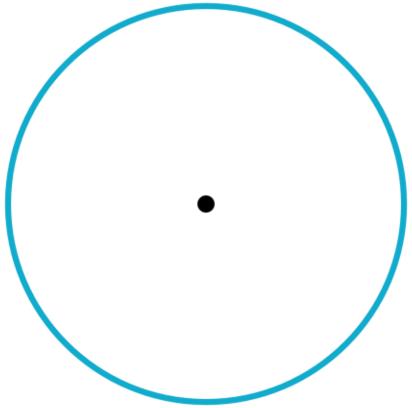
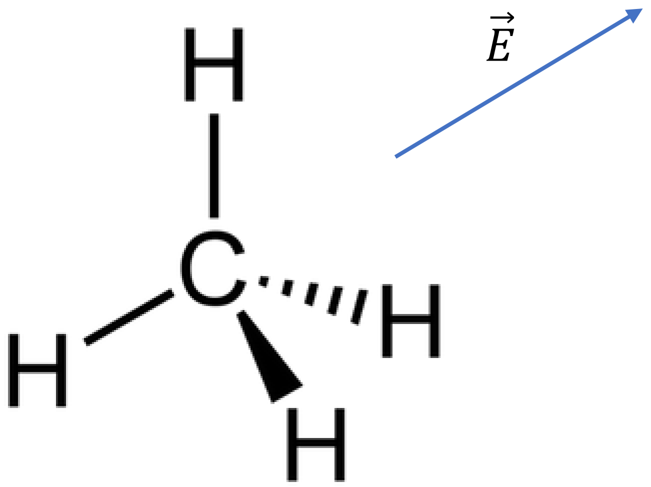


Principe de Curie :
Lorsque certaines **causes** produisent certains **effets**, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.

Autre formulation : L'effet a au moins les symétries des causes

Contraposée : Lorsque certains **effets** révèlent une certaine **dissymétrie**, cette **dissymétrie** doit se retrouver dans les **causes** qui lui ont donné naissance

Réciproque est fausse ! Ce n'est pas parce que les effets ont certaines symétries que les causes l'auront aussi.



Cas général : $\vec{p} = \bar{\bar{\alpha}}\,\vec{E}$

Dans le cas du méthane : $\vec{p} = \alpha\vec{E}$

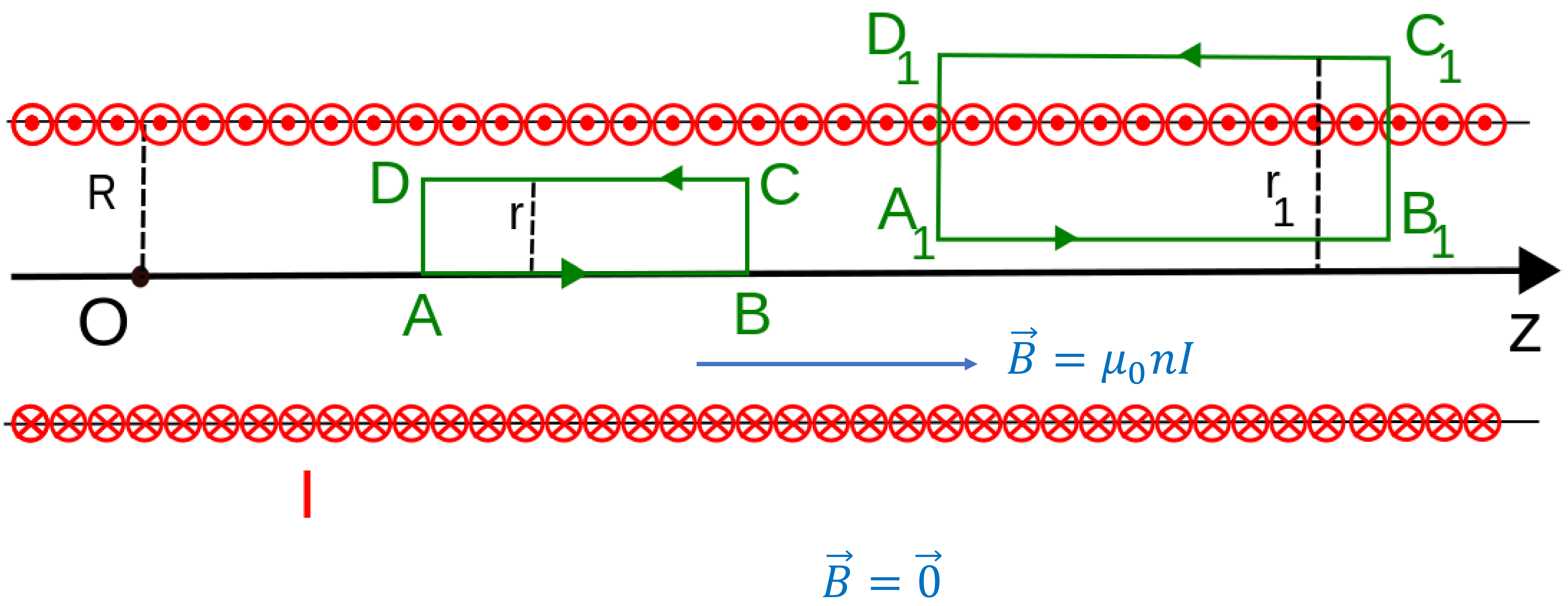
Isotropie de la polarisabilité alors que la molécule de méthane n'est pas isotrope

$dq = \lambda dz$

Invariances : $\vec{E} = \vec{E}(r)$

Réflexion : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

Théorème de Gauss : $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}\vec{u}_r$



D1
C1
R
D
C
r
A1
r1
B1
O
A
B
z
$\vec{B} = \mu_0 n I$
I
$\vec{B} = \vec{0}$

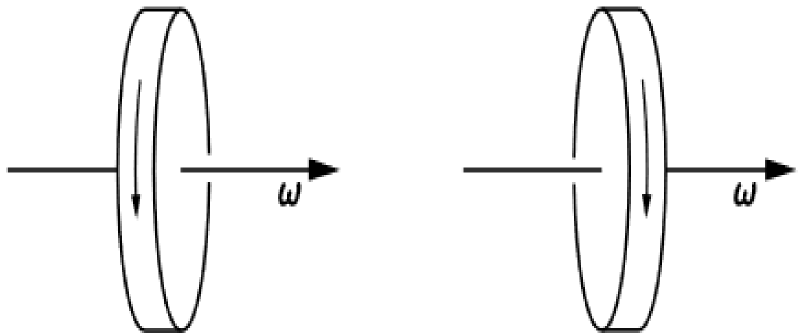


Fig. 52–3. A rotating wheel and its mirror image. Note that the angular velocity "vector" is not reversed in direction.

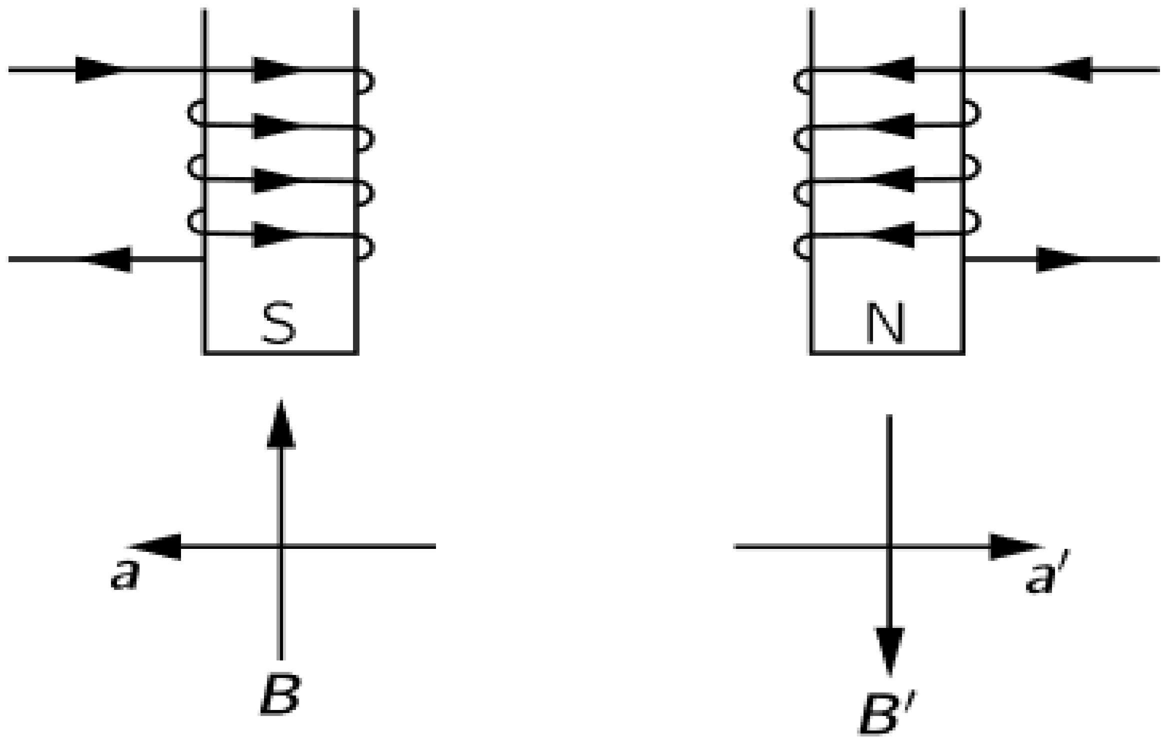


Fig. 52–4. A magnet and its mirror image.

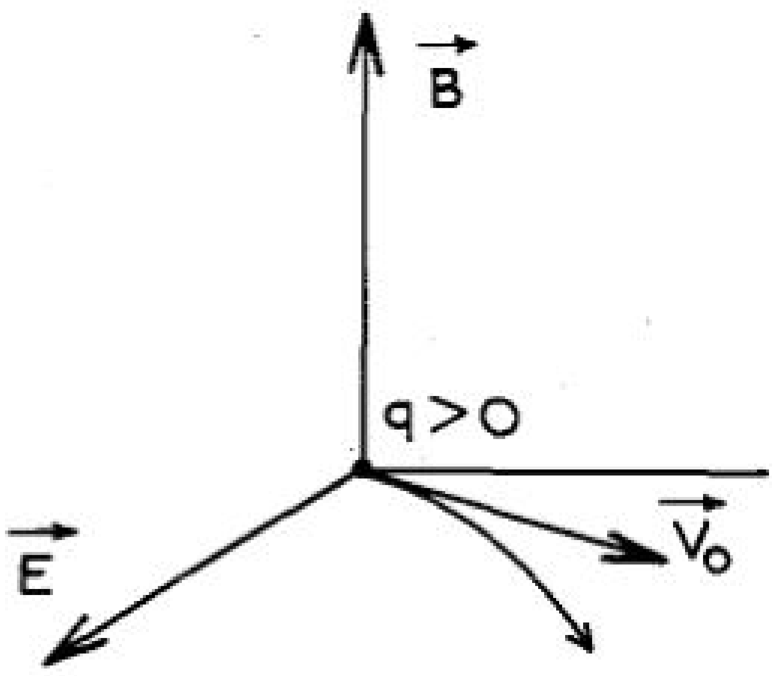


Fig. 2. — Mouvement d'une charge q dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ perpendiculaires.

Emmy Nœther (1882-1935)

Théorème de Nœther (1918) : A toute *symétrie du lagrangien* correspond une quantité qui est conservée.

Autre formulation : A toute transformation infinitésimale qui laisse le lagrangien invariant est associée une grandeur conservée.

$$I = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0}$$

Exemple de Transformation continue :

- Translation : $\vec{r} \to \overrightarrow{r'} = \vec{r} + \alpha \vec{a}$
- Rotation : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Symétrie du lagrangien par translation

Une particule libre (ie n'étant soumise à aucun champ extérieur).

$L = E_c - E_p = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$

Il est symétrique par transformation translation (définie ci-dessous pour tout vecteur $\vec{a}$).
Translation : $\vec{r} \rightarrow \overrightarrow{r'} = \vec{r} + \alpha\vec{a}$

La Grandeur inchangée est : $I = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0}$

D'après le théorème de Nœther, $\vec{P} = m\vec{v}$ est une grandeur conservée. On retrouve **le principe d'inertie**. C'est la première fois que des considérations sur les symétries nous permettent de déduire des lois.

Symétrie par translation dans le temps

On suppose que la fonction de Lagrange est invariante par une transformation dans le temps: $t \to t+a \quad a = cte$

on a alors: $L(q,\dot{q},t) = L(q,\dot{q},t+a)$, à savoir: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$

de plus, on a: $dL = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t}dt$

en tenant compte de $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$ on en déduit:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\dot{q}_i)\right]$$

$$= \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

c'est à dire:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - L\right] = 0$$

$$\boxed{H = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right) - L}$$

Pour les systèmes soumis à des forces conservatives:
$H = E$

Propriété du système physique	Symétrie	Invariant
Espace homogène	Invariance par translation dans l'espace	Conservation de l'impulsion
Espace isotrope	Invariance par rotation dans l'espace	Conservation du moment cinétique
Système indépendant du temps	Invariance par translation dans le temps (les lois sont les mêmes tout le temps)	Conservation de l'énergie

Démonstration du théorème de Nœther:

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \dot{q}_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha} \right)$$

on rappelle les équations de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \text{ à savoir: } \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

et la relation suivante:

$$\frac{\partial \dot{q}(q',t,\alpha)}{\partial \alpha} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha} \right)$$

ces deux relations nous permettent de réécrire l'expression de la dérivée $\frac{\partial L'}{\partial \alpha}$:

$$\frac{\partial L'}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \frac{\partial q_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha} \right) \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial_i(q',t,\alpha)}{\partial \alpha} \right) \right]$$

en particulier on va s'intéresser à cette dérivée au point $\alpha = 0$ (on s'intéresse aux transformations infinitésimales):

$$\left(\frac{\partial L'}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \right]$$

Zoom Réunion

pierre ghesquiere

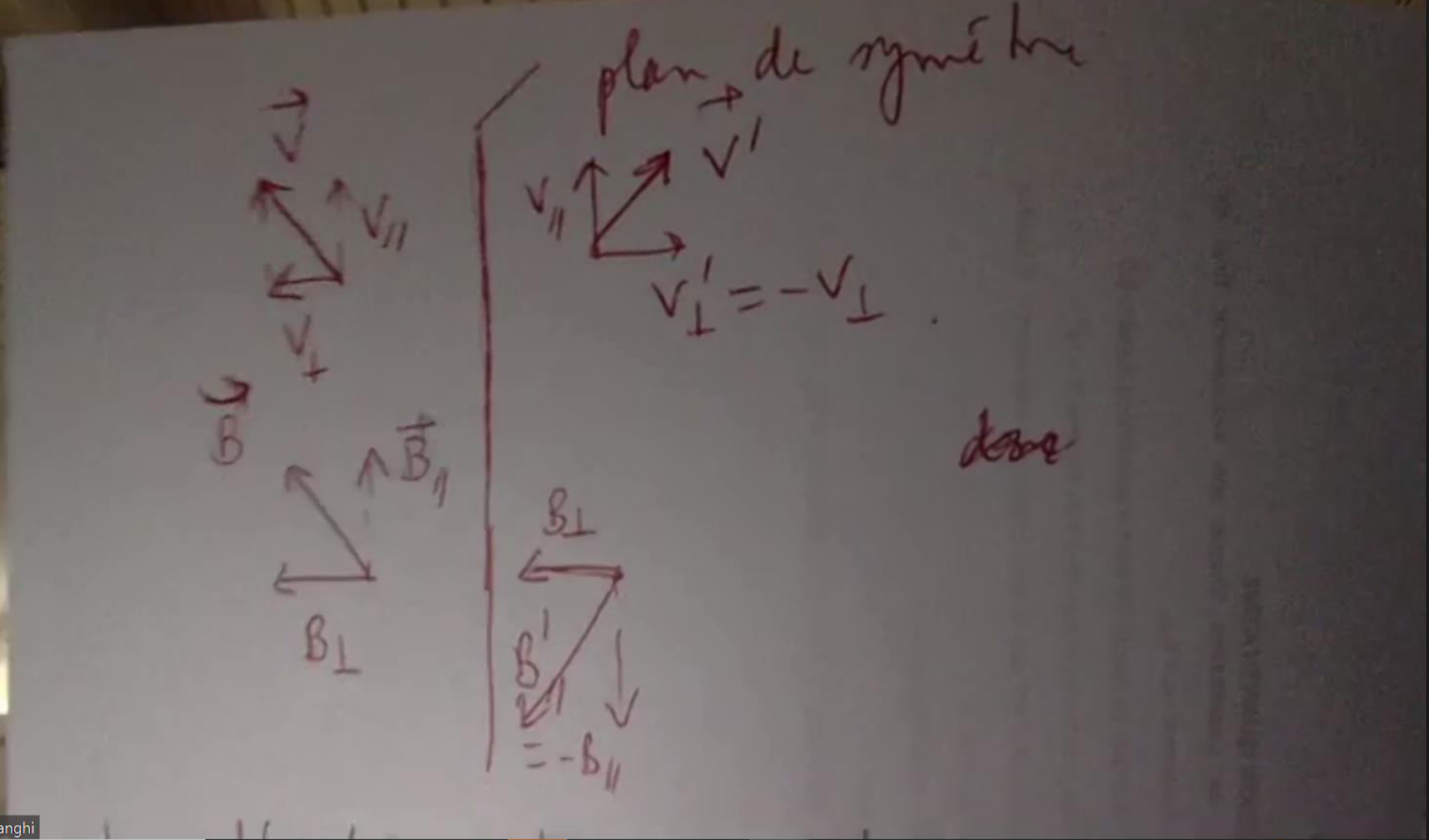
Manoel Manghi

Nabil LAMRANI

Mathias

maria

Caroline



Manoel Manghi

Taper ici pour rechercher

14:24
27/05/2020