

LP25 : Oscillateurs portrait de phases et non linéarité

Nicolas Chastrette

March 2020

Pour nous

Rapport du jury

2017 : Les définitions d'un oscillateur et d'un portrait de phase sont attendues. La leçon doit présenter des systèmes comportant des non-linéarités.

2015 : L'intérêt de l'utilisation des portraits de phase doit ressortir de la leçon.

2013 : [À propos du nouveau titre] Les aspects non-linéaires doivent être abordés dans cette leçon sans développement calculatoire excessif, en utilisant judicieusement la notion de portrait de phase. Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.

Jusqu'en 2013, le titre était : *Exemples d'effets de non linéarité sur le comportement d'un oscillateur*.

2011, 2012 : Une simulation numérique bien présentée peut enrichir cette leçon.

2010 : L'analyse de l'anharmonicité des oscillations du pendule pesant ne constitue pas le coeur de la leçon. Différents effets des non linéarités doivent être présentés.

2007, 2008 : Le régime forcé des oscillateurs non linéaires est également envisageable.

2003 : La leçon ne doit pas se limiter à une résolution d'équations différentielles non linéaires. Une discussion des effets en liaison avec la forme de l'énergie potentielle peut être intéressante. La présentation d'un oscillateur de van der Pol précablé sur une plaquette reste trop souvent théorique. En quoi ce système est-il représentatif de problèmes usuels en électronique?

Jusqu'en 2002, le titre était : *Exemples d'effets de non linéarité sur le comportement d'un oscillateur*.

2000 : Celle leçon est parfois présentée de façon très abstraite. Par ailleurs on doit s'efforcer de varier les exemples, en tout cas de ne pas les limiter exclusivement à l'électronique.

1999 : La simple étude de la non-linéarité du pendule simple et du vase de Tantale ne peut suffire. Il faut dégager clairement, sur différents exemples, l'impact des non-linéarités sur (selon les cas) la période, l'amplitude des oscillations, voire la forme du signal, sa valeur moyenne.

1997 : Le jury regrette que certains candidats passent beaucoup de temps à traiter de

l'effet relativement banal de certaines non-linéarités, comme l'influence de l'amplitude du mouvement sur la période d'oscillation d'un pendule, sans évoquer les phénomènes, beaucoup plus riches, d'instabilités ou de transition vers le chaos.

biblio

- Mathieu et Hugo
- BUP dans le dossier
- De l'ordre dans le chaos, Berger et al.

1 Introduction

1.1 prerequisites

- mécanique

1.2 Intro

En physique les systèmes non linéaires sont très présents et les effets linéaires sont plutôt l'exception. Cependant c'est eux que l'on sait facilement résoudre. Dans cette leçon nous allons étudier quelques aspects des non linéarités, en particulier les comportements des oscillateurs. Or dès que nous sommes confronté à un oscillateur nous sommes au voisinage d'un équilibre. On peut alors faire un développement limité autour de la position d'équilibre stable du potentiel :

$$E_p(\theta) = E_p(\theta_{eq}) + \underbrace{\frac{dE_p}{d\theta} \Big|_{\theta_{eq}} (\theta - \theta_{eq})}_{=0} + \underbrace{\frac{d^2E_p}{d\theta^2} \Big|_{\theta_{eq}} (\theta - \theta_{eq})^2}_{\text{type harmonique}} + \underbrace{\frac{d^3E_p}{d\theta^3} \Big|_{\theta_{eq}} (\theta - \theta_{eq})^3}_{\text{ordre 3}} + \underbrace{\frac{d^4E_p}{d\theta^4} \Big|_{\theta_{eq}} (\theta - \theta_{eq})^4}_{\text{ordre 4}} + \dots \quad (1)$$

Le terme deux correspond au potentiel harmonique bien connu. Les termes d'ordres supérieurs donnent des comportements que l'on va étudier dans la leçon. On va montrer dans une première partie les effets des ordres 3 et 4 puis montrer un effet des non linéarités sur le comportement d'un oscillateur. Avant cela commençons par quelques définitions.

- **oscillateur** : Un système physique donc une grandeur physique varie de part et d'autre d'une position d'équilibre.
- **Espace de phase** : espace dont les axes sont les coordonnées de position et de vitesse.
- **trajectoire des phases** : toute courbes de l'espace des phases qui est représentative de l'évolution du système
- **portrait de phase** : l'ensemble des trajectoires de phase

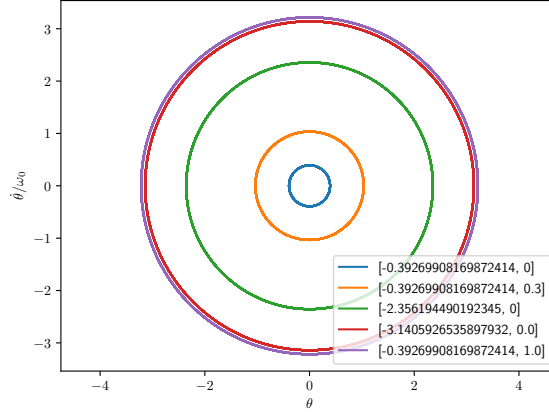


Figure 1: Résolution numérique de l'oscillateur harmonique pour différentes conditions initiales.

2 Oscillations libre

2.1 rappel de l'oscillateur harmonique

Dans le cas où l'on développe le potentiel à l'ordre 2, on se retrouve alors dans le cas d'un potentiel harmonique. Dans un cas conservatif, l'énergie mécanique est conservée et sa dérivée s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 \quad (2)$$

que l'on reconnaît comme une équation d'un oscillateur harmonique donc que l'on sait résoudre. $\theta(t) = \theta_0 * \cos(\omega_0 t)$ et $\dot{\theta} = -\theta_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t)$ D'où l'équation de la trajectoire est

$$\theta^2 + \left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 = \theta_0^2 \quad (3)$$

Que l'on reconnaît comme étant un cercle dans le repère $(\theta, \dot{\theta}/\omega_0)$ On trouve donc comme période des oscillations

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

On peut à l'aide d'un intégrateur numérique résoudre l'équation ?? que l'on représente sur la figure ?. On trouve que les trajectoires sont circulaires. Elles tournent dans le sens des aiguilles d'une montre car dans le cas où $\dot{\theta} > 0 \rightarrow \theta \nearrow$. Les trajectoires sont fermées ce qui montre que le mouvement est périodique.

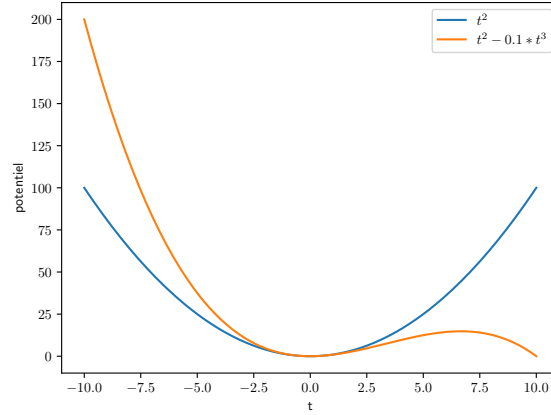


Figure 2: tata

2.2 effets de l'ordre 3

A lire dans le Landau ou dans le Qüéré (physique des solides dès que la bu ouvre). Considérons une bille dans les potentiels de la figure ?? . Si on lâche la bille sur le potentiel harmonique en $x=5$, en $x=0$ elle aura sa vitesse max, elle remontera en $x=-5$ et redescendra. elle restera aussi longtemps dans chaque moitié du potentiel. Si on lâche une bille dans le potentiel avec un terme d'ordre 3, elle subira une force plus faible dans la partie en $x > 0$ que dans la partie en $x < 0$, elle passera donc plus de temps dans la partie positive du potentiel. Donc plus $\theta_0 \nearrow$ plus $\langle \theta \rangle \nearrow$. C'est la dilatation des solides.

2.3 effets de l'ordre 4

$$E_p = E_p(\theta_{eq}) + \left. \frac{d^4 E_p}{d\theta^4} \right|_{\theta_{eq}} (\theta - \theta_{eq})^4 =$$

(on considère que l'ordre 3 est nul pour que l'ordre suivant est de l'importance).

2.3.1 portrait de phase

L'énergie mécanique s'écrit donc

$$E_m = E_c + E_p(\theta_{eq}) + \left. \frac{d^4 E_p}{d\theta^4} \right|_{\theta_{eq}} (\theta - \theta_{eq})^4$$

. l'énergie mécanique étant conservé :

$$\ddot{\theta} + \omega_0 (\theta + c\theta^3) = 0 \quad (4)$$

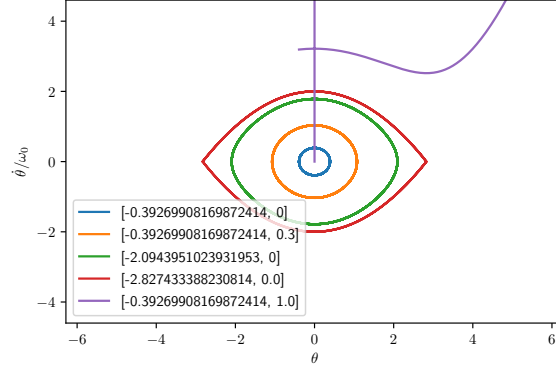


Figure 3: Portrait de phase de l'oscillateur de Duffing

Cette équation est un oscillateur de Duffing. On peut à l'aide d'un intégrateur trace le portrait de phase de l'oscillateur de duffing de l'on représente sur la figure ???. Sur ce portrait de phase les courbes représente des isoénergie car le système est conservatif. On remarque deux types de comportement : des courbes fermées ce qui veut dire que l'oscillateur à un comportement oscillant et des courbes ouvertes (en violet) où le pendule tourne autour de l'axe. La courbe limite entre ces deux comportement en rouge ici est appelée séparatrice. on remarque sur ce graphique que les courbes de faibles déformation sont des cercles correspondant au cas où les NL sont négligeables. Lorsque les NL ont importantes, les courbent sont elliptiques (verte).

2.3.2 Nouvel harmonique

Nous cherchons à résoudre l'équation du mouvement de l'oscillateur de Duffing. Un simple développement perturbatif ne peut pas converger vers le mouvement du pendule car le forçage de l'ordre 3 du développement est à la fréquence de résonance de l'oscillateur. (cours de Christophe Coste). Il faut donc utiliser une technique plus évoluée : la technique de Poincaré-Lindsted. Elle consiste à faire un développement à l'ordre 3 de $\theta = \epsilon\theta_1 + \epsilon^3\theta_3$ et de $\omega = \omega_0 + \epsilon^2\omega_2$ (les termes paires (et impaires) de θ (ω) sont nuls car potentiel pair. On fait le changement de variable $\tau = \omega t$. On trouve en développant à l'ordre 3 en ϵ et en remplaçant dans l'équation 4

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} = \epsilon \left(\omega_0^2 \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} \right) + \epsilon^3 \left(\omega_0 \frac{d^2\theta_3}{d\tau^2} + \omega_0 \omega_2 \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} \right) = -\omega_0 [\epsilon\theta_1 + \epsilon^3 (\theta_3 + c\theta^3)] \quad (5)$$

ordre en ϵ^1 Le terme en ϵ^1 donne l'équation (sans surprise) l'équation de l'oscillateur harmonique d'où

$$\theta_1 = \theta_0 \cos(\tau)$$

(les CI sont $\theta_1 = \theta_0, \theta_3 = 0, \dot{\theta}_i = 0$)

ordre en ϵ^3 L'égalisation des termes en ϵ^3 donne

$$\frac{d^2\theta_3}{d\tau^2} + \theta_3 = -2\frac{\omega_2}{\omega_0} \frac{d^2\theta_1}{d\tau^2} - c\theta_1^3$$

En réinjectant la forme de θ_1 trouve au dessus, on à $(\cos x)^3 = \frac{\cos(3x) + 3\cos(x)}{4}$

$$\frac{d^2\theta_3}{d\tau^2} + \theta_3 = \left(2\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{3c}{4}\right) \cos \tau - \frac{c}{4} \cos(3\tau) \quad (6)$$

Pour exciter l'oscillateur hors de sa fréquence de résonance on doit forcément avoir le terme devant $\cos \tau$ nul de sorte que $\omega_2 = \frac{3c}{4}\omega_0$. On trouve ici encore qu'un effet des non linéarités est la création d'harmonique. Le mouvement du pendule est donc

$$\theta = \epsilon\theta_0 \cos\left(\omega_0\left(1 + \frac{3c\epsilon^2}{8}\right)t\right) + \frac{\epsilon^2 c}{32} [\cos(\omega_0 t) - \cos(3\omega_0 t)]$$

On trouve alors que la période des oscillations

$$T = T_0 \left(1 - \frac{3c\epsilon^2}{4}\right)$$

On remarque que la période d'oscillation dépend de l'amplitude de l'oscillateur.

On peut expliquer l'effet de variation de la fréquence d'oscillation à l'aide de la figure 4, considérons une bille dans les potentiels représentés sur la figure dans le cas du potentiel harmonique la force est indépendante de la position de la bille. Par contre dans le cas du potentiel d'un pendule $1 - \cos(t)$, la force s'exerce sur la bille dépend de la position. Elle est plus importante proche de $t = 0$ puis diminue lorsque la bille s'éloigne du minimum du potentiel, la période d'oscillation est donc dépendante de l'amplitude de déplacement.

2.3.3 Application au pendule

Un exemple d'oscillateur de duffing est le pendule simple. qui est un des oscillateurs le plus étudié historiquement (il a servi pour mesurer le temps avec les horloges à balancier). Un pendule simple peut être modélisé par une masse m suspendu au bout d'un fil inextensible de longueur ℓ . Le fil est relié à un axe ne travaillant pas de manière à ce qu'il soit libre d'osciller. On note θ l'angle qu'il fait avec la verticale.

L'énergie mécanique de la masse s'écrit donc comme $E = E_c + E_p$ ou

$$E_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2$$

et

$$E_p = mg\ell (1 - \cos\theta)$$

On peut alors faire un développement limité à l'ordre 4 de l'énergie potentiel

$$E_p = \frac{mg\ell}{2} \theta^2 - \frac{mg\ell}{24} \theta^4$$

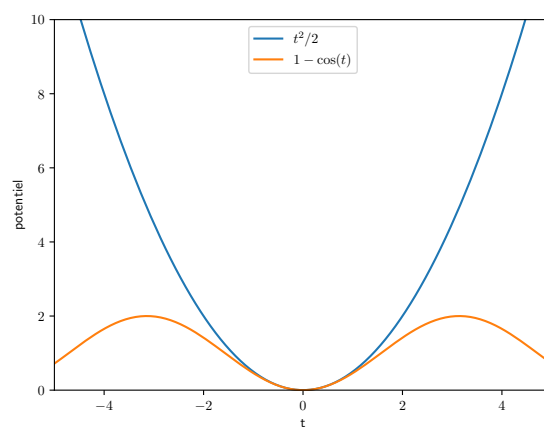


Figure 4: représentation du potentiel d'un pendule simple et d'un potentiel harmonique en fonction de la position

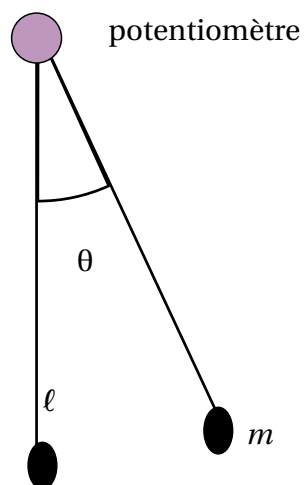


Figure 5: Schéma du pendule. L'axe est composé d'un potentiomètre, la longueur de la tige est ℓ et la masse m

Donc l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta \left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right) = 0 \quad (7)$$

On se retrouve l'équation 4 avec $c = -\frac{1}{6}$. La période d'oscillation devient donc

$$T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (8)$$

qui est la formule de Borda. Avec le résonnement du bup 891 on montre que $\epsilon = \frac{\theta_0^2}{192}$. Je vous propose de regarder la création d'harmonique 3 expérimentalement. bup867.

Un autre exemple des non linéarités des systèmes physiques est l'existence de bifurcations

3 Bifurcation

Une bifurcation est définie comme un changement de comportement au-delà d'une valeur d'un paramètre de contrôle. Un exemple de bifurcation est la bifurcation de Hopf. Appelons ϵ le paramètre de contrôle. Au-delà du seuil l'amplitude du cycle est proportionnelle à la racine carrée de l'écart au point de bifurcation ($\sqrt{\epsilon - \epsilon_c}$) et la période des oscillations est indépendante de cet écart (au 2^d ordre). Sur la figure 6 on représente un exemple de bifurcation de Hopf. Un exemple de système présentant une bifurcation de Hopf est l'oscillateur de Van der Pol. Il existe dans la nature des exemples d'oscillateurs auto-entretenus (cité dans l'intro), cependant les équations type oscillateurs amortis comme la formule ??, ne peuvent exister dans la nature. Si le signe de l'amortissement est positif le système s'amortit et donc il n'y a pas d'oscillation si le signe de l'amortissement est négatif, les oscillations croissent vers l'infini engendrant une énergie de l'oscillateur tendant vers l'infini (ce qui serait bien pratique mais pas physique). De plus l'équation ?? est une équation linéaire donc si $\theta(t)$ est solution alors $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \theta(t)$ est solution, ce qui est contradictoire avec l'existence d'amplitude déterminée (mesurée expérimentalement). Il faut donc pour modéliser de tels systèmes

- détruire l'invariance par translation.
- limiter l'augmentation de l'énergie pour un amortissement négatif
- lorsque l'amortissement est positif, il faut un terme qui introduise de l'énergie pour compenser les pertes d'énergie.

Monsieur Van der Pol propose en 1922 une manière de résoudre ces problèmes

Il a remarqué qu'en faisant dépendre le coefficient d'amortissement de l'amplitude des oscillations. Il faut d'abord que le coefficient d'amortissement soit négatif pour de faibles amplitudes d'oscillations (de manière à ce que les oscillations croissent)

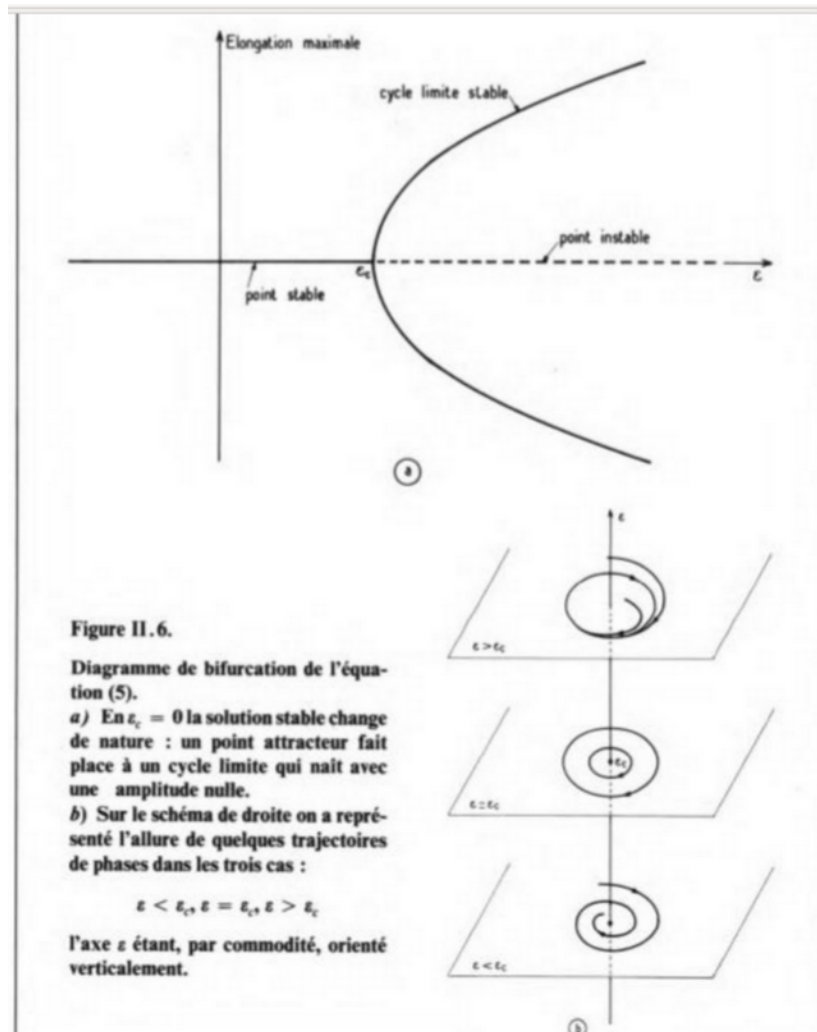


Figure 6: Tirée de *l'ordre dans le chaos*, Berger et al.

puis positive (pour que l'amplitude des oscillations reste finie). Il faut aussi que le comportement de l'oscillateur soit le même indépendamment du signe de l'amplitude de l'oscillation donc élever θ au carré dans la dépendance. Van der Pol propose donc d'écrire

$$\gamma(\theta) = -\gamma_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right)$$

, où $\gamma_0 > 0$ et θ_0 est l'amplitude de référence. En réinjectant l'expression de $\gamma(\theta)$ dans l'équation ??, on trouve l'équation de Van der Pol

$$\ddot{\theta} - \gamma_0 \left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_0^2} \right) \dot{\theta} + \omega_0 \theta = 0 \quad (9)$$

On peut adimensionner cette expression pour la mettre sous la forme

$$\frac{d^2 \tilde{\theta}}{d\tilde{t}^2} - (\epsilon - \tilde{\theta}) \frac{d\tilde{\theta}}{d\tilde{t}} + \tilde{\theta} = 0$$

où $\tilde{\theta} = \theta / \theta_0$, $\tilde{t} = t / \omega_0$ et $\epsilon = \gamma_0 / \omega_0$.

On peut alors en tracer le portrait de phase à l'aide d'un petit script que l'on représente sur la figure ??¹. On remarque que l'on trouve le comportement attendu, dans le cas où l'amplitude des oscillations diminue jusqu'à atteindre l'amplitude de contrôle (en rouge) l'amplitude d'oscillations faible augmente aussi (en bleu) jusqu'à atteindre l'amplitude de contrôle. Les deux comportements adoptent alors une même trajectoire fermée. On appelle ce comportement attracteur. En fonction de la valeur d' ϵ appelé paramètre de contrôle, la forme du cycle attracteur varie ($\epsilon \ll 1$ cercles, ϵ grand cycle attracteur tend vers un rectangle (faire varier dans le script)).

¹Une étude expérimentale est décrite dans le Krob Électronique expérimentale p 172 le circuit est compliqué mais ça peut être jouable