

Évolution d'une particule quantique dans un potentiel

• Schrodinger: $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \psi(x,t)$ $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} |\psi(0)\rangle$

• Hamiltonien indépendant du temps:

$$\hat{H} |\psi(t)\rangle = E |\psi(t)\rangle \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = E |\psi(t)\rangle$$

→ Solution stationnaires: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$

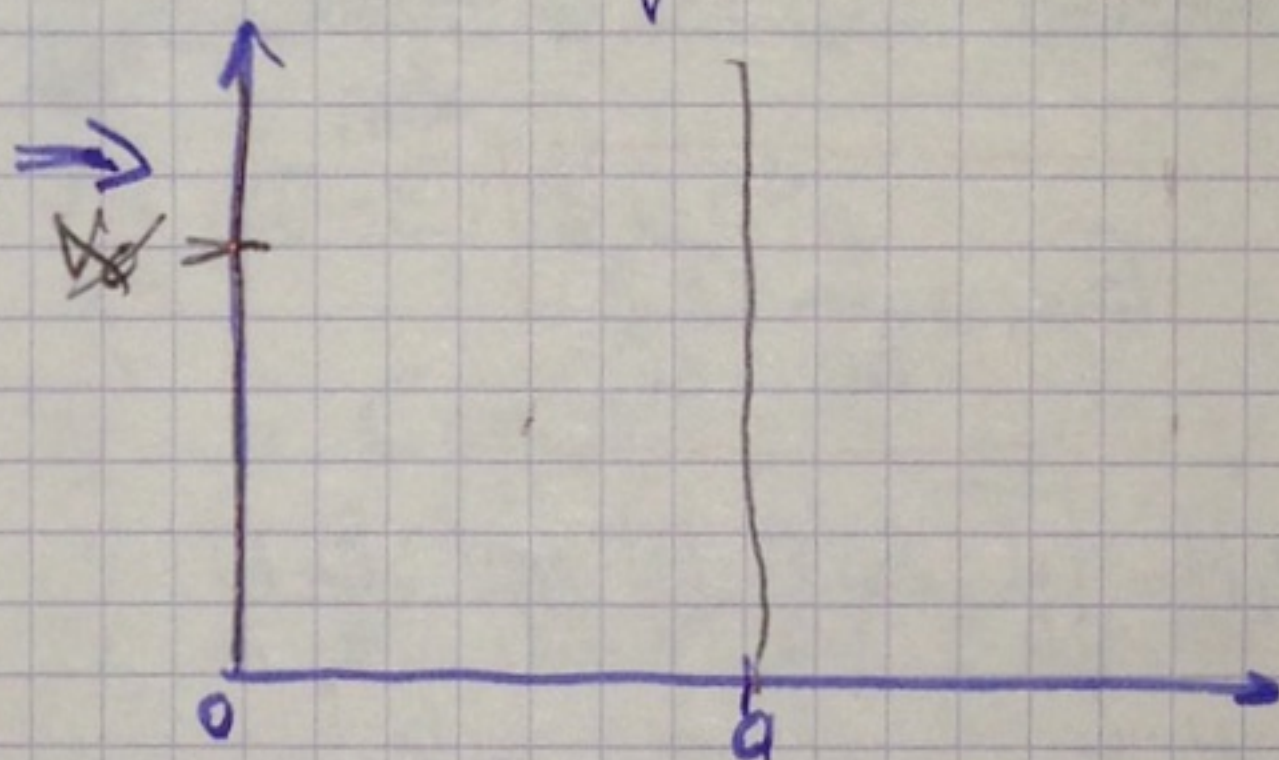
$$\psi(x,t) = \psi(x) \exp(-i \frac{Et}{\hbar})$$

1) Puits de potentiel infiniment profond

• Modélisation valable: si $E \ll V_0 \leftarrow$ seuil

$$d \ll \lambda$$

Anglais caract d'évolution.



• Les régions de l'espace où le potentiel est $+\infty$ est interdit pour la f^o d'onde (cf. eq de Schrodinger indep du temps)

$$0 \leq x \leq a: \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0$$

a) Cas $E \leq 0$:

$$k = \sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \rightarrow \frac{d^2 \psi}{dx^2} - k^2 \psi = 0$$

$$\psi(x) = A \exp(-kx) + B \exp(kx)$$

$$\psi(0) = \psi(a) = 0 \Rightarrow A = B = 0 \quad \boxed{\text{Pas possible}}$$

b) $E > 0$: $\psi(x) = A \exp = A \sin kx + B \cos kx$ avec $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

$$\begin{cases} \Psi(0) = 0 \\ \Psi(a) = 0 \end{cases} \rightarrow \text{le facteur de cos } \alpha = 0 \quad B = 0$$

$$\frac{m \alpha a}{2} = Q$$

$$\frac{m \pi}{k_n} = Q$$

$$k_n = \frac{m \pi}{Q}$$

$$\Psi_n(x) = A_n \sin\left(\frac{m \pi}{a} x\right)$$

Constante A_n : $\int_0^a |\Psi_n(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow \frac{|A_n|^2}{2} = 1$

$$\boxed{\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n \pi}{a} x\right)} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

• Énergie: $k_n = \frac{\sqrt{2m E_n}}{\hbar} \rightarrow E_n = \frac{(\hbar k_n)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}$

$$\boxed{E_m = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 m^2}{a^2}}$$

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n \pi}{a} x\right) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 m^2}{a^2}$$

• Interprétation de l'existence d'un état d'énergie minimale:

* On montre facilement que:

$$\Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin k_n x \exp(-i \omega_n t) = \frac{-i}{\sqrt{2a}} \exp(-i(\omega_n t - k_n a)) + \frac{i}{\sqrt{2a}} \exp(-i(\omega_n t + k_n a))$$

Donc $\langle P_x \rangle = 0$

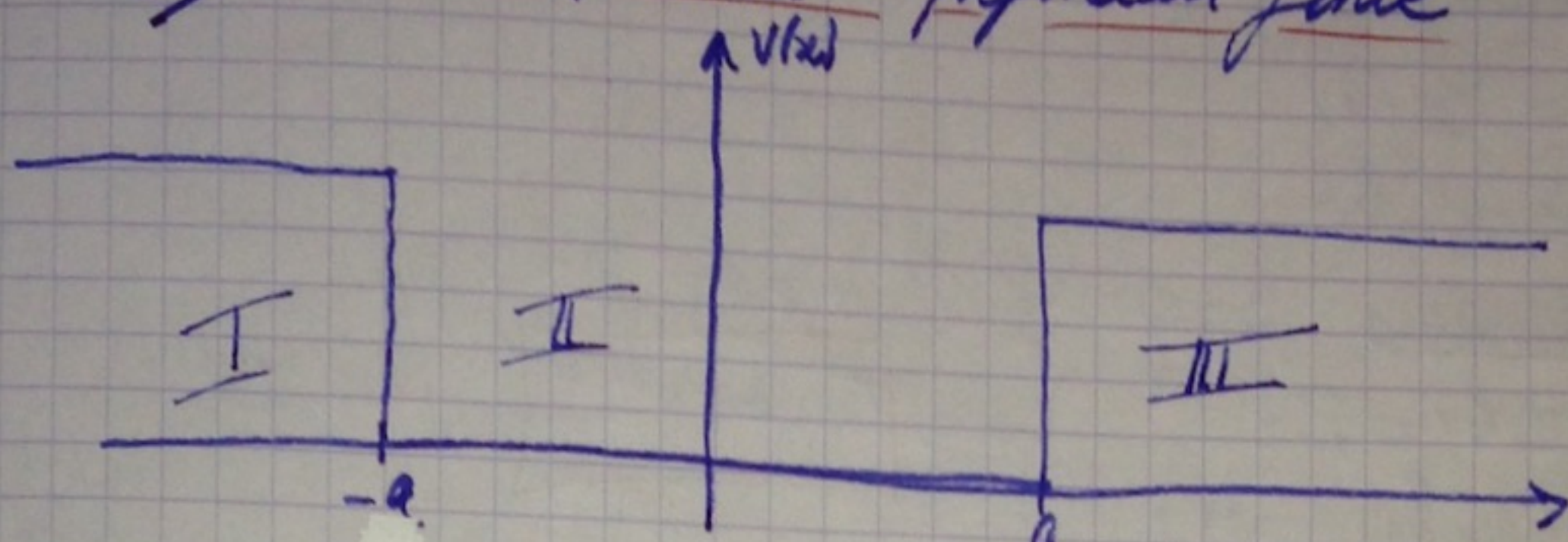
Donc $\Delta P_x = \sqrt{\langle P_x^2 \rangle}$

De plus $\Delta x \leq a$

$$\Delta P_x \geq \frac{\hbar}{2a}$$

$$E_{c, \min} = \frac{\langle P_x^2 \rangle_{\min}}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{8m a^2}$$

2-) Puits de potentiel de profondeur finie



On s'intéresse aux états stationnaires ie états propres du hamiltonien.

$$\Psi''(x) + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \Psi(x) = 0 \quad \text{pour une énergie donnée}$$

$$\text{I: } \Psi_I'' - \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \Psi_I = 0$$

$$q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

$$\text{II: } \Psi_{II}'' + \frac{2m}{\hbar^2} E \Psi_{II} = 0$$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\text{III: } \Psi_{III}'' - \frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E) \Psi_{III} = 0$$

Solutions

$$\Psi_I = C \exp(qx) + K_I \exp(-qx)$$

$$\Psi_{II} = A \cos kx + B \sin kx$$

$$\Psi_{III} = K_{III} \exp(qx) + D \exp(-qx)$$

$$\langle x | \hat{\Pi} | \Psi \rangle = \bar{\Psi}(x) = \Psi(-x)$$

$$\hat{\Pi} | \Psi \rangle = | \bar{\Psi} \rangle$$

$$\langle x | \bar{\Psi} \rangle = \Psi(-x)$$

} $\hat{\Pi}$: opérateur parité.

Le hamiltonien commute avec $\hat{\Pi}$.

$$\hat{H} \hat{\Pi} = \hat{\Pi} \hat{H}$$

• Donc c'est possible de trouver une base de vecteurs propres de \hat{H} qui soit aussi une base de fonctions propres de $\hat{\Pi}$

• De plus Les valeurs propres de $\hat{\Pi}$ sont ± 1 car $\hat{\Pi}^2 | \Psi \rangle = | \Psi \rangle$

$$\text{Donc } \bar{\Psi}(x) = \pm \Psi(x)$$

Donc la base des fonctions propres est une base de f° paires ou impaires

⚠ Ce ne veut pas dire que les solutions sont soit paires soit impaires

• Conditions de raccordement en $x=a$

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$$

$$\psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a)$$

Pour les fonctions paires $B=0$ $\psi_{II}(x) = A \cos kx$ $\psi_{III}(x) = D e^{-qa}$

$$\left. \begin{aligned} A \cos ka &= D e^{-qa} \\ -kA \sin ka &= -q D e^{-qa} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\tan ka = \frac{q}{k}} \quad \text{pair } \textcircled{1}$$

Pour les fonctions impaires $A=0$ $\psi_{II}(x) = B \sin kx$ $\psi_{III}(x) = D e^{-qa}$

$$\left. \begin{aligned} B \sin ka &= D e^{-qa} \\ kB \cos ka &= -q D e^{-qa} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{\tan ka = -\frac{q}{k}} \quad \text{impair } \textcircled{2}$$

Conditions de quantification des états stationnaires.

Pourquoi les niveaux d'énergie sont quantifiés?

car il n'y a pas des solutions pour toutes les valeurs de E

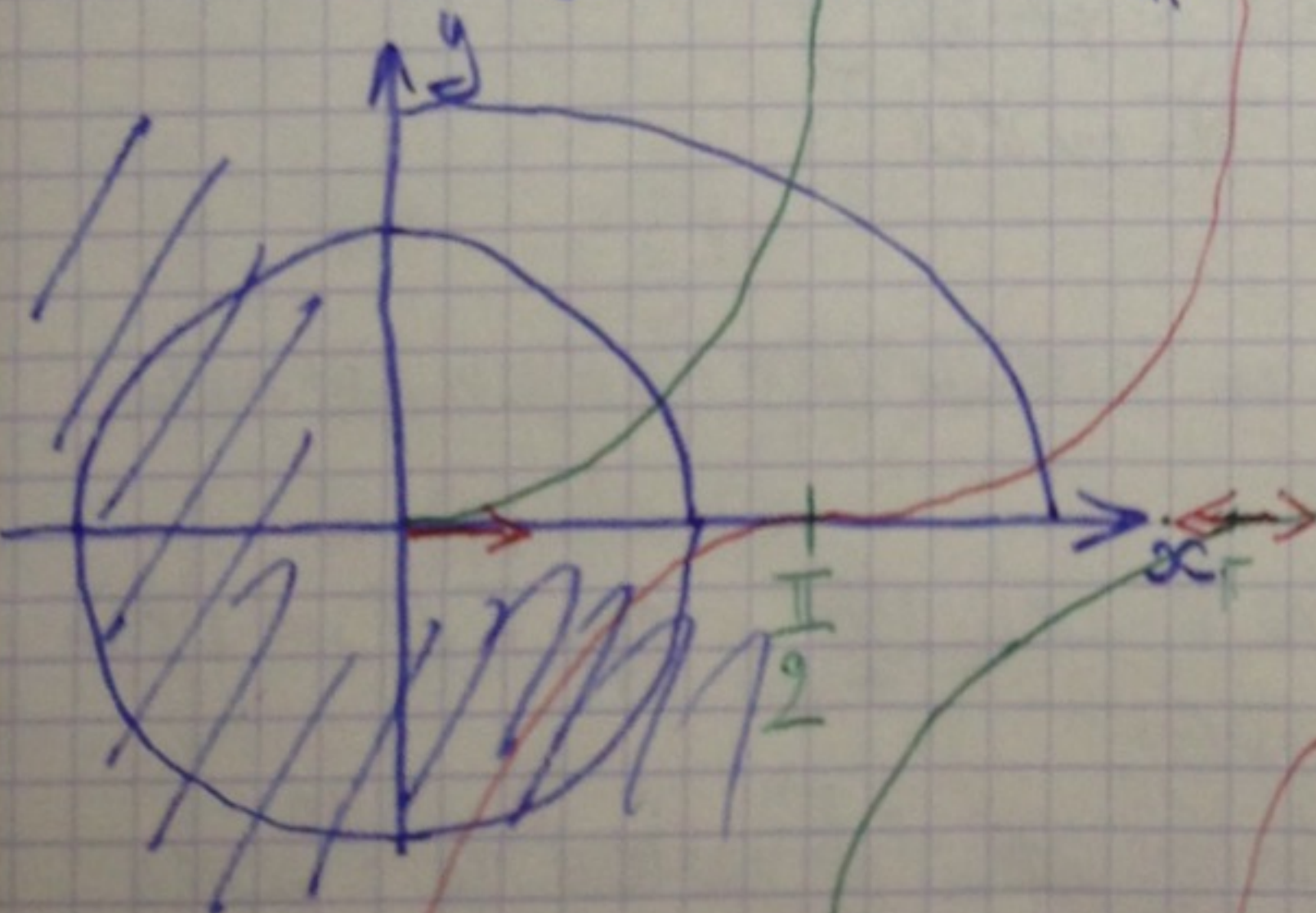
En effet il y a 4 membres complexes à trouver et 5 contraintes

→ 2 contraintes en $x=a$
 → 2 normalisation $x=-a$

Résolvons graphiquement les équations $\textcircled{1}$ et $\textcircled{2}$

On pose $y = qa > 0$ et $x = ka > 0$

$$x^2 + y^2 = a^2 (q^2 + k^2) = \frac{2m}{\hbar^2} V_0 a^2 = R^2$$



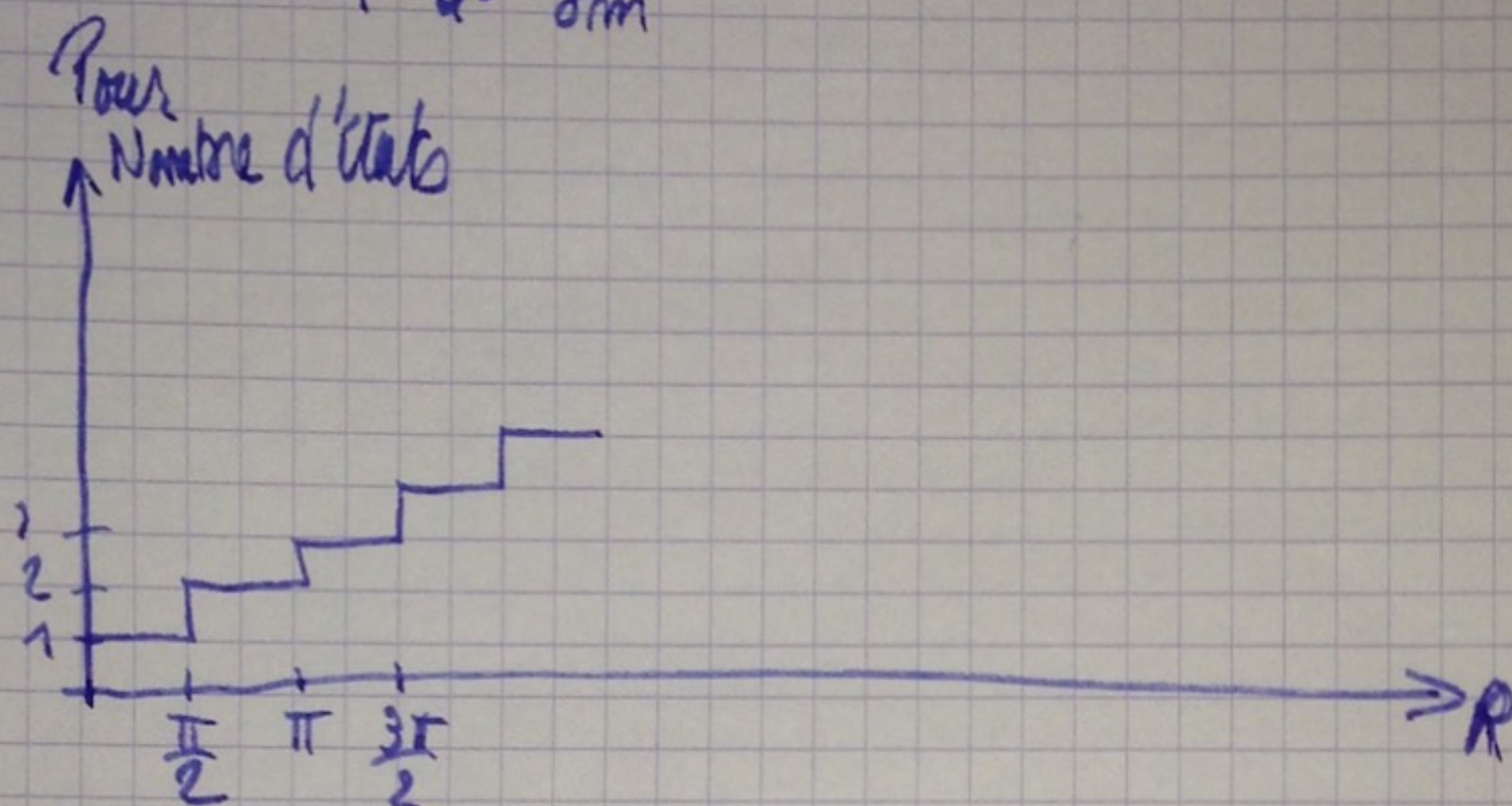
$\textcircled{1} y = x \tan x$ pair
 $\textcircled{2} y = -x \cot x$ impair

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = -\tan(x + \frac{\pi}{2})$
 $-x \cot x = +x \tan(x + \frac{\pi}{2})$
 décalage de $\frac{\pi}{2}$

si $R < \frac{\pi}{2} \rightarrow 1 \text{ solution}$

$$R = \sqrt{2m V_0} \frac{a}{\hbar} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 1 \text{ seule paire}$$

$$V_0 < \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2}$$

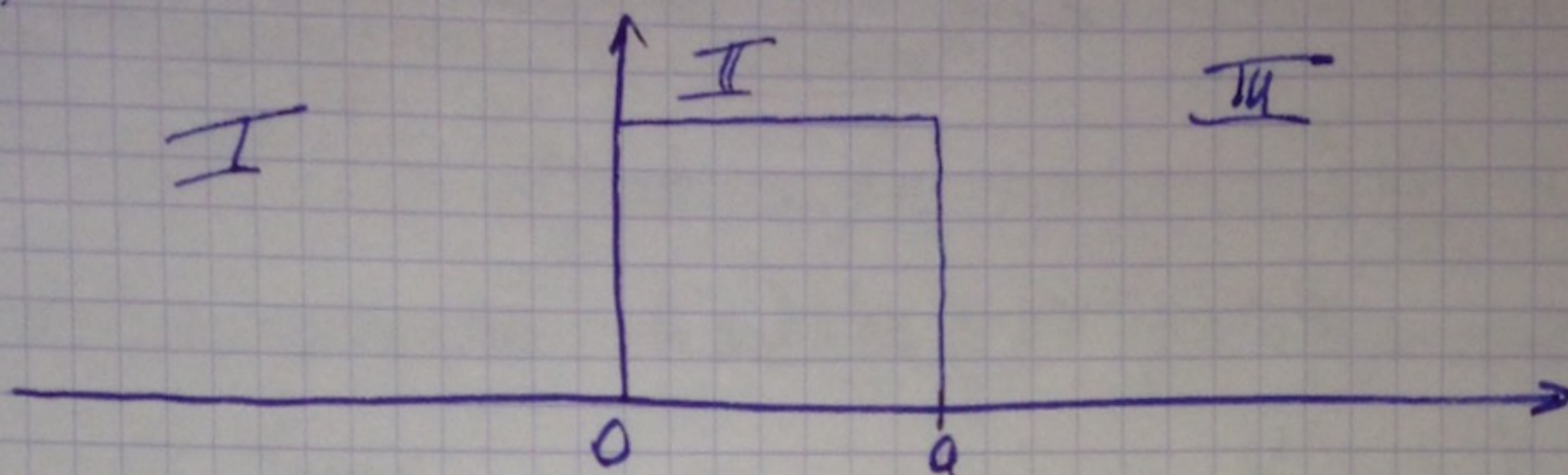


$$N \approx \frac{R}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi \hbar} \sqrt{2m V_0}$$

Résumé :

- Une base des solutions est constitué de $2N$ paires et impaires
- Les conditions aux limites entraînent une quantification de l'énergie
- En fonction de V_0 et a on a un rayon $R = \frac{\sqrt{2m V_0} a}{\hbar}$ et on retrouve les niveaux d'énergie E possible en regardant l'axe des abscisses $\alpha_3 = k a = a \sqrt{\frac{2m E}{\hbar^2}}$

E/pot tunnel:



• $0 < E < a$

• On s'intéresse aux états stationnaires / états propres du hamiltonien, état d'énergie bien défini

• Également : $\vec{F} = -\text{grad } V$

• Résolvons l'équation de Schrödinger et qui a une solution partout.

$$\Psi(x,t) = \Psi(x) e^{-iEt/\hbar}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{E - V(x)}{\hbar^2} \Psi(x) = 0$$

(I) $\Psi(x) = A \exp(ikx) + B \exp(-ikx)$

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

(II) $\Psi(x) = C \exp(qx) + D \exp(-qx)$

$$q = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

(III) $\Psi(x) = F \exp(ikx)$

$$\begin{aligned} \Psi(0) &= \Psi(0) \\ \Psi'(0) &= \Psi'(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(a) &= \Psi(a) \\ \Psi'(a) &= \Psi'(a) \end{aligned}$$

6 inconnues

4 équations de continuité } 5 contraintes
1 équation de normalisation

variables = 1

on peut choisir $G=0$
physiquement pas de flux
de particule qui vont de l'autre

- incidence
 - réflexion
 - dans la barrière ??
 - partie transmise
- A
B
C, D
F

$$T = |t|^2 = \left(\frac{F}{A}\right)^2$$

← coefficient de transmission en énergie ou en flux
de particules $\vec{J} = \rho \vec{v}$

$$\frac{1}{\psi} \vec{v} \rightarrow \frac{\vec{p}}{m} = \frac{\hbar \vec{k}}{m}$$

$$R = \left(\frac{|B|}{|A|}\right)^2$$

$$j_i = \rho_0 \vec{v} = \frac{|\psi|^2 \hbar k}{m} = \frac{|A|^2 \hbar k}{m}$$

$$j_r = -\frac{|B|^2 \hbar k}{m}$$

$$j_t = +\frac{|C|^2 \hbar k}{m}$$

Donc $R = \frac{|j_r|}{|j_i|} = \frac{|B|^2}{|A|^2}$

$T = \frac{|C|^2}{|A|^2}$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{J} = 0$$

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4E(V_0 - E)} \sinh^2(qa)} = \frac{1}{1 + A \sinh^2\left(\frac{qa}{\delta}\right)} \quad a \gg \delta$$

$$R = 1 - T$$

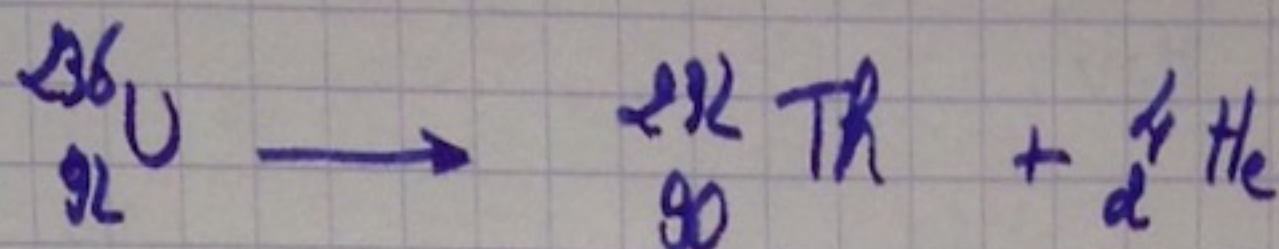
$$T = \frac{1}{\frac{1 + A \exp\left(+\frac{2a}{\delta}\right) - A \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right)}{2}} \approx \frac{1}{1 + \frac{A \exp\left(\frac{2a}{\delta}\right)}{1 - \frac{A \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right)}{A}}}$$

$$T = \frac{8E(V_0 - E) \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right)}{V_0^2}$$

$$T = f\left(\frac{E}{V_0}\right) \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right)$$

Le2 Radioactivité alpha

a-

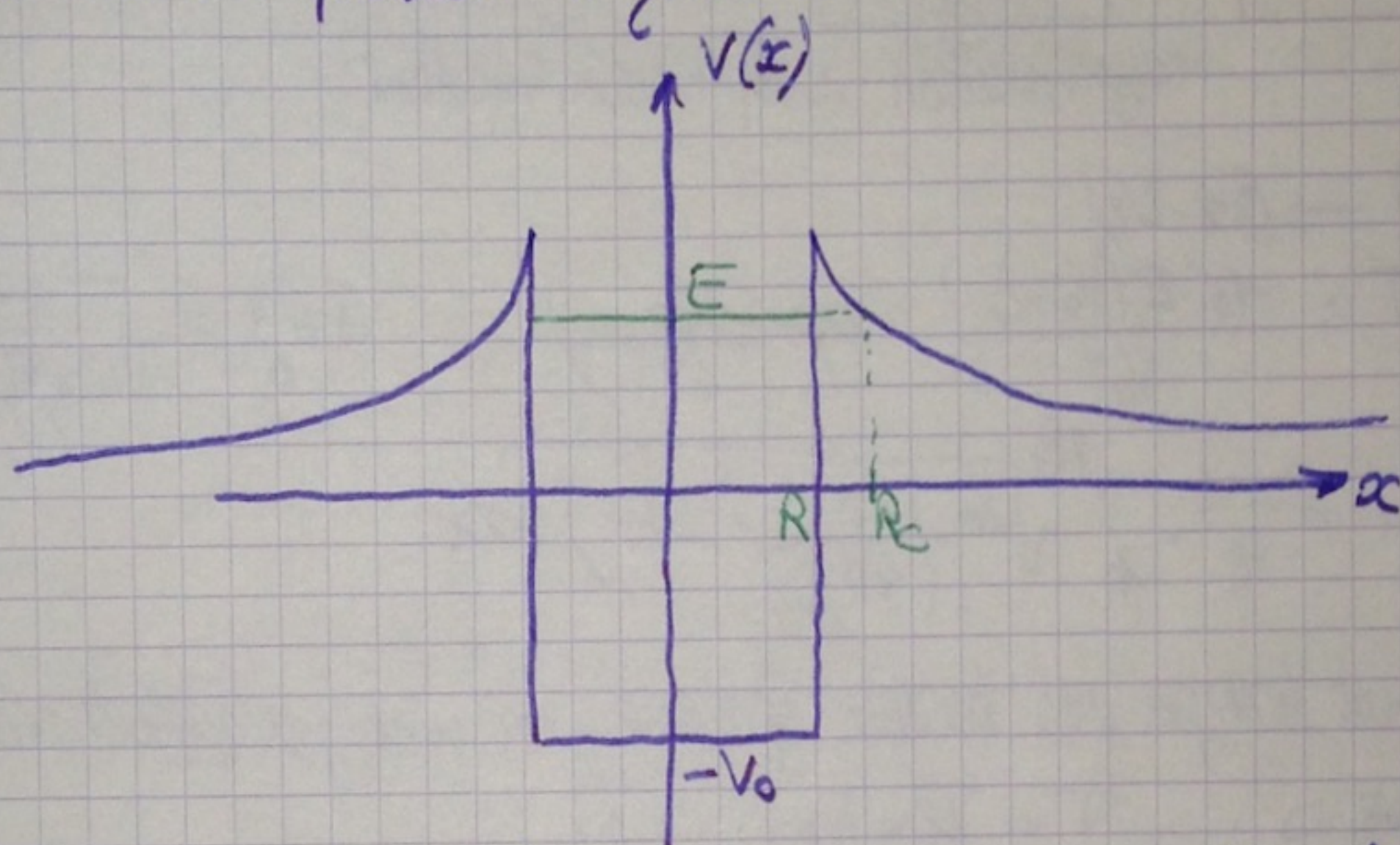


Résultats expérimentaux : $\ln T_{1/2} = A + \frac{B}{\sqrt{E}}$ (1911 Geiger, Nuttall)

b- 1928 Gamow

→ La particule alpha préexiste à l'intérieur du noyau.

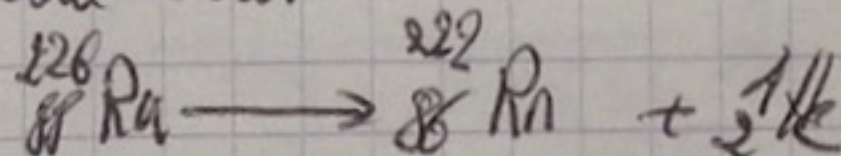
→ Modèle de potentiel de Gamow



$|x| \leq R$: intérieur forte densité se limite aux nucléons plus proches voisins qui reste à peu près le m^{ême} tout qu'on est dans le noyau

$|x| \geq R$: intérieur forte courte portée : repulsion électrostatique des Z-Z protons
 $V(+\infty) = 0$

1- Désintégration α du radium 226



$$\begin{cases} m_{\text{Ra}} = 226,0254 \text{ u} \\ m_{\text{Rn}} = 222,0175 \text{ u} \\ m_{\text{He}} = 4,0026 \text{ u} \end{cases}$$

$$1 \text{ u} = 931,5 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$\begin{aligned} \Delta M &= m_{\text{Rn}} + m_{\text{He}} - m_{\text{Ra}} = 222,0175 + 4,0026 - 226,0254 \\ &= -5,3 \cdot 10^{-3} \text{ u} \end{aligned}$$

$$\Delta E_c + \Delta m c^2 = 0 \quad \boxed{\text{Système isolé}}$$

$$\Delta E_c = -\Delta m c^2$$

$$\Delta E_c = +5,3 \cdot 10^{-3} \times 931,5 \text{ MeV}$$

$$\Delta E_c = 4,93 \text{ MeV}$$

La particule α emporte l'énergie libérée.

$$2) \quad A = -133 \quad B = 330 \quad \ln G_{1,2} = A + \frac{B}{\sqrt{E_{\alpha}} \text{ MeV}}$$

$$3) \quad \boxed{R = r_0 A^{1/3}} \rightarrow \boxed{R^3 = r_0^3 A} \quad \text{rayon nucléon : ie ddp nucléon impatant.}$$

$$4) \quad (34.20) \rightarrow (34.24)$$

$$(34.20) \quad T = \frac{16 E (V_0 - E)}{V_0^2} \exp\left(-\frac{2a}{\delta}\right)$$

$$\delta = \frac{1}{9} = \sqrt{\frac{42}{2m(V_0 - E)}} \quad (V_0 - E)$$

$$(34.24) \quad \ln T = -\frac{2}{\hbar} \int_R^{R_c} \sqrt{2m \left(\frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E \right)} dx$$

On peut découper une barrière épaisse en une juxtaposition de barrières élémentaires.

$$T = T_1 \times T_2 \times \dots \times T_N$$

$$\ln T = \ln T_1 + \ln T_2 + \dots + \ln T_N$$

$$\ln T = -\sum_{i=1}^N \frac{2a_i}{\delta} + C = -\int_R^{R_c} \frac{2dx}{\delta(x)}$$

$$\delta(x) = \frac{\hbar}{\sqrt{2m(V(x) - E)}} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \times \left(\frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E \right)^{-1/2}$$

$$\ln T = -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2m} \int_R^{R_c} \sqrt{\frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 x} - E} dx$$

$$\frac{q \cdot q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{1}{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

→ potentiel électrostatique

$$E_p = qV!$$

b) a) OG pour le radium: $A=226$
 $R = r_0 A^{1/3} = 7,3 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

b) Calcul de R_c $\rightarrow Z'=88$

$$E = \frac{2Z'e^2}{4\pi\epsilon_0 R_c}$$

$$E = 4,9 \text{ MeV}$$

$$R_c = 5,0 \cdot 10^{-14} \text{ m}$$

c) OG de T pour une barrière de hauteur E et de profondeur $R_c - R$

$$T \approx 3 \exp\left(-2 \frac{(R_c - R)}{\delta}\right) = 2,2 \cdot 10^{-36}$$

d) τ_0 durée pour traverser le noyau

$$\tau_0 = \frac{2R}{v_0} = \frac{2R}{\sqrt{\frac{2E}{m}}} = 9,5 \cdot 10^{-22} \text{ s}$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{T} = 4,2 \times 10^{14} \text{ s}$$

e) $N(t+dt) = N(t) - \frac{N(t)}{\tau} dt$

$$\tau_{1/2} = \tau \ln 2 = \frac{\tau_0}{T} \ln 2$$

$$\ln \tau_{1/2} = C - \ln T \quad \text{avec } C = \ln \tau_0 + \ln \ln 2$$

$$\ln \tau_{1/2} = C + \frac{\pi Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{2m}{E}} + \frac{2R \sqrt{2m E}}{\hbar}$$