

# LP30: Rayonnement Dipolaire Electrique

Pierre Ghesquière

## Prérequis:

- Equations de Maxwell
- Potentiels (notion de jauge, jauge de Lorentz)
- Relation source potentiel en Jauge de Lorentz
- Flux de Puissance : Vecteur de Poynting
- Approximation des Régimes Stationnaires
- Oscillations forcées : Filtre passe bas du second ordre

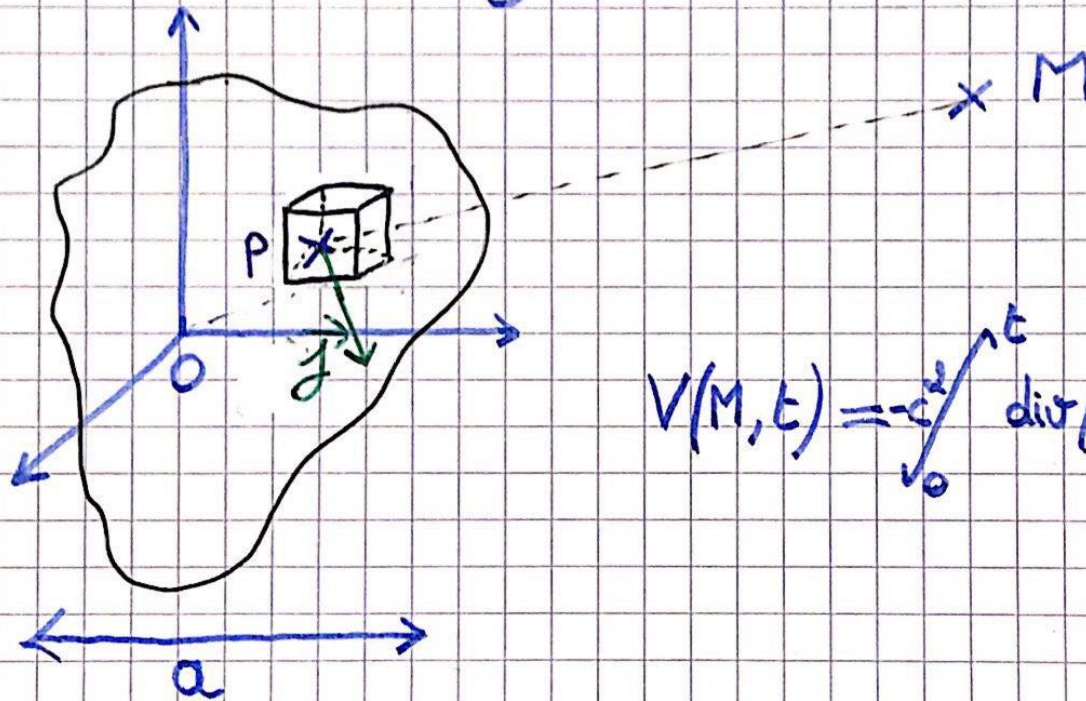
## Relation sources-potentiels en jauge de Lorentz

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Si les sources sont non relativistes ( $v \ll c$ )

$$\vec{A}(\vec{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{P}, t - \frac{PM}{c})}{PM} d^3P$$



$$V(\vec{M}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\vec{A}(\vec{M}, t)) + V(\vec{M}, 0)$$

## Calcul de $\vec{A}(M, t)$ et $\vec{V}(M, t)$

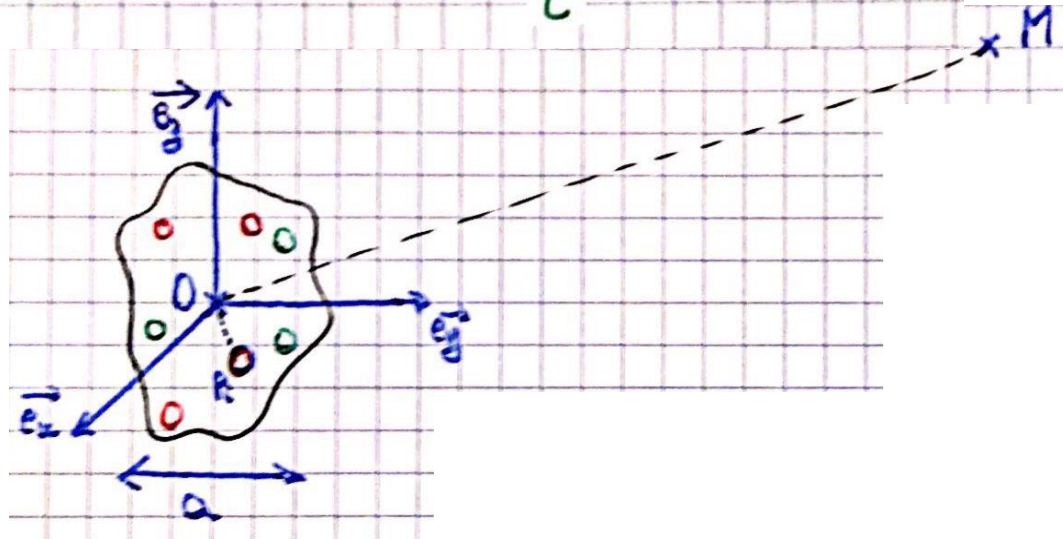
\* Deux hypothèses:

- On ne s'intéresse qu'aux champs produits à grande distance:

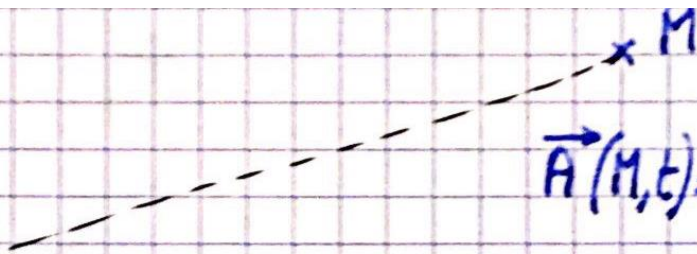
$$a \ll |\vec{OM}| \approx r$$

- On suppose négligeable le retard dû à la taille du système.

$$\frac{a}{c} \ll T \quad \text{donc} \quad \vec{J}_P(t - \frac{PM}{c}) \approx \vec{J}_P(t - \underbrace{\frac{OM}{c}}_{t'})$$







$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i \in M} \frac{q_i \vec{v}_{Fi}(t')}{R_{iM}}$$

$$\frac{1}{\mu_M} \approx \frac{1}{\mu} \left( 1 - \frac{\vec{p}_O \cdot \vec{u}_r}{\mu} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum q_i \frac{d\vec{r}_i(t')}{dt'}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \left( \sum_i q_i \vec{O}P_i(t') \right)$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{P}(t')$$

$$V(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}, 0) - \frac{1}{c^2} \int_0^t \operatorname{div}(\vec{h}(\mathbf{r}, t)) dt$$

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{P}(t)}{r^2} + \frac{\dot{\vec{P}}(t)}{rc} \right) \cdot \vec{e}_r$$

## Calcul des champs $\vec{B}(M,t)$ et $\vec{E}(M,t)$

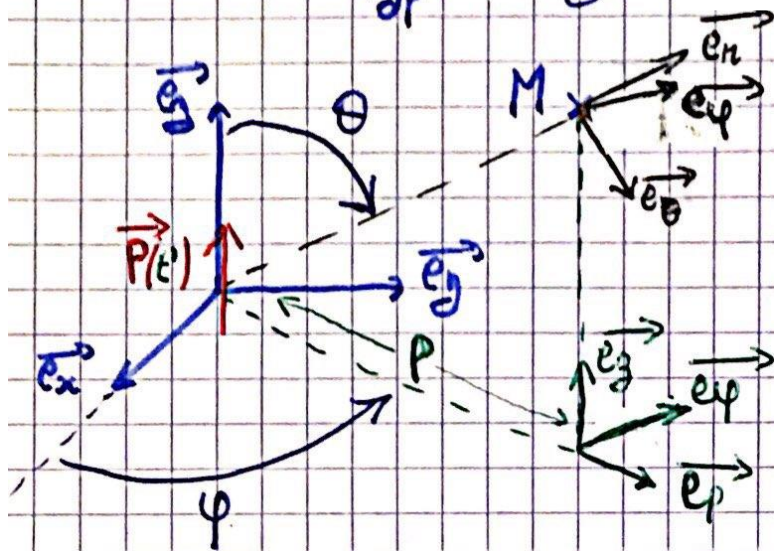
$$\vec{B}(M,t) = \text{rot} \vec{A}(M,t)$$

Hypothèse:  $\vec{P}(t') = P(t') \vec{e}_z$

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi h} \vec{P}(t') = A(r,t') \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(M,t) = \text{rot} \vec{A} = -\frac{\partial A(r,t')}{\partial r} \vec{e}_\theta$$

Coordonnées Cylindriques





## Calcul des champs $\vec{B}(M,t)$ et $\vec{E}(M,t)$

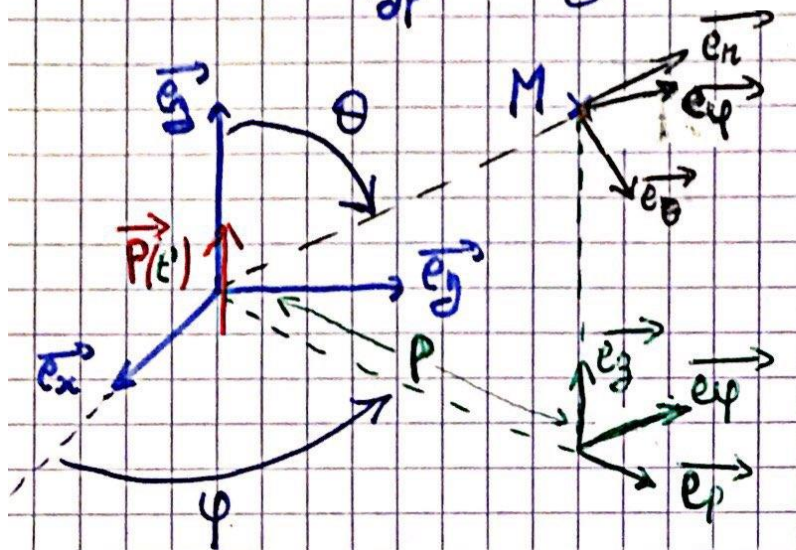
$$\vec{B}(M,t) = \text{rot} \vec{A}(M,t)$$

Hypothèse:  $\vec{P}(t') = P(t') \vec{e}_z$

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \vec{P}(t') = A(R,t') \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(M,t) = \text{rot} \vec{A} = -\frac{\partial A(R,t')}{\partial R} \vec{e}_z$$

Coordonnées Cylindriques



$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{\vec{P}}(t')}{R^2} + \frac{\ddot{\vec{P}}(t')}{cR} \right) \wedge \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(M,t) = -\text{grad}(V(M,t)) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M,t)$$

$$\vec{E}(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ 2\cos(\theta) \left( \frac{P(t')}{R^3} + \frac{\dot{P}(t')}{R^2 c} \right) + \frac{Q_{\text{tot}}}{R^2} \right] \vec{e}_r + \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{P(t')}{R^3} + \frac{\dot{P}(t')}{R^2 c} + \frac{\ddot{P}(t')}{R c^2} \right] \vec{e}_\theta$$



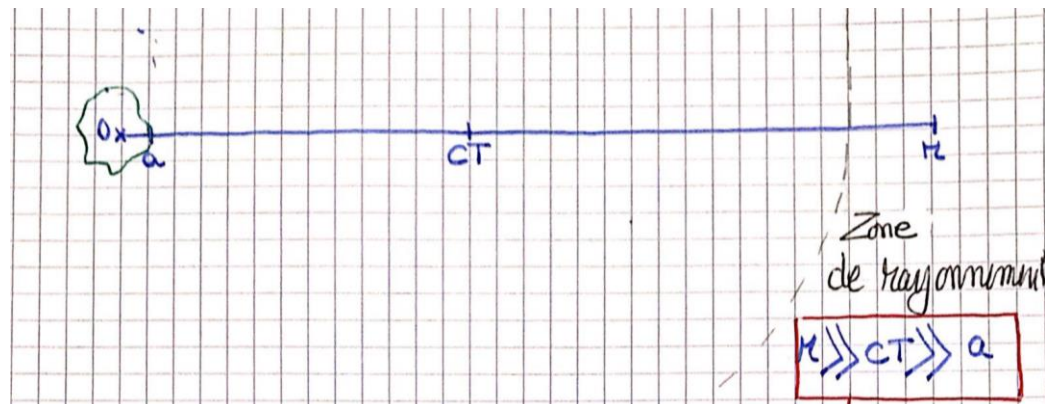
Expression des champs  $\vec{B}(r,t)$  et  $\vec{E}(r,t)$  dans la  
zone de rayonnement.



Zone  
de rayonnement

$$r \gg CT \gg a$$



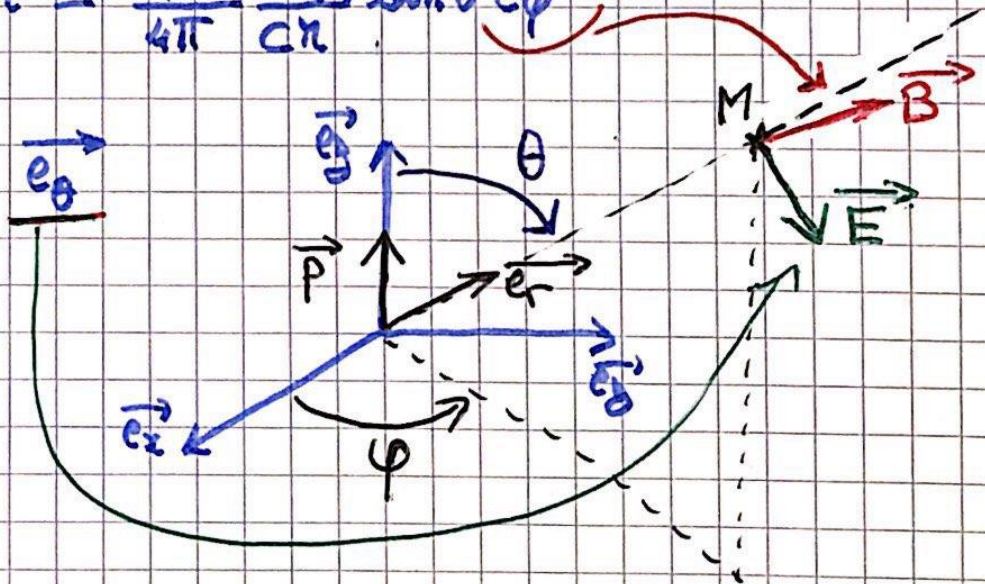


Simplifions l'expression de  $\vec{B}(M,t)$  et  $\vec{E}(M,t)$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{\vec{P}}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{\vec{P}}(t')}{c^2 r} \right) \wedge \vec{e}_r$$

$$\vec{B}(M,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\ddot{\vec{P}}(t')}{c^2 r} \right) \wedge \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{P}(t') \sin \theta}{c^2 r} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(M,t) \approx \frac{\ddot{P}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \theta \vec{e}_\theta$$

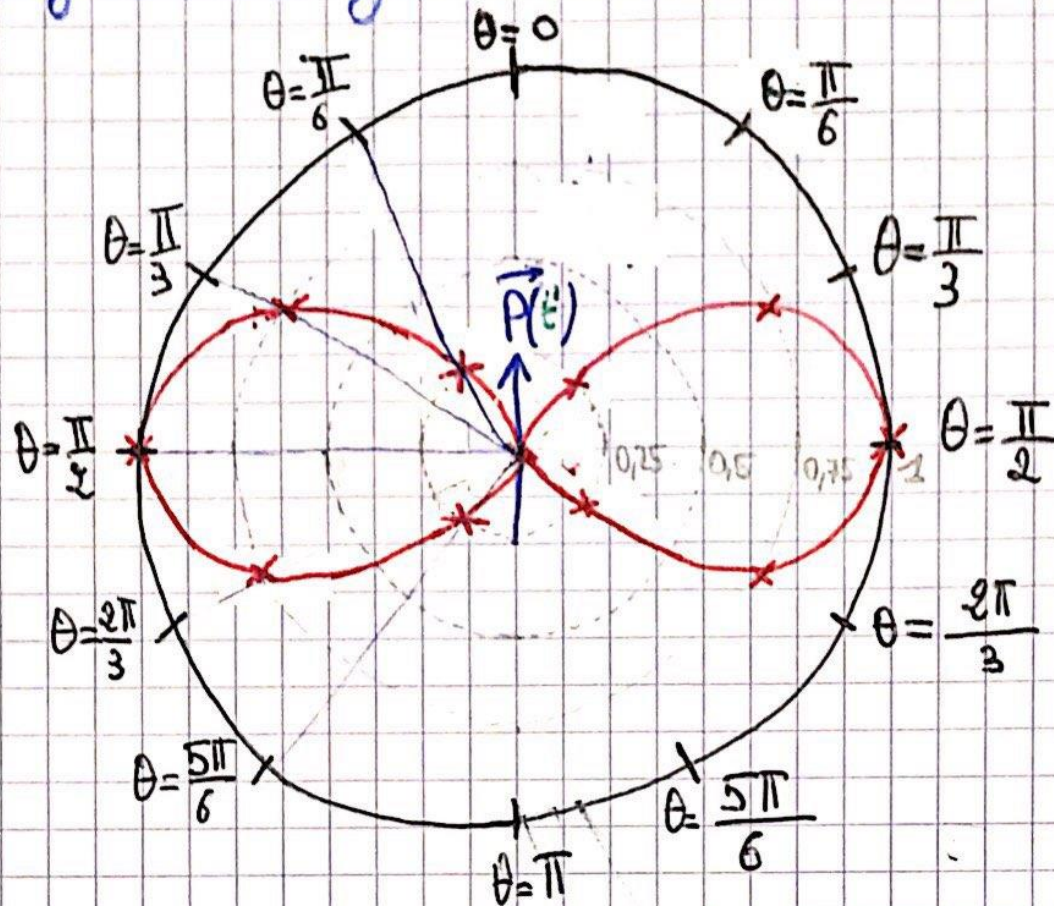




## Aspect énergétique du rayonnement.

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{\vec{P}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 \mu_0^2} \vec{e}_r$$

## Diagramme de rayonnement en puissance



A  $t_0$  et  $r_0$  fixé

$$F(\theta) = \frac{\|\vec{\Pi}(r_0, t_0, \theta)\|}{\|\vec{\Pi}_{\max}\|}$$
$$F(\theta) = \sin^2(\theta)$$



$$P_{\text{ray}}(t) = \iint_{\mathcal{V}(t)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}$$



$$P_{\text{ray}}(t) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \underbrace{\frac{\ddot{P}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 \hbar^2}}_{\vec{\Pi}(M, t)} \cdot \underbrace{\vec{e}_r \cdot \hbar^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r}_{d\vec{S}}$$

$$P_{\text{ray}}(t) = \frac{\ddot{P}^2(t')}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

si  $\vec{P}(t') = qa \cos(\omega t') \vec{e}_z$

$$P_{\text{ray}}^{(\omega)}(t) = \frac{(qa)^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4 \cos^2(\omega t')$$

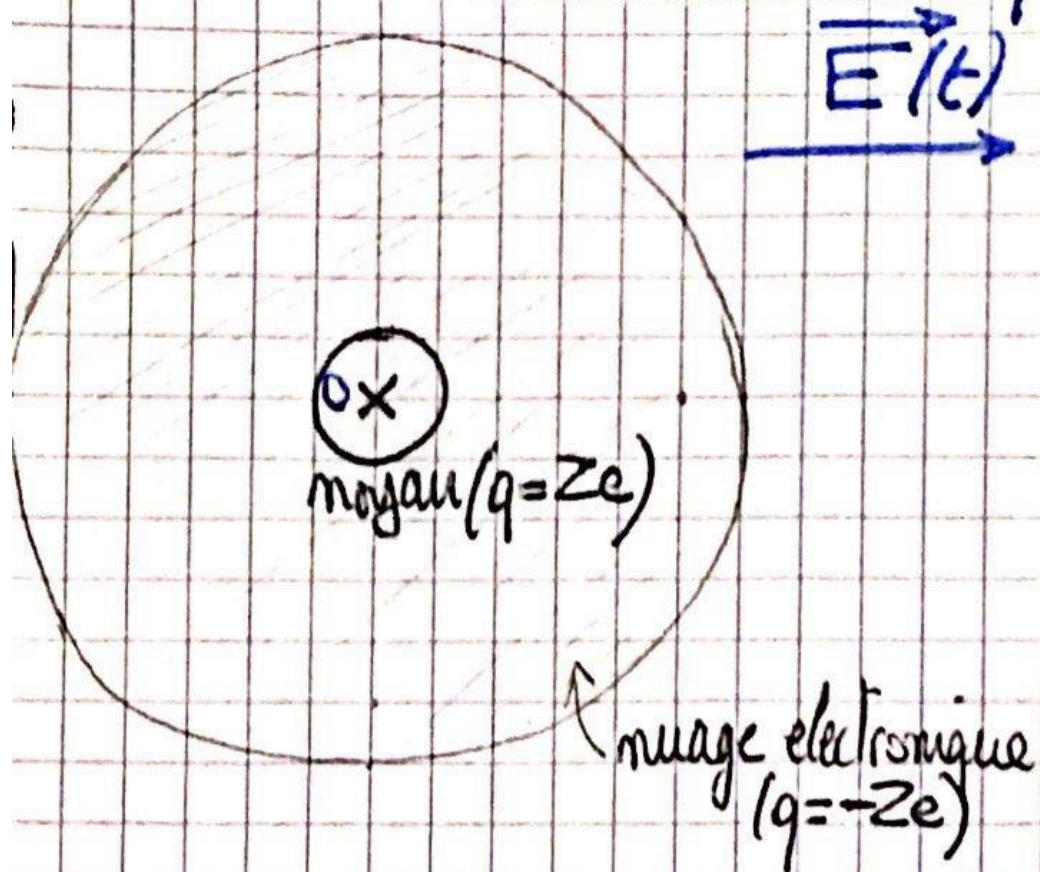
$$\langle P_{\text{ray}}^{(\omega)} \rangle = \frac{(qa)^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \omega^4$$



Hypothèse non relativiste et ARQS  
 $\frac{2a}{T} \ll c \Leftrightarrow 4\pi a \omega \ll c$



# Modèle de l'électron élastiquement lié.



- noyau fixe
- Le nuage électronique est soumis à 3 forces :

$$* \vec{F}_E = -Ze \vec{E}(t)$$

$$* \vec{F}_n = -K \vec{r} \quad \text{déplacement relatif de nuage p.r. noyau}$$

$$* \vec{F}_{dis} = -\frac{m}{\sigma} \vec{v}$$



• PFD au nuage électronique :

• Avec  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  et  $Q = \omega_0 \Gamma$  :

• En multipliant par  $-Ze$   
et  $\vec{p} = -Ze\vec{\pi}$  :

• En complexe pour une  
pulsation  $\omega$  :

$$m \frac{d^2 \vec{\pi}}{dt^2} = -K \vec{\pi} - \frac{m}{\Gamma} \frac{d\vec{\pi}}{dt} - Ze \vec{E}(t)$$

$$\frac{d^2 \vec{\pi}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{\pi}}{dt} + \omega_0^2 \vec{\pi} = \frac{-Ze}{m} \vec{E}(t)$$

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{Ze^2}{m} \vec{E}(t)$$

$$\underline{\vec{p}} = \frac{Ze^2}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + i \frac{\omega}{\omega_0 Q}} \underline{\vec{E}_\omega}$$