Couplage d'oscillateur.

Soit un système d'oscillateur. Pour faire simple on en prend 2 ici. (on peut généraliser à N oscillateurs)

On utilise ici la mécanique analytique et les équations de hamilton.

2 oscillateurs décrit par $\left.\begin{matrix} q_1 \\ q_2 \end{matrix}\right\}$ coordonnées.

$\left.\begin{matrix} p_1 \\ p_2 \end{matrix}\right\}$ impulsion.

Soit ω_1 et ω_2 leurs fréquences propres.

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_1 \omega_1^2 q_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega_2^2 q_2^2}{2}.$$

Si à partir de H on écrit les équations de hamilton $\Rightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \end{cases}$

On parle de couplage capacitif si on rajoute un terme $C q_1 q_2$ à l'hamiltonien.

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_1 \omega_1^2 q_1^2}{2} + \frac{m_2 \omega_2^2 q_2^2}{2} + C q_1 q_2.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + \dfrac{C}{m_1} q_2 = 0. \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \dfrac{C}{m_2} q_1 = 0 \end{cases}$$

On parle de couplage inductif si on rajoute un terme de type $C p_1 p_2$.

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + C p_1 p_2 + \frac{p_2^2}{2m_2} + \frac{m_1 \omega_1^2}{2} q_1^2 + \frac{m_2 \omega_2^2}{2} q_2^2.$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \dot{q}_1 = \frac{p_1}{m_1} + C p_2 \\ \dot{q}_2 = p_2/m_2 + C p_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{p}_1 = - m_1 \omega_1^2 q_1 \\ \dot{p}_2 = - m_2 \omega_2 q_2. \end{cases}$$

On ne regardera pas les cas où le couplage est à la fois inductif et capacitif.

Rq 1 - Couplage capacitif = on retrouve un couplage capacitif pour tout système avec 2 degrés de liberté au voisinage d'un point d'équilibre.

si 0,0 point équilibre.

$$V(x_1, x_2) = V(0,0) + \cancel{x_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}} + \cancel{x_2 \frac{\partial V}{\partial x_2}} +$$

$$\frac{1}{2} x_1^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial x_1^2} + x_1 x_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}.$$

Rq 2 = - Couplage inductif se retrouve surtout en électricité ou électronique.

Rq3 : Il existe aussi des couplages résistifs dans le cas où il y a de la dissipation. Je n'en parlerai pas ici.

Méthode de résolution des équations

Que le couplage soit inductif ou capacitif, on aboutit toujours à des équations différentielles couplées.

La méthode de résolution de ces équations est toujours un changement de variables permettant de découpler les équations.

1) Cas de 2 oscillateurs identiques (à connaître et adapter au cas d'étude).

Si $m_1 = m_2 = m$.
$\omega_1 = \omega_2 = \omega$.

Dans cette partie, je traite ~~le~~ cas ~~du~~ couplage capacitif.

Les équa. diff s'écrivent.

$$\ddot{q}_1 + \omega^2 q_1 + \frac{c}{m} q_2 = 0.$$
$$\ddot{q}_2 + \omega^2 q_2 + \frac{c}{m} q_1 = 0.$$

je pose $\begin{cases} u = q_1 + q_2 \\ v = q_1 - q_2 \end{cases}$

Rq : à retenir.
dans les exos
... sag
des changt variables classiques
sont $\begin{cases} u = q_1 + q_2 \\ v = q_1 - q_2 \end{cases}$
ou.
$\begin{cases} u = q_1 + i q_2 \\ v = q_2 - i q_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \ddot{u} + \omega^2 u + \frac{2C}{m} u = 0 \\ \ddot{v} + \omega^2 v = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{u} + \left(\omega^2 + \frac{2C}{m}\right) u = 0 \\ \ddot{v} + \omega^2 v = 0 \end{cases}$$

j'ai bien 2 oscillateurs independants.

pulsations propres = pulsations des oscillateurs indep.

$$\omega_+ = \sqrt{\omega^2 + \frac{2C}{m}}$$

$$\omega_- = \omega$$

Rq $\quad q_1 = \frac{u + v}{2}$

$\quad q_2 = \frac{u - v}{2}$

Donc pour exciter le système dans son mode propre à ω_+ je prends pour condit° initiales.

$$\left.\begin{array}{ll} u(0) = 1 & \dot{u}(0) = 0 \\ v(0) = 0 & \dot{v}(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} q_1(0) = 1/2 & \dot{q}_1(0) = 0 \\ q_2(0) = 1/2 & \dot{q}_2(0) = 0. \end{array}$$

Pour exciter le syst dans son mode à ω_-

je prends pour conditions initiales.

$$\begin{cases} u(0) = 0 & \dot{u}(0) = 0 \\ v(0) = 1 & \dot{v}(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1(0) = 1/2 & \dot{q}_1(0) = 0 \\ q_2(0) = -1/2 & \dot{q}_2(0) = 0 \end{cases}$$

2) Methode generale (difficile).

L'idée est toujours de faire un changement de variables pour obtenir un oscillateur independant. ça revient toujours à diagonaliser une matrice.

$$H = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + m_1\frac{\omega_1^2}{2} q_1^2 + C q_1 q_2 + \frac{m_2\omega_2^2 q_2^2}{2}.$$

On fait un changt de variables.

$$p_1' = \frac{p_1}{\sqrt{m_1}} \qquad q_1' = \sqrt{m_1}\, q_1$$

$$p_2' = \frac{p_2}{\sqrt{m_2}} \qquad q_2' = \sqrt{m_2}\, q_2.$$

Rq : si on fait un chgt de variable $q \to \sqrt{m}\, q$ dans le Lagrangien, $p \to p/\sqrt{m}$

$$\Rightarrow H = \frac{p_1'^2}{2} + \frac{p_2'^2}{2} + \frac{\omega_1^2 q_1'^2}{2} + \frac{C}{\sqrt{m_1 m_2}} q_1' q_2' + \frac{\omega_2^2 q_2'^2}{2}$$

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p_1' & p_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_1' & q_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \omega_1^2 & \frac{c}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ \frac{c}{\sqrt{m_1 m_2}} & \omega_2^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{bmatrix}$$

l'objectif de ce premier changement de variable était de faire apparaître la matrice identité dans le 1^er^ terme du membre de droite.

$$\begin{bmatrix} \omega_1^2 & \frac{c}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ \frac{c}{\sqrt{m_1 m_2}} & \omega_2^2 \end{bmatrix}$$ est symétrique réelle

$\Rightarrow$ elle est diagonalisable.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = P\begin{pmatrix} \omega_1^2 & \frac{c}{\sqrt{m_1 m_2}} \\ \frac{c}{\sqrt{m_1 m_2}} & \omega_2^2 \end{pmatrix} {}^tP.$$

$$\Rightarrow H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} p_1' & p_2' \end{bmatrix} {}^tP\, P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} {}^tP \cdot P \begin{bmatrix} p_1' \\ p_2' \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{2}\begin{bmatrix} q_1' & q_2' \end{bmatrix} \cdot {}^tP\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P \begin{bmatrix} q_1' \\ q_2' \end{bmatrix}$$

On pose $Q' = \begin{vmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{vmatrix}$ $\quad \Pi' = \begin{matrix} p'_1 \\ p'_2 \end{matrix}$.

$$H = \frac{1}{2} {}^t[P\Pi'] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} [P\Pi'] + \frac{1}{2} {}^t[PQ'] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} [PQ']$$

On a donc des oscillateurs indépendants de pulsation propre

$$\omega_+ = \sqrt{\lambda_1}$$
$$\omega_- = \sqrt{\lambda_2}$$

(Rq : on peut montrer que $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$ (conditions d'équilibre stable))

PQ' donne le changement de variables pertinents

Rq! : On peut faire le m̂ travail si on a un couplage inductif.

1/ changement de variable pour faire apparaître la matrice identité dans le 2 terme de droite du Hamiltonien.

2/ Diagonalisation de la matrice du 1er terme de droite de H.