MESURE DE PERFORMANCE EN GESTION DE PORTEFEUILLE

Une approche pratique

Pierre Clauss
Maître de conférences associé à l'Université Paris-Saclay

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

En gestion de portefeuille, mesurer la performance revêt une importance cruciale aussi bien pour le gérant que pour ses clients. Toutefois, la performance est une notion complexe, différenciée selon qu'il s'agisse d'une gestion absolue ou benchmarkée, impliquant des indicateurs distincts. Au-delà de la performance, deux concepts complémentaires émergent : la rentabilité et le risque.

Dans la première partie de cette formation, nous explorerons les différents calculs de rentabilité : simple, pondérée et annualisée. Dans la seconde partie, nous examinerons en détail les aspects du risque : absolu, relatif et les ratios rentabilité-risque. Enfin, dans la dernière partie, nous aborderons l'origine de la performance d'un portefeuille en gestion benchmarkée à travers les méthodes d'attribution de performance.

LES DIFFERENTES NOTIONS DE RENTABILITE D'UN PORTEFEUILLE

Dans un processus de décision d'investissement, la première brique fondamentale pour analyser la performance est la rentabilité. C'est même la première question que va se poser le gérant et son client : quelle est la rentabilité de mon investissement ?

1. RATIO DE RICHESSE ET RENTABILITE FINANCIERE

Imaginons un investissement de départ de 100, qui aboutit à une richesse de 110 au bout d'un an. On peut dire que le capital a été multiplié par 1.1 : avec 1 euro investi, on en a obtenu 1.1 après un an.

La *ratio de richesse* se mesure à la fin de la période t, à partir de la valeur du portefeuille V, selon la formule suivante :

$$\frac{V_t}{V_{t-1}}$$

Il existe une autre manière, plus courante, d'exprimer ce résultat. Au lieu de parler de *ratio de richesse*, on peut mesurer ce que l'investissement a rapporté en plus ou en moins par rapport au capital de départ. Dans notre exemple, on a gagné 10 : c'est 10% de 100. On dira alors que la rentabilité est de 10%, car $(110 - 100) / 100 = 10\%$. Ce chiffre est ce qu'on appelle la *rentabilité financière* de l'investissement. Elle représente le taux de gain ou de perte en capital entre deux dates.

La *rentabilité financière* notée r_t se mesure à la fin de la période t, à partir de la valeur du portefeuille V, de la manière suivante :

$$r_t = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}} = \frac{V_t}{V_{t-1}} - 1$$

Ce calcul ne prend en compte que l'évolution du prix. Or, un titre action peut aussi rapporter de l'argent sous forme de dividendes. Pour tenir compte de ce revenu, on introduit ce qu'on appelle le *dividend yield* : c'est le rapport entre les dividendes perçus et le prix d'achat du titre, soit le *rendement* du titre (je fais ici la différence essentielle entre *rendement* et *rentabilité*). La formule complète (on parle de *total return* en anglais) de la *rentabilité financière* devient alors :

$$r_t^{total} = \frac{V_t - V_{t-1} + D}{V_{t-1}} = r_t + \frac{D}{V_{t-1}}$$

où D représente les dividendes reçus pendant la période. Ces rentabilités incluent le revenu et les changements de valorisation, soit l'appréciation de capital réalisée et non réalisée. Dans les périodes courtes, les dividendes sont souvent faibles par rapport aux variations de prix. C'est pourquoi, dans la pratique, on réduit fréquemment la rentabilité au seul gain ou perte en capital.

On observe un lien évident entre *ratio de richesse* et *rentabilité financière* :

$$1 + r_t = \frac{V_t}{V_{t-1}}$$

Sans flux externes de nouveaux capitaux investis (souscriptions ou rachats), on peut composer les différentes rentabilités de chaque sous-période (par exemple la semaine) pour obtenir la rentabilité sur une période entière (par exemple l'année). Supposons que la période entière commence en $t = 0$ et se termine en $t = T$, et que la rentabilité sur cette période entière est notée r. Alors, nous pouvons écrire :

$$1 + r = \frac{V_T}{V_0} = \frac{V_1}{V_0} \times \frac{V_2}{V_1} \times \dots \times \frac{V_{T-1}}{V_{T-2}} \times \frac{V_T}{V_{T-1}}$$

Comme on sait que le *ratio de richesse* est égal à la *rentabilité financière* à laquelle on ajoute 1, (par exemple, pour la fin de période 1, on a $\frac{V_1}{V_0} = 1 + r_1$), on peut réécrire la formule précédente de la manière suivante :

$$1 + r = (1 + r_1) \times (1 + r_2) \times \dots \times (1 + r_{T-1}) \times (1 + r_T)$$

Ce processus est ce que l'on appelle le *chaînage* des rentabilités des sous-périodes, ce l'on définit aussi comme un processus géométrique.

Exercice A partir des valeurs de portefeuille suivantes, calculer (i) les ratios de richesse et les rentabilités financières des sous-périodes et (ii) le ratio de richesse et la rentabilité de la période entière : 100, 112, 95, 99, 107 et 115.

2. RENTABILITE PONDEREE

Lorsqu'il y a des flux externes de capitaux (apports ou retraits) au cours de la période d'investissement, les formules classiques de ratio de richesse ou de rentabilité financière ne sont plus valables. En effet, ces mouvements perturbent le calcul, car ils ne reflètent pas une évolution naturelle du portefeuille mais des décisions extérieures au gérant.

Il devient alors nécessaire d'ajuster notre approche pour intégrer ces flux. Deux solutions s'offrent à nous :
– la première consiste à prendre directement en compte ces flux dans le calcul, pour mesurer la performance du portefeuille en fonction des moments d'investissement (ce sera le cas du *Money-Weighted Rate of Return* – MWRR)
– la seconde consiste à neutraliser l'effet de ces flux pour ne conserver que la performance générée par la gestion du portefeuille (ce sera le cas du *Time-Weighted Rate of Return* – TWRR).

Pondérer par les flux externes de capitaux emprunte l'idée aux méthodologies utilisées en valorisation financière, à savoir le Taux de Rentabilité Interne (TRI). En anglais, on l'appelle dans le cadre de la mesure de performance le *Money-Weighted Rate of Return* (MWRR). Il est important du point de vue de l'investisseur (le client du gérant) pour connaître précisemment la rentabilité de ses investissements.

TRI simple et modifié

Le TRI simple r doit satisfaire, doit permettre l'égalité suivante :

$$V_T = V_0 \times (1 + r) + FE \times (1 + r)^{0.5}$$

avec FE le flux externe de capital. Avec cette formule, nous faisons l'hypothèse que tous les flux externes de capitaux apparaissent au milieu de la période entière.

Exercice Déterminer le TRI simple d'un investissement qui a une valeur initiale de 100, une valeur finale de 108 à la fin de l'année et un flux externe de capital de 40. *Utiliser la formule TRI.PAIEMENTS d'Excel.*

On peut être plus précis et utiliser les dates exactes des flux externes de capitaux pour en déterminer le TRI. On l'appelle alors le TRI modifié.

Exercice Déterminer le TRI modifié d'un investissement qui a une valeur au 1er janvier de 100, une valeur au 31 décembre de 108 et un flux externe de capital de 40 le 14 mai.

Méthode de Dietz

Peter Dietz en 1966 proposa une alternative plus simple de rentabilité pondérée par les flux externes de capitaux :

$$r = \frac{V_T - V_0 - FE}{V_0 + \frac{FE}{2}}$$

Le numérateur représente le gain ou la perte de l'investissement et le dénominateur représente l'investissement initial auquel on ajoute la moitié du flux externe de capital, avec l'hypothèse déjà vues précédemment que ce flux intervient au milieu de la période étudiée.

Exercice Déterminer le MWRR avec la méthode simple de Dietz d'un investissement qui a une valeur initiale de 100, une valeur finale de 108 et un flux externe de capital de 40. Que remarquez-vous ?

De la même manière que pour le TRI, on peut être plus précis et dépasser l'hypothèse de flux externe apparaissant à la moitié de la période. Pour cela, on va utiliser la méthode modifiée de Dietz.

La rentabilité pondérée avec la méthode modifiée de Dietz est égale à :

$$r = \frac{V_T - V_0 - FE}{V_0 + \sum FE_t \times W_t}$$

avec FE le total des flux externes sur toute la période, FE_t le flux apparaissant le jour t et le poids à appliquer aux flux $W_t = \frac{N - J_t}{N}$ avec N le nombre total de jours de la période étudiée et J_t le nombre de jours calendaires entre le début de la période totale et le jour d'apparition du flux.

Exercice Déterminer le MWRR avec la méthode modifiée de Dietz d'un investissement qui a une valeur au 1er janvier de 100, une valeur au 31 décembre de 108 et un flux externe de capital de 40 le 14 mai. On considère que le flux est reçu à la fin de la journée. Que remarquez-vous ?

PAR LE TEMPS

La rentabilité pondérée par le temps (*Time-Weighted Rate of Return* – TWRR en anglais) est une alternative très usitée du MWRR dans laquelle chaque période de temps a un poids égal quel que soit les flux externes de capitaux.

TWRR classique

On va *chaîner* chaque sous-période en intégrant les flux externes :

$$1 + r = \frac{V_1 - FE_1}{V_0} \times \frac{V_2 - FE_2}{V_1} \times \dots \times \frac{V_{T-1} - FE_{T-1}}{V_{T-2}} \times \frac{V_T - FE_T}{V_{T-1}}$$

avec V_1 la valeur du posrtefeuille incluant le flux externe apparaissant à la fin de la sous-période 1. Nous pouvons remarquer que $\frac{V_1 - FE_1}{V_0} = 1 + r_1$, c'est-à-dire que cette formule revient au *ratio de richesse* calculée juste avant la réception du flux externe de la fin de la première sous-période. Nous pouvons réécrire la formule précédente de la manière suivante et nous retrouvons la formule de *chaînage* classique :

$$1 + r = (1 + r_1) \times (1 + r_2) \times \dots \times (1 + r_{T-1}) \times (1 + r_T)$$

Pour calculer cette rentabilité pondérée, il nous faut la valorisation du portefeuille à chaque sous-période. On considère que le flux externe arrive à la fin de la sous-période.

Exercice Déterminer le TWRR d'un investissement qui a une valeur au 1er janvier de 100, une valeur au 31 décembre de 108, un flux externe de capital de 40 le 14 mai et une valeur de 103 le même jour immédiatement après l'arrivée du flux.

TWRR en base unitaire

Le « *rebasage* » ou *base unitaire* est une variante du TWRR. L'objectif est de normaliser la valeur du portefeuille au début de la période à 1 ou 100 et de calculer les unités allouées à chaque sous-période.

Exercice Déterminer le TWRR en *base unitaire* d'un investissement qui a une valeur au 1er janvier de 100, une valeur au 31 décembre de 108, un flux externe de capital de 40 le 14 mai et une valeur de 63 le même jour juste avant l'arrivée du flux. Que remarquez-vous ?

MWRR OU TWRR

Les gérants privilégient généralement le TWRR (*Time-Weighted Rate of Return*) car il permet de comparer objectivement plusieurs portefeuilles entre eux, de calculer une performance moyenne sur la période, et surtout, d'éliminer l'impact des mouvements de capitaux externes — que le gérant ne contrôle pas — pour ne mesurer que sa propre capacité à générer de la performance. Le TWRR neutralise ces flux en pondérant également chaque sous-période, indépendamment du montant investi ou du moment des entrées et sorties de capitaux. C'est d'ailleurs pour cette raison qu'il est exigé par les normes GIPS (*Global Investment Performance Standards*).

À l'inverse, si l'objectif est d'évaluer la rentabilité réelle d'un client en tenant compte de ses propres flux (apports ou retraits), on utilise le MWRR (*Money-Weighted Rate of Return*), qui intègre pleinement l'effet du timing des flux. Cela peut produire des résultats très différents : par exemple, si un client injecte des fonds à la fin d'une première période juste avant une perte, le MWRR pourrait être négatif, même si le TWRR est positif, car ce dernier ne prend pas en compte le moment où les capitaux sont investis (voir exercice ci-dessous).

Enfin, dans des contextes où les actifs sont illiquides, comme dans le private equity, les valorisations sont moins fréquentes et le suivi précis des flux et de leur timing devient difficile. Dans ce cas, c'est le MWRR qui sera généralement privilégié.

Exercice Comparer TWRR et MWRR dans le cas suivant : investissement de 100 au début de la période, flux externe de 1 000 puis valorisation de 1 200 à la fin de la pemière sous-période et valorisation finale de 900. Que pouvez-vous conclure ?

3. RENTABILITE ANNUALISEE

Il est important de comprendre que les investisseurs ne s'intéressent pas à toutes les rentabilités détaillées du portefeuille au fil du temps, mais cherchent plutôt un indicateur synthétique qui résume efficacement le gain ou la perte en capital sur la période. Pour cela, on utilise généralement la rentabilité annualisée, qui permet de comparer des performances sur une base commune, quel que soit l'horizon d'investissement.

Deux méthodes principales existent pour calculer cette rentabilité annualisée :
– la méthode *additive* (ou *arithmétique*), qui consiste à faire la moyenne des rentabilités périodiques, puis à la multiplier par le nombre de périodes dans une année

– la méthode *capitalisée* (ou *géométrique*), qui s'appuie sur l'évolution réelle du capital, en prenant en compte la composition des rendements sur la période.

ADDITIVE (OU ARITHMETIQUE)

La première consiste à faire une moyenne arithmétique des rentabilités périodiques (journalières, hebdomadaires, mensuelles), puis à la multiplier par le nombre de périodes dans une année. Cette approche donne ce que l'on appelle la moyenne *additive*.

Notons l'échantillon $(r_1, \dots, r_T)$ des *rentabilités financières* sur la période $[0, \mathrm{T}]$. La moyenne *additive* annualisée est déterminée par :

$$h * \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

avec :

$$h = \begin{cases} 252 : \text{rentabilités quotidiennes} \\ 52 : \text{rentabilités hebdomadaires} \\ 12 : \text{rentabilités mensuelles} \end{cases}$$

CAPITALISEE (OU GEOMETRIQUE)

La seconde méthode s'appuie sur la rentabilité globale du portefeuille sur toute la période, c'est-à-dire le gain ou la perte en capital total, que l'on ajuste ensuite sur une base annuelle. Cette approche fournit ce que l'on nomme la moyenne *capitalisée*.

La moyenne *capitalisée* annualisée (cette moyenne correspond à une moyenne *géométrique*) est le gain moyen sur un an capitalisé. Formellement, en notant V_T la valeur du portefeuille à la fin de la période T et V_0 celle au début de la période d'investissement, la moyenne capitalisée annualisée est déterminée par :

$$\left(\frac{\mathrm{V_T}}{\mathrm{V_0}}\right)^{\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{T}}} - 1$$

L'hypothèse qu'on fait est celle d'une composition de rentabilités annuelles r_{1an} qui donnerait la rentabilité totale notée $r_{0|T}$:

$$\left(1 + r_{0|T}\right) = (1 + r_{\text{1an}})^{\frac{T}{h}} \Leftrightarrow r_{\text{1an}} = \left(1 + r_{0|T}\right)^{\frac{h}{T}} - 1 = \left(\frac{V_T}{V_0}\right)^{\frac{h}{T}} - 1$$

COMPARAISON

Prenons un exemple pour comparer ces deux méthodes. Dans un premier scénario, sur un an, le prix du portefeuille passe de 100 à 80 6 mois après, puis revient à 100 à la fin de l'année. Dans le second scénario, le prix ne revient pas à 100 mais à 96. Pour un investisseur, le premier scénario est neutre (il récupère 100) contrairement au second où il perd de l'argent (il perd 4).

	Scénario 1		**Scénario 2**	
	Valeur	Rentabilité	Valeur	Rentabilité
Début	100		100	
6 mois	80	-20%	80	-20%
1 an	100	+25%	96	+20%
Additive		*5%*		*0%*
Capitalisée		*0%*		*-4%*

Dans le premier scénario, la moyenne *additive* suggère un gain de 5 %, alors que la moyenne *capitalisée*, plus fidèle à la réalité du capital, indique une performance nulle. Cela s'explique par une asymétrie fondamentale entre pertes et gains : lorsqu'un investisseur perd 20 %, il devra ensuite réaliser un gain supérieur (ici 25 %) pour simplement revenir à son capital initial. Autrement dit, les pertes pèsent plus lourd que les gains équivalents.

Dans le second scénario, la moyenne *capitalisée* montre une perte réelle de 4 %, tandis que la moyenne *additive*, bien qu'elle soit plus simple à calculer, surestime la performance. Cela illustre bien que cette méthode a un biais positif systématique dès que les rendements fluctuent, car elle ne tient pas compte de l'effet *composé* des performances successives.

Exercice Calculer les rentabilités annualisées suivant les 2 méthodes *additive* et *capitalisée* des 4 indices du fichier Excel.

MESURER LE RISQUE ET LA PERFORMANCE

Nous allons dans cette partie nous intéresser aux indicateurs de risque absolu (volatilité) et relatif (alpha) et aux indicateurs de performance ajustée au risque absolu (ratio de Sharpe) et relatif (alpha et ratio d'information).

4. MESURER LE RISQUE ABSOLU

Plusieurs indicateurs de risque absolu existent : on va s'intéresser ici à la volatilité.

VOLATILITE

La *volatilité* a pour objectif de mesurer et de comparer les risques globaux de portefeuilles variés : ils peuvent appartenir à différentes zones géographiques, à des secteurs industriels distincts ou encore être investis sur des classes d'actifs de natures différentes (actions, obligations, produits monétaires, etc.). Dans ce contexte, il est utile de disposer d'un indicateur qui synthétise l'ensemble du risque du portefeuille. Pour cela, on s'appuie sur la dispersion des gains et pertes : plus ces variations sont importantes, plus le risque perçu est élevé.

C'est à partir de la distribution des *rentabilités financières* que l'on construit cette volatilité. Celle-ci évalue à quel point les rentabilités s'écartent en moyenne de leur valeur moyenne. Elle prend en compte l'ensemble des rentabilités observées, qu'elles soient positives ou négatives, fréquentes ou extrêmes. On peut donc dire que la volatilité reflète le *risque moyen* du portefeuille. Concrètement, la volatilité — souvent abrégée en *vol* ou *volat* — correspond à la *dispersion* des rentabilités d'un portefeuille et se calcule à partir de leur écart-type. Elle est toujours définie par un nombre positif, et elle est nulle uniquement pour un actif sans risque.

Soit un échantillon de rentabilités $(r_1, \dots, r_T)$, la volatilité estimée (notée σ) s'exprime par la formule suivante (estimation sans biais) :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(r_t - \overline{R}\right)^2}$$

Avec la moyenne des rentabilités :

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$

Il est fondamental de calculer la volatilité à partir des rentabilités, et non directement à partir des valeurs du portefeuille. Pour illustrer cela, imaginons deux indices : le premier, noté P_1, et un second, P_2, défini comme dix fois plus élevé en valeur, soit $P_2 = 10 * P_1$.

Même si les niveaux de prix sont différents, les rentabilités des deux indices sont identiques, car les variations en pourcentage restent les mêmes. Cela signifie que les deux indices présentent le même niveau de risque. Cependant, si l'on calculait la volatilité directement sur les valeurs, celle de P_2 serait dix fois plus élevée que celle de P_1, ce qui donnerait une vision biaisée du risque. En effet, on aurait :

$$\sigma(P_2) = \sigma(10 * P_1) = 10 * \sigma(P_1)$$

Ce simple exemple montre pourquoi il est essentiel d'utiliser les *rentabilités financières* (et non les valeurs) pour estimer correctement la volatilité d'un portefeuille.

ANNUALISATION DE LA VOLATILITE

Il est essentiel d'annualiser les volatilités pour pouvoir comparer correctement les niveaux de risque. En effet, la volatilité dépend de l'horizon de temps : plus la fréquence des rentabilités utilisées est courte, plus la volatilité calculée sera faible, toutes choses égales par ailleurs. Par exemple, une volatilité fondée sur des données quotidiennes sera naturellement plus basse qu'une volatilité calculée à partir de données mensuelles. Pourtant, si l'on parle du même portefeuille, le *risque global* reste le même, quelle que soit la fréquence d'observation. Il faut donc ajuster ces mesures pour les rendre comparables : c'est l'objectif de l'*annualisation*. Pour annualiser une volatilité, il suffit de la multiplier par la racine carrée du nombre de périodes correspondant à une année. Le facteur dépend de la fréquence des données utilisées :

– une volatilité quotidienne sera multipliée par $\sqrt{N}$, avec N le nombre de jours de marché dans l'année. Le facteur utilisé peut varier selon les zones géographiques. En effet, le nombre de jours ouvrés — et donc de jours de cotation — n'est pas identique d'un pays à l'autre, notamment à cause des jours fériés spécifiques à chaque marché.
– une volatilité hebdomadaire sera multipliée par $\sqrt{52}$
– une volatilité mensuelle sera multipliée par $\sqrt{12}$

Il est utile de connaître les ordres de grandeur typiques des volatilités annualisées, car ils permettent de situer rapidement le niveau de risque d'un portefeuille. Pour un portefeuille d'actions, la volatilité annualisée se situe généralement entre 20 % et 30 %. En comparaison, un portefeuille obligataire présente un risque plus modéré, avec une volatilité comprise entre 5 % et 15 %. Enfin, pour un fonds monétaire, considéré comme très peu risqué, la volatilité est généralement inférieure à 5 %.

Exercice Déterminer les volatilités annualisées des 4 indices du fichier Excel. Analysez leurs différences.

5. MESURER LE RISQUE RELATIF POUR UNE GESTION BENCHMARKEE

Dans une gestion benchmarkée, il est utile de ne pas s'arrêter à la seule *volatilité*, mais d'y ajouter un indicateur :le *bêta* qui mesure le risque relatif. Nous profiterons de l'étude du *bêta* pour ajouter celle de son complémentaire, l'*alpha* qui mesure la performance ajustée du risque.

MODELE DE MARCHE

Le *bêta* est un indicateur fondamental du risque d'un portefeuille. Il remplit un double rôle. Il permet de quantifier le risque pris par rapport à un indice de référence (le benchmark) et il introduit la notion de gestion stylisée, en segmentant le risque du portefeuille selon la sensibilité des titres qui le composent face au marché.

Bêta

Le *bêta* mesure la sensibilité d'un portefeuille aux variations d'un indice de référence, généralement considéré comme une approximation du portefeuille de marché. Cette sensibilité est calculée à partir des rentabilités du portefeuille, et plus précisément à partir de leurs primes de risque (c'est-à-dire les excès de rentabilité par rapport au taux sans risque). Grâce au *bêta*, on évalue donc le risque relatif d'un investissement.

Le modèle de marché, modèle statistique que Sharpe en 1963 appelle modèle diagonal ou *single-index model*, est défini pour un échantillon de T rentabilités r_t de la manière suivante :

$$r_t - r_f = \alpha + \beta\left(r_{M,t} - r_{f,t}\right) + \varepsilon_t \qquad \forall t = 1, \dots, T$$

avec les résidus ε_t, r_f le taux sans risque, r_M la rentabilité du marché. Originellement, le modèle de marché défini par Sharpe n'est pas exactement celui-ci. On ajoute ici une constante α formalisée par Jensen en 1969. Précisons aussi que Sharpe notait dans ses premiers articles le bêta b et c'est Wall Street qui a popularisé la notation β.

L'estimation du *bêta* dans ce modèle de régression linéaire simple par la méthode des Moindres Carrés Ordinaires est :

$$\hat{\beta} = \frac{\mathrm{Cov}(R, R_M)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_M)}$$

avec :

$$Cov(R, R_M) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(r_t - \bar{R})\left(r_{M,t} - \bar{R}_M\right)$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(R_M) = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(r_{M,t} - \bar{R}_M\right)^2$$

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_t$$
$$\bar{R}_M = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} r_{M,t}$$

Le modèle de marché explique donc la prime de risque d'un d'un portefeuille d'actifs par sa sensibilité β par rapport au portefeuille de marché (risque systématique) et par sa partie intrinsèque ε (risque spécifique ou encore idiosyncratique).

Concrètement, la sensibilité β dénote le caractère plus ou moins agressif d'un portefeuille relativement au portefeuille de marché. Ainsi, si $\beta > 1$, le portefeuille est dit *offensif*, et si $\beta < 1$, il est dit *défensif* relativement au marché considéré ($\beta = 1$ correspond à une prise de risque similaire à celle prise par le portefeuille de marché). L'indicateur β est très utilisé par les praticiens car simple d'utilisation.

Un inconvénient du modèle de marché pour l'estimation du bêta est sa linéarité : en effet, la prime de risque serait une fonction linéaire du portefeuille de marché. Une alternative relativement simple à mettre en œuvre est la *régression segmentée ou par morceaux* (*piecewise regression* en anglais). L'équation à estimer pour deux morceaux prédéfinis séparés par la valeur 0 est la suivante :

$$r_t - r_f = \left[\alpha_{\text{bear}} + \beta_{\text{bear}}\left(r_{M,t} - r_f\right)\right]1_{\{r_{M,t} - r_f \le 0\}} + \left[\alpha_{\text{bull}} + \beta_{\text{bull}}\left(r_{M,t} - r_f\right)\right]1_{\{r_{M,t} - r_f > 0\}} + \varepsilon_t$$

β_{bull} se dénomme ainsi car on parle de marché *bull* lorsque ce dernier est à la hausse (le taureau, *bull* en anglais, attaque de bas en haut) ; de la même manière, β_{bear} se dénomme ainsi car on parle de marché *bear* lorsque ce dernier est à la baisse (l'ours, *bear* en anglais, attaque de haut en bas). Ces deux animaux, allégories des tendances opposées des marchés boursiers, sont célébrés à Wall Street mais aussi à Francfort à travers d'imposantes sculptures.

Alpha

L'*alpha* est une mesure de performance essentielle pour capter la capacité ou non du gérant à créer une sur-performance par rapport à un benchmark. Le gérant peut alors faire un stock-picking efficace en sélectionnant des valeurs sous-évaluées par le marché. Il profite ainsi des anomalies du marché.

La formule de l'*alpha* associée à celle du *bêta* précédente est :

$$\hat{\alpha} = \bar{R} - \hat{\beta}\bar{R}_M$$

Exercice Déterminer le bêta et l'alpha du portefeuille immobilier du fichier Excel. Analysez leurs valeurs.

TRACKING-ERROR VOLATILITY (TE)

La *tracking-error volatility* ou *tracking-error* (*TE*) par simplification détermine la volatilité de la *tracking error*, c'est-à-dire la volatilité de l'écart entre les rentabilités du portefeuille et celles du benchmark (en anglais *excess returns*). Sa formule en fonction des rentabilités du portefeuille r et de celles du benchmark r_B est la suivante :

$$TE = \sigma(r - r_B)$$

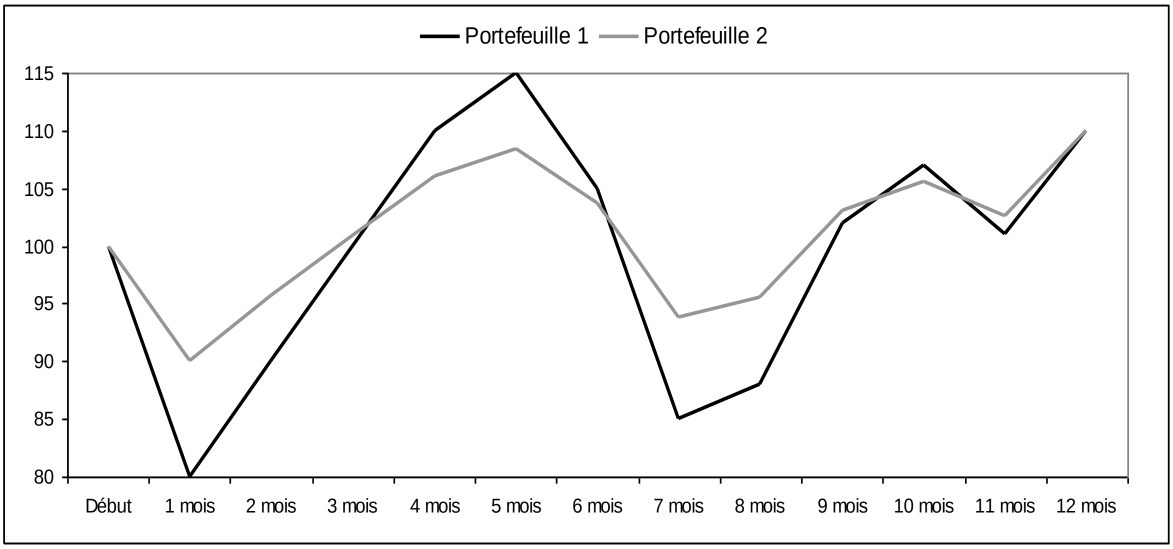
Une valeur faible de la *tracking-error* signifie que le risque de l'investissement est proche de celui de son benchmark.

Exercice Calculer la *TE* du portefeuille immobilier par rapport à son benchmark.

6. MESURER LA PERFORMANCE AJUSTEE DU RISQUE

Pour mesurer la performance, la rentabilité financière ne sera pas assez exhaustive. En effet, seule elle n'est pas suffisante pour juger de la bonne ou mauvaise performance d'un investissement.

Nous pouvons l'observer avec le cas suivant. Nous avons 2 portefeuilles qui permettent d'obtenir la même rentabilité à horizon 1 an. Ont-ils pour autant la même performance ?



	Portefeuille 1	***Portefeuille 2***
Moyenne capitalisée	10%	10%
Volatilité annualisée	41.94%	20.97%

Certes ils ont la même moyenne capitalisée mais une volatilité 2 fois plus importante. Une mesure judicieuse de la performance doit donc prendre en compte le risque rémunéré par la rentabilité de l'investissement. Nous allons utiliser des mesures de la rentabilité ajustée du risque. Nous avons plusieurs possibilités suivant que l'investisseur mesure sa performance de manière absolue ou relative à un benchmark : ratio de Sharpe ou ratio d'information (l'alpha étudié précédemment correspond au deuxième cas) qui sont les mesures les plus utilisées par les gérants.

RATIO DE SHARPE

Sharpe a défini en 1966 ce ratio comme une « *récompense à la variabilité* ». Il correspond alors à la rémunération d'une unité de risque d'un investissement financier. Le risque est mesuré par la volatilité des rentabilités du portefeuille étudié. Il correspond donc au quotient entre prime de risque et volatilité :

$$S = \frac{\mathbb{E}(r) - r_f}{\sigma(r)}$$

en supposant que le taux sans risque est constant. Il est habituel d'annualiser numérateur et dénominateur. En 1994, Sharpe va intégrer le fait que le taux sans risque évolue dans le temps. Le ratio devient :

$$S = \frac{\mathbb{E}\left(r - r_f\right)}{\sigma\left(r - r_f\right)}$$

S'il est positif, le risque est rémunéré relativement au taux sans risque. Avoir un ratio de Sharpe supérieur à 0.5 sur le long-terme est révélateur d'une très bonne performance du portefeuille. Ce ratio est l'un des plus populaires car simple à mettre en œuvre et à expliquer.

Exercice Déterminer les 4 ratios de Sharpe des indices du fichier Excel.

RATIO D'INFORMATION

C'est un ratio de Sharpe remplaçant le taux sans risque par les rentabilités r_B d'un benchmark que l'on souhaite comparer au portefeuille géré. Il mesure alors si le portefeuille rémunère une information supérieure, du fait du gérant, à un investissement passif symbolisé par le benchmark :

$$IR = \frac{\mathbb{E}(r - r_B)}{\sigma(r - r_B)}$$

L'objectif pour un gérant *benchmarké* est bien entendu d'avoir un IR élevé, ce qui signifie prendre des risques similaires au benchmark tout en ayant une rentabilité plus élevée. Le souci est de savoir si le benchmark est efficient : dans le cas contraire, le battre pourrait s'avérer relativement aisé. On reconnaît au dénominateur la *TE*.

Exercice Déterminer le ratio d'information du portefeuille immobilier.

ATTRIBUER LA PERFORMANCE POUR UNE GESTION BENCHMARKEE

La gestion active nécessite une analyse fine des sources de performance. Cette analyse, réalisée a posteriori, est généralement accompagnée d'une évaluation du risque du portefeuille. Les premiers modèles d'attribution de performance remontent aux années 1970, avec les travaux de Fama, qui propose un modèle distinguant deux composantes : le risque global du portefeuille et la capacité du gérant à bien sélectionner les titres. Ce modèle s'appuie sur la théorie moderne du portefeuille développée par Markowitz. Bien que rigoureux sur le plan théorique, il reste complexe à mettre en œuvre dans un cadre opérationnel.

Dans les années 1980, Brinson, Hood et Beebower introduisent une méthode beaucoup plus pratique et intuitive, qui deviendra une référence dans l'industrie. Leur modèle, publié en 1986, permet d'évaluer la performance d'un portefeuille par rapport à un indice de référence (le benchmark), en identifiant trois effets : l'allocation d'actifs, la sélection des titres, et l'interaction entre ces deux dimensions.

L'attribution de performance devient dès lors un outil central pour analyser la gestion active, qu'il s'agisse du gérant lui-même, de ses clients, ou encore de la direction de la société de gestion. Elle ne nécessite que les pondérations des positions dans le portefeuille et dans le benchmark, ainsi que leurs rentabilités respectives. Cette approche s'applique dans le cadre d'une gestion top-down, qu'elle soit fondée sur des classes d'actifs, des zones géographiques, ou des secteurs d'activité.

Avant d'examiner en détail les générateurs de performance sur une période donnée, il est essentiel de comprendre les différents types de benchmark utilisés.

7. TYPES DE BENCHMARKS

On présente ci-dessous trois types de calculs des poids de benchmark. Une précision préliminaire est le fait de toujours déterminer des indices *total return*, c'est-à-dire avec les revenus inclus (dividendes pour les actions).

COMPOSITES

Les indices génériques (pondération par capitalisation boursière de ses composants, ou flottants ou encore équi-pondéré) peuvent ne pas correspondre aux besoins des clients et à leurs passifs. On va alors construire des indices *composés* de plusieurs indices génériques, ou de portefeuilles de la place ayant la même stratégie : ce sont les indices *composites* avec des poids adaptés au client, *customisés*.

STATIQUES OU DYNAMIQUES

Les poids des indices composites peuvent être statiques ou dynamiques ; s'ils sont statiques, il est nécessaire de définir la périodicité du rebalancement, c'est-à-dire des périodes où l'on revient aux poids fixes. On parle aussi de stratégie *constant-mix* pour les poids fixes versus stratégie *buy-and-hold* pour les poids dynamiques (ou flottants).

La stratégie *buy-and-hold* est une stratégie qui achète les actifs et laisse leur poids flotter suivant l'évolution de leur valeur. Il n'y a donc pas de *rebalancement* des poids des actifs dans le portefeuille. Lorsque la valeur de l'actif s'élève, toutes choses égales par ailleurs, sa proportion dans le portefeuille va s'élever aussi. Dans une stratégie *buy-and-hold*, les poids évoluent suivant la valeur relative des actifs.

La stratégie *constant mix* maintient une exposition constante des actifs relativement à la valeur du portefeuille. Les poids n'évoluent donc pas suivant la valeur relative des actifs mais restent fixes. Ainsi, comme les valeurs relatives évoluent, il faut dynamiquement réajuster constamment les proportions investies en valeur dans les actifs pour demeurer à la proportion relative définie au départ. Ainsi, lorsque la valeur d'un actif diminue, toutes choses égales par ailleurs, la proportion relative de cet actif va diminuer au sein du portefeuille. Il va donc falloir acheter cet actif pour conserver le même poids au sein du portefeuille. Les poids restent ainsi constants. Pour éviter d'acheter ou de vendre des actifs trop régulièrement et diminuer ainsi les coûts de transaction de la stratégie, il est possible de déterminer des seuils de perte (de gain) en-deçà (au-delà) de laquelle (duquel) on commence à revenir aux poids initiaux. Au-dessus (en-dessous), nous laissons filer les poids comme dans la stratégie *buy-and-hold*.

Considérons un indice *composite* avec un indice action et un indice monétaire sans risque. Supposons aussi que l'indice *composite* est équi-pondéré sur un mois et que nous discrétisons ce mois en semaines. Concernant la stratégie *buy-and-hold*, les poids relatifs au portefeuille ont évolué mais pas la richesse. Pour la stratégie *constant mix* c'est différent : en rebalançant les poids chaque semaine, de la richesse a été créée (100.56 à partir d'un investissement initial de 100).

Date	***Action***	***Poids action***	***Buy-and-hold***	***Monétaire ex-ante***	***Monétaire ex-post***	***Action ex-ante***	***Action ex-post***	***Constant mix***
Début	100	50	100	50	-	50	-	100
1 semaine	90	45	95	50	47.50	45	47.50	95
2 semaines	100	50	100	47.50	50.14	52.78	50.14	100.28
3 semaines	90	45	95	50.14	47.63	45.13	47.63	95.26
1 mois	100	50	100	47.63	50.28	52.92	50.28	100.56

La première semaine, l'indice action diminue de 100 à 90. La valeur de l'indice action dans l'indice composite passe donc 50 à 45 : elle diminue de 10%. Son poids diminue donc à $45/95 \simeq 47.37\%$. C'est le poids de l'indice action dans la stratégie *buy-and-hold*. Or dans la stratégie *constant mix*, nous souhaitons acheter de l'indice action pour revenir au poids initial de 50%. A la fin de la semaine, la valeur correspondante de l'indice action dans l'indice composite *constant mix* va passer de 45 (« Action ex-ante ») à $50\% * 95 = 47.5$ (« Action ex-post »). Nous supposons bien entendu l'indice composite autofinancé (sans souscription ni rachat) ; nous vendons donc de manière symétrique $50 - 47.5 = 2.50$ d'indice monétaire pour en conserver 47.50 (« Monétaire ex-post ») au bout d'une semaine. La hausse de l'indice action qui va suivre la semaine suivante va se révéler profitable à la stratégie *constant mix* qui vient d'acheter de l'indice action. En effet, la valeur de l'indice action dans l'indice composite va passer de 47.50 à $47.5 * 100/90 \simeq 52.78$. La valeur de l'indice composite est alors égale à : $47.5 + 52.78 = 100.28$. Contrairement à la stratégie *buy-and-hold*, qui a pour valeur 100 au bout de 2 semaines, la stratégie *constant mix* a fait gagner 0.28. Le positionnement du gérant, *contrariant* aux évolutions du marché, s'est révélé payant, car l'achat de l'indice action a été suivi immédiatement par une augmentation de sa valeur. Ensuite, il est nécessaire de rebalancer à nouveau les poids, puisque les 52.78 de l'indice action dans l'indice composite représentent $52.78/100.28 \simeq 52.63\%$ de la richesse de l'indice composite, ce qui est supérieur aux 50% fixés. Il va donc falloir vendre de l'indice action. Ainsi de suite jusqu'à la dernière semaine.

La stratégie *buy-and-hold* sera préférable lorsque le gérant anticipera une tendance de baisse de l'indice action puisqu'il sera immunisé à hateur de l'indice monétaire alors que la stratégie *constant mix* vendra du monétaire pour acheter de l'indice action qui baisse (gérant *momentum*). Et lorsqu'il anticipera une volatilité importante avec des retournements réguliers (marché flat et volatil), la stratégie *constant mix* sera plus profitable.

8. EXCES DE RENTABILITE RELATIVE A UN BENCHMARK

EXCES DE RENTABILITE ARITHMETIQUE

L'excès de rentabilité arithmétique explique la valeur créée par le portefeuille par rapport au benchmark et relativement au montant initial investi qui est supposé similaire pour les 2. En notant r la rentabilité du portefeuille et b celle du benchmark, l'excès de rentabilité arithmétique est égal à :

$$a = r - b$$

Exercice Déterminer l'excès de rentabilité arithmétique à partir des données du fichier Excel.

EXCÈS DE RENTABILITÉ GÉOMÉTRIQUE

L'excès de rentabilité géométrique explique cette même valeur créée mais relativement au montant que l'investisseur aurait obtenu s'il avait investi dans le benchmark. Au lieu d'étudier $r - b$, nous étudions alors l'excès de rentabilité géométrique égal à :

$$g = \frac{1 + r}{1 + b} - 1 = \frac{r - b}{1 + b}$$

L'excès de rentabilité arithmétique est donc plus important pour les marchés haussiers (dans ce cas $b > 0$) que l'excès de rentabilité géométrique. En outre, l'excès de rendement géométrique possède trois principes essentiels : la proportionnalité, la conversion et la composition.

Exercice Déterminer l'excès de rentabilité géométrique à partir des données du fichier Excel.

9. LES 3 GENERATEURS AVEC LA METHODOLOGIE DE BRINSON

Nous posons les notations suivantes pour le portefeuille et son benchmark. La rentabilité du portefeuille investi sur n classes d'actifs est :

$$r = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i$$

avec ω_i le poids du portefeuille investi dans la classe d'actifs i. Nous supposons que la somme des poids est égale à 1. r_i est la rentabilité des actifs du portefeuille investis dans la classe d'actifs i.

La rentabilité du benchmark investi sur n classes d'actifs est :

$$b = \sum_{i=1}^{n} W_i b_i$$

avec W_i le poids du benchmark investi dans la classe d'actifs i. Nous supposons que la somme des poids est également égale à 1. b_i est la rentabilité des actifs du benchmark investis dans la classe d'actifs i.

L'idée du modèle de Brinson est alors de quantifier les générateurs de la performance du portefeuille relativement au benchmark à savoir $r - b$. Ceci correspond donc à l'excès de rentabilité arithmétique. Le modèle suppose que le gérant actif crée de la valeur à l'aide de l'allocation entre classes d'actifs et de la sélection des titres au sein de ces classes d'actifs.

ALLOCATION

L'allocation va permettre au gérant de prendre des positions différentes sur les classes d'actifs (ou zones géographiques ou secteurs) relativement au benchmark. Le gérant va alors sur-pondérer ou sous-pondérer les classes d'actifs relativement aux positions du benchmark. L'objectif est pour le gérant de sur-pondérer les classes d'actifs qui vont sur-performer et sous-pondérer celles qui vont sous-performer. Ces paris vont alors créer ou détruire de la valeur suivant que les choix seront judicieux. C'est l'enjeu de l'isolation de l'attribution de performance issue de l'allocation. Brinson, Hood et Beebower appellent cela l'*impact timing* ; aujourd'hui on va plus parler d'allocation d'actifs.

Pour déterminer l'impact de l'allocation sur la performance, nous déterminonsun portefeuille intermédiaire isolant l'allocation. Ce fonds *allocation* va appliquer les poids du portefeuille sur les rentabilités des classes d'actifs du benchmark : ceci permet donc bien d'isoler l'allocation de la sélection. Ce fonds intermédiaire a pour rentabilité :

$$b_A = \sum_{i=1}^{n} \omega_i b_i$$

La contribution de l'allocation A est alors déterminée par la différence entre le fonds allocation et le benchmark :

$$A = b_A - b = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i - W_i) b_i$$

Et la contribution de l'allocation d'actifs sur la classe i est définie par :

$$A_i = (\omega_i - W_i) b_i$$

SELECTION

Le gérant va chercher à créer de la valeur à l'aide également d'une sélection de titres judicieux au sein d'une classe d'actifs en sur-pondérant cette fois les titres les plus performants et en sous-pondérant ceux qui sont sous-performants.

Pour isoler la sélection, nous allons définir un autre portefeuille intermédiaire, le fonds *sélection*. Cette fois-ci, les poids alloués aux classes d'actifs vont être ceux du benchmark que l'on va appliquer aux rentabilités des classes d'actifs du portefeuille. En conséquence, nous allons neutraliser l'allocation pour ne conserver que la sélection des titres au sein des classes d'actifs du portefeuille.

Ce fonds intermédiaire a pour rentabilité :

$$r_S = \sum_{i=1}^{n} W_i r_i$$

La contribution de la sélection S est alors déterminée par la différence entre le fonds sélection et le benchmark :

$$S = r_S - b = \sum_{i=1}^{n} W_i (r_i - b_i)$$

Et la contribution de la sélection dans la classe i est définie par :

$$S_i = W_i (r_i - b_i)$$

L'allocation et la sélection ne vont pas en revanche expliquer totalement la différence $r - b$. Nous avons besoin d'un troisième terme : l'interaction. Ce terme est appelé originellement par Brinson, Hood et Beebower *autre*.

$$r - b = r_S - b + b_A - b + r - r_S - b_A + b$$

L'interaction I est donc égale à : $I = r - r_S - b_A + b$. Nous pouvons la réécrire de la manière suivante :

$$I = r - r_S - b_A + b = \sum_{i=1}^{n} \omega_i r_i - \sum_{i=1}^{n} W_i r_i - \sum_{i=1}^{n} \omega_i b_i + \sum_{i=1}^{n} W_i b_i = \sum_{i=1}^{n} (\omega_i - W_i)(r_i - b_i)$$

Et la contribution de l'interaction pour la classe i est définie par :

$$I_i = (\omega_i - W_i)(r_i - b_i)$$

Ainsi, au final, nous décomposons $r - b = A + S + I$.

Exercice Déterminer les 3 générateurs de performance de Brinson à partir des poids et rentabilités donnés dans le fichier Excel de la formation.

COURT LEXIQUE

Allocation : générateur de performance dû à l'allocation entre classes d'actifs différente de celle du benchmark.

Alpha : indicateur de sur- ou sous-performance relativement au benchmark du portefeuille calculé à partir du modèle de marché de Sharpe et du bêta.

Annualisation : processus de transformation d'un indicateur (rentabilité ou volatilité) sur une base annuelle.

Benchmark : indice de référence auquel un gérant compare la rentabilité, le risque et la performance de son portefeuille.

Bêta : Sensibilité d'un portefeuille à son benchmark.

Duration : introduite par Frederick Macaulay (1938) et John Hicks (1939) pour déterminer la sensibilité de la valeur de l'obligation à la variation des taux. Elle permet également de déterminer la durée de vie moyenne actuarielle d'une obligation. Si aucun coupon n'est remboursé avant la maturité (cas des zéro-coupons), la duration est égale à la maturité. Lorsque des coupons sont remboursés, ils peuvent être placés sur les marchés de taux et alors à un moment l'investisseur devient immunisé contre la variation des taux : ce moment est la duration. Ainsi, si les taux montent, l'obligation se dévalorise mais les coupons placés s'apprécient.

Price-Earning Ratio (PER) : se définit comme le rapport du cours de l'actif au bénéfice annuel qu'il rapporte. Il exprime le délai de récupération de cet actif, c'est-à-dire le nombre d'années de bénéfices sur lesquelles on valorise l'actif. C'est un indice tout d'abord d'anticipation de croissance d'une société : plus les anticipations de croissance forte sont élevées, plus le PER sera important. Et, c'est un indicateur de cherté d'une société au sein d'un même secteur : en effet, une société ayant un PER plus faible que le PER moyen du même secteur sera considérée comme peu chère. C'est donc un indicateur de valorisation : nous pouvons alors savoir si le PER d'une société est légitime ou non par rapport à un PER qualifié de juste.

R^2 : indicateur d'ajustement d'une régression linéaire, il est compris entre 0 et 1.

Ratio d'information : indicateur de sur- ou sous-performance relativement au benchmark du portefeuille calculé sous forme de ratio entre moyenne de rentabilité et volatilité.

Ratio de Sharpe : indicateur de performance relativement au taux sans risque du portefeuille calculé sous forme de ratio entre moyenne de rentabilité et volatilité.

Ratio de Treynor : indicateur de sur- ou sous-performance relativement au benchmark du portefeuille calculé sous forme de ratio entre moyenne de rentabilité et bêta.

Rendement : ratio entre revenu d'un actif (dividende, coupon) et sa valorisation

Rentabilité : rendement auquel on ajoute la variation des cours dans le temps.

Résidu : risque spécifique (idiosyncratique) du modèle de marché de Sharpe.

Sélection : générateur de performance dû à la sélection de titres au sein d'une classe d'actifs différente de celle du benchmark.

Spread : écart entre le taux d'une obligation risquée et le taux sans risque.

Tracking-error (TE) : volatilité de la tracking-error correspondant à l'écart entre les rentabilités d'un portefeuille et celles de son benchmark.