

Correction du devoir d'électromagnétisme

Préparation à l'agrégation de physique

Durée : 5h

Brahim Lamine

brahim.lamine@irap.omp.eu

29 novembre 2018



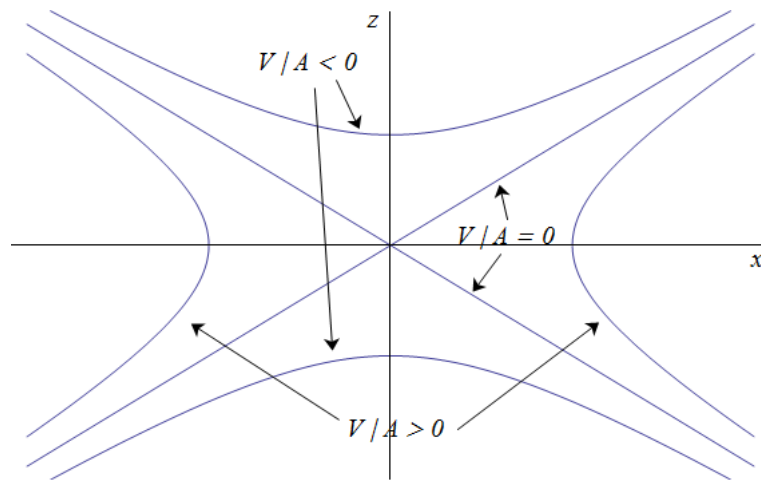
Le sujet est composé de trois parties complètement indépendantes. Soyez concis mais suffisamment clair et rigoureux.

Partie I : Piège de Penning

1. Les lignes équipotentielles, de potentiel V , dans le plan (xOz) sont les solutions de :

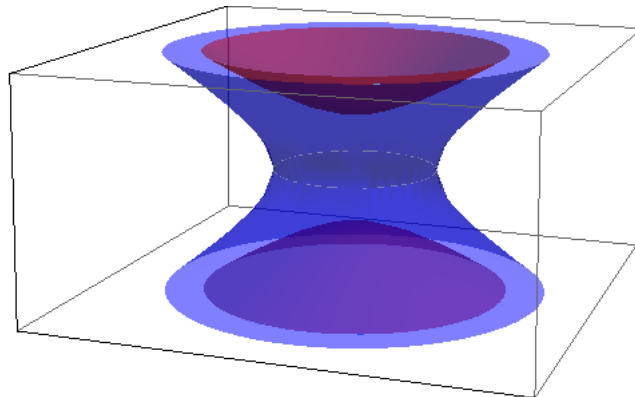
$$A(x^2 - 2z^2) = V \quad \Longleftrightarrow \quad z = \pm \sqrt{\frac{(x^2 - V/A)}{2}}$$

Si $V/A > 0$, la solution n'existe que pour $|x| > \sqrt{V/A}$, et l'équipotentielle est un hyperboloïde dont l'extrémité se trouve au point $(x = \sqrt{V/A}, z = 0)$. Si $V/A < 0$, la solution existe pour tout x , et l'équipotentielle est un hyperboloïde dont l'extrémité se trouve au point $(x = 0, z = \sqrt{|V/2A|})$.



2. Le potentiel $\Phi(x, y, z)$ est invariant par rotation autour de l'axe (Oz) . Cela se voit en l'exprimant en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) : $\Phi = A(\rho^2 - 2z^2)$. La variable θ , en effet, n'apparaît pas dans l'expression de Φ .

Par conséquent, on obtient les surfaces équipotentielles en faisant simplement subir une révolution autour de l'axe (Oz) aux lignes équipotentielles déterminées à la question précédente. D'où le nom d'hyperboloïde de révolution.



Puisque le potentiel est constant à la surface d'un conducteur parfait, les électrodes doivent avoir une forme aussi proche que possible des surfaces équipotentielles de Φ . Les

coupelles correspondent au cas $V/A < 0$ et l'anneau au cas $V/A > 0$.

Le potentiel vaut : $V_a = Ar_0^2$ sur l'anneau, et $V_c = -2Az_0^2$ sur les coupelles. On en déduit :

$$U_0 = V_a - V_c = A(r_0^2 - 2z_0^2) \iff A = \frac{U_0}{r_0^2 - 2z_0^2}$$

3. Les positions d'équilibres sont solutions de :

$$\vec{\nabla}\Phi = 0 \iff \begin{cases} 2Ax = 0 \\ 2Ay = 0 \\ -2Az = 0 \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Cette position d'équilibre sera stable dans la direction z , si l'énergie potentiel de la particule, $E_p = q\Phi$, y est minimum dans la direction z :

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} \right|_{x=0, y=0, z=0} > 0 \iff -2qA > 0 \text{ ie } qA < 0$$

Il faut donc que le signe de A soit opposé au signe de la charge q de la particule. Evidemment, ce n'est pas simultanément possible pour des particules de charges opposées.

Puisque

$$\left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2} \right|_{x=0, y=0, z=0} = \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial y^2} \right|_{x=0, y=0, z=0} = -\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2} \right|_{x=0, y=0, z=0}$$

l'équilibre n'est pas stable en O dans le plan (xOy) .

4. En négligeant l'effet du champ gravitationnel, la particule subit la force de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, où $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ et \vec{v} est la vitesse de la particule. On a :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -2Ax \\ -2Ay \\ 4Az \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\dot{y} \\ -B\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le PFD nous donne alors les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2qAx + qB\dot{y} = 2|qA|x + qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -2qAy - qB\dot{x} = 2|qA|y - qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 4qAz = -4|qA|z \end{cases},$$

où l'on a utilisé que $qA < 0$.

5. Bien que les équations des coordonnées x et y soient couplées, ce n'est pas le cas de la coordonnée z . On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution est une oscillation sinusoïdale à la pulsation $\omega_z = \sqrt{4|qA|/m}$.

6. Le mouvement est plus complexe dans le plan (xOy) du fait de ce couplage entre x et y . L'énoncé nous propose de tester une solution. Injectons-la dans la première équation :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2|qA|x + qB\dot{y} \\ \iff -m\rho\omega^2 \cos(\omega t + \phi) &= 2|qA|\rho \cos(\omega t + \phi) + qB\rho\omega \sin(\omega t + \phi) \\ \iff -m\omega^2 &= 2|qA| + qB\omega \\ \iff \omega^2 + qB/m\omega + 2|qA|/m &= 0 \\ \iff \omega^2 - \omega_c\omega + \omega_z^2/2 &= 0 \end{aligned}$$

On voit que ω est solution d'un polynôme d'ordre 2 dont le discriminant est :

$$\Delta = \omega_c^2 - 2\omega_z^2$$

En pratique, $\omega_c \gg \omega_z$, donc $\Delta > 0$ et ω peut prendre les 2 valeurs :

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}).$$

(On aboutirait exactement au même résultat en utilisant la deuxième équation plutôt que la première.)

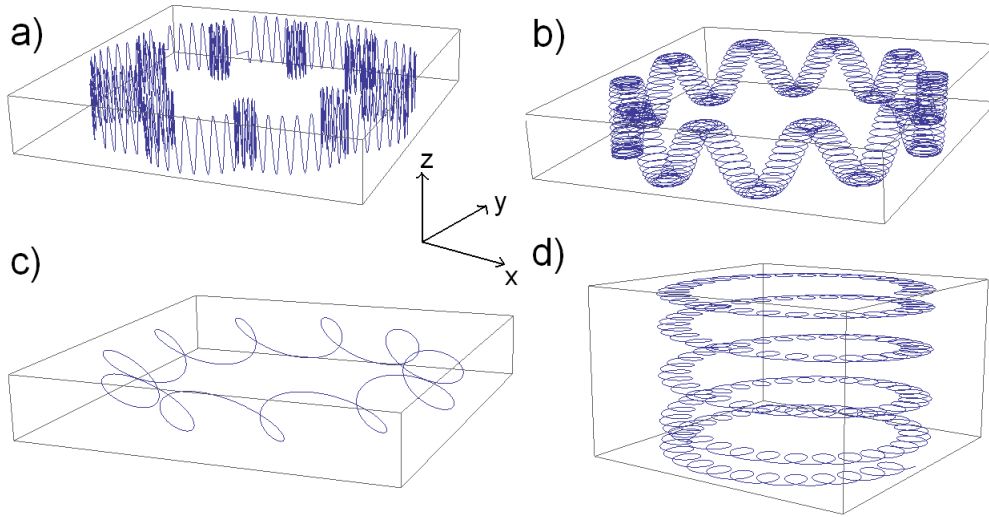
7. Il faut comparer la fréquence ω_z du mouvement dans la direction z aux fréquences ω_+ et ω_- du mouvement dans le plan (xOy).

La figure a) correspond au cas $\omega_z \gg \omega_+ \gg \omega_-$.

La figure b) correspond au cas $\omega_+ \gg \omega_z \gg \omega_- \rightarrow$ C'est la bonne !

La figure c) correspond au cas $\omega_+ = \omega_z \gg \omega_-$.

La figure d) correspond au cas $\omega_+ \gg \omega_- \gg \omega_z$.



8. APPLICATION. Les pièges de Penning permettent de réaliser des mesures extrêmement précises - métrologiques - de la masse de particules chargées. Par exemple, en refroidissant un piège à la température de l'hélium liquide (4,2 Kelvin) et en y piégeant un unique ion, des métrologues ont pu mesurer la masse de l'électron avec une erreur relative de $7,3 \times 10^{-10}$!¹

- a) On introduit deux particules de charges q_1, q_2 et de masses m_1, m_2 dans le même piège de Penning, et donc dans le même champ magnétique \vec{B} . Alors on a :

$$\frac{\omega_{c1}}{\omega_{c2}} = \frac{q_1 m_2}{q_2 m_1}.$$

Comme on sait quelles sont les particules chargées (électron, proton, ion, ...), on connaît q_1, q_2 , et donc le rapport des fréquences cyclotron permet de déterminer le rapport des masses.

1. Beier, Phys Rev Lett, **88**, 011603 (2002) - *New Determination of the Electron's Mass*
 Werth, Int J Mass Spectrometry, **251**, 152 (2006) - *Highly charged ions, QED and the electron mass*
 Werth, Eur Phys J D, **22**, 163 (2003) - *Double Penning trap technique*

- b) Lors de son mouvement dans le piège, la particule s'approche et s'éloigne périodiquement des électrodes. Or cette particule étant chargée, elle crée un champ électrique. On sait toutefois qu'à l'intérieur des électrodes, le champ électrique doit être nul. Les charges présentes dans les électrodes (électrons de conduction, ions du réseau cristallin) doivent donc s'arranger de manière à compenser exactement le champ électrique créé par la particule piégée. Mais comme la particule piégée s'approche et s'éloigne des électrodes, le champ électrique à compenser varie. Il doit donc y avoir une réorganisation permanente des charges à l'intérieur des électrodes pour réaliser cette compensation. Or si ces charges bougent en permanence, c'est qu'un courant électrique circule dans les électrodes.

Toutefois, cette réorganisation des charges à l'intérieur de l'électrode n'est pas suffisante. Elle permet d'assurer que le champ électrique y est nul, mais ne permet pas de maintenir constant le potentiel auquel est porté l'électrode. Pour cela, il faut en plus augmenter ou diminuer la charge totale se trouvant à l'intérieur de l'électrode : c'est le rôle de la source de tension U_0 qui est reliée aux électrodes. Cela signifie que, en plus des courants circulant à l'intérieur même des électrodes, il y a un courant qui circule entre les électrodes et la source de tension.

Bien sûr, tous ces courants étant liés au mouvement de la particule piégée, il vont également être périodiques selon les trois fréquences ω_{\pm} et ω_z . En mesurant ces courants, on peut donc en déduire ω_{\pm} et ω_z . Pour des raisons pratiques, c'est le courant entre les électrodes et la source de tension qui est mesuré.

- c) Dans tout système expérimental il y a des imperfections. Ainsi, les électrodes n'auront pas exactement la forme d'un hyperboloïde de révolution, donc le potentiel électrostatique réel sera légèrement différent de Φ . Le champ magnétique ne sera pas exactement dirigé le long de l'axe z . De nombreuses autres imperfections peuvent avoir lieu (potentiel des électrodes fluctuant, etc), mais on peut montrer que les deux précédemment citées ont l'avantage de ne pas modifier la formule de l'énoncé.

Partie II : aurores boréales

1.
$$\mathcal{M} \sim \frac{4\pi}{\mu_0} R_T^3 B_T \quad , \quad B_T \sim 5 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Donc

$$\boxed{\mathcal{M} \sim 4 \times 10^{22} \text{ A.m}^2}$$

2. L'accélération se retrouve à partir de $\vec{a} = \frac{d^2}{dt^2}(r\vec{e}_r)$. En écrivant les vecteurs de la base sphériques dans la base cartésienne,

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix}$$

on peut procéder aux dérivées temporelles,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\theta} & \dot{\varphi} \sin \theta \\ -\dot{\theta} & 0 & \dot{\varphi} \cos \theta \\ -\dot{\varphi} \sin \theta & -\dot{\varphi} \cos \theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\theta \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix}$$

Après quelques calculs (longs mais sans difficultés), on trouve

$$\boxed{a_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta)}$$

3.
$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} (-3\mathcal{M} \cos \theta \vec{e}_r + \mathcal{M} \vec{e}_z)$$

avec

$$\vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta$$

La deuxième loi de Newton s'écrit

$$m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \vec{e}_\varphi) \wedge (B_r \vec{e}_r + B_\theta \vec{e}_\theta)$$

La composante selon φ donne

$$ma_\varphi = q(\dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r) = -e \frac{\mu_0}{4\pi} \mathcal{M} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin^2 \theta}{r} \right) \right]$$

En réinjectant l'expression de a_φ déjà obtenue et en intégrant, on obtient l'équation demandée avec une constante d'intégration K quelconque. Par ailleurs, en notant $A = \mu_0 \mathcal{M} e / (4\pi m)$, on obtient finalement

$$\boxed{r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + A \frac{\sin^2 \theta}{r} = K}$$

4. La force de Lorentz ne travaillant pas, l'énergie cinétique de la particule est constante, donc

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$$

Il suffit de remplacer $\dot{\varphi}^2$ dans cette expression par

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{(r^2 \sin^2 \theta)^2} \left(K - A \frac{\sin^2 \theta}{r} \right)^2$$

On trouve alors

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r, \theta) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

avec

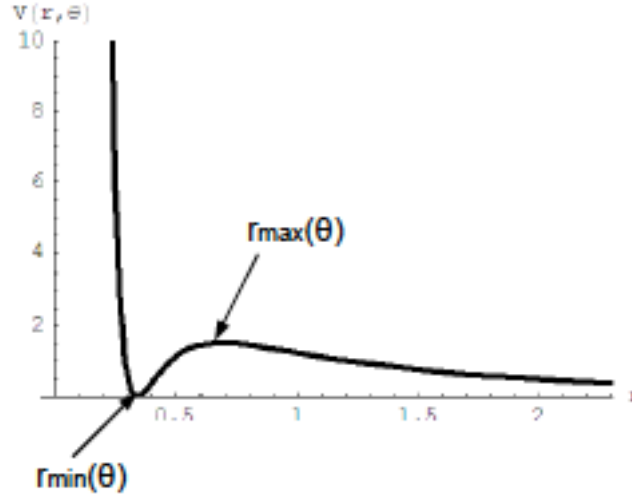
$$V(r, \theta) = \frac{1}{2} m \frac{\left(K - A \frac{\sin^2 \theta}{r}\right)^2}{r^2 \sin^2 \theta}$$

5. Le potentiel piégeant effectif est tracé ci-dessous pour $m = 2$, $A = K = 1$ et $\theta = \pi/5$. On montre facilement que

$$r_{\min}(\theta) = \frac{A}{K} \sin^2 \theta \quad , \quad r_{\max}(\theta) = 2r_{\min}(\theta)$$

et

$$V(r_{\max}(\theta), \theta) = V_{\max}(\theta) = \frac{m}{32} \frac{K^4}{A^2 \sin^6 \theta}$$



6. Le long d'une ligne de champ, $\vec{d\ell} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, donc $drB_\theta = r d\theta B_r$ et $d\varphi = 0$. À partir des expressions de B_r et de B_θ , on obtient

$$\frac{dr}{r} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sin^2 \theta} \quad \text{soit} \quad r = r_0 \sin^2 \theta$$

Par ailleurs, le piégeage se fait autour de $r_{\min}(\theta) \propto \sin^2 \theta$. Ainsi, les particules sont bien piégées le long des lignes de champ.

7. À θ donné, il n'y a piégeage que si $V_{\max}(\theta) > \frac{1}{2} m v_0^2$, soit $K^4 > 16 A^2 v_0^2 \sin^6 \theta$. Il est donc plus facile de piéger au niveau des pôles, i.e. là où $\sin \theta \sim 0$. Les aurores boréales étant dues à l'ionisation de l'atmosphère par des particules chargées (issues du vent solaire), on comprend bien pourquoi elles ont préférentiellement lieu aux pôles.
8. Pour qu'il y ait piégeage à tout angle, il faut que $K^4 > 16 A^2 v_0^2 = K_0^4$. Ainsi, plus les particules concernées sont énergétiques, ie plus v_0 est grand, plus le K minimum piégeant doit être grand. Comme $r_{\min}(\theta) \propto K^{-1}$, les ceintures piégeantes sont d'autant plus proches de la Terre que v_0 est grand. Plus précisément, regardons à quel angle ces ceinture interceptent la surface de la Terre :

$$r_{\min}(\theta) = R_T \quad \text{soit} \quad \sin^2 \theta = \frac{R_T K_0}{A}$$

On trouve facilement $\sin^2 \theta = 2R_T v_0 \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi} e \frac{M}{m}}$

Cette intersection se fait donc d'autant plus proche de l'équateur que la particule est énergétique. ainsi, il n'est pas impossible d'observer des aurores boréales à des latitudes plus basses, lors d'une forte activité solaire (comme lors des orages magnétiques).

Partie III : guide d'onde parfait

1 Généralités

1. L'onde se propage selon z , d'où le terme $e^{i\omega t - kz}$. Dans le plan transverse, les conditions aux limites brisent l'invariance par translation selon x et y , donc l'amplitude doit dépendre explicitement de x et y .
2. On part des équations de Maxwell,

$$\text{div } \vec{E} = 0 \Rightarrow \partial_x E_{0x} + \partial_y E_{0y} + ik_g E_{0z} = 0 \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \partial_x B_{0x} + \partial_y B_{0y} + ik_g B_{0z} = 0 \quad (2)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \partial_y E_{0z} - ik_g E_{0y} = i\omega B_{0x} = ikc B_{0x} & (3a) \\ ik_g E_{0x} - \partial_x E_{0z} = i\omega B_{0y} = ikc B_{0y} & (3b) \\ \partial_x E_{0y} - \partial_y E_{0x} = i\omega B_{0z} = ikc B_{0z} & (3c) \end{cases}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{cases} \partial_y B_{0z} - ik_g B_{0y} = -i\frac{\omega}{c^2} E_{0x} = -i\frac{k}{c} E_{0x} & (4a) \\ ik_g B_{0x} - \partial_x B_{0z} = -i\frac{\omega}{c^2} E_{0y} = -i\frac{k}{c} E_{0y} & (4b) \\ \partial_x B_{0y} - \partial_y B_{0x} = -i\frac{\omega}{c^2} E_{0z} = -i\frac{k}{c} E_{0z} & (4c) \end{cases}$$

On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, $\text{rot } \vec{f} \equiv \vec{\nabla} \wedge \vec{f}$, donc

$$\text{rot } \vec{f} = \begin{vmatrix} \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_y f_z - \partial_z f_y \\ \partial_z f_x - \partial_x f_z \\ \partial_x f_y - \partial_y f_x \end{vmatrix}$$

En utilisant l'équation (3b) pour tirer E_{0x} , puis en remplaçant B_{0y} à l'aide de l'équation (4a), on trouve

$$E_{0x} = \frac{i}{k^2 - k_g^2} (ck \partial_y B_{0z} + k_g \partial_x E_{0z})$$

En procédant de même pour les autres composantes, on trouve finalement

$$\begin{aligned} E_{0y} &= \frac{-i}{k^2 - k_g^2} (ck \partial_x B_{0z} - k_g \partial_y E_{0z}) \\ B_{0x} &= \frac{i}{c(k^2 - k_g^2)} (ck_g \partial_x B_{0z} - k \partial_y E_{0z}) \\ B_{0y} &= \frac{i}{c(k^2 - k_g^2)} (ck_g \partial_y B_{0z} + k \partial_x E_{0z}) \end{aligned}$$

3. Les champs \vec{E} et \vec{B} vérifient l'équation de propagation

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{E} = \vec{0} \quad , \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta \right) \vec{B} = \vec{0}$$

La composante selon z de cette équation, sachant que $E_{0z}(x, y) \exp(-i(\omega t - kz))$, donne

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) E_{0z} = -(k^2 - k_g^2) E_{0z}$$

De même,
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) B_{0z} = -(k^2 - k_g^2) B_{0z}$$

4. Commençons par un champ TE, c'est-à-dire $E_{0z} = 0$. On utilise les expressions calculées à la question 2.,

$$\begin{aligned} \vec{E} \cdot \vec{B} &= E_{0x} B_{0x} + E_{0y} B_{0y} \\ &= -\frac{1}{c(k^2 - k_g^2)^2} (ck \partial_y B_{0z}) (ck_g \partial_x B_{0z}) + \frac{1}{c(k^2 - k_g^2)^2} (ck \partial_x B_{0z}) (ck_g \partial_y B_{0z}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

De la même façon, on montre qu'un champ TM donne $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.

Propagation d'une onde TEM

5. En reprenant les relations (3) et (4), on obtient

$$\begin{aligned} -ik_g E_{0y} &= ikc B_{0x} \quad , \quad -ik_g B_{0y} = -i \frac{k}{c} E_{0x} \\ ik_g E_{0x} &= ikc B_{0y} \quad , \quad ik_g B_{0x} = -i \frac{k}{c} E_{0y} \end{aligned}$$

ce qui implique, pour avoir des solutions non nulles, que $k_g^2 = k^2$. La vitesse de phase est ainsi égale à la vitesse de la lumière, $v_\varphi = c$.

6. Cette question est difficile ! On commence par chercher la direction des courants surfaciques \vec{j}_S sur le guide, en utilisant les relations de passage sur \vec{B} :

$$\mu_0 \vec{j}_S = \vec{n} \wedge \vec{B}$$

en prenant $\vec{B} = \vec{0}$ sur le conducteur constituant le guide et \vec{n} un vecteur unitaire perpendiculaire au guide et pointant vers l'intérieur du guide. Puisque \vec{n} et \vec{B} n'ont pas de composante selon z (TM), leur produit vectoriel est porté par l'axe z . En effet,

$$\begin{vmatrix} n_x & n_y & 0 \\ B_x & B_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ n_x B_y - n_y B_x \end{vmatrix}$$

Ainsi, $\vec{j}_S = j_S \vec{e}_z$. Puisque (dans l'ARQS)

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint_{PM} \frac{\vec{j}_S(P)}{PM} d^2P$$

Donc \vec{A} est également porté par le vecteur \vec{e}_z .

7.
$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Or, pour le mode TE, \vec{E} n'a pas de composantes selon (Oz) , on en déduit facilement en regardant les composantes dans le plan (xy) ,

$$\vec{E}_0(x, y) = -\vec{\text{grad}} V_0(x, y)$$

Or, puisque le champ est TEM, $\text{div } \vec{E}_0(x, y) = 0$ (voir relation (1)), donc V_0 satisfait une équation de Laplace, à savoir

$$\Delta V_0(x, y) = 0$$

à l'intérieur du guide. Les conditions aux limites impliquent $V_0 = \text{constante}$ sur les bords. La seule solution est $V_0(x, y) = \text{constante}$. Ainsi, \vec{E}_0 est nul, et par conséquent \vec{B}_0 également. On en déduit qu'un mode TEM ne peut pas se propager dans un guide rectangulaire (le résultat reste vrai pour un guide de section circulaire).

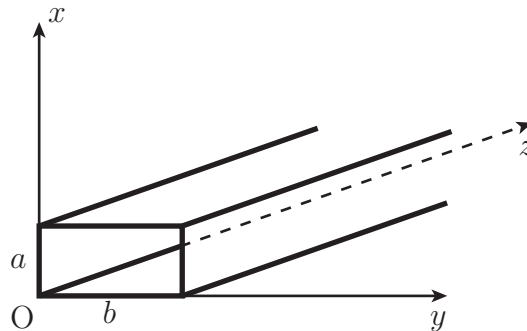


FIGURE 1 – Guide d'onde rectangulaire.

2 Guide d'onde rectangulaire

8. Le résultat de la question 3 donne pour f et g

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = -(k^2 - k_g^2)$$

Le premier terme de gauche ne dépend que de x , le deuxième que de y tandis que le membre de droite est une constante. Nécessairement, le premier terme et le deuxième terme doivent être constant également. On peut poser

$$\frac{1}{f(x)} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \pm \alpha^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{g(y)} \frac{d^2 g(y)}{dy^2} = \pm \beta^2$$

Seules les solutions avec un signe $-$, qui donnent des solutions oscillantes pour B_{0z} et donc pour \vec{E} et \vec{B} , sont compatibles avec les conditions aux limites, qui imposent à la composante normale de \vec{B} et à la composante tangentielle de \vec{E} de s'annuler sur les parois (cf question suivante).

Donc
$$f(x) = A_x \sin(\alpha x + \phi_x) \quad , \quad g(y) = A_y \sin(\beta y + \phi_y)$$

et
$$k^2 - k_g^2 = \alpha^2 + \beta^2$$

9. Les conditions aux limites s'écrivent

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 \text{ ou } a \quad E_{0y} = 0 \quad \text{et} \quad B_{0x} = 0 \\ \text{en } y = 0 \text{ ou } b \quad E_{0x} = 0 \quad \text{et} \quad B_{0y} = 0 \end{aligned}$$

En utilisant les résultats de la question 2., on obtient

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 \text{ ou } a \quad & \frac{\partial B_{0z}}{\partial x} = 0 \\ \text{en } y = 0 \text{ ou } b \quad & \frac{\partial B_{0z}}{\partial y} = 0 \end{aligned}$$

Ces conditions donnent comme condition :

$$\text{en } x = 0 : \quad \cos \phi_x \sin(\beta y + \phi_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_x = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\text{en } y = 0 : \quad \sin(\alpha x + \phi_x) \cos \phi_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi_y = \frac{\pi}{2} [\pi]$$

$$\text{en } x = a : \quad \cos(\alpha a + \phi_x) \sin(\beta y + \phi_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha a = m\pi$$

$$\text{en } y = b : \quad \sin(\alpha x + \phi_x) \cos(\beta b + \phi_y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta b = n\pi$$

$$\text{Donc} \quad k^2 - k_g^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

$$\text{et} \quad B_{0z}(x, y) = A_x A_y \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right)$$

10. La relation de dispersion s'écrit

$$k_g = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}$$

Pour que l'onde puisse se propager, il faut que k_g soit réel (sinon onde évanescente), ce qui impose

$$\omega^2 \geq \pi^2 c^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \equiv \omega_c^2$$

La plus petite des fréquences de coupure est obtenue pour $m = 0$ et $n = 1$ (car $b > a$), avec $\omega_c[0, 1] = \frac{\pi c}{b}$

11. On obtient facilement, puisque $k^2 - k_g^2 = \frac{\pi^2}{b^2}$

$$\left| \begin{array}{l} E_{0x} = -A_x A_y \frac{ibck}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{b} y \right) \\ E_{0y} = 0 \\ E_{0z} = 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left| \begin{array}{l} B_{0x} = 0 \\ B_{0y} = -A_x A_y \frac{ibk_g}{\pi} \sin \left(\frac{\pi}{b} y \right) \\ B_{0z} = -A_x A_y \cos \left(\frac{\pi}{b} y \right) \end{array} \right.$$

On pose pour la suite $E_0 \equiv -A_x A_y \frac{cbk}{\pi}$.

12. La longueur d'onde s'écrit $\lambda_g = 2\pi/k_g$.

$$k^2 - \pi^2 \frac{n^2}{b^2} = k_g^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda_g} = \frac{1}{\lambda_0} \sqrt{1 - \frac{n^2 \lambda_0^2}{4 b^2}}$$

$$\text{Puis} \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k_g} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{b^2 \omega^2}}} \geq c$$

Et enfin,

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g} = \frac{k_g}{\omega} c^2 = c \sqrt{1 - \frac{n^2 \pi^2 c^2}{b^2 \omega^2}} \leq c$$

La vitesse de groupe reste bien inférieure à la vitesse de la lumière.

13. En travaillant en notation complexe, la valeur moyenne du vecteur de Poynting s'écrit

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right) = \frac{E_0^2}{2\mu_0} \frac{k_g}{ck} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \vec{e}_z$$

La puissance moyenne transmise est égale au flux du vecteur de Poynting à travers une section du guide, à savoir

$$\langle \mathcal{P}_0 \rangle = \int_0^b \frac{E_0^2}{2\mu_0} \frac{k_g}{ck} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) a dy = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c} \frac{k_g}{k} ab$$

14. La densité volumique d'énergie électromagnétique moyenne s'écrit

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{B}^* \right) + \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \right)$$

$$\langle u \rangle = \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} \left[\left(\frac{k_g^2}{k^2} + 1 \right) \sin^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) + \left(1 - \frac{k_g^2}{k^2} \right) \cos^2 \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \right]$$

d'où l'énergie moyenne emmagasinée par unité de longueur du guide

$$\int_0^b \langle u \rangle a dy = ab \frac{E_0^2}{4\mu_0 c^2} = \frac{\langle \mathcal{P}_0 \rangle}{\frac{k_g}{k} c} = \frac{\langle \mathcal{P}_0 \rangle}{v_g}$$

Partie IV : faisceaux gaussiens

1. On utilise la propriété

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{E}) - \vec{\Delta} \vec{E}$$

et l'équation de Maxwell-Ampère dans le vide, ce qui permet d'obtenir l'équation de d'Alembert

$$\boxed{\vec{\Delta} \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

2. En injectant la forme

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \mathcal{E}(x, y, z) \exp(-i(\omega t - kz)) \vec{u}$$

dans l'équation de propagation, on obtient

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0$$

$$\text{car } \frac{\partial^2 \mathcal{E}(x, y, z) e^{ikz}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} e^{ikz} + ik \mathcal{E} e^{ikz} \right) = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} - k^2 \mathcal{E} \right) e^{ikz}$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 e^{-i\omega t}}{\partial t^2} = -\omega^2 e^{-i\omega t} = -c^2 k^2 e^{-i\omega t}$$

L'approximation paraxiale consiste à supposer que l'échelle caractéristique spatiale de variation du champ dans la direction z (L_{\parallel}) est beaucoup plus grand que celle dans les directions transverses x, y (L_{\perp}).

$$\text{Ainsi, } L_{\parallel} \gg L_{\perp} \Rightarrow \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2} \sim \frac{\mathcal{E}}{L_{\parallel}^2} \ll \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} \sim \frac{\mathcal{E}}{L_{\perp}^2}$$

Et donc

$$\boxed{\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0}$$

3. $[k] = L^{-1}$, donc

$$\boxed{[q(z)] = L}$$

4. Après remplacement, on obtient

$$2ik \left(\frac{f(z)}{q(z)} + f'(z) \right) + \frac{k^2(x^2 + y^2)}{q^2(z)} f(z)(q'(z) - 1) = 0$$

Cette équation doit être valable quelque soit x et y . On en déduit le système couplé d'équations différentielles

$$\boxed{q'(z) = 1 \quad , \quad \frac{f(z)}{q(z)} + f'(z) = 0}$$

5. La solution pour $q(z)$ est triviale,

$$q(z) = z + \tilde{z}_0$$

avec \tilde{z}_0 une constante (nombre complexe). On en déduit l'équation différentielle sur $f(z)$,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{1}{z + \tilde{z}_0} \Rightarrow \int_0^z \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \ln \frac{f(z)}{\tilde{f}_0} = -\int_0^z \frac{dz}{z + \tilde{z}_0} = -\ln \frac{z + \tilde{z}_0}{\tilde{z}_0}$$

C'est-à-dire

$$f(z) = \frac{\tilde{f}_0 \tilde{z}_0}{z + \tilde{z}_0}$$

6. La partie réelle de \tilde{z}_0 peut être absorbée dans une redéfinition de l'origine de l'axe z (en posant $z' = z + \text{Re}(\tilde{z}_0)$). On pose $\tilde{z}_0 = -iz_R$.

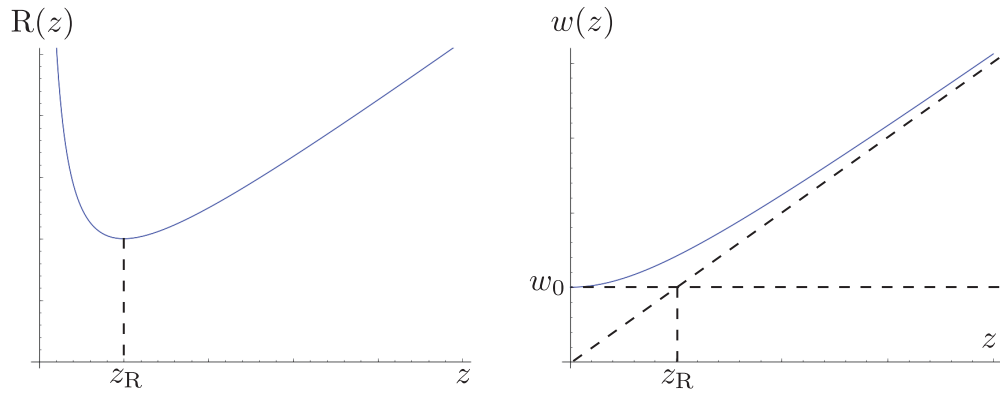
7.
$$\frac{1}{z - iz_R} = \frac{z}{z^2 + z_R^2} - i \frac{z_R}{z^2 + z_R^2}$$

Donc

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z}$$

Et

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}} \quad \text{avec} \quad w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$$



8.
$$\text{OM} = r = \sqrt{R^2 + x^2 + y^2} \simeq R \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{2R^2} \right)$$

On en déduit

$$\mathcal{E}_s \simeq \mathcal{E}_{s0} \exp(ikR) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2R}\right)$$

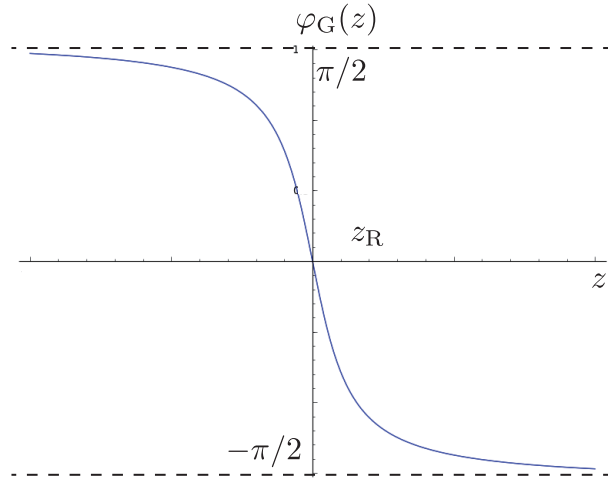
Ainsi, on reconnaît que $R(z)$ peut être considéré comme le rayon de courbure local (à la position z) du faisceau gaussien. Ce rayon de courbure est infini en $z = 0$ (l'onde est plane!), il diminue puis remonte linéairement quand $z \gg z_R$.

9. L'amplitude $f(z) = -iz_R \tilde{f}_0 / (z - iz_R)$ est un nombre complexe qui peut s'écrire comme un module et un argument.

$$|f(z)| = \frac{|\tilde{f}_0| z_R}{\sqrt{z^2 + z_R^2}} = |\tilde{f}_0| \frac{w_0}{w(z)} \quad , \quad \text{Arg}(f(z)) = \text{Arg}(\tilde{f}_0) - \arctan \frac{z}{z_R}$$

Ainsi, en regroupant le module et l'argument de \tilde{f}_0 dans \mathcal{E}_0 , on obtient bien

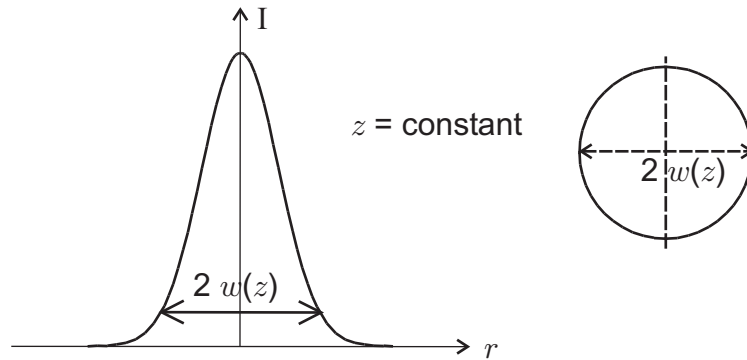
$$f(z) = \mathcal{E}_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right) e^{i\varphi_G(z)} \quad , \quad \tan \varphi_G = -\frac{z}{z_R}$$



La phase de Gouy change de π au niveau du waist (par exemple au foyer image d'une lentille convergente).

10. L'intensité $I(r, z)$ du champ électrique s'écrit

$$I(r) = I_0(z) \exp \left(-\frac{2r^2}{w^2(z)} \right) \quad \text{avec} \quad I_0(z) = |E_0|^2 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right)^2$$

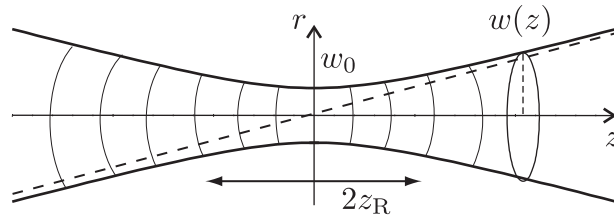


On peut définir plusieurs largeurs définies à plusieurs hauteurs :

- $w(z)$ représente la largeur en $1/e^{1/2} \simeq 0,6$ de la gaussienne $I(r)$.
- $2w(z)$ représente la largeur en $1/e^2 \simeq 0,13$ de la gaussienne $I(r)$ (voir figure).
- la largeur à mi-hauteur est égale à $\sqrt{2 \ln 2} w(z)$.

Si on représente la région de l'espace où l'intensité du faisceau est supérieure à $I_0(z)/e^2$, on obtient un disque de rayon $w(z)$ (voir figure) qui contient 86 % de l'énergie totale du faisceau. Le diamètre du faisceau est donc souvent défini comme $2w(z)$. Le waist est la taille transverse du faisceau la plus petite (la plus focalisée).

11. Voir figure ci-dessous.



12. Dans la *zone de Rayleigh*, $-z_R < z < z_R$, le faisceau a un diamètre qui ne varie quasiment pas et qui est inférieur à $\sqrt{2}(2w_0)$. Le faisceau y est cylindrique et les surfaces d'onde sont pratiquement planes. On fait souvent l'approximation qu'il s'agit d'une *onde plane*. À *grande distance*, c'est-à-dire pour $z \gg z_R$ (« champ lointain »), $w(z)$ varie linéairement. Le faisceau prend une forme conique et les surfaces d'onde sont sphériques. On peut faire l'approximation qu'il s'agit d'une *onde sphérique*.

Pour une *position intermédiaire*, entre la zone de Rayleigh et le champ lointain, l'*onde est purement gaussienne* et ne peut pas être approximée par une onde plane ou une onde sphérique. L'approximation consistant à utiliser l'optique géométrique à la place de l'optique gaussienne n'est alors plus valable.

13. Lorsque $z \gg z_R$, on a $w(z) \simeq w_0 \frac{z}{z_R}$, donc le faisceau diverge linéairement selon un cône de demi-angle θ tel que

$$\tan \theta = \frac{w_0}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

Dans l'approximation paraxiale, $\tan \theta \sim \theta$ et donc

$$\theta \simeq \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

On peut interpréter ce phénomène de divergence par la diffraction sur la pupille de taille πw_0 .