1 Produits dérivés

Outre lever des fonds à l'aide des actions et des obligations, les entreprises ont besoin de s'assurer contre les incertitudes sur les prix qu'elles peuvent subir. Pour cela, elles vont utiliser un autre type de produit que l'on appelle produits dérivés, car dérivés des produits de base : actions, obligations, mais aussi matières premières, devises, etc. Ces produits existent depuis longtemps mais leur échange s'est amplifié avec l'ouverture du premier marché organisé des options de gré à gré à Chicago en 1973 et la publication la même année de l'article de Black et Scholes *The Pricing of Options and Corporate Liabilities* publié en juin 1973 dans le Journal of Political Economy. Ils s'apparentent à des produits d'*échange de risque* ou encore d'*assurance* pour les entreprises contre les incertitudes grandissantes de l'époque sur les prix des instruments financiers fondamentaux.

Ces nouveaux instruments n'étaient pas si *nouveaux* que cela (cf. Bernstein [1]). L'innovation était non pas dans leur fonction mais dans leur distribution au travers de marchés organisés, ainsi que la formalisation de leur prix. En effet, dans l'Antiquité, Aristote raconte dans le livre I de *La Politique* l'histoire de Thalès le Milésien. Ce philosophe, instruit des astres, lut un hiver dans le ciel que la récolte d'olives à l'automne prochain serait très supérieure à la récolte habituelle. Il se garantit alors la priorité sur l'utilisation pour l'automne des presses de la région en échange d'une petite somme d'argent. Il négocia des prix faibles de location car la récolte était éloignée et personne ne prévoyait ce que Thalès anticipait. Lorsque l'automne arriva et que la récolte fût exceptionnelle, il y eût une très importante demande de presses. Thalès sous-loua celles qu'il détenait, pour un prix faible négocié l'hiver, à un prix beaucoup plus conséquent et devint ainsi riche. Cette histoire est la première sur l'utilisation d'*option d'achat*, l'un des produits dérivés les plus communs aujourd'hui.

Les produits dérivés peuvent être de deux natures différentes : les contrats à terme et les options négociables.

1.1 Contrats à terme

Une opération à terme est une opération au comptant différée dans le temps. L'acheteur et le vendeur se mettent d'accord sur les conditions d'un échange, qui s'effectuera à une date future (maturité) précisée par le contrat à terme. L'échange *doit* être exécuté. Le prix de l'échange est fixé à la date d'élaboration du contrat mais l'échange d'argent n'est effectif qu'à la maturité.

Par exemple, un industriel français achète en dollars des biens d'équipement aux États-Unis. Ces biens ne sont pas encore construits et donc livrables 2 ans plus tard. Or le prix a été fixé aujourd'hui à 1000\$. L'industriel français, qui a une trésorerie en euros, doit convertir le prix des équipements en dollars. Supposons que le taux de change cote aujourd'hui à 1 EUR$=1$\$, l'industriel a besoin donc de 1000 EUR. Or cette *conversion* a le temps en 2 ans d'évoluer défavorablement pour l'industriel. Il va donc acheter un contrat à terme qui lui garantit le prix en dollars (contre euros) négocié aujourd'hui pour dans 2 ans. Il se couvre contre un risque de change. Si le cours du dollar s'élève, le taux de change vaut alors à la maturité par exemple 1 EUR$=0.5$\$, et l'industriel est protégé : la contrepartie lui fournira 1000\$ contre 1000 EUR ; le contrat à terme lui permettra de payer ses biens non pas 2000 EUR (comme le voudrait le taux de change à la maturité) mais 1000 EUR (le prix aujourd'hui). Dans le cas contraire, comme l'échange est obligatoire, l'évolution favorable de baisse du dollars, par exemple à 1 EUR$=2$\$ (l'euro s'apprécie), n'avantagera pas l'industriel français (il aurait pu payer le bien 500 EUR).

Le prix fixé aujourd'hui et correspondant au montant échangé à maturité d'un contrat à terme peut être calculé sans modélisation du cours du sous-jacent (devise dans notre exemple). En effet, nous utilisons le principe essentiel d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) sur les marchés, par lequel il est impossible de gagner de l'argent à coup sûr avec un investissement nul. Les *arbitragistes* contraignent à l'unicité des prix des produits dérivés : deux stratégies qui donnent le même flux à maturité ont la même valeur à n'importe quelle date précédant la maturité.

Soit $F_t(S,T)$ le prix fixé par contrat à la date t auquel sera négocié le sous-jacent S à la maturité T. On l'appelle le prix *forward*. Soit en outre $B(t,T)$ le prix en t d'un *zéro-coupon*, qui est un instrument financier qui rapporte 1 à la maturité T. Pour se garantir de détenir le sous-jacent S en T, nous avons le choix entre 2 stratégies :

— souscrire un contrat à terme en t et verser $F_T(S,T)$ en T contre le titre S,

— acheter le titre S en t et le conserver jusqu'en T.

Ces 2 stratégies conduisent au même flux S_T en T. Pour garantir le paiement du contrat *forward* en T, il faut acheter la quantité $F_t(S,T)$ de zéro-coupon, qui permettra de détenir à maturité le montant $F_T(S,T)$. A partir de l'égalité des flux à tout moment (AOA), nous avons :

$$F_t(S,T) * B(t,T) = S_t$$

et donc le montant échangé à la maturité du contrat à terme est fixé aujourd'hui ($t = 0$) à :

$$F_0(S,T) = \frac{S_0}{B(0,T)}$$

1.2 Options négociables

Les options négociables sont des contrats permettant (il n'y a pas obligation) à son détenteur d'acheter (*call*) ou de vendre (*put*) une certaine quantité de biens à un cours fixé à la signature du contrat, appelé prix d'exercice (*strike*) K à la date T, maturité de l'option (cas des options *européennes*) ou jusqu'à T (cas des options *américaines*).

Dans le cas de l'exemple de l'industriel français achetant un bien en dollars, il peut acheter une option d'achat européenne aujourd'hui, au lieu d'un contrat à terme, lui donnant le droit, suivant la situation à maturité, d'acheter les $1000\$$ à 1000 EUR en T. Si le cours du dollar s'élève, alors il aura intérêt à exercer son option d'achat. Dans le cas contraire, il n'exerce pas son option et paye donc 500 EUR, ce qui est intéressant puisque la couverture protège de la hausse du dollar et donc l'industriel peut aussi, avec cet instrument, profiter de sa baisse. Cette différence, par rapport au contrat à terme, a cependant un coût puisque

l'acheteur de l'option paye une prime à la signature du contrat. Le risque est limité à la prime payée. Cette dernière nécessite pour son calcul une modélisation plus complexe que la simple utilisation *statique* de l'AOA. En effet, le flux final (*payoff*) est plus complexe que celui du contrat à terme puisqu'il a un caractère optionnel et que la trajectoire du sous-jacent est à prendre en compte dans l'évaluation du prix de l'option.
L'objet de la suite du cours est non pas d'entrer dans les détails complexes de calcul stochastique de la prime d'une option (pour cela nous nous référons aux livres de Dana et Jeanblanc-Picqué [3], Lamberton et Lapeyre [4], et Musiela et Rutkowski [5]) mais d'en comprendre la logique sous-jacente. Nous nous intéresserons seulement à l'évaluation d'un call européen dans le cadre de Black et Scholes, sans entrer dans les calculs mais en en développant les concepts essentiels.

1.2.1 Payoff d'un call européen

Avant toutes choses, tentons d'exprimer le flux final ou payoff d'un call européen. A la maturité, en T, le profit réalisé par l'acheteur de l'option dépend de la valeur du sous-jacent par rapport au prix d'exercice du call. En effet, si la valeur du sous-jacent $S_T > K$, le détenteur du call exerce l'option puisque le sous-jacent est devenu trop cher. Il gagne donc la différence $S_T - K$, s'il revendait sur le marché, par exemple, instantanément le sous-jacent acheté au prix K et de valeur de marché S_T.
Au contraire, si $S_T \leq K$, il n'a aucun intérêt à exercer l'option d'achat, puisque le sous-jacent est moins cher sur le marché. Dans ce cas, il ne gagne rien (il a seulement payé la prime en 0).
Au final, nous pouvons exprimer le gain ou payoff final comme le maximum entre $S_T - K$ et 0. Le payoff dépend donc de la valeur du sous-jacent à la maturité, par essence imprévisible. Ainsi :

$$\text{payoff} = \max(S_T - K, 0) = (S_T - K)^+$$

Nous voyons bien que l'acheteur d'un call européen anticipe donc une hausse du sous-jacent et se couvre ainsi contre le risque de hausse du marché. De manière symétrique, le vendeur anticipe une baisse (objectif de percevoir la prime sans que l'option s'exerce). Cette logique est valable aussi pour le put : l'acheteur se couvre contre une baisse du sous-jacent.

1.2.2 Effet de levier

Le gain pour un call $S_T - K$ possible est sans commune mesure avec celui fait sur le sous-jacent, relativement à l'investissement initial. Ce phénomène s'appelle l'effet de levier. Lorsque l'on achète le sous-jacent d'un call à la monnaie en t de maturité T, la rentabilité est égale à :

$$r_{t|T} = \frac{S_T}{S_t} - 1$$

Lorsque l'on achète le call, la rentabilité est :

$$r^c_{t|T} = \frac{(S_T - K)^+}{C_t} - 1$$

Si $S_T > K$, alors le call est exercé et la rentabilité devient :

$$r^c_{t|T} = \frac{S_T - K}{C_t} - 1$$

Si $S_T < K$, alors le call n'est pas exercé et la rentabilité devient :

$$r^c_{t|T} = -100\%$$

Soit l'application numérique suivante : $S_t = 98$, $K = 100$ et $C_t = 4.8$.

Dans le cas où $S_T = 107$:

$$r_{t|T} = \frac{107}{98} - 1 = 9.2\%$$

$$r^c_{t|T} = \frac{107 - 100}{4.8} - 1 = 45.8\%$$

Dans le cas où $S_T = 100$:

$$r_{t|T} = \frac{100}{98} - 1 = 2.4\%$$

$$r^c_{t|T} = \frac{100 - 100}{4.8} - 1 = -100\%$$

L'achat de call est donc beaucoup plus risqué, à cause de l'effet de levier induit.

1.2.3 Probabilité d'exercer un call

La probabilité d'exercer le call est intégrée dans un indicateur appelé le Delta Δ qui exprime la sensibilité de la variation du prix du call relativement à celle du sous-jacent. Cette sensibilité évolue au cours du temps, et plus elle est proche de 1, plus l'exercice est probable. Nous pouvons associer les valeurs du Δ à la probabilité d'exercer le call ainsi qu'au payoff probable, dans les trois cas de figure suivants :

Δ	Probabilité d'exercice	Payoff probable	Position
$\Delta \to 1$	Forte	$S_T > K$	Dans la monnaie
$\Delta \to 0.5$	Aussi faible que forte	$S_T = K$	A la monnaie
$\Delta \to 0$	Faible	$S_T < K$	En dehors de la monnaie

TABLE 1 – Delta et probabilité d'exercice

L'objectif du spéculateur va être d'acheter en dehors de la monnaie : en effet, le produit dérivé est alors peu cher, car la probabilité d'exercice est faible et la possibilité de gain importante, si le sous-jacent monte pour un call, baisse pour un put. L'effet de levier associé au produit dérivé permet alors de forts gains. Ceci explique pourquoi les échanges sur les produits dérivés ont explosé : ceci n'est pas seulement dû à leur utilisation par les entreprises mais aussi à celle faite par les spéculateurs.

1.2.4 Évaluation d'un call européen Black-Scholes

Le prix du call européen C_0 aujourd'hui est (nous ne décrivons pas ici les différents calculs qui aboutissent à ce résultat) :

$$C_0 = x\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_0)$$

avec $x = S_0$, $\Phi(.)$ la fonction de répartition de la loi Normale centrée et réduite,
$d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \ln\frac{x}{K}\right]$ et $d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T}$.
Pour tout $t < T$, nous avons :

$$C_t = S_t\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_0)$$

avec $d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \ln\frac{S_t}{K}\right]$ et $d_1 = d_0 + \sigma\sqrt{T-t}$.

Ceci correspond à la formule fermée d'évaluation du prix d'un call européen dans le cadre de la modélisation de Black et Scholes.
Des modèles plus raffinés pour le *pricing* de produits dérivés ont été mis en place comme ceux à volatilité stochastique (Heston) par exemple prenant en compte la caractère non gaussien des actifs financiers. Ceci n'est pas l'objet de ce cours.

1.2.5 Volatilité implicite

Les agents des marchés financiers évaluent les calls et puts non pas à l'aide de leur prime mais à l'aide de l'unique paramètre pouvant être évalué différemment suivant les agents dans l'évaluation de Black-Scholes : σ. Et l'on va parler alors de volatilité implicite, déterminée comme la valeur de la volatilité que les agents ont utilisée pour pricer le produit dérivé. La relation entre prime du call, et du put, et volatilité implicite est positive : plus la volatilité implicite sera élevée, plus les agents anticiperont une variabilité importante et donc une incertitude du marché plus forte, et plus il coûtera cher d'acheter un produit dérivé étant donnée l'incertitude élevée concernant la valeur du sous-jacent à maturité.

Il est intéressant en outre de préciser que la volatilité implicite n'est pas constante suivant la position du strike par rapport à la valeur du sous-jacent : à la monnaie, la volatilité implicite est la plupart du temps à son point le plus bas, et plus on s'éloigne de la monnaie, plus elle est élevée. On appelle ce phénomène le *smile* de volatilité.

Ce *smile* se révèle être souvent un *skew*. Ainsi, pour les sous-jacents actions, la volatilité implicite est plus élevée pour des valeurs du sous-jacent faibles (achat de puts pour se couvrir contre la baisse des marchés) que pour des valeurs élevées (achat de calls). En effet, la demande de couverture contre la baisse du marché est plus forte que celle contre la hausse : les agents seront plus sensibles au risque de baisse qu'au risque de hausse. Pour les sous-jacents matières premières, on trouve souvent un *skew* inverse puisque les agents qui s'approvisionnent en *commodities* vont se couvrir contre une hausse des prix.

1.2.6 Stratégies de couverture du risque en delta statique

Ici, nous développons une stratégie particulière de couverture du risque qui est celle de la couverture du risque en delta statique. Bien entendu d'autres stratégies de ce type existent. L'objectif de cette section est donc de proposer une stratégie immunisant le portefeuille d'investissement des pertes potentielles. Pour couvrir le risque de marché d'un portefeuille, uns solution classique est d'utiliser un call sur ce portefeuille.

En effet, la valeur d'un portefeuille V_t composé d'un call et de son sous-jacent est en 0 $V_0 = \alpha C_0 + \beta S_0$. Ce portefeuille est insensible au cours du sous-jacent si le portefeuille a une variabilité par rapport au sous-jacent nulle, c'est-à-dire si $\frac{\partial V_0}{\partial S} = \alpha \frac{\partial C_0}{\partial S} + \beta = 0$. Or l'indicateur Delta du call en 0 est $\Delta_0 = \frac{\partial C_0}{\partial S} = \Phi(d_1)$ et donc nous obtenons : $\beta = -\alpha \Phi(d_1)$. Le portefeuille de couverture est donc composé de l'achat d'un call par exemple et de la vente de $\Phi(d_1)$ sous-jacent.

Si nous fixons ce Delta pour toute la période d'immunisation (la proportion de sous-jacents est donc fixée à Δ_0), nous produisons une couverture statique non optimale car le Delta a besoin d'être ajusté au cours du temps et de l'évolution du sous-jacent. Cette couverture non dynamique peut être améliorée à l'aide d'une couverture dynamique qui dépasse le cadre de ce cours.

Dans l'atelier, vous allez utiliser une option d'achat sur l'indice CAC 40 à la monnaie et de maturité 3 mois dans le but de construire un portefeuille de couverture statique pour les 3 mois à venir. A l'aide de simulations Monte Carlo, vous déterminez alors si la diminution des risques encourus est significative.

1.3 Credit Default Swap

Etudions le plus simple des produits dérivés de crédit et qui doit être considéré comme l'élément de base de produits plus exotiques : le Credit Default Swap ou CDS (cf. Braouézec et Brun [2] pour plus de précisions sur les produits dérivés de crédit).

C'est un contrat financier conclu de gré à gré, pour une durée et un montant (notionnel) déterminés, et référencé sur un emprunteur bien défini. Dans ce contrat, l'acheteur de protection paie périodiquement lors de N dates une prime s (appelée aussi spread ou marge) tandis que le vendeur de protection s'engage à payer, en cas de défaut de l'emprunteur de référence, un montant compensant la perte résultant du défaut à hauteur du montant notionnel. Le CDS permet ainsi le transfert de risque de crédit. La protection est valable jusqu'à la maturité du swap T.

Un raisonnement simple d'absence d'opportunité d'arbitrage permet d'approximer la marge d'un CDS par le spread d'une obligation à taux variable de même maturité, ayant les mêmes dates de tombée de coupons et émise par l'emprunteur de référence du CDS.

Il est possible d'évaluer aussi cette marge plus précisément à l'aide des hypothèses d'un modèle à intensité constante. L'objectif est alors de calculer la marge s^* du CDS en 0 qui s'obtient en égalisant les jambes fixe, correspondant aux flux payés par l'acheteur de protection tant qu'il n'y a pas de défaut, et variable, correspondant au flux payé par le vendeur de protection en cas de défaut. Nous obtenons alors l'égalité suivante, que nous appelons le *triangle du crédit* qui définit le *fair* spread s^* :

$$s^* = (1 - \delta)\bar{\lambda}$$

avec δ le taux de recouvrement de l'obligation sous-jacente et λ l'intensité constante de défaut de cette obligation. Cette intensité est liée à la probabilité de défaut PD de maturité T. Il est alors possible d'extraire des probabilités de défaut à partir du *triangle du crédit* :

$$P^D = 1 - \exp\left(-\frac{s}{1-\delta}T\right)$$

Les CDS (plus précisément les CDS senior) étant assez liquides, nous pouvons extraire l'intensité de défaut implicite au *pricing* des CDS pour estimer une probabilité de défaut implicite relativement juste, pour l'émetteur sous-jacent et pour une maturité donnée.

Dans l'atelier, à partir des spreads de CDS de 2 entreprises pour différentes maturités, extraire les probabilités de défaut implicites. Supposer que les CDS ont été évalués avec un taux de recouvrement égal à 40%.

Références

[1] BERNSTEIN, P., 1995, *Des Idées Capitales*, PUF, Quadrige.

[2] BRAOUEZEC, Y. & BRUN, J., 2007, *Dérivés de Crédit Vanille et Exotiques*, Revue Banque Édition.

[3] DANA, R. & JEANBLANC-PICQUE, M., 1998, *Marchés Financiers en Temps Continu - Valorisation et Equilibre*, Economica.

[4] LAMBERTON, D. & LAPEYRE, B., 1991, *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, Mathématiques et Applications, Ellipses.

[5] MUSIELA, M. & RUTKOWSKI, M., 1997, *Martingale Methods in Financial Modelling*, Applications of Mathematics, Springer.