permettre d'investir entièrement le reliquat 3.88 dans la prime du call pour peut-être la perdre entièrement. On peut donc risquer ce qui reste du portefeuille, donc le coussin initial, c'est-à-dire 3.88, en étant certain de garantir dans les 2 ans 100% du capital initial investi.

Le portefeuille ainsi géré est un fonds fermé à capital garanti, c'est-à-dire qu'on structure l'allocation au départ et on ne la change plus jusqu'à l'horizon.

**Définition 1.1** Une première méthode d'assurance de portefeuille à base d'options consiste à acheter un actif sans risque garantissant le capital à la maturité, et pour profiter de la hausse, à investir le reste en calls européens de même maturité et de strike égal à  $F_T$ . Rappelons le prix d'un call à l'aide de la formule de Black et Scholes :  $C_t = S_t \Phi(d_1) - Ke^{-r_f(T-t)}\Phi(d_2)$  avec  $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[ \left( r_f - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T-t) + \ln \frac{S_t}{K} \right]$  et  $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$ .

**Définition 1.2** Une seconde méthode d'assurance de portefeuille à base d'options consiste à investir dans un actif risqué couvert par des puts européens sur cet actif de même maturité et de strike à déterminer pour assurer le capital. Rappelons le prix d'un put :  $P_t = -S_t \Phi(-d_1) + Ke^{-r_f(T-t)}\Phi(-d_2)$ .

#### Preuve.

La parité call-put permet d'obtenir l'équivalence entre investir dans un call plus un actif sans risque et investir dans un put plus son sous-jacent.

Les stratégies optionnelles sont aussi dénommées *Option Based Portfolio Insurance* (OBPI), et sont des *structures* simples permettant de garantir le capital d'un portefeuille d'actifs risqués. La première méthode d'assurance de portefeuille à base d'options a été introduite par Leland et Rubinstein en 1976. Elle consistait à utiliser la seconde méthode OBPI à base du puts. Ce furent les premiers produits structurés.

#### 2. Propriétés de garantie et de participation à la hausse

Nous notons  $V_t$  pour  $0 \le t \le T$  la valeur de la stratégie OBPI (indistinctement à base de calls ou de puts). L'échéance de la garantie est notée T. Nous supposons que le capital garanti  $F_T$  est égal à la valeur initiale  $V_0$  de la stratégie.

**Propriété 1.1** La stratégie OBPI call a un payoff en T défini par  $V_T = V_0 + g * (S_T - F_T)^+$  avec  $g = \frac{V_0 - F_0}{C_0}$  appelé le « gearing ». Ce dernier correspond à la part de call qu'il est possible d'acquérir avec le reliquat  $V_0 - F_0$ .

- i. La stratégie garantit de façon certaine le capital  $V_0$  à l'échéance si le marché est baissier  $(S_T < F_T)$ .
- ii. En outre, si le marché est haussier  $(S_T > F_T)$ , la stratégie va profiter sensiblement de la hausse à hauteur de  $V_0 + (S_T F_T) * g$ .

**Propriété 1.2** La stratégie OBPI put a un payoff en T défini par  $V_T = \frac{V_0}{S_0 + P_0} * [S_T + (K - S_T)^+].$ 

- i. La stratégie garantit de façon certaine le ratio  $\frac{K}{S_0 + P_0}$  du capital initial  $V_0$  si le marché est inférieur à K (il peut être haussier avec  $F_T < S_T < K$ ). Pour garantir 100% du capital  $V_0$  à l'échéance, il est suffisant de définir un strike supérieur ou égal à  $S_0 + P_0^{-1}$ .
- ii. En outre, si le marché est supérieur à K, la stratégie va profiter sensiblement de la hausse à hauteur de  $S_T * \frac{V_0}{S_0 + P_0}$ . Dans le cas où la garantie est de 100%, la participation à la hausse devient  $S_T * \frac{V_0}{K}$ . Mais dans le cas où la garantie est inférieure à 100%, la valeur de la stratégie va se trouver au-dessus de la garantie mais inférieure à  $V_0$  pour  $S_T < S_0 + P_0$ .

**Remarque** Si le strike augmente, la garantie augmente mais en contrepartie, puisque le put est plus cher, la participation à la hausse diminue.

#### Preuve.

La valeur de la stratégie OBPI put  $V_t$  peut être écrite  $V_t = S_t + P_t$ . Mais rien n'assure à ce que cette somme soit égale à la valeur de l'investissement initial dans cette stratégie. Il faut donc normaliser la valeur de la stratégie OBPI put et déterminer :

$$V_t = V_{t-1} * \frac{P_t + S_t}{P_{t-1} + S_{t-1}}$$

Par récurrence, nous obtenons le payoff final en fonction des valeurs initiales :

<sup>&</sup>lt;sup>1</sup> Strike déterminé par méthode numérique.

$$V_T = V_0 * \frac{S_T + P_T}{S_0 + P_0} = \frac{V_0}{S_0 + P_0} * [S_T + (K - S_T)^+]$$

Nous pouvons déterminer alors la garantie de la stratégie OBPI put à l'échéance :

$$V_{T} = \frac{V_{0}}{S_{0} + P_{0}} * \left[ S_{T} + (K - S_{T})^{+} \right]$$

$$= \frac{V_{0}}{S_{0} + P_{0}} * \left[ K + (S_{T} - K)^{+} \right]$$

$$\geq \frac{V_{0}}{S_{0} + P_{0}} * K$$

Donc la garantie du capital initial  $V_0$  est bien égale à  $\frac{K}{S_0 + P_0}$ .

#### Exemple 1.1 - Comparaison des stratégies OBPI call et OBPI put

Il est intéressant de résumer les payoffs des 2 stratégies OBPI de l'exemple précédent suivant la valeur du portefeuille actions. Les 2 stratégies assurent bien le portefeuille et la stratégie OBPI call est préférable pour un sous-jacent final inférieur à 126.91. Dépassé cette valeur, l'OBPI put profite plus de la hausse. Nous avons calculé cette valeur seuil à l'aide de méthodes numériques annulant les deux payoffs  $V_T$  définis dans les Propriétés 1.1 et 1.2.

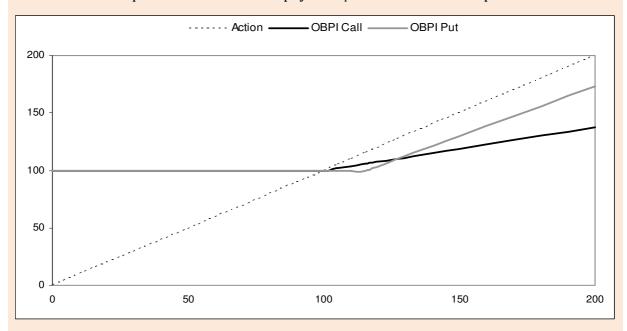


Figure 1.1 - Payoffs finaux des 2 stratégies suivant la valeur du sous-jacent

#### 3. Limites

La limite principale apparaît lorsqu'il n'existe pas de produits dérivés sur le sous-jacent géré. Cela peut être le cas lorsque le sous-jacent à garantir est un portefeuille alloué activement par le gérant. Il n'existe pas alors de produits dérivés standards.

La solution est soit de demander à des spécialistes de créer ce produit dérivé sur-mesure, soit de répliquer soi-même la stratégie optionnelle à l'aide d'une allocation en actif monétaire et en sous-jacent. Néanmoins, cette réplication n'assurera pas parfaitement le portefeuille.

Partant de la stratégie OBPI et utilisant le *pricing* du put de Black et Scholes, nous obtenons  $\forall t < T$ :

$$V_t = S_t + P_t = S_t \Phi(d_1) + Ke^{-r_f(T-t)}\Phi(-d_2)$$

Cette expression nous permet de déterminer les allocations du portefeuille OBPI en actions et en actif monétaire qui permettent de répliquer la stratégie optionnelle OBPI. En effet, le poids de l'action est déterminé par le rapport entre la valeur de l'action dans le portefeuille OBPI et la valeur totale de ce portefeuille, c'est-à-dire :  $\frac{S_t \Phi(d_1)}{V_t} = \frac{S_t \Phi(d_1)}{S_t + P_t}$ .

Cette stratégie revient donc à investir en t  $\frac{S_t \Phi(d_1)}{S_t + P_t}$  en actions et le reste en actif monétaire.

Pour éviter des rebalancements trop fréquents, il est possible d'ajouter une tolérance quantifiant l'écart entre l'ancienne allocation en actions et la nouvelle en-dessous duquel il n'y a pas de rebalancement.

Les autres limites de ces stratégies OBPI sont consécutives à l'évaluation de produits dérivés. En effet, les hypothèses de leur évaluation peuvent poser problème (volatilité constante, diffusion gaussienne).

En outre, les coûts de transaction peuvent être parfois importants dans le cadre de la réplication de la stratégie optionnelle.

#### 4. Mise en œuvre pratique

Pour comprendre la mise en œuvre pratique de ces structures optionnelles, nous allons tester ces stratégies à l'aide d'une discrétisation simple pour bien en comprendre les enjeux.

A partir de l'exemple commun à cette section, il faut ajouter l'hypothèse fondamentale de la valeur de la volatilité, que nous décidons de fixer à 15% pour les exemples qui vont suivre. Pour la stratégie à base de calls, le *gearing* est alors égal à 37.38%². Pour la stratégie à base de puts, nous avons fixé le strike à 115.31 pour obtenir une garantie de 100%. A l'aide de méthodes numériques simples, nous obtenons  $\frac{K}{S_0+P_0} = \frac{115.31}{100+15.31} = 1$ .

Pour bien comprendre le comportement des stratégies OBPI, nous avons défini un scénario de baisse pour l'actif action à garantir et nous étudions les évolutions des stratégies avec call, put et par réplication. Pour simplifier les calculs, nous avons évalué l'action et les produits dérivés sous probabilité risque-neutre.

Nous fixons  $V_0=100$ . Pour  $1 \le t \le T$ , nous déterminons les valeurs des stratégies de la manière suivante :

- 1. Pour la stratégie OBPI call  $V_t = F_t + g * C_t$
- 2. Pour la stratégie OBPI put  $V_t = V_{t-1} * \frac{S_t + P_t}{S_{t-1} + P_{t-1}}$
- 3. Pour la réplication  $V_t = V_{t-1} * \left[ e_{t-1}^a \frac{S_t}{S_{t-1}} + (1 e_{t-1}^a) \frac{F_t}{F_{t-1}} \right]$  avec  $e_t^a = \Phi(d_{1,t}) \frac{S_t}{S_t + P_t}$

Nous pouvons ajouter un seuil de tolérance tol en-dessous duquel il n'y a pas de rebalancement pour la réplication. Ainsi, l'exposition sur l'action devient  $e^p_{t-1} = e^p_{t-2} + 1_{|e^a_{t-1}-e^p_{t-2}|>tol} * \left[e^a_{t-1}-e^p_{t-2}\right]$  pour  $2 \le t \le T$ et avec  $e^p_0 = e^a_0$ . Nous appelons « action exante » le poids calculé par  $\Phi(d_1)$  et « action ex-post » celui défini avec la tolérance.

En tendance baissière, les stratégies protègent bien le capital. La réplication aussi. Si des chutes plus prononcées avaient été observées sur les différentes sous-périodes, le fait de ne réallouer que tous les 3 mois aurait pu être préjudiciable.

DipAM 10

-

 $<sup>^2</sup>$  Nos exemples sont à titre pédagogique : un *gearing* inférieur à 1 peut donc surprendre mais dans la réalité le capital à garantir est très supérieur à 100 ; en conséquence, le reliquat pour acheter les calls sera fortement supérieur à  $C_0$  : nous pourrons donc acheter plusieurs calls.

Tableau 1.1 – Stratégie OBPI à base de calls

| t    | Date    | Plancher | Action | Call  | OBPI   |
|------|---------|----------|--------|-------|--------|
|      |         |          |        |       | (call) |
| 0    | Début   | 96.12    | 100    | 10.39 | 100    |
| 0.25 | 3 mois  | 96.59    | 105    | 12.88 | 101.41 |
| 0.5  | 6 mois  | 97.07    | 95     | 6.05  | 99.34  |
| 0.75 | 9 mois  | 97.56    | 102    | 9.14  | 100.97 |
| 1    | 1 an    | 98.04    | 98     | 5.85  | 100.23 |
| 1.25 | 15 mois | 98.53    | 94     | 3.05  | 99.67  |
| 1.5  | 18 mois | 99.01    | 90     | 1.01  | 99.39  |
| 1.75 | 21 mois | 99.51    | 89     | 0.21  | 99.59  |
| 2    | 2 ans   | 100      | 86     | 0     | 100    |

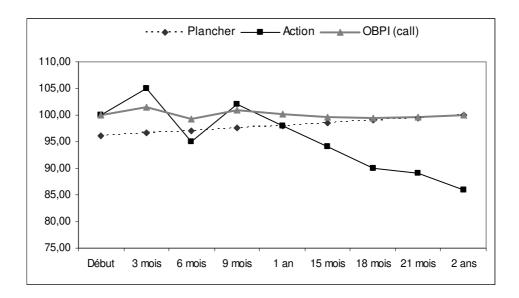


Figure 1.2 – Stratégie OBPI à base de calls

Tableau 1.2 – Stratégie OBPI à base de puts

| t    | Date    | Plancher | Action | Put   | OBPI   |
|------|---------|----------|--------|-------|--------|
|      |         |          |        |       | (put)  |
| 0    | Début   | 96.12    | 100    | 15.31 | 100    |
| 0.25 | 3 mois  | 96.59    | 105    | 12.09 | 101.54 |
| 0.5  | 6 mois  | 97.07    | 95     | 18.83 | 98.72  |
| 0.75 | 9 mois  | 97.56    | 102    | 13.58 | 100.23 |
| 1    | 1 an    | 98.04    | 98     | 16.47 | 99.27  |
| 1.25 | 15 mois | 98.53    | 94     | 20.03 | 98.89  |
| 1.5  | 18 mois | 99.01    | 90     | 24.21 | 99.05  |
| 1.75 | 21 mois | 99.51    | 89     | 25.74 | 99.50  |
| 2    | 2 ans   | 100      | 86     | 29.31 | 100    |

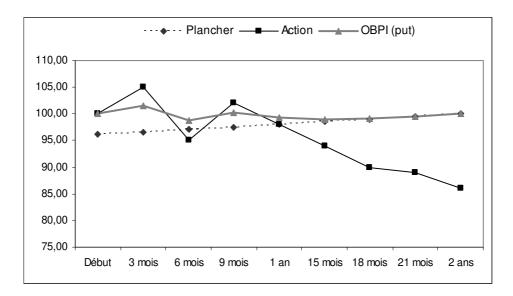


Figure 1.3 – Stratégie OBPI à base de puts

Tableau 1.3 – Stratégie OBPI à base d'une réplication (tolérance fixée à 10%)

|      | berategie obi ra base a ane reprieation (tolerance intee a 1070) |          |        |            |            |               |
|------|------------------------------------------------------------------|----------|--------|------------|------------|---------------|
| t    | Date                                                             | Plancher | Action | Action ex- | Action ex- | OBPI          |
|      |                                                                  |          |        | ante       | post       | (réplication) |
| 0    | Début                                                            | 96.12    | 100    | 30.62%     | 30.62%     | 100           |
| 0.25 | 3 mois                                                           | 96.59    | 105    | 37.85%     | 30.62%     | 101.88        |
| 0.5  | 6 mois                                                           | 97.07    | 95     | 17.69%     | 17.69%     | 99.26         |
| 0.75 | 9 mois                                                           | 97.56    | 102    | 27.27%     | 17.69%     | 100.95        |
| 1    | 1 an                                                             | 98.04    | 98     | 16.31%     | 17.69%     | 100.67        |
| 1.25 | 15 mois                                                          | 98.53    | 94     | 6.75%      | 6.75%      | 100.35        |
| 1.5  | 18 mois                                                          | 99.01    | 90     | 1.13%      | 6.75%      | 100.53        |
| 1.75 | 21 mois                                                          | 99.51    | 89     | 0.03%      | 6.75%      | 100.92        |
| 2    | 2 ans                                                            | 100      | 86     | -          | -          | 101.15        |

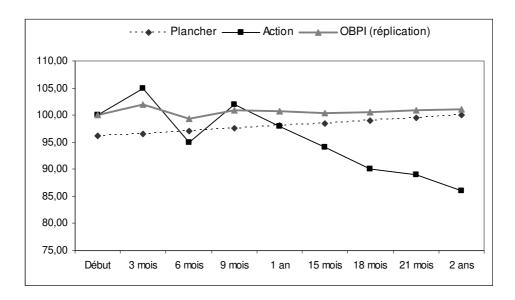


Figure 1.4 – Stratégie OBPI à base d'une réplication

### Chapitre 2

### Structure CPPI

#### 1. Définition

Reprenons l'exemple du portefeuille composé d'un actif sans risque garantissant le capital à échéance 2 ans. Dans la stratégie OBPI, nous avions utilisé le reliquat, à savoir 3.88, pour acheter des calls. Ce reliquat, que nous appelons aussi *coussin*, peut être investi également en actif risqué, que nous supposons ici être des actions. Nous n'allons pas utiliser, contrairement aux stratégies optionnelles précédentes, des options ou la réplication d'options.

Si nous plaçons en actions seulement le coussin, nous faisons l'hypothèse implicite que le marché actions peut subir une perte de -100% en un seul jour (en supposant que l'allocation évolue quotidiennement), ce qui est peu vraisemblable. Ainsi, il est donc possible de *risquer plus* que le coussin à hauteur de la perte maximale potentielle que pourrait subir le marché actions. Nous dénommons cette stratégie la stratégie *Constant Proportion Portfolio Insurance* (CPPI).

Pour estimer la perte potentielle en valeur absolue ou *indice de stress*, il est classique d'introduire la notion de temps de retour  $\tau$  de cette perte, fixé généralement entre 30 et 50 ans.  $\tau$  permet alors de définir la probabilité qui déterminera le quantile de perte maximale tolérable pour la stratégie du coussin. Cette probabilité est égale à  $\frac{1}{252*\tau}$ , 252 correspondant au nombre de jours généralement tradés sur un an. Il est très important d'estimer précisément cet indice de stress car la probabilité est très faible. Et si nous ne sommes pas assez précis et que nous sous-estimons cet indice de stress (ce qui peut être le cas avec la loi Gaussienne par exemple), la gestion peut être catastrophique et ne plus assurer le capital. Supposons que ce dernier vaille 20% pour un temps de retour  $\tau=50$  ans. Ceci signifie que le marché subit une perte inférieure à -20% une fois tous les 50 ans. Le marché peut donc

perdre en une journée au maximum -20% et non pas -100%. En d'autres termes, sur un portefeuille de valeur 100, on peut perdre au maximum 20 ; comme dans notre portefeuille, on peut perdre au maximum 3.88, on résout le produit en croix suivant :

20 de perte maximale pour un investissement de 100

3.88 de perte maximale pour un investissement de x

Ainsi,  $x = 3.88 * \frac{100}{20} = 3.88 * 5 = 19.40$ . On peut donc s'exposer à un niveau d'actions de 19.40 avec un risque minimisé.

L'inverse de l'indice de stress  $\frac{100}{20} = 5$  s'appelle le multiplicateur. Si on investit en actif risqué 19.40, on est relativement certain de perdre au maximum 3.88 et on sera en-dessous du plancher seulement une fois tous les 50 ans.

L'exposition notée e en actions est donc un multiplicateur m du coussin c: e = c \* m = 3.88 \* 5 = 19.40. Le reste est investi en actif monétaire. La valeur du coussin évolue au cours du temps avec l'évolution du plancher, capitalisé, et celle de l'actif risqué.

Le multiplicateur  $m=\frac{e}{c}$  va donc évoluer aussi. Il doit rester en théorie constant (ce qui explique le « Constant Proportion » de l'acronyme CPPI). Néanmoins pour éviter les rebalancements trop fréquents, il est communément déterminé une tolérance sur le multiplicateur m (par exemple 10%).

Plus le multiplicateur est faible, plus la garantie est certaine; plus le multiplicateur est élevé, plus le portefeuille profite de la hausse du marché actions.

Si la valeur de l'action s'élève et que le gain en valeur est plus important que celui avec l'actif sans risque, alors le coussin va s'élever plus que l'exposition et donc le multiplicateur va diminuer. Il va falloir augmenter le multiplicateur et donc la part actions : le gérant CPPI est un *momentum* trader (la stratégie est alors convexe).

Il est possible d'ajouter à la gestion CPPI des *cliquets* permettant lorsque le marché est à la hausse d'augmenter le plancher : ainsi, si la valeur de l'actif risqué s'élève puis redescend, les cliquets permettront de profiter de la hausse initiale et non pas juste de garantir la baisse.

#### 2. Mise en œuvre pratique

Fixons le multiplicateur à 5, ce qui correspond à un indice de stress de 20%. Pour simplifier les calculs dans la discrétisation, nous supposons que l'indice de stress est valable pour un trimestre. En réalité, le gérant CPPI manage son allocation plus régulièrement.

La tolérance est fixée à 10% donc il n'y a pas de rebalancement pour un multiplicateur entre 4.5 et 5.5.

Précisons les calculs qui vont suivre. Soit  $V_t$  la valeur de la stratégie CPPI. Nous fixons  $V_0 = 100$ . Pour  $1 \le t \le T$ , nous avons :

$$V_{t} = e_{t}^{a} + \left(V_{t-1} - e_{t-1}^{p}\right) * \frac{F_{t}}{F_{t-1}} = e_{t-1}^{p} * \frac{S_{t}}{S_{t-1}} + \left(V_{t-1} - e_{t-1}^{p}\right) * \frac{F_{t}}{F_{t-1}}$$

avec  $e^a_t = e^p_{t-1} * \frac{S_t}{S_{t-1}}$  l'exposition ex-ante et  $e^p_t$  l'exposition ex-post calculée suivant le seuil de tolérance noté tol défini sur le multiplicateur et pour  $2 \le t \le T$ :

$$e_{t-1}^p = \begin{cases} 0 & \text{si } c_{t-1} < 0 \\ m_{t-1} * c_{t-1} & \text{si } m_0(1-tol) \le m_{t-1} \le m_0(1+tol) \\ m_0 * c_{t-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

Précisons que  $m_{t-1} = \frac{e_{t-1}^a}{c_{t-1}} = \frac{e_{t-1}^a}{V_{t-1} - F_{t-1}}$ .

Nous pouvons synthétiser les étapes pour le calcul du CPPI de la manière suivante :

- i. A partir de  $m_0$  et  $c_0$ , on peut déterminer  $e_0^p = m_0 * c_0$
- ii. Ceci nous permet de calculer  $e_1^a \Rightarrow V_1 \Rightarrow c_1 \Rightarrow m_1 \Rightarrow e_1^p$
- iii. Puis nous avons  $e_2^a \Rightarrow V_2 \Rightarrow c_2 \Rightarrow m_2 \Rightarrow e_2^p$  et ainsi de suite jusqu'à la maturité T En baisse, comme la perte extrême définie par l'indice de stress n'est pas dépassée (normalement seulement une fois tous les 50 ans), la stratégie CPPI protège le capital.

Tableau 2.1 – Stratégie CPPI

| t    | Date    | Plancher | Action | Coussin | Multiplicateur | Exposition ex- | Exposition ex- | CPPI   |
|------|---------|----------|--------|---------|----------------|----------------|----------------|--------|
|      |         |          |        |         |                | ante           | post           |        |
| 0    | Début   | 96,12    | 100    | 3,88    | 5,00           | 19,42          | 19,42          | 100,00 |
| 0,25 | 3 mois  | 96,59    | 105    | 5,52    | 4,27           | 20,39          | 23,88          | 101,37 |
| 0,5  | 6 mois  | 97,07    | 95     | 0,43    | 8,98           | 21,61          | 12,04          | 99,48  |
| 0,75 | 9 mois  | 97,56    | 102    | 0,70    | 3,98           | 12,92          | 16,23          | 100,80 |
| 1    | 1 an    | 98,04    | 98     | 0,42    | 6,13           | 15,60          | 12,73          | 100,58 |
| 1,25 | 15 mois | 98,53    | 94     | 0,24    | 6,18           | 12,21          | 9,88           | 100,50 |
| 1,5  | 18 mois | 99,01    | 90     | 0,14    | 6,24           | 9,46           | 7,58           | 100,53 |
| 1,75 | 21 mois | 99,51    | 89     | 0,12    | 5,35           | 7,50           | 7,50           | 100,91 |
| 2    | 2 ans   | 100,00   | 86     | 0,08    | 6,47           | 7,24           | 5,59           | 101,12 |

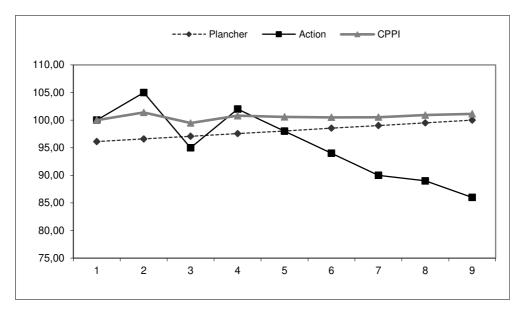


Figure 2.1 – Stratégie CPPI

### Conclusion

La structuration est un vaste domaine de la gestion de portefeuille que nous avons souhaité introduire par les structures les plus anciennes et les plus connues, à savoir celles qui ont pour objectif de garantir le capital.

Nous avons développé théoriquement et concrètement les deux types de stratégies les plus usitées pour assurer un portefeuille : l'OBPI et le CPPI. La première a l'avantage d'utiliser, lorsque c'est possible, des produits dérivés vanilles ; la seconde nécessite l'estimation non triviale d'un coefficient multiplicateur mais permet une gestion plus flexible et active que l'OBPI.

# Bibliographie

Alphonse P., Desmuliers G., Grandin P. & Levasseur M., 2013, *Gestion de Portefeuille et Marchés financiers*, Pearson.

Clauss P., 2011, Gestion de Portefeuille, Dunod.

Portait R. & Poncet P., 2009, Finance de Marché, Dalloz.

Roncalli T., 2010, La Gestion d'Actifs Quantitative, Economica.

# Index

| A                        | M                                     |
|--------------------------|---------------------------------------|
| Action · 9, 10, 15       | Momentum · 15                         |
| C                        | 0                                     |
| CPPI · 4, 14, 15, 16, 17 | OBPI · 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 |
|                          | Option · 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12    |
| E                        |                                       |
|                          | S                                     |
| Effet de levier · 5      |                                       |
|                          | Subprimes (crise des) · 3             |
| L                        |                                       |
|                          | V                                     |
| Loi                      |                                       |
| Normale · 14             | Volatilité · 9, 10                    |