

L'EVALUATION ET LA MODELISATION DU RISQUE DE CREDIT PAR LES BANQUES DANS LE CONTEXTE BALOIS

Pierre Clauss

Responsable pôle modèles risques de crédit à BNP Paribas Banque Commerciale en France

Maître de conférences associé à l'Université Paris-Saclay

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	3
LA PROBABILITE DE DEFAULT ET LA NOTATION DES ENTREPRISES	6
1. MESURE DU TAUX DE DEFAULT	7
2. ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE DEFAULT A PARTIR DES CARACTERISTIQUES DES ENTREPRISES.....	8
<i>Notation des agences</i>	8
<i>Credit scoring</i>	10
3. ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE DEFAULT A PARTIR DES PRIX DE MARCHE DES ENTREPRISES	14
<i>Modèle structurel.....</i>	14
<i>Modèle à forme réduite.....</i>	16
4. SYSTEME DE NOTATION, MIGRATIONS DE CREDIT ET POUVOIR DE DISCRIMINATION	20
<i>Migrations de crédit au sein d'un système de notation.....</i>	20
<i>Pouvoir de discrimination d'un système de notation.....</i>	22
LA PERTE ET L'EXPOSITION EN CAS DE DEFAULT.....	26
5. LA PERTE EN CAS DE DEFAULT.....	27
<i>Mesure de la LGD.....</i>	27
<i>Estimation de la LGD</i>	28
6. L'EXPOSITION AU DEFAULT	36
<i>Mesure de l'EAD et du CCF</i>	36
<i>Estimation de l'EAD et du CCF.....</i>	38
LES CORRELATIONS ET LA CREDITVAR D'UN PORTEFEUILLE DE CREANCES	39
7. MESURE DE LA CORRELATION DES DEFAULTS.....	40
<i>Corrélation à partir des modèles de pricing.....</i>	40
<i>Corrélation et dépendance de queue.....</i>	41
8. ESTIMATION DES CORRELATIONS D'UN PORTEFEUILLE DE CREANCES ET DE LA CREDITVAR ASSOCIEE	44
<i>Estimation des corrélations et de la CreditVaR à l'aide de copules.....</i>	44
<i>Estimation des corrélations et de la CreditVaR à partir d'un modèle à un facteur.....</i>	46
9. DETERMINATION DES EXIGENCES EN FOND PROPRES	49
<i>Les différentes classes d'actifs réglementaires</i>	49
<i>Distinction entre différentiation et quantification du risque de crédit.....</i>	49
<i>Approche interne bâloise</i>	51
REFERENCES	56

INTRODUCTION

Le risque de crédit est inhérent à l'activité bancaire. Il correspond au risque qu'un emprunteur n'honore pas le remboursement d'une dette ou le paiement des intérêts qui y sont liés. Il est pour une banque le principal risque auquel elle fait face¹. Evaluer le risque de crédit s'avère donc une activité essentielle pour une banque. En effet, si elle prêtait sans vérifier au préalable les garanties de remboursement de ses clients ou sans ajuster ses conditions de crédit à l'environnement économique par exemple, cela la mettrait inévitablement en difficulté. En pratique, cette évaluation du risque de crédit est divisée en plusieurs éléments d'un puzzle, dont nous allons essayer de donner la reconstitution la plus claire.

Car contrairement au risque de marché, le risque de crédit ne s'observe pas aisément. Le risque de marché, rappelons-le, évalue le risque de perte dû aux variations des valeurs de marché des actifs en portefeuille. Pour l'évaluer, nous avons à disposition les variations historiques des pertes et profits des actifs : par exemple, l'historique des valeurs quotidiennes de l'indice CAC 40 permet d'évaluer le risque auquel serait exposé un investisseur du CAC 40. En risque de crédit, les prêts que la banque a en portefeuille n'ont en grande majorité pas subi de pertes dans le passé et la valeur de leur solvabilité n'est pas observable comme l'est la valeur d'une action en Bourse : il n'y a donc pas d'historique quotidien de pertes et profits sur ces prêts, historique à partir duquel on aurait pu évaluer le risque de crédit. L'évaluation du risque de crédit est donc moins directe que celle du risque de marché : on va alors passer par le truchement d'éléments, ou paramètres, qui vont nous aider à le capturer. Ces éléments vont être évalués à partir de prêts ayant eu par le passé des dégradations de solvabilité pouvant aller jusqu'au défaut et ayant de fortes similitudes avec ceux détenus en portefeuille.

Le premier élément est la notation du client et la probabilité de défaut associée. Noter une contrepartie et, ce qui est son corrolaire, calculer sa probabilité de défaut, est incontournable

¹ On inclut dans le risque de crédit le risque de contrepartie (*Counterparty credit risk* en anglais), c'est-à-dire le risque que la contrepartie d'un contrat financier ne soit pas en mesure de respecter son engagement. Le risque de contrepartie étant présent spécifiquement dans les opérations de marché, nous ne l'avons pas considéré dans cette formation.

lorsque l'on souhaite évaluer le risque de crédit et octroyer un prêt. Une entreprise² mal notée, donc ayant un risque non négligeable d'insolvabilité, aura une probabilité plus forte de ne pas rembourser la banque prêteuse qu'une entreprise bien notée. La collecte de données ainsi que l'avancée des connaissances en modélisation mathématique ont permis ces dernières années d'améliorer cette évaluation. Notation et probabilité de défaut feront l'objet de la partie 1.

Le deuxième élément est relatif au montant engagé par le prêt, où l'on distingue l'exposition totale de la banque au défaut potentiel de sa contrepartie et la perte que subirait la banque si la contrepartie faisait défaut. Ce sont les paramètres d'exposition au défaut (*Exposure at default* ou EAD en anglais) et de perte en cas de défaut (*Loss given default* ou LGD en anglais). EAD et LGD feront l'objet de la partie 2.

Enfin, le dernier élément du puzzle de l'évaluation du risque de crédit est la corrélation entre les créances que la banque détient. En effet, les entreprises sont liées entre elles plus ou moins fortement : si une crise atteint un secteur industriel en particulier par exemple, les entreprises de ce secteur pourront, quelle que soit leur santé financière particulière, subir des difficultés pour rembourser leurs prêts. Pour une banque, il est alors primordial d'évaluer la corrélation entre ses créances. Détenir un portefeuille de créances diversifié peut s'avérer bénéfique pour diminuer le risque de crédit : c'est le principe bien connu de la diversification développé par Harry Markowitz dans les années 1950 et qualifié par Bernstein (1992) d'« intuition la plus célèbre de l'histoire moderne de la finance et de l'investissement ». Un concept lié à la diversification du portefeuille est sa *granularité*, favorisée par les règles prudentielles bâloises, à savoir constituer un portefeuille composé d'engagements nombreux et de montant proche. La corrélation fera l'objet de la partie 3. Dans cette dernière section, nous étudierons également l'évaluation du risque de décrit via la CreditVaR³.

² Nous considérerons comme emprunteurs dans cette formation les entreprises, même si la généralisation aux particuliers ou à d'autres catégories d'emprunteurs pourra parfois être faite.

³ Evaluer le risque de crédit demande de mobiliser des notions mathématiques poussées. En effet, l'observation peut parfois être parcellaire ou biaisée, et nécessite alors l'utilisation d'un modèle mathématique. La modélisation, c'est-à-dire la construction mathématique d'une réalité observée, est indispensable pour pallier ces insuffisances empiriques. Nous aurons une attention particulière dans cette formation pour qu'un lecteur non familier avec les développements mathématiques puisse néanmoins en appréhender les tenants et aboutissants. Pour aller plus loin sur les notions mathématiques abordées, nous conseillons les ouvrages en français de Portait et Poncet (2014), Roncalli (2009), et celui en langue anglaise de Löffler et Posch (2007).

Après avoir réuni toutes les pièces du puzzle, nous pourrions terminer par nous concentrer sur les concepts et définitions pour évaluer les fonds propres bâlois exigés pour une banque à l'aide de modèles internes.

LA PROBABILITE DE DEFAUT ET LA NOTATION DES ENTREPRISES

Lorsqu'une banque prête à une entreprise, évaluer la probabilité qu'elle ne puisse pas honorer le paiement des intérêts et le remboursement du principal est indispensable pour déterminer le taux d'intérêt du prêt et calculer les provisions et les fonds propres à mettre en face de ce prêt : on appelle cette probabilité la probabilité de défaut (PD).

Une approche préalable pour appréhender cette probabilité est de calculer le taux de défaut sur une population et une période données. Le taux de défaut se mesure à partir des défauts réalisés dans le passé. L'estimation de la PD va apporter une information supplémentaire : elle va aider à expliquer et prédire le défaut potentiel des entreprises à partir de leurs caractéristiques. On peut distinguer deux grandes familles d'estimation de la PD. Soit on passe par la notation d'une entreprise à l'aide d'une analyse financière, comme le font les agences de notation, ou à l'aide du *credit scoring*, et on en déduit la PD ; soit on extrait la PD de prix de marché (actions, obligations, *Credit default swaps*) évalués à l'aide de modèles mathématiques. Nous étudierons dans ce dernier cadre le modèle structurel et le modèle à forme réduite. Les PD et notations forment ce que l'on appelle un système de notation dont on pourra observer les migrations et évaluer le pouvoir de discrimination.

1. MESURE DU TAUX DE DEFAUT

Le taux de défaut mesure le nombre de contreparties ayant fait défaut, sur une période donnée, relativement au nombre de contreparties saines détenues en portefeuille au début de la période. Considérons un portefeuille de créances constitué de 100 entreprises différentes. Si à la fin de l'année par exemple, sur ces 100 entreprises, 3 ont fait défaut, c'est-à-dire qu'elles ont eu des retards de paiement⁴ ou ont été dans l'incapacité de rembourser le prêt, alors le taux de défaut mesuré sur ce portefeuille sur un horizon d'un an est égal à 3%.

Les agences de notation et les instituts statistiques nationaux fournissent des taux de défaut sur la population des entreprises. En recueillant dans le tableau 1 quelques taux de défaut calculés sur une population d'entreprises notées par l'agence S&P, on remarque que ces derniers varient entre un point bas de 0.15% en 1981 (la première année fournie par S&P) et un maximum de 4.19% en 2009, soit un an après le début de la crise financière.

Tableau 1 - Taux de défaut pour quelques années fournis par S&P (2020a)

	Taux de défaut des entreprises à un an
Année 1981	0.15%
Année 2009	4.19%
Année 2019	1.30%

Source : S&P (2020a, Table 1)

Au-delà de la mesure brute du taux de défaut, il va être nécessaire pour évaluer le risque de crédit d'aller plus loin avec l'estimation de la probabilité de défaut. Cette dernière va nous permettre d'expliquer et de prédire la défaillance d'une entreprise en portefeuille à l'aide d'une expertise financière et quantitative.

⁴ Retards de plus de 90 jours dans le cadre bâlois.

2. ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE DEFAUT A PARTIR DES CARACTERISTIQUES DES ENTREPRISES

L'évaluation par la notation (dénommée par la suite également note, classe, échelon, grade ou encore *rating* en anglais) et par le *credit scoring* part du constat que la probabilité de défaut d'une entreprise dépend de facteurs tels que son chiffre d'affaires, son levier, sa rentabilité, pour n'en citer que certains. L'analyste financier d'une agence de notation, à partir de ces différents facteurs, va pouvoir donner une notation à l'entreprise et la PD associée à une notation sera déterminée par le taux de défaut observé pour cette notation ; le statisticien d'une banque de son côté va pouvoir donner un *score* qui sera lié mathématiquement à une PD.

NOTATION DES AGENCES

Les premières agences de notation se sont développées avec la révolution industrielle aux Etats-Unis dans la seconde moitié du XIXe siècle pour accompagner le développement entre l'Est et l'Ouest (en particulier du réseau ferroviaire) et la distance accrue entre entreprises emprunteuses de l'Ouest et banques prêteuses de l'Est des Etats-Unis. Les premières agences de notation ont donc pallié l'asymétrie d'information qui augmentait du fait de l'éloignement. C'est dans la première moitié du XXe siècle que les trois principales agences de notation vont s'imposer : Moody's, S&P Global Ratings (fusion en 1941 de Standard Statistics et de Poor's) et Fitch Ratings.

Les *ratings* des agences de notation sont déterminés sur la base d'audits comptables et financiers supposés indépendants et transparents. Ces ratings sont en général présentés sous la forme d'une ou plusieurs lettres, voire de signes + et -, symbolisant la qualité de crédit de l'émetteur de la dette. Cet ensemble de notations forme l'échelle de notation. On peut distinguer les *ratings* de court-terme (d'horizon égal ou inférieur à 1 an) et les *ratings* de long-terme. On différencie généralement dans ces échelles de notation deux catégories : *investment grade* et *sub-investment grade* ou *speculative grade* (cf. tableau 2). La première catégorie (entre AAA et BBB pour l'agence S&P) contient des contreparties ayant un risque peu élevé à modéré de défaut. La seconde catégorie (de BB à CCC pour S&P) contient des contreparties ayant un risque de défaut plus important.

Tableau 2 - Notations principales de long-terme (hors défaut) des agences de notation S&P, Fitch Ratings et Moody's

	S&P Global Ratings Fitch Ratings	Moody's
<i>Investment grade</i>	AAA	Aaa
	AA	Aa
	A	A
	BBB	Baa
<i>Speculative grade</i>	BB	Ba
	B	B
	CCC	Caa

Source : S&P (2020b), Fitch Ratings (2010) et Moody's (2010)

Les *ratings* sont définis à l'aide d'une analyse de la compétitivité de la contrepartie, de la qualité de son management, de sa gouvernance, de la situation de son marché et de son secteur d'activité, ainsi que de ratios financiers. Ces ratings sont suivis régulièrement et les évolutions de l'entreprise doivent être intégrées via des *upgrade* (amélioration) ou *downgrade* (dégradation) de la notation. Les *outlooks* (positifs ou négatifs) permettent également de donner une tendance dans l'appréciation de la qualité de crédit, sans changer la notation instantanément.

Enfin, les probabilités de défaut correspondent aux taux de défaut mesurés pour un horizon donné et pour des contreparties ayant la même notation au début de la période d'observation. Elles peuvent être calculées en fonction de la zone géographique, du secteur, ou encore du type de contrepartie. Dans le tableau 3, la PD à 1 an des contreparties notées A est de 0.05% : cela signifie que parmi toutes les contreparties notées A au début de l'année, 0.05% ont fait défaut à la fin de l'année en moyenne sur la période 1981-2019. Cette PD est multipliée par 7 à l'horizon 4 ans, à 0.35%. Ces PD sont calculées de manière empirique à l'aide des historiques de notations et de défauts des agences de notation. A ce stade donc, l'estimation de la PD correspond au taux de défaut mesuré par notation.

**Tableau 3 - Probabilités de défaut cumulées mesurées à différents horizons
(en %) pour les entreprises notées par S&P entre 1981 et 2019**

Notation	PD 1 an	PD 2 ans	PD 3 ans	PD 4 ans
AAA	0.00	0.03	0.13	0.24
AA	0.02	0.06	0.12	0.21
A	0.05	0.14	0.23	0.35
BBB	0.16	0.45	0.78	1.17
BB	0.61	1.92	3.48	5.05
B	3.33	7.71	11.55	14.58
CCC	27.08	36.64	41.41	44.10

Source : S&P (2020a, tableau 24)

CREDIT SCORING

Le *credit scoring* est une alternative très utilisée par les banques pour déterminer un *score* qui détermine une PD. Ces modèles peuvent être développés pour n'importe quel type de contrepartie : Etats, entreprises de grande taille, PME, particuliers. Une différence majeure entre ces types de contreparties repose sur la fréquence des défauts : on parle de *Low default portfolio* (LDP) pour les Etats et les grandes entreprises et de *High default portfolio* (HDP) pour les PME et les particuliers. Construire une notation à l'aide d'une analyse financière comme le font les agences de notation sera aisée et pertinent pour les LDP, alors que les modèles statistiques de *credit scoring* pourront s'appliquer autant aux LDP qu'aux HDP (les techniques statistiques seront néanmoins différentes pour les LDP⁵).

Un *score* est défini à partir de variables explicatives du défaut issues d'informations comptables, financières ou encore de comportements de compte. Plusieurs techniques de *scoring* sont utilisées pour estimer la PD : l'analyse discriminante linéaire de Fisher pour la plus ancienne (utilisée par Altman dans son Z-score défini en 1968), la régression logistique

⁵ Seront utilisées des techniques de rééquilibrage du nombre de défauts, dites techniques d'*oversampling* en *machine learning*. Pour les LDP, on trouve aussi des méthodes dites de « shadow rating » tentant de répliquer les notes des agences par des modèles statistiques.

pour la plus utilisée encore aujourd'hui, et des techniques de *machine learning* plus poussées. Nous renvoyons pour une revue de ces méthodes à Lessmann *et al.* (2015).

Z-score de Altman

A l'origine, Altman (1968) développe son score pour des entreprises industrielles entre 1 et 25 millions de dollars d'actifs. Le résultat de ses recherches est le score suivant :

$$Z = 1.2 * X_1 + 1.4 * X_2 + 3.3 * X_3 + 0.6 * X_4 + 0.999 * X_5$$

avec X_1 le ratio du fonds de roulement sur le total des actifs, X_2 le ratio des réserves sur le total des actifs, X_3 le ratio du résultat d'exploitation (EBIT en anglais⁶) sur le total des actifs, X_4 le ratio de la capitalisation boursière sur le total des dettes et X_5 le ratio du chiffre d'affaires sur le total des actifs.

Si le Z-score est inférieur à 1.81, il y a une très forte probabilité de faire défaut pour l'entreprise ; si le Z-score est compris entre 1.81 et 2.99, l'entreprise est en zone grise ; et enfin si le Z-score est supérieur à 2.99, l'entreprise peut être considérée en bonne santé financière. La probabilité de défaut est estimée à un horizon de 2 ans. On observe ici trois notations induites par le *scoring* de Altman : défaut, zone grise et saine. D'autres Z-scores ont été développés pour les secteurs non-industriels ou les marchés émergents (cf. Altman, 2000). Même si ce Z-score est encore utilisé, la régression logistique va permettre plus de latitude pour construire des modèles de *scoring* adaptés au portefeuille de clients de la banque qui le développe.

La régression logistique

Nous supposons que pour une entreprise i , le défaut est modélisé par une variable y_i binaire, égale à 1 (entreprise en défaut) ou égale à 0 (entreprise saine). Considérons en premier lieu le modèle linéaire suivant :

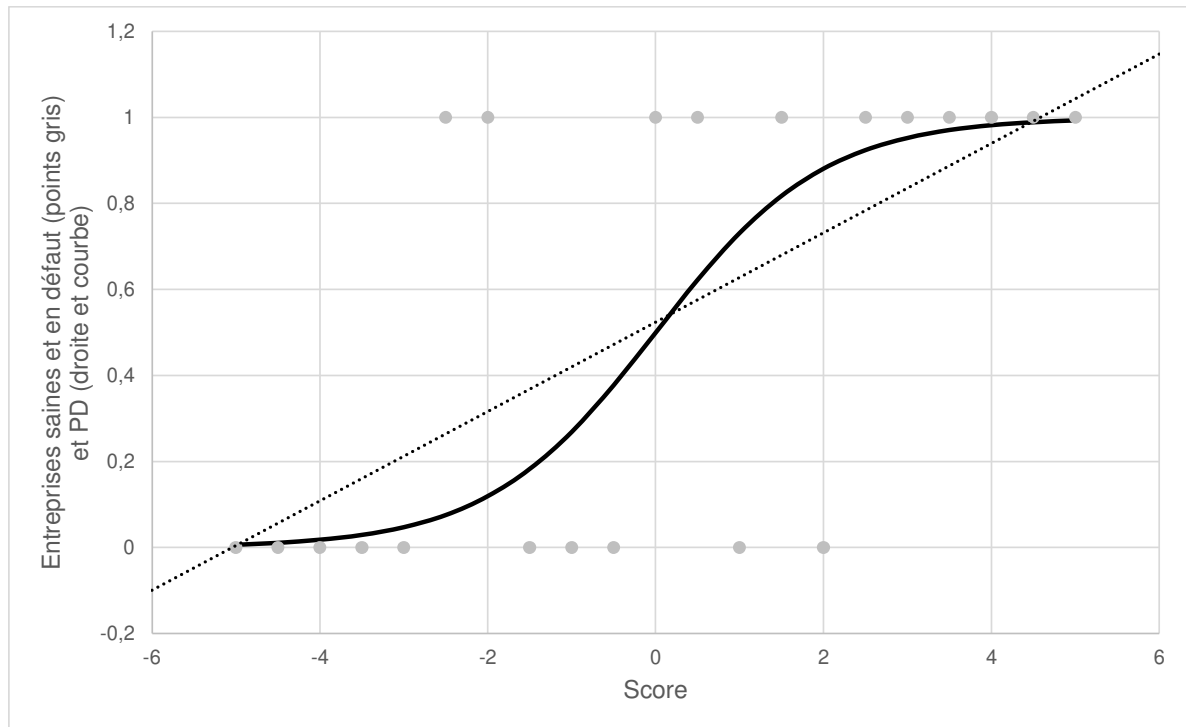
$$y_i = x_i\beta + u_i$$

avec x_i un vecteur ($1 \times K$) de variables caractéristiques de l'entreprise i associées au vecteur ($K \times 1$) des paramètres β et u_i un résidu aléatoire. La non adéquation de ce modèle linéaire est illustrée par la figure 1. Nous y avons représenté les entreprises suivant qu'elles sont en défaut (point gris d'ordonnée égale à 1) ou saines (point gris d'ordonnée égale à 0).

⁶ EBIT : *Earnings before interest and taxes*

La variable binaire du défaut (soit 0 soit 1 représenté donc par les points gris) est difficilement captée par une droite (en pointillé). Il va falloir utiliser une courbe (en trait plein) qui se rapproche des points gris : c'est la fonction logistique que l'on va définir plus bas et qui va lier la PD et le score, représenté sur l'axe horizontal des abscisses et déterminé à partir des variables caractéristiques de l'entreprise.

Figure 1 - Fonction logistique



Pour utiliser cette fonction logistique, il est donc nécessaire d'introduire un score. Si l'on reprend la figure 1, nous observons qu'une majorité de défauts apparaît pour un score positif ; les entreprises saines quant à elles obtiennent en majorité un score négatif. Le score permet d'introduire une règle de décision : s'il est supérieur à 0, alors il y a défaut ; s'il est inférieur à 0, il n'y a pas défaut. Cette règle de décision n'est pas déterministe : il arrive qu'il y ait défaut pour un score négatif. On introduit donc une partie aléatoire à la règle de décision via ce qu'on appelle une variable latente. Elle est notée y_i^* et est définie par :

$$\begin{cases} y_i = 1 & \text{si } y_i^* > 0 \\ y_i = 0 & \text{si } y_i^* \leq 0 \end{cases}$$

où $y_i^* = x_i\beta + u_i$. Cette variable latente va suivre un modèle linéaire et sa partie $x_i\beta$ correspond au *score* de la contrepartie i . On ne modélise plus la variable binaire elle-même,

comme on aurait pu le faire avec le modèle linéaire défini au départ, mais les probabilités de réalisation des événements $\{y_i = 1\}$ et $\{y_i = 0\}$ à l'aide du score :

$$\begin{cases} P(y_i = 1) = P(y_i^* > 0) = P(u_i > -x_i\beta) = 1 - \Lambda(-x_i\beta) = \Lambda(x_i\beta) = \Lambda(score_i) \\ P(y_i = 0) = P(y_i^* \leq 0) = P(u_i \leq -x_i\beta) = \Lambda(-x_i\beta) = 1 - \Lambda(x_i\beta) = 1 - \Lambda(score_i) \end{cases}$$

avec Λ la fonction de répartition des résidus u_i qui est définie par la loi logistique dans le cadre de la régression logistique (dit aussi modèle Logit). Elle est plus facile à manipuler que ses alternatives la loi normale (on parle alors de modèle Probit) et la loi de Gompertz (modèle Gompit). A l'aide de la loi logistique, nous pouvons écrire la PD pour l'entreprise i de la manière suivante (en rappelant que le défaut apparaît lorsque $y_i = 1$) :

$$PD_i = \Lambda(score_i) = \Lambda(x_i\beta) = \frac{\exp(x_i\beta)}{1 + \exp(x_i\beta)} = \frac{1}{1 + \exp(-x_i\beta)}$$

Précisons que les valeurs des paramètres estimés β n'ont pas d'intérêt en soi, seul leur signe est une information pertinente : en effet, il indique si la variable associée (ratio financier par exemple) influence la PD à la hausse ou à la baisse (cf. Davidson et Mackinnon, 1993, et Thomas, 2000, pour aller plus loin, et Löffler et Posch, 2007, pour une application de la régression logistique aux données financières de Altman). Enfin, il sera possible de traduire ces scores et PD dans le système de notation de la banque (les notations seront traduites en intervalles de PD comme nous le verrons plus bas).

3. ESTIMATION DE LA PROBABILITE DE DEFAULT A PARTIR DES PRIX DE MARCHE DES ENTREPRISES

On peut également utiliser les prix de marché des entreprises pour en extraire une PD. Pour cela, des modèles mathématiques vont schématiser le processus du défaut et permettre le *pricing* de titres de dette des entreprises. Nous allons étudier deux types de modèles : le modèle structurel et le modèle à forme réduite.

MODELE STRUCTUREL

Le modèle structurel, appelé aussi modèle de la firme, est un modèle de valorisation d'une entreprise à partir de sa structure financière qui permet d'estimer la probabilité de défaut des entreprises cotées. L'approche structurelle a été initiée par Merton en 1974 (Haworth, 2004), popularisée dans les années 90 par les entreprises KMV (rachetée par Moody's en 2002) avec l'outil *Credit Monitor* en 1993 (Crosbie et Bohn, 2003) et JP Morgan avec l'outil *CreditMetrics* en 1997 (Finger, 2002). Elle est fondée sur la modélisation de l'évolution du bilan économique de l'entreprise. Le défaut apparaît si l'entreprise est dans l'impossibilité de rembourser sa dette. Le risque de défaut est alors modélisé en utilisant les principes de *pricing* des options de Black et Scholes (1973).

Modélisation du défaut de la firme

On définit la valeur de la firme V_t en t comme l'actif du bilan de la firme. On définit aussi le passif du bilan de la firme comme la somme de sa valeur actionnariale E_t et de la valeur de sa dette D_t . Ainsi, l'actif étant égal au passif, $V_t = E_t + D_t$. La valeur actionnariale se présente sous la forme d'actions et la dette sous la forme d'un zéro-coupon de maturité T et de nominal D .

A maturité, il y a défaut si la valeur de la firme V_T est inférieure à la dette D que la firme doit rembourser aux créanciers. Ainsi, les détenteurs de créances reçoivent $\min(V_T, D)$ et le reliquat est versé aux actionnaires, soit $\max(V_T - D, 0)$. Nous reconnaissons pour ce dernier versement le payoff d'un call européen. Le revenu des actionnaires s'assimile donc à celui d'une option d'achat sur les actifs de l'entreprise d'échéance T et de prix d'exercice D (le remboursement du zéro-coupon à maturité).

Probabilité de défaut

Il y a défaut si la valeur de la firme V_T est inférieure à la dette D . On peut ainsi écrire la probabilité de défaut de la manière suivante : $PD = Q[V_T \leq D]$. Q représente la probabilité

risque-neutre⁷. Sous les hypothèses classiques de la théorie des options dans le cadre de Black et Scholes, on peut déterminer la formulation suivante de la PD⁸ en t :

$$PD = \Phi(-d_2)$$

avec $d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \ln \frac{V_t}{D} \right]$, r le taux sans risque, σ la volatilité de la valeur de la firme et $\Phi(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite. On peut aussi déterminer la PD à partir de la dynamique non plus risque-neutre mais historique de la valeur de la firme (avec μ et non plus r). Elle est alors égale à :

$$PD^H = \Phi(-DD)$$

avec $DD = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \ln \frac{V_t}{D} \right]$ la distance au défaut (*distance-to-default* en anglais). Etant donné que généralement $\mu > r$, la PD historique sera inférieure à la PD risque-neutre. Ces PD ont besoin pour être estimées des cotations boursières des entreprises⁹. Elles peuvent s'avérer faibles relativement aux taux de défaut observés mais elles vont permettre de hiérarchiser et noter les entreprises suivant leur risque de crédit et ainsi déterminer un système de notation.

On peut enfin à partir de ce modèle déterminer le spread *implicite* de crédit, c'est-à-dire induit par le modèle, à partir de la formule suivante :

$$\text{spread}_t = -\frac{1}{T-t} \ln \left(\Phi(d_2) + \frac{\Phi(-d_1)}{L} \right)$$

⁷ La probabilité risque-neutre est la probabilité dans laquelle les prix des actifs n'ont pas de prime de risque (ils sont neutres au risque) et donc l'espérance de gain est égale au taux sans risque. Cette probabilité permet de calculer des prix d'options de manière analytique en utilisant la théorie des martingales puisque les prix actualisés deviennent des martingales : on appelle aussi cette probabilité la probabilité martingale.

⁸ En supposant que la dynamique de la valeur de la firme V est modélisée par un mouvement brownien géométrique.

⁹ Pour calculer ces PD, le paramètre D peut être estimé à partir de l'évaluation de la dette de l'entreprise et μ à partir du rendement historique des actifs ou celui espéré sur les capitaux propres. Il reste alors à estimer les paramètres V_t et σ qui ne sont pas directement observables. Ils peuvent être estimés à partir des données historiques de la valeur de l'action de l'entreprise cotée. Nous renvoyons à Kurtz et Pignard (2004) pour les détails de cette estimation.

avec $L = \frac{De^{-rT}}{V_0}$ le levier d'endettement et $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$.

Le modèle de Merton présente certaines limites dont la principale est le fait que le défaut de l'entreprise ne peut intervenir qu'à la maturité de la dette. Les modèles de premier instant de passage traitent ce problème (cf. la description du modèle de *Credit Grades* avec Finger, 2002).

MODELE A FORME REDUITE

Le modèle à forme réduite ne lie plus le défaut à la valeur de la firme au contraire du modèle structurel. La date de défaut est imprévisible et est issue d'un processus stochastique exogène des actifs de la firme : le défaut survient lorsqu'un saut d'un processus de Poisson apparaît. Nous allons étudier le cas d'un processus de Poisson à intensité constante. Ce modèle s'avère utile pour évaluer, comme nous allons le voir, des obligations risquées et des produits dérivés, et ainsi en extraire les probabilités de défaut sous-jacentes.

Probabilité de défaut

La PD va être déterminée à partir d'un processus de Poisson noté N_t qui est un processus de comptage : N_t vaut 1 si l'événement compté apparaît, 0 sinon. Ici le processus compte l'événement de défaut qui est un état absorbant : lorsqu'il apparaît, le comptage est alors stoppé. Le défaut est le premier saut de ce processus donc la probabilité d'observer ce premier saut correspond à la probabilité de défaut. On peut déterminer l'expression de la probabilité de défaut en T en fonction de l'intensité constante de défaut du processus notée λ , correspondant à la probabilité de défaut de chaque instant. La probabilité de défaut étant la probabilité qu'il y ait au moins un saut, on peut écrire¹⁰ :

$$PD = P[N_T \geq 1] = 1 - P[N_T = 0] = 1 - e^{-\lambda T}$$

Il reste à estimer l'intensité λ de ce processus. Cette intensité va pouvoir être extraite du prix des obligations risquées ou des *Credit default swaps* évalués dans ce cadre théorique.

¹⁰ Un processus de Poisson standard N_t est défini par le fait que les variations disjointes de N_t sont indépendantes et distribuées pour $N_t - N_s$ selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$ pour $s < t$: $P[N_t - N_s = k] = \frac{1}{k!} [\lambda(t-s)]^k e^{-\lambda(t-s)}$. Ainsi, $P[N_T = 0] = \frac{1}{0!} [\lambda(T-0)]^0 e^{-\lambda(T-0)} = e^{-\lambda T}$.

Évaluation d'une obligation risquée

Une obligation zéro-coupon risquée de nominal 1, de maturité T et ayant un recouvrement nul, c'est-à-dire dont le détenteur ne reçoit rien en cas de défaut, a la valeur D_t suivante en t sous la probabilité risque-neutre Q :

$$D_t = 1_{t < \tau} E_Q [e^{-r(T-t)} 1_{T < \tau} | \mathcal{F}_t]$$

Cette formulation signifie que le prix du zéro-coupon est l'actualisation au taux sans risque r des coupons futurs que l'on normalise à 1 (partie exponentielle) sachant l'information en t symbolisée par \mathcal{F}_t et ceci à la condition que l'émetteur de l'obligation n'ait pas fait défaut. Cette condition est matérialisée par les indicatrices : si le défaut τ apparaît avant la maturité T , le flux est égal à 0, et si le défaut apparaît avant la date d'évaluation t , alors le prix est également égal à 0. On peut valoriser une obligation risquée en 0 en notant $\bar{\lambda}$ l'intensité de défaut sous la probabilité risque-neutre. En rappelant que l'espérance d'une indicatrice est égale à la probabilité de la condition de l'indicatrice, on obtient en $t = 0$:

$$D_0 = E_Q [e^{-rT} 1_{T < \tau} | \mathcal{F}_0] = e^{-rT} Q[T < \tau] = e^{-rT} Q[N_T = 0] = e^{-rT} e^{-\bar{\lambda}T} = e^{-(r+\bar{\lambda})T}$$

On observe que l'intensité $\bar{\lambda}$ est assimilable à une prime de risque égal au *spread* du taux d'une obligation risquée par rapport au taux sans risque r . Cette prime de risque va augmenter plus le risque de défaut sera important. Dans le cas d'une obligation zéro-coupon sans risque de défaut, $\bar{\lambda} = 0$. Les intensités de défaut et donc les PD associées peuvent être estimées à partir des *spreads* des obligations risquées.

Évaluation d'un CDS

Le modèle à forme réduite permet de valoriser aussi le plus simple des produits dérivés de crédit et qui doit être considéré comme l'élément de base de produits plus exotiques : le *Credit default swap* ou CDS. C'est un contrat financier conclu de gré à gré, pour une durée et un montant déterminés, et référencé sur un emprunteur bien défini. Dans ce contrat, l'acheteur de protection paie périodiquement lors de N dates futures une prime (appelée aussi *spread* ou marge), tandis que le vendeur de protection s'engage à payer, en cas de défaut de l'emprunteur, un montant compensant la perte résultant du défaut. Le CDS permet ainsi le transfert de risque de crédit. La protection est valable jusqu'à la maturité du swap T .

On peut calculer la marge s^* du CDS en 0 en égalisant la jambe fixe, correspondant aux flux payés par l'acheteur de protection tant qu'il n'y a pas de défaut, et la jambe variable, correspondant au flux payé par le vendeur de protection en cas de défaut égal à la perte en

cas de défaut notée $(1 - \delta)$, avec δ le taux de recouvrement. Nous obtenons alors l'égalité du « triangle du crédit »¹¹ en fonction de l'intensité de défaut :

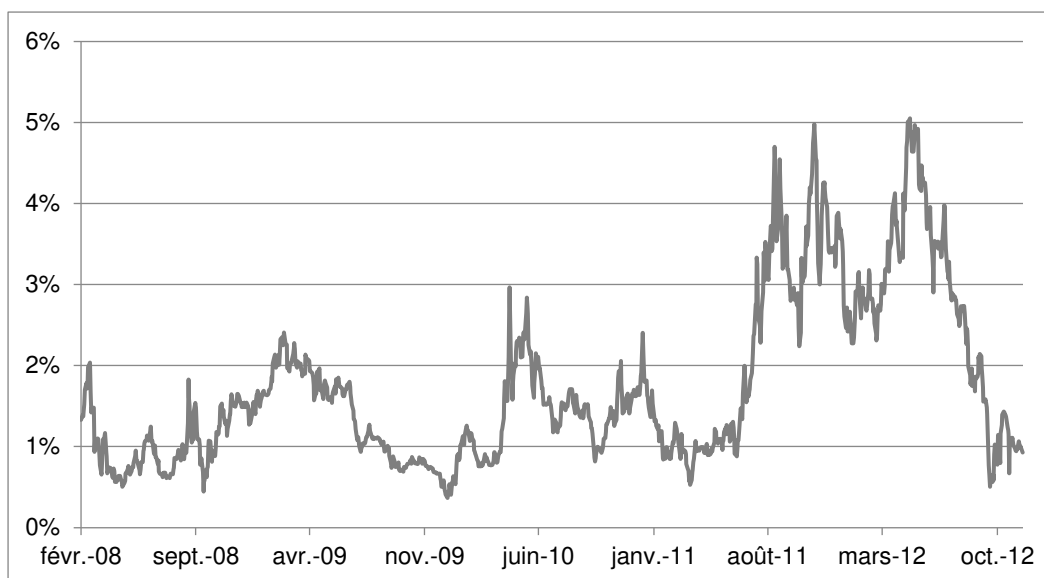
$$s^* = (1 - \delta)\bar{\lambda}$$

Si les CDS sont liquides (ceci est d'autant plus le cas s'ils sont senior), nous pouvons extraire l'intensité de défaut implicite au *pricing* des CDS pour estimer une probabilité de défaut implicite pertinente pour l'émetteur sous-jacent et pour une maturité donnée. A partir du triangle du crédit, les PD implicites ont pour expression :

$$PD = 1 - \exp\left(-\frac{s}{1 - \delta}T\right)$$

Le taux de recouvrement est généralement fixé à 40% pour le *pricing* des CDS, soit 60% de perte en cas de défaut, ce qui est en ligne avec les pertes observées sur les obligations (cf. plus bas la section sur la LGD). On peut observer sur la figure 2 le comportement à la hausse pendant les crises des *subprime* et des dettes souveraines des PD implicites de maturité 1 an extraites à partir de CDS senior émis sur Crédit Agricole SA.

Figure 2 – Probabilités de défaut implicites issues des CDS seniors de maturité 1 an émis sur Crédit Agricole SA



Sources : Datastream et calcul de l'auteur

¹¹ Nous renvoyons à Kurtz et Pignard (2004) pour les détails de cette démonstration.

Les probabilités de défaut implicites risque-neutres extraites des obligations risquées et des CDS seront généralement supérieures aux taux de défaut, entre autres à cause de l'illiquidité des produits à partir desquels sont extraits les PD implicites (Hull, 2009). Il sera néanmoins aussi intéressant, comme pour le modèle structurel de Merton, de traduire ces PD par des notations pour déterminer un système de notation.

4. SYSTEME DE NOTATION, MIGRATIONS DE CREDIT ET POUVOIR DE DISCRIMINATION

La banque va généralement traduire en notations les PD estimées (si elle n'utilise pas directement les notations des agences externes). En effet, le classement par PD, qui est un chiffre compris entre 0 et 1, est moins adapté dans la communication interne mais aussi externe de la banque avec ses clients et ses actionnaires, qu'une échelle comprenant un nombre limité de notations. On parle de système de notation, que l'on appelle aussi échelle de notation. A une bonne note est associée une PD plus faible, et inversement. La traduction des PD en notations est réalisée via un découpage judicieux de ces PD qui s'appuie sur une optimisation, qui va au-delà de cette formation, de l'hétérogénéité entre notations et de l'homogénéité au sein de chaque notation des contreparties en termes de potentielle défaillance. Les notations sont déterminées ainsi par des intervalles de PD : entre 0% et 0.03% de PD par exemple les contreparties auront la meilleure note, et ainsi de suite jusqu'à une PD égale à 100%. Un système de notation va en outre fournir des informations utiles sur les migrations de crédit avant un potentiel défaut. Enfin, il sera intéressant de déterminer la pertinence du système de notation via son pouvoir de discrimination : est-ce que les entreprises les moins bien notées font bien plus défaut que celles qui sont bien notées ?

MIGRATIONS DE CREDIT AU SEIN D'UN SYSTEME DE NOTATION

Nous allons voir à présent combien les informations des migrations (ou transitions) de notations avant le défaut peuvent être utiles pour estimer les PD. Elles vont permettre d'évaluer et de prédire la dégradation d'une notation d'une entreprise et d'assurer le suivi de sa dynamique en termes de risque de crédit. Une migration forte par exemple de baisse de notation peut anticiper un risque de défaut rapproché.

Tableau 4 - Matrice de migrations à horizon 1 an observées sur des entreprises, tous pays confondus, entre 1981 et 2019 (en %)

	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	NR ¹²
AAA	87.03	9.08	0.53	0.05	0.11	0.03	0.05	0.00	3.12
AA	0.49	87.21	7.74	0.48	0.05	0.06	0.02	0.02	3.92
A	0.03	1.66	88.42	5.04	0.27	0.11	0.02	0.05	4.40
BBB	0.01	0.09	3.37	86.32	3.51	0.44	0.10	0.16	6.00
BB	0.01	0.03	0.11	4.73	77.80	6.57	0.54	0.61	9.60
B	0.00	0.02	0.07	0.16	4.76	74.78	4.47	3.33	12.41
CCC	0.00	0.00	0.11	0.19	0.58	12.96	43.64	27.08	15.45

Source : S&P (2020a, Table 21)

Comment lire la matrice de migrations sur un horizon d'un an du tableau 4 ? Sur chaque ligne, on observe les transitions entre la note du début de l'année et celle de la fin de l'année : ainsi en moyenne 87.03% des entreprises notées AAA sont restées AAA sur une année entre 1981 et 2019, 9.08% ont migré vers la note AA et 0.00% ont fait défaut. Cette méthode d'estimation des migrations est appelée méthode par cohorte. Elle est définie par la fréquence des transitions d'une cohorte d'entreprises d'une notation à une autre ou à la même notation à la fin de la période considérée. On observe donc les cohortes du début d'une période à la fin d'une période (une année par exemple). Ceci définit une matrice de transitions sur une période¹³.

¹² NR signifie *Not rated* en anglais soit non notés : ce sont des entreprises qui ne sont plus notées au bout de l'année d'observation par S&P. La migration de ces entreprises d'une note vers l'état « non noté » est donc mesurée.

¹³ Si ces matrices sont stables dans le temps, nous pouvons faire l'hypothèse qu'elles sont markoviennes, c'est-à-dire que la seule connaissance de l'information en t permet de déterminer les valeurs de la matrice en $t + 1$. Cette hypothèse permet de définir des matrices de transitions sur un horizon plus long, de n années par exemple, en multipliant la matrice un an n fois par elle-même. Cette hypothèse est néanmoins discutée (cf. de Servigny *et al.*, 2006, pour une revue des débats).

La note du défaut D est particulière car on considère que l'on ne peut pas sortir du défaut : le défaut est un état absorbant, le défaut reste en défaut. Ceci permet de ne pas sous-estimer le risque de défaut. En effet, supposons qu'une contrepartie notée BB fasse défaut pendant l'année puis sorte du défaut avec une note CCC à la fin de l'année : cette contrepartie sera notée, avec l'hypothèse du défaut absorbant, D à la fin de l'année et non CCC.

La méthode par cohorte fait une photo des transitions entre le début d'une année et la fin de cette même année (excepté pour le défaut comme nous venons de le spécifier), ce qui présente une limite. En effet, une contrepartie qui serait notée AAA en début d'année puis AA au milieu de l'année, puis reviendrait à la note AAA en fin d'année, n'aurait pas connu de migrations selon la méthode par cohorte. Cette méthode ne prend donc pas toute l'information disponible pendant l'année. Il existe une autre limite à cette approche. Pour les très bons ratings, on peut régulièrement observer que leur PD est nulle, surtout pour les Low Default Portfolios. Néanmoins, comme le précisent Lando et Skødeberg (2002), si une contrepartie notée AAA ne fait pas défaut sur une année mais qu'elle a une dégradation vers la notation AA pendant une année et que sur une autre contrepartie notée AA est observée une transition vers le défaut, alors la modélisation par cohorte ne permet pas de capter une PD non nulle entre la note AAA et le défaut, ce qui pourrait néanmoins arriver. Pour prendre en compte toute l'information contenue dans les migrations sur l'année d'observation, une méthode alternative est utilisée : la méthode par duration, dénommée également méthode continue ou approche de taux de hasard (cf. Löffler et Posch, 2007, pour les précisions de cette méthode).

POUVOIR DE DISCRIMINATION D'UN SYSTEME DE NOTATION

Un critère important pour évaluer la notation et la PD associée est de déterminer si le système de notation discrimine bien le risque de défaut. Deux ratios sont classiquement déterminés : l'Accuracy Ratio¹⁴ (*AR*) avec son graphique associé Cumulative Accuracy Profile (*CAP*) et l'Area Under the Curve (*AUC*) avec son graphique associé Receiver Operating Characteristic (*ROC*).

¹⁴ En risque de crédit, l'indice de Gini est équivalent à l'*AR*, ainsi qu'au *D de Somers*.

Le premier élément à retenir est que AR et AUC sont liés :

$$AR = 2 AUC - 1$$

Ils sont l'expression d'une même qualité de discrimination : un AR élevé sera traduit par un AUC élevé également (cf. tableau 5 pour la correspondance entre AR et AUC). Le deuxième élément à retenir est qu'un bon AR doit être compris entre 0 et 1 alors qu'un bon AUC doit être compris entre 0.5 et 1. Une discrimination aléatoire, ou faite au hasard, aura un AR de 0 et donc un AUC de 0.5. Un modèle parfait, qui donne les notes les plus mauvaises aux contreparties qui ont fait défaut, aura un AR et un AUC de 1¹⁵.

Tableau 5 – Correspondances entre AR et AUC

	AR	AUC
<i>Notations au hasard</i>	0	0.5
	0.2	0.6
	0.4	0.7
	0.6	0.8
	0.8	0.9
<i>Notations parfaites</i>	1	1

Expliquons à présent leur calcul. Tout d'abord l' AR et son graphique associé CAP . Considérons l'exemple d'un portefeuille de 15 contreparties pour lesquelles nous observons la note en début de période et son défaut potentiel en fin de période (un an). Le système de notations est composé de 3 notes (A pour la meilleure puis B puis C pour la plus mauvaise).

¹⁵ Il arrive qu'il y ait confusion entre ces deux indicateurs AR et AUC et donc qu'il y ait une mauvaise conclusion avec par exemple une discrimination jugée non suffisante avec un AR de 0.4 : un AUC de 0.4 serait mauvais mais un AR de 0.4 correspond à un AUC de 0.7 et est plutôt satisfaisant.

Tableau 6 – Exemple de système de notation

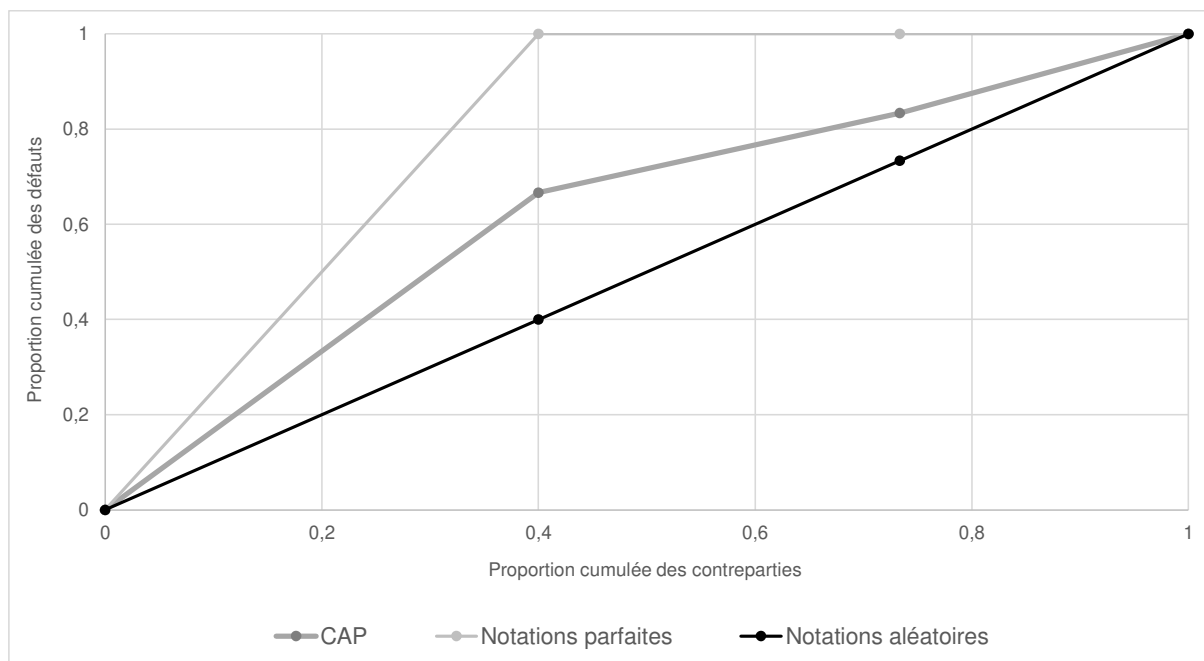
Contrepartie	Notation	Défaut ?
1	A	Non
2	A	Non
3	A	Non
4	A	Oui
5	B	Non
6	B	Non
7	B	Non
8	B	Oui
9	B	Non
10	C	Oui
11	C	Oui
12	C	Oui
13	C	Oui
14	C	Non
15	C	Non

Si le système de notation discrimine parfaitement le risque de défaut, les défauts seront observés pour les notes les plus mauvaises. Dans l'exemple du tableau 6, 4 contreparties sont notées A en début de période, 5 sont notées B et 6 sont notées C. 6 contreparties font défaut à la fin de l'année. Si le système de notation avait été parfait, les 6 défauts auraient été observés pour les contreparties notées C. Si le modèle avait été aléatoire, les défauts auraient été répartis de la même manière que la proportion de notes dans la population (4/15 des 6 défauts notés A, 5/15 notés B et 6/15 notés C : sur notre population peu nombreuse, cela ne donne pas de nombres entiers). Enfin, si les 6 défauts avaient été notés A, cela aurait établi un système de notation que l'on peut qualifier d'anti-discriminant.

Etudions à présent le graphique *CAP* de la figure 3 et plus particulièrement le premier point après 0 en partant de la gauche. Sa coordonnée sur l'axe des abscisses égale à 0.4 correspond à la proportion de notes C dans la population, soit 6 divisé par 15. Sa coordonnée sur l'axe des ordonnées égale à 0.67 correspond à la proportion de notes C en défaut parmi les 6 défauts, soit 4 divisé par 6. 0.67 est supérieur à 0.4 : la notation C est donc plus propice à observer un défaut. Continuons : le point suivant cumule la proportion des notes B et C parmi la population totale (en abscisse, soit 11 sur 15 contreparties ce qui est égal à 0.73) et parmi les défauts (en ordonnées, soit 5 sur 6 défauts ce qui est égal à 0.83). Là encore, 0.83 étant supérieur à 0.73, on observe une discrimination. Le système de notation est donc

performant. L'indicateur *AR* permettant de synthétiser ce pouvoir est déterminé par le ratio entre d'une part la surface comprise entre la courbe *CAP* (représentant la discrimination de notre système de notation) et la courbe des notations aléatoires, et d'autre part la surface comprise entre la courbe des notations parfaites et la courbe des notations aléatoires. L'*AR* de l'exemple est égal à 0.43¹⁶, ce qui équivaut à un *AUC* de 0.71.

Figure 3 – Illustration d'une courbe *CAP*



L'*AUC* est associé à un autre graphique qui est proche de la courbe *CAP* : la courbe *ROC*. Dans ce graphique, l'axe des ordonnées est le même ; l'axe des abscisses, en revanche, est déterminé par la proportion cumulée des contreparties n'ayant pas fait défaut pour chaque notation parmi toutes les contreparties n'ayant pas fait défaut. Ainsi, le premier point aura pour coordonnées sur l'axe des abscisses 2/9 : le ratio correspondant aux 2 contreparties saines notées C divisé par les 9 contreparties saines au total. L'*AUC* est alors défini par la surface en-dessous de la courbe *ROC*.

¹⁶ Il peut se calculer à partir des surfaces de trapèzes rectangles : nous renvoyons à Löffler et Posch (2007) pour plus de détails.

LA PERTE ET L'EXPOSITION EN CAS DE DEFAUT

On va s'intéresser aux paramètres de risque liés au montant prêté. Le premier paramètre que nous allons étudier est la perte en cas de défaut (*Loss given default* ou LGD en anglais), qui est influencée par de nombreux facteurs dépendant du type de prêt accordé et des garanties qui peuvent lui être associées : un prêt à court-terme comme le découvert sera théoriquement plus risqué qu'une mobilisation de créances, créances apportant plus de garanties de remboursement. La LGD va être considérée de manière différente selon que l'on étudie un portefeuille de créances saines ou en défaut.

Le second paramètre va être l'exposition au défaut (*Exposure at default* ou EAD en anglais), c'est-à-dire l'engagement en dettes de l'entreprise. Si en général cette exposition est simple à calculer (c'est le montant du capital restant dû), elle peut également être empreinte d'incertitude pour des types de prêts particuliers. Ainsi, pour un prêt de moyen-long terme, des tirages peuvent être réalisés dans le temps et ces tirages ne sont pas automatiques ; une banque aura donc une incertitude à voir son emprunteur tirer ou pas des lignes de crédit dans le futur. A l'EAD va s'ajouter un paramètre, le *Credit conversion factor* en anglais (CCF), qui va mesurer cette incertitude.

5. LA PERTE EN CAS DE DEFAULT

Commençons par la LGD : comment se mesure-t-elle puis comme est-elle expliquée et modélisée ?

MESURE DE LA LGD

Alors que pour le taux de défaut, la mesure était dichotomique (l'entreprise fait défaut ou pas sur ses engagements), la mesure du taux de perte va nécessiter la collecte des informations post-défaut des pertes et recouvrements observés sur les montants prêtés.

Il existe deux mesures pour le taux de perte :

- Déterminée à partir du ratio entre le prix de marché du titre de dette avant le défaut et le prix juste après celui-ci. On parle alors de LGD *market-implied*, et celle-ci ne sera pertinente que pour les taux de perte mesurés sur les obligations (*bonds* en anglais), du fait de l'existence d'un prix de marché. Elle présente l'avantage de fournir une mesure du taux de perte juste après l'événement de défaut.
- Déterminée à partir de la valeur actualisée à la date du défaut¹⁷ des recouvrements consécutifs au défaut du titre de dette relativement au montant restant à rembourser au moment du défaut¹⁸. Les recouvrements viennent de la trésorerie de l'entreprise ou de la liquidation d'un actif immobilier par exemple. On parle alors de LGD *workout*, et celle-ci sera pertinente pour les taux de perte mesurés sur les prêts bancaires (*loans* en anglais). Dans cette catégorie, on isolera les prêts dont les sûretés disposent d'une valorisation liquide (par exemple un bien immobilier situé à Paris) : les taux de perte seront alors mesurés par des décôtes (*haircut* en anglais) calculées à partir de ces valorisations.

La LGD *market-implied* a une valeur généralement plus élevée car associée à des obligations qui connaissent, relativement aux prêts bancaires, une plus forte asymétrie d'information entre prêteur et emprunteur ; cette asymétrie ne facilite pas le recouvrement. Une étude de Moody's (2007) confirme cette différence en LGD. Construite à partir de données de près de 3 500 *bonds* et *loans* des Etats-Unis qui ont fait défaut entre 1987 et

¹⁷ Généralement le taux sans risque est utilisé pour l'actualisation.

¹⁸ L'exposition sera définie comme l'EAD (sur laquelle nous reviendrons plus bas) et les tirages additionnels qui seront observés après le défaut.

2006, elle enseigne que la LGD des *bonds* est en moyenne plus importante avec une valeur de 63%, alors que dans le cas des *loans* il est observé 18% de LGD en moyenne. Par la suite, nous allons nous intéresser essentiellement à la LGD *workout* plus pertinente pour les *loans* émis par les banques.

La LGD *workout* se mesure au niveau des contrats de prêts, appelés aussi *facilités*. Pour une facilité i en défaut, elle est calculée de la manière suivante :

$$LGD_i = 1 - \frac{\sum_{t=D}^T \text{Recouvrements actualisés}_{i,t}}{\text{Exposition}_{i,D} + \sum_{t=D}^T \text{Tirages additonels actualisés}_{i,t}}$$

Les recouvrements sur la facilité i sont observés après le défaut (la date du défaut est notée D) jusqu'à la résolution du défaut (notée T) et sont actualisés à la date du défaut. Les tirages additionnels de la facilité i sont aussi actualisés à la date du défaut. La LGD *workout* est alors égale à la moyenne arithmétique des LGD des n facilités considérées :

$$LGD = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n LGD_i$$

ESTIMATION DE LA LGD

Nous allons nous intéresser à présent à expliquer et prédire la LGD pour des titres n'ayant pas fait défaut et suivant leurs caractéristiques : ceci correspond à la LGD des actifs sains ou dits *in bonis*. Concernant la PD, nous l'avons évaluée en fonction des caractéristiques de l'entreprise soit par la notation des agences, soit par l'utilisation d'un modèle économétrique (*credit scoring*), soit à partir des prix de marché et des modèles de *pricing* sous-jacents. Pour la LGD, nous allons étudier la notation des agences et l'utilisation de modèles économétriques. Nous y ajouterons une modélisation par la loi bêta utile pour le *pricing* par simulations Monte Carlo de produits de créance utilisant la LGD comme input.

Notation des agences

Comme pour les PD, les agences publient pour les LGD (ou les taux de recouvrement) des notations, pour les obligations essentiellement. Ces notations sont issues généralement d'analyse financière influencée par la présence ou non de collatéral, la séniorité, le secteur d'activité ; les pertes ou recouvrements passés peuvent aussi permettre de noter les contrats de prêt. Fitch et S&P proposent une échelle de recouvrement alors que Moody's propose une échelle de LGD. Les trois agences ont des échelles de notation des titres de dette

relativement similaires avec six échelons, auquel S&P ajoute un échelon avec la note 1+ pour les taux de recouvrement égaux à 100% (tableau 7).

Tableau 7 – Échelle de notations des recouvrements de Fitch Ratings et S&P et des LGD de Moody's

Fitch – <i>taux de recouvrement</i>	S&P - <i>taux de recouvrement</i>	Moody's - <i>taux de perte</i>
	1+ (100%)	
RR1 (90-100%)	1 (90-100%)	LGD1 (0-10%)
RR2 (70-90%)	2 (70-90%)	LGD2 (10-30%)
RR3 (50-70%)	3 (50-70%)	LGD3 (30-50%)
RR4 (30-50%)	4 (30-50%)	LGD4 (50-70%)
RR5 (10-30%)	5 (10-30%)	LGD5 (70-90%)
RR6 (0-10%)	6 (0-10%)	LGD6 (90-100%)

Source : Fitch Ratings (2010), S&P (2020a, Table 12) et Moody's (2010)

Modèles économétriques

Des recherches (Schuermann, 2004, Dermine et Carvalho, 2006, entre autres) ont été publiées depuis le début des années 2000 pour tenter de modéliser, d'expliquer et de prédire la LGD *workout* par des facteurs de risque (*risk drivers*). L'EBA propose aussi une liste de risk drivers (cf. encadré ci-dessous). Les *risk drivers* les plus importants sont :

- la zone géographique, les pays pouvant avoir des législations différentes qui vont plus ou moins accélérer les recouvrements post-défaut,
- la séniorité qui édicte des priorités de remboursement dans les clauses à l'émission des titres de dette,
- l'environnement économique puisqu'en récession, les recouvrements et la valeur des collatéraux diminuent,
- la taille de l'entreprise, mesurée généralement par son chiffre d'affaires, puisque généralement les grandes entreprises s'engagent sur des prêts plus importants que les banques auront plus d'intérêt à recouvrer ; elles auront en outre plus de pouvoir de

négociation pour récupérer ces montant élevés relativement à des prêts de montant plus faible,

- la présence de collatéral où les collatéraux immobiliers, financiers et physiques ont théoriquement un effet positif sur les recouvrements, même si la présence d'un collatéral peut parfois être le signal d'un client à risque et d'aléa moral (la banque n'aurait alors pas prêté sans cette présence de collatéral),

- le secteur industriel car les entreprises de secteurs ayant des actifs dits tangibles seront en théorie plus à même de rembourser leurs prêts relativement à des entreprises de secteurs de services qui ont des actifs immatériels.

LES *RISK DRIVERS* DE LA LGD PROPOSES PAR L'ABE

Si l'on suit les Guidelines 16 (2017) de l'ABE (ou European Banking Authority, EBA, en anglais) et plus spécifiquement l'article 121, quatre grands types de facteurs de risque sont explicatifs du processus de recouvrement.

Le premier est lié aux caractéristiques de la transaction : le type de produit, le type de collatéral, la zone géographique du collatéral, la séniorité, la taille de l'exposition, la saisonnalité, les procédures de recouvrement.

Le deuxième type de facteur de risque est lié aux caractéristiques de l'emprunteur : sa taille, sa structure de capital, sa zone géographique, son secteur industriel.

Le troisième type est lié à l'institution prêteuse : son organisation interne (et la présence de services dédiés au recouvrement), sa gouvernance.

Enfin, le dernier type est lié à l'environnement externe : les taux d'intérêt, le cadre juridique, l'environnement économique influençant la longueur du processus de recouvrement.

Illustrons le facteur de risque « présence de collatéral » à l'aide de la figure 4. Nous avons décliné pour deux grandes entreprises X et Y d'un même pays, notées respectivement BB+ et BBB-, leurs contrats de prêts senior. L'entreprise X a deux contrats : le premier *unsecured* (c'est-à-dire sans sûreté, soit un découvert sans garantie ou un emprunt indivis) et le second un escompte (ayant donc un collatéral constitué de créances commerciales). L'entreprise Y a un seul prêt collatéralisé par un bien immobilier (un crédit-bail par exemple ou un financement de projet). Les entreprises X et Y auront 2 PD différentes : l'entreprise X aura

une PD moins élevée que l'entreprise Y, puisque X est mieux notée que Y. Concernant les facilités, cela va être différent : en effet, les LGD associées aux facilités de l'entreprise X seront plus élevées que la LGD associée à la facilité de Y, puisque les facilités *unsecured* et collatéralisées par un escompte seront plus élevées que celles associées à un bien immobilier, pour lesquelles le recouvrement sera théoriquement garanti par ce bien.

Figure 4 – Illustration des facilités pour deux entreprises selon leurs facteurs de risque

Entreprise	Notation	Facilité
X	BB+	<i>Unsecured</i>
		Collatéral escompte
Y	BBB-	Collatéral bien immobilier

Pour avoir un aperçu des valeurs de LGD suivant la zone géographique, les collatéraux et la séniorité, l'étude de *Global Credit Data* (2020) est instructive. *Global Credit Data* est un consortium de banques qui regroupe les recouvrements de manière anonymisée de tous ses membres pour déterminer des benchmarks de LGD. L'étude de 2020 a été construite à l'aide des données de 58 membres, dont ont été récupérés au total près de 19 800 contrats de prêt qui ont fait défaut entre 2000 et 2016 et dont le recouvrement est allé jusqu'à son terme. Ces prêts ont été consentis à des entreprises dont le chiffre d'affaires est supérieur à 50 millions d'euros. Le tableau 8 révèle la bonification de LGD due à la présence de collatéraux de premier rang obtenant une LGD de 19%, à comparer à 24% pour les collatéraux de second rang. Nous observons une LGD pour les prêts sans sûreté de 24% pour les prêts senior et 36% pour les prêts subordonnés. Enfin, si l'on observe différentes

régions, par exemple Europe et Asie-Océanie (cette dernière est néanmoins composée de pays très divers), on remarque une LGD moins importante pour l'Europe (21% versus 28%).

Tableau 8 – LGD de *loans* issus de *Global Credit Data* (2020)

	LGD
Prêts avec sûretés de premier rang tels l'argent liquide ou des actifs comme l'immobilier, un bateau ou un avion	19%
Prêts avec sûretés de second rang tels les mobilisations de créances	24%
Prêts sans sûretés et senior	24%
Prêts sans sûretés et subordonnés	36%
Prêts en Europe	21%
Prêts en Asie et Océanie	28%

Source : Global Credit Data (2020)

On peut à partir de ces facteurs de risque identifier un modèle de régression linéaire. En prenant quatre facteurs, nous pouvons écrire pour une facilité i , en notant ε_i le résidu aléatoire :

$$LGD_i = \beta_1 * zone\ géographique_i + \beta_2 * collatéral_i + \beta_3 * séniorité_i + \beta_4 * chiffre\ d'affaires_i + \varepsilon_i$$

A partir d'un échantillon de titres ayant fait défaut, il est possible de mesurer leur taux de perte et d'estimer le modèle de régression ci-dessus par les méthodes classiques d'estimation pour en prédire la LGD. Ce modèle plutôt simple peut être amélioré par des techniques plus complexes de régression¹⁹. L'évaluation de ces modèles est obtenue non pas à l'aide d'un *Accuracy Ratio* comme pour la PD mais d'un R^2 par exemple.

¹⁹ Loterman *et al.* (2012) réalisent un benchmark de 24 techniques différentes de régression et révèlent que les LGD *workout* de *loans* pour des entreprises proposés par une banque internationale sont mieux captées par des techniques non linéaires telles que les réseaux de neurones ou les supports vecteurs machines ; les R^2 restent néanmoins proches (12% pour la régression linéaire et un gain de 2 à 3% pour des techniques plus complexes).

Il faut ajouter que la LGD *workout* demande du temps de collecte puisqu'il est nécessaire d'attendre que la banque ait récupéré tout ce qu'elle pouvait recouvrer suite au défaut de son débiteur : on parle de résolution, ou de clôture, du défaut lorsque le processus de recouvrement est terminé. Le délai séparant le défaut de la fin du recouvrement dépend des juridictions des pays concernés. Il peut être intéressant d'ajouter dans le modèle de régression défini ci-dessus des facilités en défaut non clos puisque les recouvrements déjà réalisés de ces défauts peuvent contenir de l'information intéressante. Dans ce cas, on intègre les défauts assez anciens dont on estime que des recouvrements supplémentaires sont peu probables, en définissant une période maximale au-delà de laquelle ces défauts sont considérés comme résolus (durée entre 7 et 10 ans généralement). Les défauts moins anciens pour lesquels on estime que des recouvrements supplémentaires sont attendus pourront être traités différemment : leurs recouvrements seront projetés à l'aide de la chronique des recouvrements des défauts résolus ayant des caractéristiques similaires.

Nous nous sommes intéressés à la LGD des actifs sains. Précisons néanmoins qu'un facteur de risque supplémentaire doit être mobilisé pour la LGD des actifs en défaut. En effet, lorsque des contreparties font défaut, elle sont conservées par la banque dans son portefeuille de créances avant la résolution du défaut. Il est alors important pour une banque d'expliquer et prédire le risque de perte résiduelle sur ces contreparties en défaut. Un facteur de risque supplémentaire est utilisé : l'ancienneté dans le défaut, puisque plus le défaut est ancien, plus l'espoir de recouvrer diminue. Cette LGD des actifs en défaut va capter une incertitude sur les créances en défaut durant la phase de recouvrement.

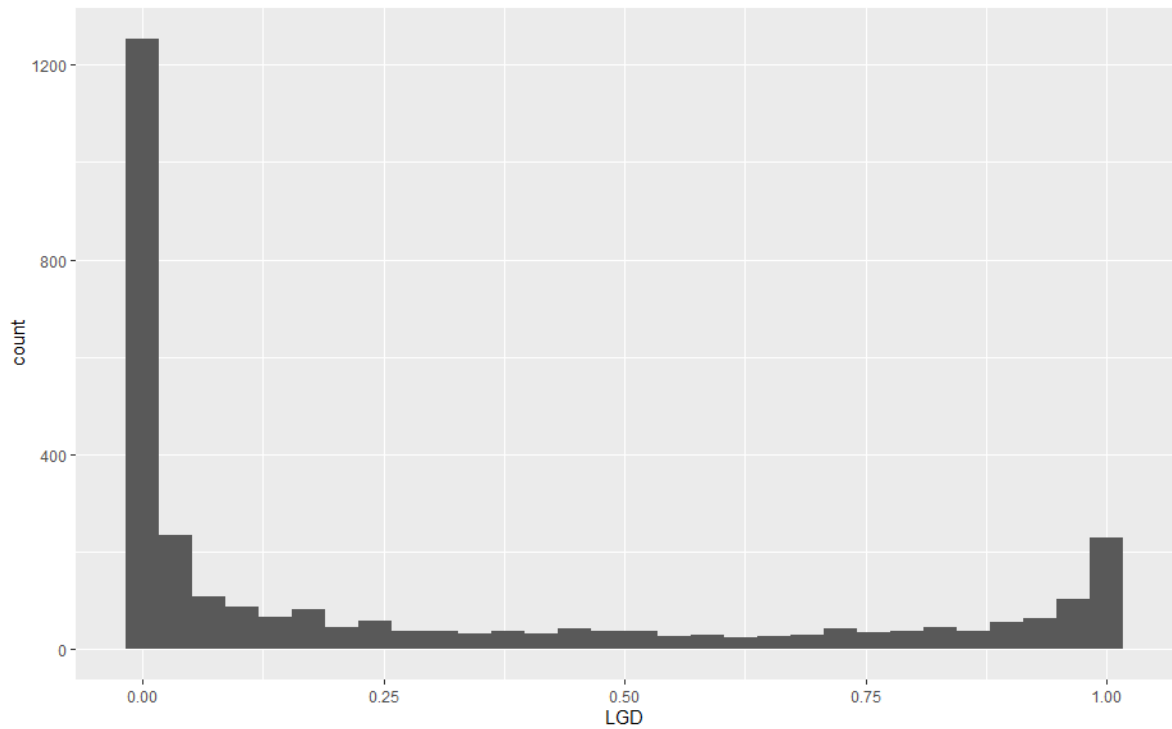
Modélisation par la loi Bêta

Dans le modèle de pricing du CDS que nous avons étudié précédemment, nous avons utilisé un paramètre constant δ de taux de recouvrement. Pour le pricing de produits de dérivés de crédit par simulations Monte Carlo mais aussi pour l'évaluation d'une CreditVaR (cf. infra), on peut être amené à devoir rendre le paramètre δ aléatoire et donc le modéliser par une loi de probabilité. Quelle loi alors utiliser ?

Il faut savoir que la LGD possède un fait stylisé particulier : sa distribution de probabilité est bimodale, c'est-à-dire que pour un échantillon de titres de dette en défaut, on va observer un nombre important de titres qui, à la clôture du défaut, recouvrent la totalité du montant

prêté (LGD égale à 0%) et un nombre important de facilités qui ne recouvrent rien (LGD égale à 100%). Ce fait stylisé est illustré sur la figure 5.

Figure 5 – Illustration de la bimodalité de la distribution de la LGD



Source : LGD simulées par l'auteur

La forme de la distribution de la LGD a amené les praticiens et chercheurs à supposer que les LGD sont distribuées selon une loi Bêta (Gupton et Stein, 2002). C'est une distribution à support $[0,1]$ qui dépend de 2 paramètres a et b . L'expression de sa fonction de densité est :

$$f(x) = \frac{1}{\beta(a, b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1} 1_{[0,1]}(x)$$

avec $\beta(a, b) = \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b-1} dx$. La moyenne μ et la variance σ sont égales à :

$$\mu = \frac{a}{a+b}$$

$$\sigma = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b-1)}$$

Cette distribution est très flexible et permet de modéliser plusieurs formes de distribution dont la forme en U caractéristique de la LGD : pour cela, les paramètres a et b doivent être inférieurs à 1. A partir de la LGD moyenne $\hat{\mu}$ estimée sur un échantillon de titres de dette en défaut et de leur volatilité estimée $\hat{\sigma}$, la méthode dites des moments nous permet d'estimer les paramètres a et b de la manière suivante :

$$\hat{a} = \frac{\hat{\mu}^2(1 - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}^2} - \hat{\mu}$$
$$\hat{b} = \frac{\hat{\mu}(1 - \hat{\mu})^2}{\hat{\sigma}^2} - (1 - \hat{\mu})$$

6. L'EXPOSITION AU DEFAULT

L'exposition au défaut (*Exposure at default* ou EAD), c'est-à-dire le montant sur lequel la banque est exposé à un risque de crédit, est aisé à calculer pour les financements classiques : c'est le montant du prêt diminué des remboursements déjà effectués. Elle va mériter l'estimation d'un paramètre spécifique pour les financements présentant une incertitude de tirages potentiels dans le futur, donc une incertitude concernant le montant réel sur lequel la banque est engagée avec l'entreprise (même si ces financements ont bien entendu des limites à ne pas dépasser) : c'est le *Credit conversion factor* (CCF).

MESURE DE L'EAD ET DU CCF

Pour les prêts sans incertitude dans le futur sur le montant engagé, l'EAD est égale au montant du prêt diminué des amortissements déjà réalisés au moment de la mesure de l'exposition au défaut. Si une entreprise fait défaut sur un prêt de 1 000 € octroyé deux ans auparavant et qu'elle a amorti 200 €, l'exposition sur laquelle la banque est en risque est égale à 800 €. Pour les prêts avec incertitude dans le futur sur le montant engagé, c'est-à-dire pour lesquels la banque propose à l'entreprise la possibilité de tirer des montants tout le long de la vie du prêt, l'EAD est la somme de deux éléments :

- le premier est le même que pour les prêts sans tirages futurs, ce qu'on appelle le « bilan » (*on-balance* en anglais) de la banque, à savoir les montants réellement tirés qui s'observent empiriquement,
- le second correspond à ce qui est au « hors-bilan » (*off-balance* en anglais) c'est-à-dire ce qui peut être potentiellement tiré mais ne l'est pas encore. A ce hors-bilan, on va appliquer le taux de conversion adéquat.

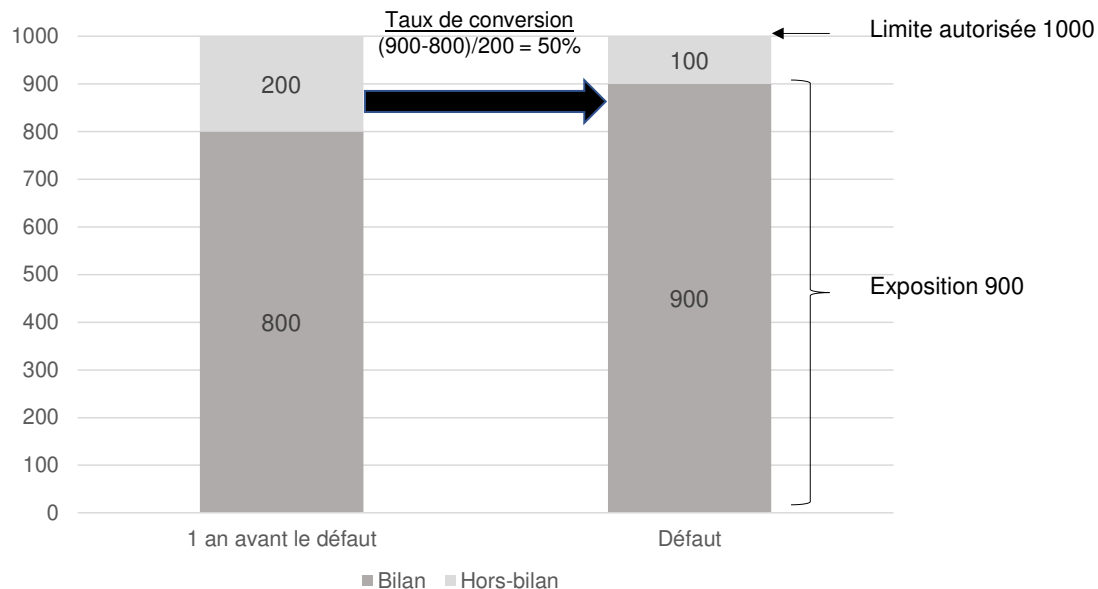
La mesure de l'EAD est alors fonction de celle du CCF :

$$\text{EAD} = \text{Bilan} + \text{CCF} * \text{Hors-Bilan}$$

Prenons un exemple illustré par la figure 6. Soit la même entreprise que précédemment qui a remboursé 200 € sur son prêt de 1 000 € octroyé deux ans auparavant. Ajoutons qu'elle avait une option de tirage supplémentaire limitée à 200 €. Supposons qu'elle a tirée 100 € avec cette option au plus tard un an avant son défaut et ce tirage est non amorti au moment du défaut. L'EAD est donc égale à $800 + 100 = 900$ € au moment du défaut. On observe dans cette somme le bilan de 800 € ainsi que le hors-bilan de 200 € ajusté au taux de

conversion. Celui-ci est égal dans notre exemple à $100 / 200 = 50\%$ puisque l'entreprise a tiré 100 € sur les 200 € maximum possible.

Figure 6 – Illustration du taux de conversion



A partir des entreprises ayant fait défaut, nous allons donc pouvoir mesurer les taux de conversion de leurs prêts ayant eu des tirages avant le défaut relativement à la limite autorisée. Ce taux de conversion est compris entre 0 et 100%²⁰. On observe les tirages généralement sur une période allant d'une année avant le défaut jusqu'au défaut. Cette période d'une année avant le défaut est intéressante car elle permet de capter les potentiels tirages d'entreprises en difficulté avant qu'elles ne fassent défaut. En synthèse, le taux de conversion pour une facilité i en défaut est égal à :

$$CCF_i = \frac{Exposition_{i,D} + \sum_{t=D}^T Tirages\ additonnels\ actualisés_{i,t} - Exposition_{i,0}}{Limite\ autorisée_{i,0} - Exposition_{i,0}}$$

A la différence entre l'exposition au défaut (date D) et l'exposition 1 an avant le défaut (date de référence qu'on note 0), on ajoute, comme pour la LGD, les tirages additionnels apparus après le défaut jusqu'à la résolution du défaut (notée T) et actualisés à la date du défaut D . Cette méthode où l'on fixe l'horizon avant le défaut est appelée l'approche à horizon fixe.

²⁰ Le CCF possède la caractéristique d'avoir une distribution de probabilité bimodale comme pour la LGD, avec un mode à 0 et un mode à 1.

Une méthode alternative existe qui calcule le CCF à des dates régulières (mois, trimestre) durant l'année avant le défaut : l'approche est alors dénommée l'approche par cohortes. L'année est la durée requise par la réglementation prudentielle des banques. Le CCF est alors à égal à la moyenne arithmétique des n CCF des produits observés :

$$CCF = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n CCF_i$$

ESTIMATION DE L'EAD ET DU CCF

Comme pour la LGD, il va être intéressant d'expliquer le CCF pour le prédire en fonction de ses facteurs explicatifs. Le comportement sera différent suivant le type de produit. En effet, les tirages de certains produits peuvent être conclus à des dates définies à l'avance (ce sont des *term loans with drawing periods* en anglais) ou non (crédit renouvelable ou *revolving*) : on est alors en face de parts non utilisées de crédit confirmés. On peut se retrouver aussi dans le cas où une garantie ou caution octroyée est appelée : ce sont des engagements par signature qui engagent la banque sur un montant prédéfini au profit de son client ou d'un bénéficiaire de son client et qui peut être potentiellement tirée.

Une grande entreprise peut aussi observer moins de tirages qu'une PME. Le montant également restant à tirer peut être intéressant puisque s'il en reste peu, la probabilité est plus forte que tout soit tiré. L'estimation portera sur des entreprises ayant fait défaut et le but sera d'expliquer et de prédire les CCF qu'on appliquera à des contreparties similaires n'ayant pas encore fait défaut. Un modèle de type linéaire pourra alors être estimé :

$$CCF_i = \beta_1 * type\ produit_i + \beta_2 * chiffre\ d'affaires_i + \beta_3 * restant\ à\ tirer_i + \varepsilon_i$$

Là encore, comme pour la LGD, le critère du R^2 sera utile pour évaluer la pertinence du modèle.

LES CORRELATIONS ET LA CREDITVAR D'UN PORTEFEUILLE DE CREANCES

Les corrélations entre les créances d'un portefeuille correspondent aux derniers paramètres dont on a besoin pour évaluer le risque de crédit. Les corrélations qui nous intéressent ici sont celles entre les potentiels défauts des entreprises. Et leur impact n'est pas à négliger. Supposons un portefeuille de 2 créances de 1 000 € chacune, sans recouvrement possible. Si les défauts sont parfaitement corrélés, la perte potentielle sera de 2 000 € ; s'ils ne sont pas corrélés du tout, un défaut pourra se manifester sur la première créance sans que l'autre créance ne soit affectée, la perte potentielle sera alors de 1 000 €. On voit avec ce simple exemple l'impact de la corrélation sur la perte, allant du simple au double. La difficulté est alors de définir ce qu'on entend par corrélation des défauts.

Car les défauts étant des événements rares, observer et estimer leurs corrélations va demander de faire appel à des méthodologies spécifiques. Tout d'abord, plusieurs définitions de la corrélation cohabitent : corrélation des événements de défaut (ou indicatrices de défaut), corrélations des temps de défaut et corrélations des actifs des entreprises emprunteuses (cf. Portait et Poncet, 2014, Roncalli, 2009, pour le détail de ces différentes définitions). En outre, ces différentes corrélations vont engendrer des mesures différentes : quelle sera la corrélation la plus adaptée pour évaluer le risque de crédit d'un portefeuille de créances ? Il est alors indispensable de définir un cadre méthodologique dans lequel nous évaluerons le risque de contagion d'un portefeuille. Nous en décrivons deux qui sont privilégiés par l'industrie bancaire : l'outil probabiliste « copule » et le modèle à un facteur de risque dénommé *Asymptotic single risk factor* (ASRF).

Avec les corrélations, et après les PD, LGD et EAD-CCF, nous pouvons déterminer l'indicateur phare de l'évaluation du risque de crédit, à savoir la CreditVaR, qui signifie *Credit Value-at-Risk*, d'un portefeuille de créances ainsi que le cadre bâlois de son calcul.

7. MESURE DE LA CORRELATION DES DEFAUTS

Deux spécificités des défauts doivent être évoquées pour adapter la mesure de leur corrélation. D'une part, la corrélation entre les défauts a la particularité d'être difficilement observable directement : en effet, les défauts ne sont généralement pas observés simultanément sur une même journée ou une même semaine, même lors d'une crise. Même si les corrélations des événements de défaut, à un horizon d'un an par exemple, peuvent être mesurées, nous privilégions dans cette section la mesure de la corrélation des défauts via les actifs des entreprises utilisés dans les modèles de *pricing* de la PD (modèle structurel et modèle à forme réduite) et dont la simultanéité est plus simple à observer²¹. D'autre part, les défauts sont rares : il va donc falloir dépasser la notion de corrélation moyenne pour étudier la corrélation extrême via ce que l'on appelle la dépendance de queue.

CORRELATION A PARTIR DES MODELES DE *PRICING*

Rappelons qu'à partir du modèle structurel, la valeur de la firme peut être décomposée comme la somme de sa valeur actionnariale et de sa dette. Le défaut survient si la valorisation de l'entreprise est inférieure à sa dette. Les défauts sont donc liés aux valeurs des firmes et on peut mesurer la corrélation des défauts via celle des valorisations. Ces dernières étant plus complexes à observer, on peut faire l'hypothèse de l'équivalence entre la corrélation des valorisations et celle des actions. La corrélation entre les rentabilités des actions est alors aisée à déterminer pour les contreparties cotées.

La corrélation des défauts peut être extraite aussi à partir du modèle à forme réduite. En effet, nous avons vu que l'intensité de défaut peut être approchée par les *spreads* de crédit ou les primes de CDS. Nous pouvons alors mesurer la corrélation des défauts par celle des *spreads* des obligations risquées ou par celle des primes de CDS. Néanmoins, les *spreads* et primes englobent à la fois probabilité de défaut et taux de recouvrement, difficiles à distinguer ; en outre, la liquidité les influence, en plus du risque de défaut. Nous privilégions donc dans la suite la mesure de la corrélation par les rentabilités des actions dans le cadre du modèle structurel.

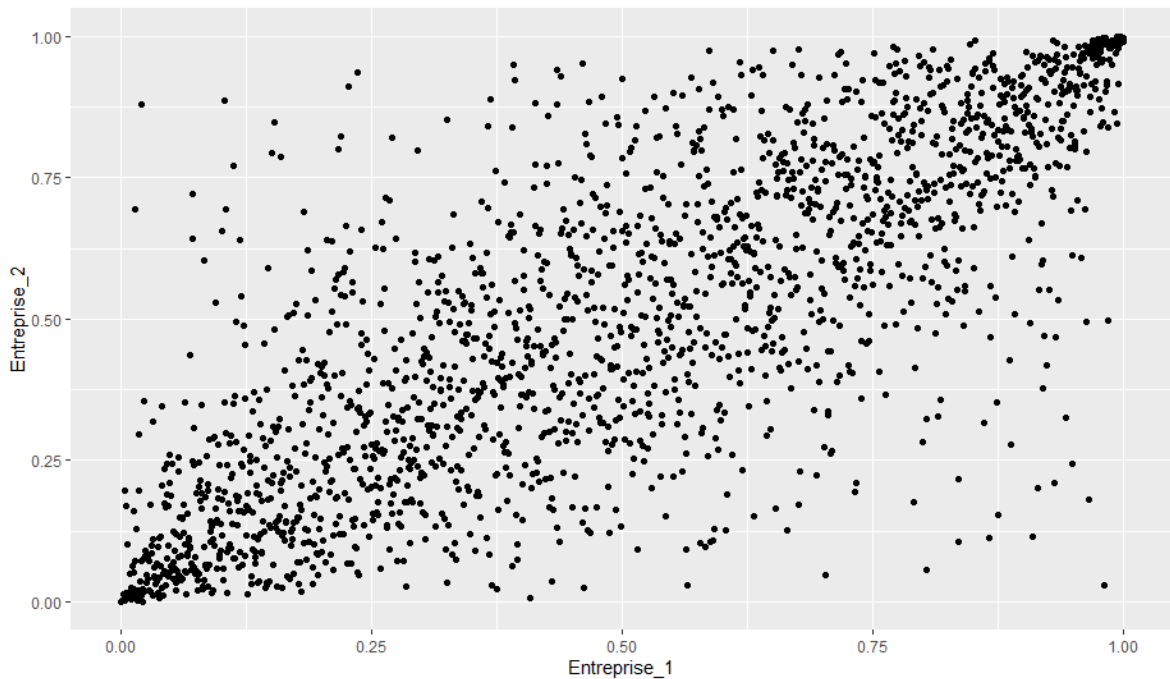
²¹ La corrélation des actifs est en général plus élevée que celle observée entre les événements de défaut (cf. Portait et Poncet, 2014, Roncalli, 2009, et de Servigny *et al.*, 2006).

Les historiques de prix de marché (actions, spreads de crédit ou primes de CDS) vont fournir toute l'étendue de leur structure de dépendance. Si l'on prend les rentabilités des actions, leur structure de dépendance s'étend des valeurs les plus négatives aux valeurs les plus positives. Si la structure de dépendance est homogène sur toute son étendue, une mesure classique de corrélation linéaire pourra être pertinente pour les défauts. Si en revanche, elle n'est pas homogène (on dit aussi qu'elle n'est pas linéaire), il va falloir se concentrer sur une partie de la structure de dépendance pour mesurer de manière pertinente la corrélation entre les défauts.

En effet, les défauts constituant des événements rares, ils ont des probabilités d'occurrence faibles proches de 0. S'ils sont fortement corrélés, on l'observe via une simultanéité des valeurs les plus négatives des rentabilités de prix. Selon l'approche du modèle structurel, lorsque survient une crise, les rentabilités des actions des entreprises affectées sont fortement négatives simultanément et ces entreprises feront probablement défaut. Il faut alors faire un zoom sur la partie extrême gauche de la structure de dépendance (là où se trouvent les valeurs les plus négatives), ce que l'on appelle la dépendance de queue de distribution.

Introduisons ici l'outil graphique de la figure 7 qu'est le dépendogramme pour observer une structure de dépendance. On s'appuie toujours sur les rentabilités d'actions d'entreprises cotées et les hypothèses du modèle structurel. Le dépendogramme représente la structure de dépendance sous la forme d'un nuage de points (u_1, u_2) . Les couples (u_1, u_2) sont issus des rentabilités observées des actions des deux entreprises : ils forment ce que nous appelons la copule empirique. Cette dernière est définie à partir des statistiques de rang issues de l'échantillon : ainsi, si l'échantillon comprend n données, la valeur minimum de la rentabilité de l'entreprise 1 est associée à la valeur $1/n$ de la copule empirique, la valeur suivante est associée à $2/n$, et ainsi de suite. Il en est de même pour l'entreprise 2. Si la valeur minimum pour l'entreprise 1 est observée au même moment que celle pour l'entreprise 2, nous obtenons le couple $(1/n, 1/n)$. Les valeurs (u_1, u_2) sont donc comprises entre 0 et 1. Si les rentabilités les plus négatives de l'entreprise 1 sont apparues au même moment que celle de l'entreprise 2, il y a une dépendance de queue forte à gauche et nous pourrions affirmer que les défauts seront fortement liés. Au contraire, si les rentabilités les plus négatives de l'entreprise 1 surviennent en même temps que des rentabilités positives de l'entreprise 2, il y aura pas ou peu de dépendance de queue.

Figure 7 – Illustration d'un dépendogramme de la copule empirique entre les rentabilités des actions de 2 entreprises (source : simulations de l'auteur)



On remarque sur la figure 7 que la dépendance globale est positive puisque le nuage présente une majorité de points qui part du bas du graphique à gauche et termine en haut à droite : cela est confirmé par la corrélation linéaire de Bravais-Pearson égale à 0.8. On observe également des amas de points à l'extrême gauche et à l'extrême droite du graphique ce qui pourrait confirmer la présence de dépendances de queue à gauche et à droite. Ainsi, l'occurrence d'un événement extrême à gauche pour l'entreprise 1 peut survenir en même temps que celle d'un événement extrême à gauche pour l'entreprise 2, et donc les défauts seraient dépendants. Cette dépendance de queue n'est pas mesurée par la corrélation linéaire mais par d'autres indicateurs statistiques de la dépendance (cf. encadré ci-dessous) et sera modélisée par des fonctions de probabilité de la structure de dépendance : les copules.

MESURES DE DEPENDANCE

Une mesure de dépendance régulièrement utilisée est le coefficient de corrélation linéaire de Bravais-Pearson. Cet indicateur est performant lorsque la relation de dépendance est linéaire (pas de différence entre la corrélation moyenne et celle dans les queues de distribution) et l'univers considéré gaussien, cadre d'analyse rare en Finance. Pour remédier à cela, nous avons recours à d'autres indicateurs de dépendance se fondant sur les

discordances et concordances observées sur un échantillon. Nous utilisons des coefficients de corrélation non linéaires et non paramétriques, comme le *tau* de Kendall et le *rho* de Spearman. Ce sont de bons indicateurs globaux de la dépendance entre variables aléatoires. Ils sont compris entre -1 et 1 comme le coefficient de corrélation linéaire : une valeur de 1 signifie une concordance parfaite. Mesurer la dépendance à l'aide d'indicateurs statistiques est une chose, la modéliser par une fonction de dépendance en est une autre. La copule répond à ce second objectif.

8. ESTIMATION DES CORRELATIONS D'UN PORTEFEUILLE DE CREANCES ET DE LA CREDITVAR ASSOCIEE

Deux méthodologies sont présentées : l'estimation des corrélations à l'aide de copules et le modèle à un facteur de risque ASRF.

ESTIMATION DES CORRELATIONS ET DE LA CREDITVAR A L'AIDE DE COPULES

Dans ce premier cas, nous souhaitons estimer la copule empirique de la figure 7 par une copule théorique. Ceci va nous permettre de simuler les pertes potentielles du portefeuille de créances et d'en évaluer le risque de crédit à l'aide d'une CreditVaR : cette technique est celle des simulations Monte Carlo.

Nous allons donc modéliser la structure de dépendance entre les créances à l'aide d'une copule²². La dépendance entre des variables aléatoires est parfaitement décrite par leur distribution jointe. La copule est l'outil permettant d'extraire la structure de dépendance d'une distribution jointe et ainsi de distinguer dépendance et comportement marginal. Prenons un exemple simple. La loi jointe gaussienne est en fait le mélange d'une copule gaussienne et de lois marginales gaussiennes. L'extraction de la copule gaussienne à partir de la loi jointe de même nom est alors possible. C'est l'objet du théorème de Sklar du nom de celui qui a introduit le concept « copule » en 1959. Ce théorème précise le lien défini par la copule C , déterminée à partir de la distribution bivariée jointe F , entre les fonctions de répartition marginales univariées F_1 et F_2 et la distribution bivariée F . La copule C associée à F s'écrit :

$$C(u_1, u_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = F(F_1^{-1}(u_1), F_2^{-1}(u_2)) = F(x_1, x_2)$$

La densité f d'une loi bivariée peut s'écrire aussi en fonction de la densité c de la copule associée et des densités des marginales f_1 et f_2 :

$$f(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) \times f_1(x_1) \times f_2(x_2)$$

²² La connaissance de cet outil probabiliste est essentielle à l'appréhension de nombreux domaines d'application de la finance quantitative : mesure du risque de crédit donc, mais aussi évaluation de produits de crédits structurés, mesure du risque de marché, gestion de portefeuille, pricing d'options à plusieurs sous-jacents, entre autres. Ainsi, à chaque fois qu'il est nécessaire de modéliser une structure de dépendance, nous pouvons faire appel aux copules.

On retrouve bien le mélange décrit précédemment des lois marginales et de la copule pour définir la loi jointe. En risque de crédit, les copules gaussienne et de Student sont privilégiées²³. La copule gaussienne n'a pas de dépendance de queue (sauf pour une corrélation parfaite de 1) et ne permet donc pas de corréler des valeurs extrêmes. Lorsque l'on souhaite modéliser une dépendance entre événements extrêmes, comme le sont les défauts, nous allons faire appel à la copule de Student. Dans le cas où le coefficient de corrélation est différent de -1, la copule de Student présente des dépendances de queue à droite et à gauche, et ceci d'autant plus que son degré de liberté a une valeur faible : dans le cas de la figure 7, le degré de liberté estimé sur la copule empirique est égal à 4, ce qui confirme la présence de dépendances de queue à gauche et à droite (une valeur de 50 par exemple l'aurait infirmé).

Maintenant que nous avons défini la structure de dépendance des défauts²⁴, nous pouvons simuler les pertes potentielles du portefeuille de crédit. Il nous faut tout d'abord caractériser la fonction de perte L d'un portefeuille de crédit pour un horizon donné. Supposons que le portefeuille porte sur I contreparties qui n'ont qu'une seule créance chacune. Le temps de défaut de la contrepartie i est noté τ_i , le taux de perte LGD_i et l'exposition au défaut EAD_i . Nous obtenons la fonction de pertes du portefeuille de créances égale à l'horizon h à²⁵ :

$$L_h = \sum_{i=1}^I L_h^i = \sum_{i=1}^I \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * 1_{\tau_i \leq h}$$

avec L_h^i la perte associée à la contrepartie i à l'horizon h . Nous avons besoin des PD à l'horizon h , des LGD, supposées indépendantes des PD, que nous pouvons rendre aléatoires avec la loi bêta vue plus haut et enfin de la dépendance des I créances pour

²³ On intègre aussi les extensions de la copule de Student (cf. Daul *et al.*, 2003). D'autres copules existent comme les copules archimédiennes, mais en risque de crédit, les copules gaussienne et de Student sont celles les plus utilisées.

²⁴ Dans le cadre du modèle structurel de Merton, cette structure de dépendance est approchée par celle des rentabilités des actions à partir desquelles les paramètres de la copule sont estimés. Si l'on suppose que cette copule est une copule gaussienne de matrice de corrélation constante ρ (en plus des actifs supposés gaussiens), cette dernière est estimée à l'aide de la corrélation des rentabilités des actions supposée constante. Cette copule gaussienne de corrélation ρ est aussi celle caractérisant la dépendance entre les événements de défaut, ainsi que celle entre les temps de défaut, même si la corrélation des événements de défaut est par exemple plus faible que ρ .

²⁵ L'indicatrice notée $1_{\tau_i \leq h}$ vaut 1 si $\tau_i \leq h$ (donc s'il y a défaut) et 0 si $\tau_i > h$.

simuler les pertes du portefeuille. Un défaut sur la contrepartie i sera simulé à l'aide de la simulation u_i de la copule que l'on comparera à la PD de la contrepartie i : si $u_i < PD_i$, alors il y aura défaut et perte consécutive. S'il y a dépendance de queue à gauche, des u_i proches de 0 surviendront en même temps. Nous simulons alors N pertes L_h , comme somme des pertes sur chaque créance. La CreditVaR est définie comme le quantile de niveau de confiance $1 - \alpha$ (égal par exemple à 99.9%) déterminé sur ces N pertes L_h .

ESTIMATION DES CORRELATIONS ET DE LA CREDITVAR A PARTIR D'UN MODELE A UN FACTEUR

Si le portefeuille a un nombre de créances très important, la méthode précédente va se révéler fastidieuse en temps de calcul et en estimation de la structure de dépendance. Utiliser un modèle à facteurs peut alors diminuer drastiquement le nombre de corrélations à estimer comme on le fait classiquement pour la gestion de portefeuille d'actions en utilisant le *Capital asset pricing model* (CAPM). Le modèle à un facteur ASRF (*Asymptotic single risk factor*) que nous allons décrire ici peut d'une certaine manière être considéré comme le pendant en risque de crédit du CAPM. Nous nous inspirons dans la suite de l'ouvrage de Portait et Poncet (2014).

Le modèle ASRF tire sa philosophie du modèle structurel de Merton (1974) vu précédemment et a été formalisé par Vasicek (2002) et Gordy (2003). Il est à la base également du calcul des fonds propres bâlois que nous étudierons plus bas. Rappelons la distance au défaut de l'entreprise i sous probabilité historique à un horizon d'un an :

$$DD_i = \frac{1}{\sigma_i} \left[\ln \frac{V_i}{D_i} + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i^2}{2} \right) \right]$$

avec μ_i et σ_i les moyenne et écart-type de la valeur V_i de l'entreprise et D_i le nominal de la dette de l'entreprise. Nous ajoutons à cette formulation vue précédemment que la probabilité de défaut de l'emprunteur i dépend de la rentabilité normalisée des actifs notée W_i de l'emprunteur :

$$PD_i = P(W_i \leq -DD_i) = \Phi(-DD_i)$$

Le modèle ASRF part du principe que tous les actifs des entreprises sont corrélés suivant une loi multivariée gaussienne de coefficient de corrélation unique ρ ²⁶. On peut alors définir les rentabilités normalisées W_i des I créances comme dépendant d'un seul et même facteur F représentant le risque systématique (qui correspond au cycle de crédit ou encore à la conjoncture économique). Nous obtenons le modèle ASRF :

$$W_i = \sqrt{\rho}F + \sqrt{1 - \rho}\varepsilon_i$$

où W_i , F et ε_i sont des lois gaussiennes centrées et réduites et où ε_i le risque spécifique diversifiable est indépendant de F et de ε_j pour $j \neq i$. On remarque que $\text{corr}(W_i, W_j) = \rho$: ainsi ρ est la corrélation supposée constante des actifs²⁷ et $\text{corr}(W_i, F) = \sqrt{\rho}$. La corrélation peut être estimée à partir des rentabilités des actions, comme vu plus haut, mais aussi à partir des PD (nous verrons par exemple dans la section suivante la formulation bâloise de la corrélation la liant à la PD).

Si l'on réécrit la fonction de perte à horizon un an L du portefeuille de I créances définie dans la section précédente à l'aide du modèle à un facteur et du modèle de Merton, nous obtenons :

$$L = \sum_{i=1}^I L^i = \sum_{i=1}^I \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * 1_{W_i \leq -DD_i} = \sum_{i=1}^I \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * 1_{\sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i \leq -DD_i}$$

Il va alors falloir étudier le comportement de L pour une valeur de F fixée, c'est-à-dire conditionnellement à F puisque dans l'indicatrice, 2 variables sont aléatoires : fixer F va nous permettre de progresser dans le calcul de L . Une autre hypothèse qui permet de comprendre le terme *Asymptotic* dans ASRF est de supposer un grand nombre de créances dans le portefeuille et de supposer qu'aucune créance ne domine en montant les autres (on a un portefeuille dit *granulaire*). Ainsi, d'après la loi des grands nombres, la perte

²⁶ Il est possible aussi de proposer une formulation de l'ASRF ayant des corrélations ρ_i propres à chaque actif d'entreprise.

²⁷ Ce modèle ressemble bien au CAPM dans sa structure factorielle avec un risque systématique et un risque spécifique. La formulation de ce modèle correspond aussi à celle qui est utilisée pour définir une copule gaussienne. Il est possible de développer un modèle ASRF à l'aide d'une copule de Student pour capturer une dépendance extrême des défauts (Rutkowski et Tarca, 2015).

conditionnelle à F que l'on note $L(F)$, qui est la somme de variables indépendantes, est asymptotiquement égale à son espérance :

$$L(F) = E \left(\sum_{i=1}^I \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * 1_{\sqrt{\rho}F + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i \leq -DD_i} \right) = \sum_{i=1}^I \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * \Phi \left(-\frac{DD_i + \sqrt{\rho}F}{\sqrt{1-\rho}} \right)$$

puisque les ε_i sont des variables gaussiennes indépendantes. On a éliminé le risque spécifique ε_i diversifiable.

Pour définir la CreditVaR, nous remarquons tout d'abord que $L(F)$ est décroissante suivant F , donc plus F diminue, plus la perte augmente. En revenant à un facteur systémique F aléatoire, prenons le quantile à 0.1%. Cela correspond à une CreditVaR de niveau de confiance 99.9% et F est alors le quantile à 0.1% d'une loi gaussienne standard. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} \text{CreditVaR} &= \sum_{i=1}^I \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * \Phi \left(-\frac{DD_i + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(1 - 99.9\%)}{\sqrt{1-\rho}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^I \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\text{PD}_i) - \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(1 - 99.9\%)}{\sqrt{1-\rho}} \right) \end{aligned}$$

Nous obtenons une formule mathématique fermée de la CreditVaR, contrairement aux simulations Monte Carlo. Cette formulation fermée est à la base du calcul des fonds propres de crédit bâlois.

9. DETERMINATION DES EXIGENCES EN FONDS PROPRES

En 1974, les pays occidentaux se réunissent dans la ville de Bâle en Suisse, siège de la Banque des Règlements Internationaux (BRI) à la suite de la faillite d'une banque allemande, Herstatt. Leur objectif est de définir des règles de prudence pour éviter une autre faillite bancaire, alors que la croissance du monde occidental des Trente Glorieuses commence à s'effriter. Ils aboutissent 14 ans après, en 1988, aux accords de Bâle qui imposent aux banques d'avoir suffisamment de fonds propres pour pallier une défaillance potentielle et permettent de diminuer la distorsion de concurrence entre banques, point qui sera amélioré avec les accords de Bâle 2 (cf. Tirole, 2008, et Rochet, 2008, pour le développement de ce sujet). La CreditVaR sera à la base du calcul des fonds propres, ces derniers couvrant un risque rare ayant un temps de retour de l'ordre de 1 tous les 1 000 ans (CreditVaR à horizon 1 an et de niveau de confiance 99.9%).

L'objectif de cette section est de préciser les spécificités de la gestion prudentielle du risque de crédit et le lien avec la formalisation de son évaluation que nous venons de traiter.

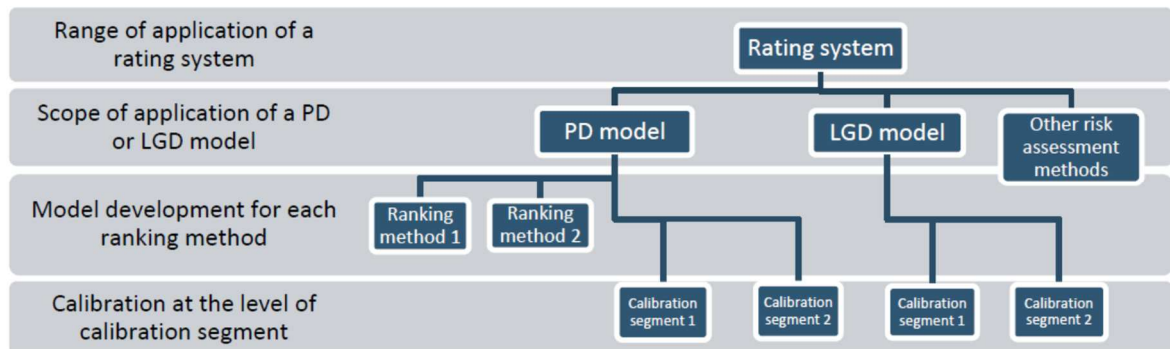
LES DIFFERENTES CLASSES D'ACTIFS REGLEMENTAIRES

Un premier concept majeur est la notion d'*asset class* ou classe d'actifs. En effet, les prêts bancaires vont être segmentés de manière homogène et suivant le type de contrepartie engagée. Ainsi, les entreprises forment une *asset class* de même que les institutions financières, les souverains, ou encore les particuliers (*retail* en anglais). Au sein de la classe d'actifs entreprises, plusieurs catégories d'exposition sont distinguées : les groupes et leurs filiales qui ont plus de 500 millions d'euros de chiffres d'affaires consolidés, les PME qui ont moins de 50 millions d'euros de chiffres d'affaires consolidés, et les financements spécialisés.

DISTINCTION ENTRE DIFFERENTIATION ET QUANTIFICATION DU RISQUE DE CREDIT

Un schéma produit par l'EBA en 2017 (figure 8) permet de résumer les principaux enjeux en termes de règles de gestion du risque de crédit.

Figure 8 – Exemple d’une structure de système de notation (source : EBA, 2017)



Nous avons vu précédemment les paramètres PD et LGD. Pour rappel, ces deux paramètres mesurent le risque de crédit à deux niveaux distincts : la PD mesure le risque de défaillance d’une contrepartie de la banque (la banque a prêté de l’argent à une entreprise, un particulier, un État), alors que la LGD mesure la perte que la banque peut subir suite à cette défaillance (en pourcentage du capital restant dû).

L’objectif d’un *rating system* est donc de regrouper des contreparties au sein d’une *asset class* ayant des caractéristiques similaires pour pouvoir les hiérarchiser entre elles ainsi que de hiérarchiser les facilités, ou contrats de prêt, vendues à ces contreparties. Prenons un exemple. Soit le *rating system* des PME françaises d’une banque. Nous allons définir pour toutes les PME du portefeuille de prêts de la banque un classement de ces PME et un classement des facilités proposées à ces PME. Ces deux classements vont nous permettre de discriminer les PME entre elles et les prêts proposés aux PME entre eux. Dans le portefeuille de prêts peuvent se retrouver des PME présentant d’importants chiffres d’affaires et ayant une bonne gestion de leur BFR, et d’autres plus jeunes, plus fragiles. Il y a également des prêts pour des investissements d’avenir dans des machines-outils qui permettront à des PME de gagner des parts de marché et il peut y avoir aussi des accords de découvert à ces PME sans nécessairement de garantie forte. Ainsi, nous allons pouvoir différencier (classer, hiérarchiser, discriminer, différencier sont ici des synonymes) les PME françaises et les types de prêt que la banque leur a accordés. Cette étape essentielle est qualifiée par le superviseur européen de *risk differentiation* : on va différencier le risque entre contreparties et entre types de prêt. Cette étape est permise par les différentes estimations et modélisations des PD et LGD que nous avons définies plus haut.

Lorsque la différenciation développée est pertinente, il est alors possible de valoriser chaque notation. Supposons que la différenciation des contreparties propose 7 notations : la première que l'on notera 1 est la moins risquée et la 7^{ième} est la plus risquée. Les PME françaises qui composent la classe de risque 1 auront alors une valeur de PD plus faible que les PME françaises qui appartiennent à la classe de risque 2. Il en est de même pour les transactions qui vont être classées par exemple en 7 segments homogènes de risque. Le premier segment sera constitué de prêts ayant de fortes garanties de remboursement si la contrepartie a un défaut de paiement et il aura donc une LGD plus faible que les autres segments plus risqués. Cette deuxième étape de valorisation du risque est dénommée par le superviseur européen la *risk quantification*. Cette quantification nécessite un minimum de 5 années d'observation pour la PD et de 7 années pour la LGD. Les règles prudentielles ont pour objectif de définir les fonds propres d'une banque qui résistent à une crise millénaire : il est donc nécessaire que ces fonds propres soient prudents (on dit aussi conservateurs). Pour cela, la quantification doit d'une part être déterminée à travers tout un cycle économique (*Through the cycle* ou TTC) et, d'autre part, il va falloir ajouter à la valorisation brute (moyenne de long terme) des marges supplémentaires fonctionnant comme des coussins d'amortissement aux potentielles crises de crédit. Ces marges sont appelées des marges de prudence (dite aussi de conservatisme, en anglais *Margin of conservatism* ou MoC²⁸).

APPROCHE INTERNE BALOISE

Pour être précis dans sa gestion du risque, une banque peut décider de mettre en œuvre des approches avancées, au lieu d'une approche standard, utilisant la collecte de données internes sur les PD, LGD et EAD-CCF. Il s'agit d'une possibilité introduite par le dispositif Bâle 2 et dont les banques, en particulier les plus grandes d'entre elles, font désormais un large usage (cf. encadré ci-dessous). On parle d'approches en notes internes (*Internal ratings-based* ou IRB) et on distingue une approche dite fondation (IRBF avec F pour *Foundation*), où seule la PD sera évaluée par les données internes avec des forfaits imposés pour la LGD et le CCF suivant le type de produit et des *risk drivers* prédéfinis, et une

²⁸ Les MoC vont s'apparenter le plus souvent à la borne supérieure de l'intervalle de confiance des estimations des paramètres. Mais peuvent s'ajouter d'autres types de MoC liées à l'incertitude sur la qualité des données entrant dans les modèles ou celle des processus de recouvrement.

approche avancée (IRBA avec A pour *Advanced*), où tous les paramètres (c'est-à-dire PD, LGD et EAD-CCF) seront estimés par des données internes.

APPROCHE STANDARD VERSUS MODELES INTERNES : LE CAS DU GROUPE SOCIETE GENERALE

Pour calculer leurs exigences en fonds propres réglementaires, les banques doivent choisir entre le recours aux notations internes (ou approche par les modèles internes) et l'utilisation de l'approche standard. Les grandes banques utilisent en général les deux méthodologies, avec une place toutefois souvent dominante pour les modèles internes. La surface financière importante de ces établissements, mais également l'étendue de leurs activités, rendent possible mais également souhaitable le développement de modèles de mesure de risque sophistiqués et capables de prendre en compte des effets de compensation entre leurs différentes expositions (diversification du risque). Prenons l'exemple du Groupe Société Générale. Au titre du risque de crédit (et en excluant le risque de contrepartie), il publiait un encours pondéré par le risque de 251 milliards d'euros pour son exercice 2019 (tableau 9). Sur ce total, 93,3 milliards d'euros (soit 37,2%) étaient estimés par l'approche standard, contre 157,8 milliards d'euros (62,8%) par les modèles internes. Au sein des modèles internes, l'approche IRBA était à l'origine de 133 milliards d'euros, soit près de 53% du total des encours pondérés par le risque. Conformément aux exigences du Pilier 1, le Groupe Société Générale devait disposer pour couvrir ce risque de crédit d'un minimum de 20 milliards d'euros de fonds propres réglementaires, soit 8% des encours pondérés par le risque.

Tableau 9 - Société Générale - Expositions risque de crédit – 2019 (en Mds€)

	RWAs	Exigences en fonds propres
Approche standard	93,3	7,5
Modèles internes – approche fondation (IRBF)	4,7	0,4
Modèles internes – approche avancée (IRBA)	133,0	10,6
Autres modèles internes	20,1	1,6
Total	251,1	20,1

Explicitons à présent le calcul des RWAs pour les modèles internes. La perte moyenne attendue d'une banque est appelée l'*Expected loss* (EL). Cette perte moyenne est pour une contrepartie i égale à :

$$EL_i = EAD_i * PD_i * LGD_i$$

Les exigences en fonds propres sont évaluées à partir de la CreditVaR, à laquelle on retranchera l'EL pour obtenir ce qui est appelé l'*Unexpected loss* (UL) :

$$EFP = \text{CreditVaR} - EL = UL$$

Cette relation décrit le principe fondamental inspirant la régulation prudentielle, à savoir que les fonds propres ont vocation à couvrir un risque de crédit non anticipé, extrême au regard des pertes de crédit enregistrées par le passé, tandis que les pertes anticipées doivent être couvertes par une tarification appropriée des crédits et, le cas échéant, la constitution de provisions. Ce point est important : les banques doivent fixer le niveau du taux d'intérêt des crédits qu'elles accordent de telle manière que la marge sur le coût de leurs ressources puisse couvrir les pertes prévisibles découlant du défaut des emprunteurs (constitution de provisions) et donc préserver l'intégrité des capitaux propres.

Sur un plan technique, la CreditVaR est issue du modèle gaussien à un facteur étudié plus haut avec quelques ajustements :

- la corrélation entre actifs ρ dépend de la probabilité de défaut suivant une formule pré-définie et la classe d'actifs de la contrepartie,
- un ajustement de maturité est ajouté, calibré de manière assez complexe et après de nombreux travaux du Comité de Bâle,
- et enfin un coefficient correcteur introduit en 2004²⁹ (appelé aussi par « facteur scalaire ») de 1.06 appliqué à l'UL et qui ne s'appliquera plus dans la révision IRB de Bâle 4.

²⁹ Ce coefficient correctif a pour objectif d'augmenter l'UL, estimée par le Comité de Bâle pas assez conservatrice lors des études quantitatives d'impact réalisées auprès des banques avant l'application de Bâle II.

On obtient finalement la formulation de l'UL ajustée suivante :

$$UL_{ajustée} = 1.06 * \sum_{i=1}^I EAD_i * LGD_i * \left[\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD_i) - \sqrt{\rho} \Phi^{-1}(1 - 99.9\%)}{\sqrt{1 - \rho}} \right) - PD_i \right] \\ * Ajust_{Maturité,i}$$

La corrélation, pour les grandes entreprises (dont le chiffre d'affaires est supérieur à 50 millions d'euros), les institutions financières et les souverains, prend la forme suivante :

$$\rho = 0.12 * \frac{1 - e^{-50*PD_i}}{1 - e^{-50}} + 0.24 * \frac{1 - (1 - e^{-50*PD_i})}{1 - e^{-50}}$$

D'après cette formule, pour une PD égale à 0, on obtient une corrélation maximale de 0.24 (l'exponentielle de 0 est égale à 1) et pour une PD égale à 1, on obtient une corrélation minimale de 0.12. Cette formule traduit le fait que les contreparties ayant une PD faible auront plus de sensibilité au facteur systématique (et donc à la conjoncture économique) que les contreparties déjà proches du défaut. Pour soutenir les PME (les entreprises dont le chiffre d'affaires, noté CA, est inférieur à 50 millions d'euros), leur corrélation est diminuée à :

$$\rho = 0.12 * \frac{1 - e^{-50*PD}}{1 - e^{-50}} + 0.24 * \frac{1 - (1 - e^{-50*PD})}{1 - e^{-50}} - 0.04 * \left(1 - \frac{\max(CA, 5) - 5}{45} \right)$$

L'ajustement de maturité notée $Ajust_{Maturité,i}$ est égal pour la créance i et pour une maturité M à :

$$\frac{1 + (M - 2.5) * b(PD_i)}{1 - 1.5 * b(PD_i)}$$

avec $b(PD_i) = [0.11852 - 0.05478 * \ln(PD_i)]^2$. Là encore, une PD plus forte est traduite par un ajustement de maturité plus faible, toutes choses égales par ailleurs, ce qui exprime une sensibilité plus faible à la conjoncture des contreparties ayant une PD élevée, donc proches du défaut, comme pour la corrélation.

Pour les entreprises en défaut, l'UL ajustée est égale à $\max(0, LGD_i - ELBE_i)$ avec le paramètre LGD égal à la LGD des actifs en défaut estimée pour la facilité i , et l'ELBE (*Expected loss best estimate*) égale à la meilleure estimation de la perte espérée, qui s'assimile à une LGD moyenne. L'ELBE peut être estimée à l'aide des provisions spécifiques de la facilité en défaut : en effet, les provisions spécifiques sont déterminées de telle sorte que la perte soit compensée.

A partir de ces pertes non anticipées et ajustées, il est possible d'estimer les RWAs. Il suffit pour cela de multiplier les pertes non anticipées par 12,5 (correspondant à l'inverse de 8%, puisque les fonds propres exigés sont égaux à 8% des RWAs), soit :

$$RWA = 12.5 * UL_{ajusté}$$

RÉFÉRENCES

E.I. Altman, « Financial ratios, discriminant analysis and the prediction of corporate bankruptcy », *Journal of Finance* 23(4), 1968, p. 589-609.

E.I. Altman, « Predicting financial distress of companies: revisiting the Z-score and ZETA® models », in *Handbook of research methods and applications in empirical finance*, Edward Elgar Publishing, 2000.

P.L. Bernstein, *Des idées capitales – les origines improbables du Wall Street moderne*, traduit de l'américain par J. Salvati en 1995, PUF, coll. « Quadrige », Paris, 1992.

F. Black, M. Scholes, « The Pricing of Options and Corporate Liabilities », *Journal of Political Economy* 81(3), 1973, p. 637-654.

P. Clauss, F. Pansard, *Economie Bancaire - analyse financière, régulation et gestion des risques*, Ellipses, 2021.

P.J. Crosbie, J.R. Bohn, « Modeling Default Risk », *Technical Report*, Moody's KMV Company, 2003.

S. Daul, E.G. de Giorgi, F. Lindskog, A. McNeil, « The grouped t-copula with an application to credit risk », *Risk* 16, 2003, p. 73-76.

R. Davidson, J.G. MacKinnon, *Estimation and Inference in Econometrics*, Oxford University Press, 1993.

J. Dermine, C.N. de Carvalho, « Bank loan losses-given-default, a case study », *Journal of Banking & Finance* 30(4), 2006, p. 1219-1243.

Fitch Ratings, « Definitions of ratings and other forms of opinion », 2010.

Global Credit Data, « LGD report 2020 – Large corporate borrowers », 2020.

M. Gordy, « A risk factor model foundation for rating-based bank capital rules », *Journal of Financial Intermediation* 12, 2003, p. 199-232.

G.M. Gupton, R.M. Stein, « LossCalc: model for predicting loss given default (LGD) », Moody's Investor Service, 2002.

J. Hull, *Options, futures, and other derivatives*, Pearson, 7^e éd., 2009.

- D. Kurtz, T. Pignard, « Modélisation du Risque de Crédit », Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, 2004.
- D. Lando, T.M. Skødeberg, « Analyzing Rating Transitions and Rating Drift with Continuous Observations », *Journal of Banking & Finance* 26(2-3), 2002, p. 423-444.
- S. Lessmann, B. Baesens, H.V. Seow, L.C. Thomas, « Benchmarking State-of-the-art Classification Algorithms for Credit Scoring: An Update of Research », *European Journal of Operational Research* 247(1), 2015, p. 124-136.
- G. Löffler, P.N. Posch, *Credit risk modelling using Excel and VBA*, Wiley, Londres, 2007.
- G. Loterman, I. Brown, D. Martens, C. Mues, B. Baesens, « Benchmarking regression algorithms for loss given default modeling » *International Journal of Forecasting* 28(1), 2012, p. 161-170.
- R.C. Merton, « On the Pricing of Corporate Debt: the Risk Structure of Interest Rates », *Journal of Finance* 29, 1974, p. 449-470.
- Moody's Investors Service, « Back-Testing Moody's LGD Methodology », 2007.
- Moody's Investors Service, « Rating symbols and definitions », 2010.
- R. Portait, P. Poncet, *Finance de marché*, Dalloz, coll. « Gestion », Paris, 4^e éd., 2014.
- T. Roncalli, *La gestion des risques*, 2^e éd., Economica, Paris, 2009.
- M. Rutkowski, S. Tarca, « Regulatory capital modelling for credit risk », *International Journal of Theoretical and Applied Finance* 18(5), 2015.
- T. Schuermann « What Do We Know About Loss Given Default? », in D. Shimko (ed.), *Credit Risk Models and Management*, London, 2^e ed., 2004.
- A. de Servigny, B. Metayer, I. Zelenko, *Le risque de Crédit*, Dunod, 2006.
- S&P Global Ratings, « Default, transition, and recovery: 2019 annual global corporate default and rating transition study », 2020a.
- S&P Global Ratings, « S&P global ratings definitions », 2020b.
- A. Thomas, *Économétrie des Variables Qualitatives*, Dunod, 2000.
- O. Vasicek, « Loan portfolio value », *Risk*, 2002.