

un électron soumis à une trajectoire circulaire, nous savons qu'il est soumis à une accélération centripète : conformément à la formule (23.10) cet électron doit émettre un rayonnement électromagnétique. D'où provient alors l'énergie émise ? De l'énergie mécanique de l'électron bien sûr, et c'est précisément une des raisons pour lesquelles la mécanique quantique est née ! Si un électron tournait effectivement autour du noyau comme le prévoyait Rutherford, il devrait s'écraser sur celui-ci au bout d'un temps fini, temps à l'issue duquel toute son énergie mécanique aurait été convertie en énergie électromagnétique.

1.3.2. Dipôle oscillant

On nomme dipôle oscillant, ou dipôle de Hertz, un doublet de charges $+q -q$ (l'une est généralement fixe) dont le moment dipolaire varie de façon sinusoïdale à une pulsation ω donnée. Si $P(t)$ et $N(t)$ sont les positions respectives de ces charges, le moment dipolaire de la distribution est donné par $\vec{p}(t') = q\vec{NP}(t') = qa \cos(\omega t') \vec{e}_z$. Soit $T = 2\pi/\omega$ la période de l'oscillation, la condition de mouvement non relativiste des charges s'écrit $2a/T \ll c$ qui s'identifie, dans ce cas de figure, à la condition de temps de retard négligeable entre les deux charges. Si cette condition est vérifiée, la puissance rayonnée par le système de charges en mouvement devient alors :

$$P_{\text{ray}}^{(\omega)}(t') = \frac{a^2 q^2 \omega^4 \cos^2(\omega t')}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

qui fournit une puissance moyenne émise :

$$\langle P_{\text{ray}}^{(\omega)} \rangle = \frac{a^2 q^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (23.11)$$

Un doublet de charges émet donc une puissance d'autant plus importante qu'il oscille rapidement (tout en restant dans la limite non relativiste). La puissance rayonnée étant proportionnelle à la puissance quatrième de la vitesse, un mouvement deux fois plus rapide fournit un rayonnement de puissance seize fois supérieur.

II. RAYONNEMENT DIPOLAIRE ET ANTENNES

Les propriétés fondamentales du rayonnement dipolaire ayant été établies, voyons comment elles s'appliquent de façon concrète et, dans cette optique, intéressons-nous aux antennes. Une antenne est un conducteur (ou un système de conducteurs) au sein duquel un courant variable est présent et qui génère, à grande distance, un rayonnement électromagnétique. Nous nous bornons ici à présenter le cas des antennes rectilignes, que nous considérons dans la suite orientées selon l'axe \vec{e}_z .

II.1. Courant d'antenne et moment dipolaire

II.1.1. Champs rayonnés à grande distance par une antenne de petite taille

Considérons un élément cylindrique de conducteur, de section S et de longueur ℓ suffisamment petite pour que le vecteur densité volumique de courant y soit constant à un temps donné. Si les charges sont réparties de façon discrète et si cet élément est globalement neutre, le moment dipolaire associé ne dépend pas de l'origine des coordonnées et s'écrit $\vec{p}_\ell(t) = \sum_i q_i \vec{OP}_i(t)$, la somme étant prise sur toutes les charges présentes au temps t dans l'élément considéré. La densité volumique de courant s'écrivant pour sa part $\vec{J}(t) = \frac{\sum_i q_i \vec{v}_i(t)}{\ell S}$, on constate que la

dérivée temporelle du moment dipolaire de cet élément vérifie :

$$\frac{d\vec{p}_\ell}{dt} = \vec{J}(t)\ell S = \ell i_\ell(t) \vec{e}_z \Rightarrow \ddot{p}_\ell(t') = \ell \frac{di_\ell}{dt'}(t') \quad (23.12)$$

et donc, conformément aux résultats de la section précédente, nous en déduisons qu'un conducteur parcouru par un courant variable émet à grande distance un champ électromagnétique capable de transmettre de l'information (c'est précisément ce qui est réalisé dans une antenne). Notons que sous l'hypothèse prise pour la taille ℓ de l'élément de conducteur, la condition $\ell \ll cT$ est vérifiée de façon immédiate (\vec{J} étant constant sur l'élément, celui-ci vérifie, par construction, l'approximation des régimes quasi stationnaires) et le champ électromagnétique rayonné par l'élément à grande distance est donné par la formule (23.7) en y injectant l'expression (23.12) liant moment dipolaire et intensité :

$$\vec{B}(M,t) \simeq \ell \frac{di_\ell}{dt'} \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi cr} \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{E}(\vec{r},t) \simeq \ell \frac{di_\ell}{dt'} \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta. \quad (23.13)$$

Test 23.1.

Voiture télécommandée et antenne de commande

Une commande de voiture télécommandée est une antenne émettrice de petite taille. Est-il pertinent d'incliner l'antenne en direction de la voiture télécommandée pour contrôler cette dernière ?

II.1.2. Résistance de rayonnement d'une antenne de petite taille

Dans le cas d'une antenne de petite taille, l'injection de l'égalité (23.12) dans l'expression (23.9) de la puissance rayonnée à une distance r conduit à :

$$P_{\text{ray}}(r,t') = \frac{\ell^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{di_\ell}{dt'} \right)^2$$

qui correspond, dans le cas d'une intensité purement sinusoïdale $i(t') = I_0 \cos(\omega t' + \varphi_0)$, à une puissance moyenne rayonnée :

$$\langle P_{\text{ray}}(r,t') \rangle = I_0^2 \frac{\ell^2 \omega^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{I_0^2}{2} R_r(\omega).$$

La quantité $R_r(\omega)$ se nomme résistance de rayonnement de l'antenne à la pulsation ω . Plus cette quantité est élevée (tout en restant dans le cadre des antennes de petite taille), plus la puissance rayonnée est importante. De façon explicite, nous avons :

$$R_r(\omega) = \frac{\ell^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \left(2 \frac{\pi\mu_0 c}{3} \right)$$

soit, en introduisant la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ et en remarquant que $\frac{2\pi\mu_0 c}{3} = 790 \, \Omega$:

$$R_r(\omega) = 790 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \, \Omega \quad (23.14)$$

expression de la résistance de rayonnement valable pour $\frac{\ell}{\lambda} \ll 1$ afin d'assurer l'hypothèse de quasi-stationnarité de l'antenne. On note que si cette hypothèse est vérifiée, la puissance rayonnée, à intensité et fréquence fixées, croît proportionnellement au carré de la longueur de l'antenne. Pour augmenter la puissance d'émission, et donc augmenter la zone de réception du signal, il est donc nécessaire d'augmenter la taille de l'antenne.

II.2. Rayonnement à grande distance d'une antenne réelle

Pour obtenir un rayonnement de puissance acceptable, il est nécessaire d'augmenter la taille de l'antenne utilisée et de sortir de l'hypothèse de quasi-stationnarité de l'émetteur. Nous nous bornerons dans la suite à envisager des cas d'excitations sinusoïdales d'antennes filaires¹², les résultats non périodiques pouvant alors être obtenus par combinaison linéaire de ceux-ci (voir l'annexe A sur l'analyse de Fourier). D'un point de vue pratique, la gamme de fréquence couramment utilisée pour la transmission par antennes (WIFI, GPS, Bluetooth) correspond au domaine des micro-ondes (fréquences comprises entre 3 GHz et 300 GHz).

Passer de la description d'une antenne de petite taille à une antenne réelle ne pose pas de difficultés majeures : il suffit de considérer celle-ci comme une assemblée d'antennes élémentaires vérifiant l'hypothèse quasi stationnaire. Considérons la figure 23.4 : une antenne réelle de taille ℓ_a est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation ω et de répartition spatiale $f(z)$; on choisit le centre O de l'antenne comme point de référence des coordonnées. Le passage à la notation complexe fournit donc $\underline{I}(z,t) = f(z) \exp(i\omega t)$, l'intensité réelle $I(z,t)$ vérifiant $I(z,t) = \Re[\underline{I}(z,t)]$. Conformément aux résultats obtenus pour les antennes de petite taille, un élément de taille dz de l'antenne, centré sur le point P , produit en un point M un champ électromagnétique élémentaire dont la représentation complexe est donnée par :

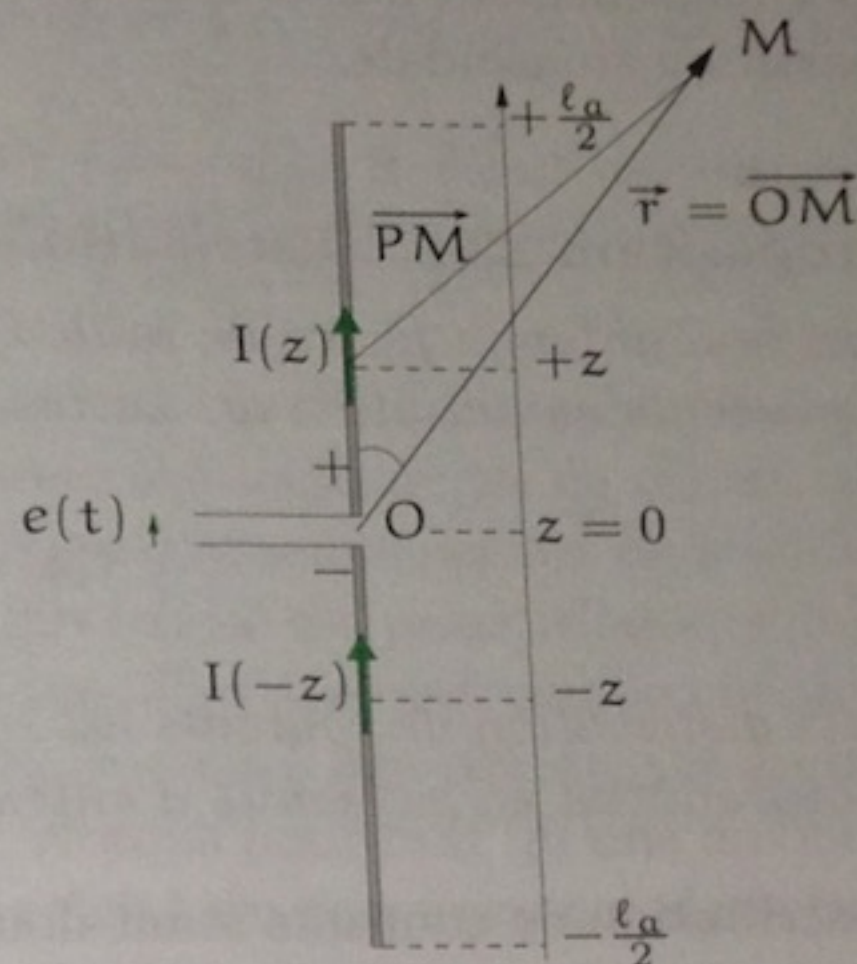


FIG. 23.4. Antenne linéaire.

$$d\vec{E}(M,t) \simeq \frac{(i\omega) \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{PM}|} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{|\vec{PM}|}{c}\right)\right] dz f(z) \vec{e}_\theta.$$

En nous plaçant dans la zone de rayonnement où $|\vec{OM}| \gg |\vec{OP}|$, nous avons :

$$|\vec{PM}| = |\vec{PO} + \vec{OM}| = |\vec{OM}| \left(1 - 2 \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{|\vec{OM}|^2}\right)^{1/2} \simeq r - z \cos(\theta)$$

et donc :

$$d\vec{E}(M,t) \simeq \exp(i\omega t') \frac{(i\omega) \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} dz f(z) \exp\left(iz \frac{\omega \cos(\theta)}{c}\right) \vec{e}_\theta.$$

Le champ électrique rayonné par l'antenne au point M s'obtient en superposant les champs rayonnés par chaque élément de l'antenne de taille ℓ_a , soit finalement :

$$\vec{E}(M,t) \stackrel{r \gg \ell_a}{\simeq} \exp\left(i\omega t' + i\frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(\theta)}{2\epsilon_0 c r \lambda} \int_{-\ell_a/2}^{+\ell_a/2} dz f(z) \exp\left(i2\pi \frac{z}{\lambda} \cos(\theta)\right) \vec{e}_\theta. \quad (23.15)$$

Le champ électrique rayonné par l'antenne s'écrit donc comme le produit d'un terme dépendant uniquement de la position du point par un terme relié à la structure des courants dans l'antenne. Ce dernier terme, que nous nommerons par la suite facteur de structure de l'antenne, va différer suivant les antennes considérées, mais on peut noter qu'il s'identifie aux facteurs de structure qui

¹² Bien d'autres types d'antennes, comme l'antenne Yagi utilisée pour la télévision, sont couramment employées mais leur traitement complet dépasse le cadre de ce livre. Sur ce sujet, voir P.F. Combes, *Micro-ondes. T. 2 : Circuits passifs, propagation, antennes*, Dunod (1997).

apparaissent en diffraction et qu'il s'écrit comme la transformée de Fourier spatiale de l'intensité dans l'antenne.

Afin de déterminer totalement la forme du champ électrique et donc la forme du rayonnement d'une antenne, il est nécessaire de préciser la distribution des courants dans celle-ci. Pour réaliser une antenne filaire réelle, on place deux conducteurs linéaires de taille $\ell_a/2$ proches l'un de l'autre et on impose une différence de potentiel sinusoïdale de pulsation ω entre ces deux conducteurs (voir figure 23.4). La symétrie du système ainsi formé impose une symétrie des courants entre les deux conducteurs, soit $I(z) = I(-z)$, et, les extrémités des antennes n'étant pas reliées à un conducteur, on a forcément $I(\ell_a/2) = I(-\ell_a/2) = 0$. Sous les conditions prises, il apparaît expérimentalement que la répartition des courants dans l'antenne est bien modélisée¹³ par une répartition sinusoïdale.

Proposition 23.2. Distribution de courants dans une antenne

Soit une antenne filaire de taille ℓ_a alimentée en son centre par une différence de potentiel sinusoïdale de pulsation ω . La répartition des courants dans l'antenne est de la forme :

$$f(z) = I_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left[|z| - \frac{\ell_a}{2} \right] \right). \quad (23.16)$$

Cette distribution de courants est symétrique ($I(z) = I(-z)$) et vérifie la condition aux limites de courant nul en extrémité d'antenne.

La distribution de courants étant donnée, il est aisé de calculer le facteur de forme de l'antenne. Pour une longueur d'antenne ℓ_a donnée, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\theta) &= \int_{-\ell_a/2}^{+\ell_a/2} dz I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(|z| - \frac{\ell_a}{2} \right) \right] \exp(i2\pi \frac{z}{\lambda} \cos(\theta)) \\ \hat{f}(\theta) &= \frac{I_0 \lambda}{\pi} \frac{\cos(\pi \ell_a / \lambda) - \cos(\pi \ell_a \cos(\theta) / \lambda)}{\sin^2(\theta)}. \end{aligned} \quad (23.17)$$

Test 23.2.

Facteur de structure d'une antenne à courants stationnaires

Retrouver l'expression (23.17) par un calcul direct.

Injecter l'expression (23.17) du facteur de structure d'antenne dans l'égalité (23.15) du champ rayonné à grande distance fournit :

$$\vec{E}(M,t) \underset{r \gg \ell_a}{\simeq} \exp \left(i\omega t' + i\frac{\pi}{2} \right) \frac{I_0}{2\pi \epsilon_0 c r} \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi \ell_a}{\lambda} \right) - \cos \left(\frac{\pi \ell_a \cos(\theta)}{\lambda} \right)}{\sin(\theta)} \right] \vec{e}_\theta. \quad (23.18)$$

Le terme entre crochets est un facteur sans dimension qui ne dépend que de l'orientation angulaire du point d'observation par rapport à l'antenne, on le note généralement $F(\theta)$: ce terme caractérise les propriétés de directivité de l'antenne considérée et sa représentation polaire se nomme diagramme de rayonnement¹⁴ en champ de l'antenne.

¹³La répartition réelle des intensités dans un conducteur est, en réalité, un sujet très compliqué, et nous n'en présentons ici qu'une version simplifiée. Pour des informations complémentaires, on pourra se reporter au cours sur les antennes dispensé à l'université Pierre et Marie Curie, consultable à l'adresse http://www.edu.upmc.fr/physique/phys325/IMG/pdf_cours4.pdf.

¹⁴Dans ce cas, c'est un diagramme de rayonnement non normalisé. Certains auteurs nomment diagramme de rayonnement en champ le diagramme polaire de $F(\theta)/F_{\max}$.