

LP30: Rayonnement Dipolaire Electrique

Pierre Ghesquière

Prérequis:

- Equations de Maxwell
- Potentiels (notion de jauge, jauge de Lorentz)
- Relation source potentiel en Jauge de Lorentz
- Flux de Puissance : Vecteur de Poynting
- Approximation des Régimes Stationnaires
- Oscillations forcées : Filtre passe bas du second ordre

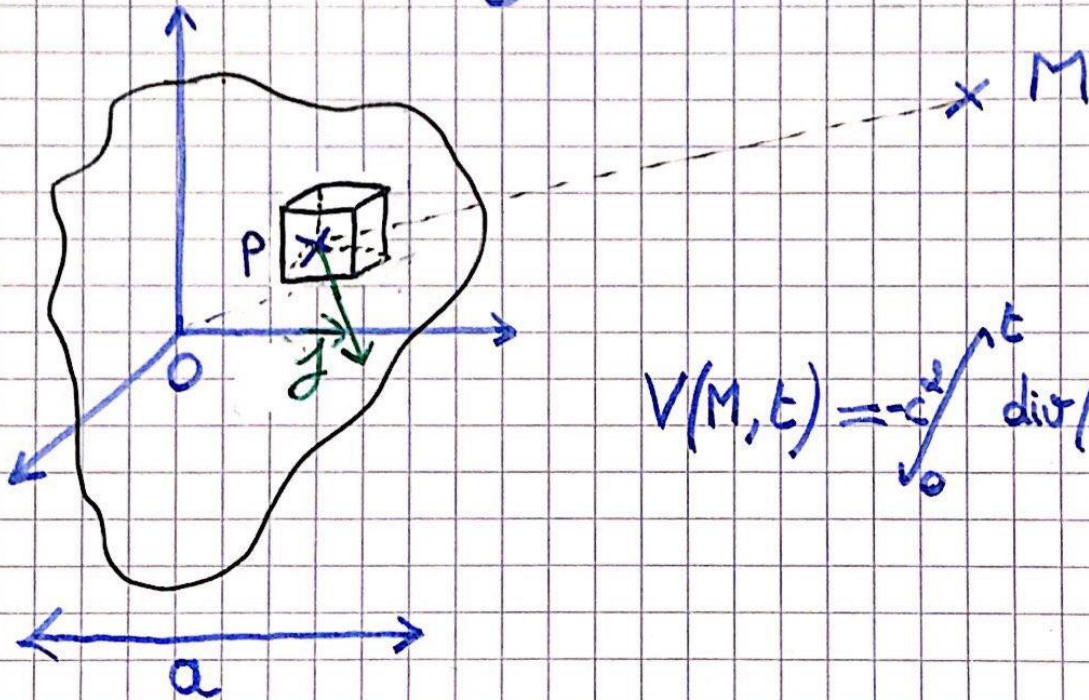
Relation sources-potentiels en jauge de Lorentz

$$\rightarrow \boxed{\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j}$$

Si les sources sont non relativistes ($v \ll c$)

$$\vec{A}(\vec{M}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{P}, t - \frac{PM}{c})}{PM} d^3P$$



$$V(\vec{M}, t) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div}(\vec{A}(\vec{M}, t)) + V(\vec{M}, 0)$$

Calcul de $\vec{A}(M, t)$ et $\vec{V}(M, t)$

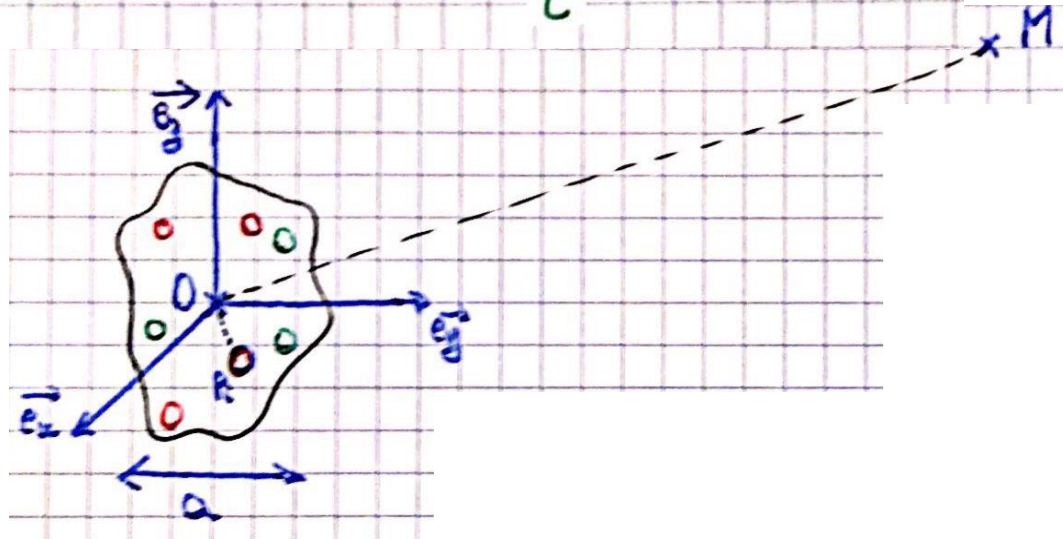
* Deux hypothèses:

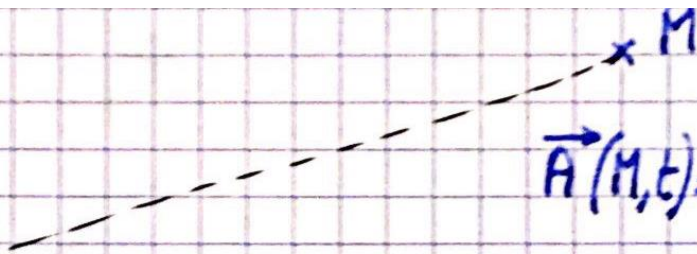
- On ne s'intéresse qu'aux champs produits à grande distance:

$$a \ll |\vec{OM}| \approx r$$

- On suppose négligeable le retard dû à la taille du système.

$$\frac{a}{c} \ll T \quad \text{donc} \quad \vec{J}_P(t - \frac{PM}{c}) \approx \vec{J}_P(t - \underbrace{\frac{OM}{c}}_{t'})$$





$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu}{4\pi} \sum_{i \in M} \frac{q_i \vec{v}_{Fi}(t')}{R_{iM}}$$

$$\frac{1}{\mu_M} \approx \frac{1}{\mu} \left(1 - \frac{\vec{p}_O \cdot \vec{u}_r}{\mu} \right)$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum q_i \frac{d\vec{r}_i(t')}{dt'}$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d}{dt} \left(\sum_i q_i \vec{O}P_i(t') \right)$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \vec{P}(t')$$

$$V(\mathbf{r}, t) = V(\mathbf{r}, 0) - \frac{1}{c^2} \int_0^t \operatorname{div}(\vec{h}(\mathbf{r}, t)) dt$$

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{P}(t)}{r^2} + \frac{\dot{\vec{P}}(t)}{rc} \right) \cdot \vec{e}_r$$

Calcul des champs $\vec{B}(M,t)$ et $\vec{E}(M,t)$

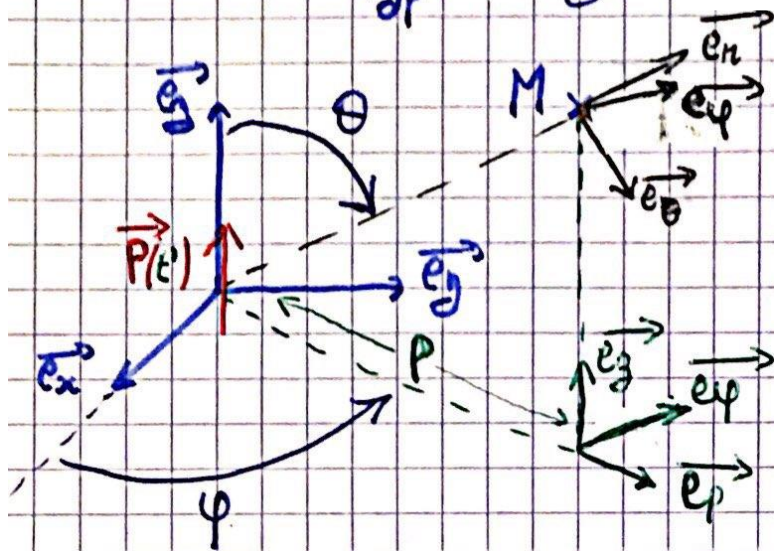
$$\vec{B}(M,t) = \text{rot} \vec{A}(M,t)$$

Hypothèse: $\vec{P}(t') = P(t') \vec{e}_z$

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi h} \vec{P}(t') = A(r,t') \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(M,t) = \text{rot} \vec{A} = -\frac{\partial A(r,t')}{\partial r} \vec{e}_\theta$$

Coordonnées Cylindriques



Calcul des champs $\vec{B}(M,t)$ et $\vec{E}(M,t)$

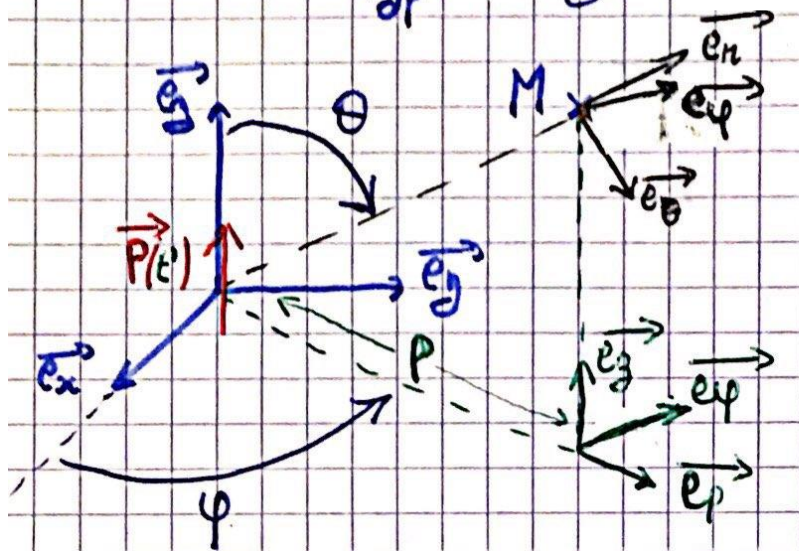
$$\vec{B}(M,t) = \text{rot} \vec{A}(M,t)$$

Hypothèse: $\vec{P}(t') = P(t') \vec{e}_z$

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi R} \vec{P}(t') = A(R,t') \vec{e}_z$$

$$\vec{B}(M,t) = \text{rot} \vec{A} = -\frac{\partial A(R,t')}{\partial R} \vec{e}_z$$

Coordonnées Cylindriques



$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{\vec{P}}(t')}{R^2} + \frac{\ddot{\vec{P}}(t')}{cR} \right) \wedge \vec{e}_r$$

$$\vec{E}(M,t) = -\text{grad}(V(M,t)) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M,t)$$

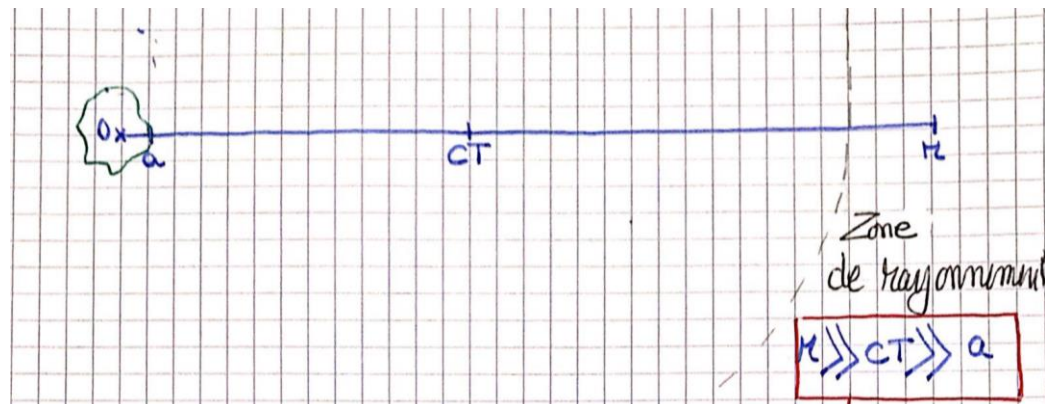
$$\vec{E}(M,t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2\cos(\theta) \left(\frac{P(t')}{R^3} + \frac{\dot{P}(t')}{R^2 c} \right) + \frac{Q_{\text{tot}}}{R^2} \right] \vec{e}_r + \frac{\sin\theta}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{P(t')}{R^3} + \frac{\dot{P}(t')}{R^2 c} + \frac{\ddot{P}(t')}{R c^2} \right] \vec{e}_\theta$$

Expression des champs $\vec{B}(r,t)$ et $\vec{E}(r,t)$ dans la
zone de rayonnement.



Zone
de rayonnement

$$r \gg CT \gg a$$

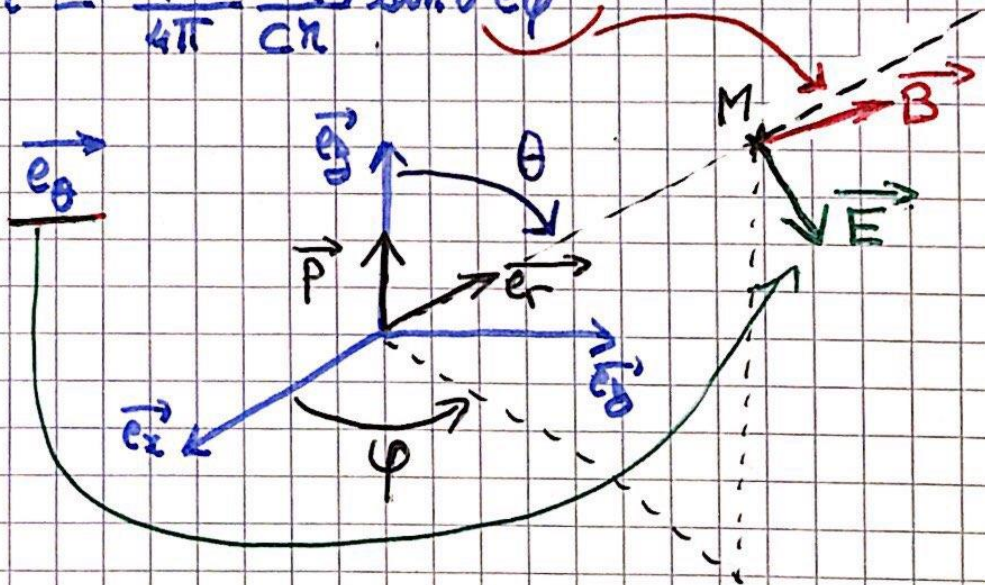


Simplifions l'expression de $\vec{B}(M,t)$ et $\vec{E}(M,t)$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\dot{\vec{P}}(t')}{r^2} + \frac{\ddot{\vec{P}}(t')}{c^2 r} \right) \wedge \vec{e}_r$$

$$\vec{B}(M,t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{\vec{P}}(t')}{c^2 r} \right) \wedge \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{P}(t') \sin \theta}{c^2 r} \vec{e}_\varphi$$

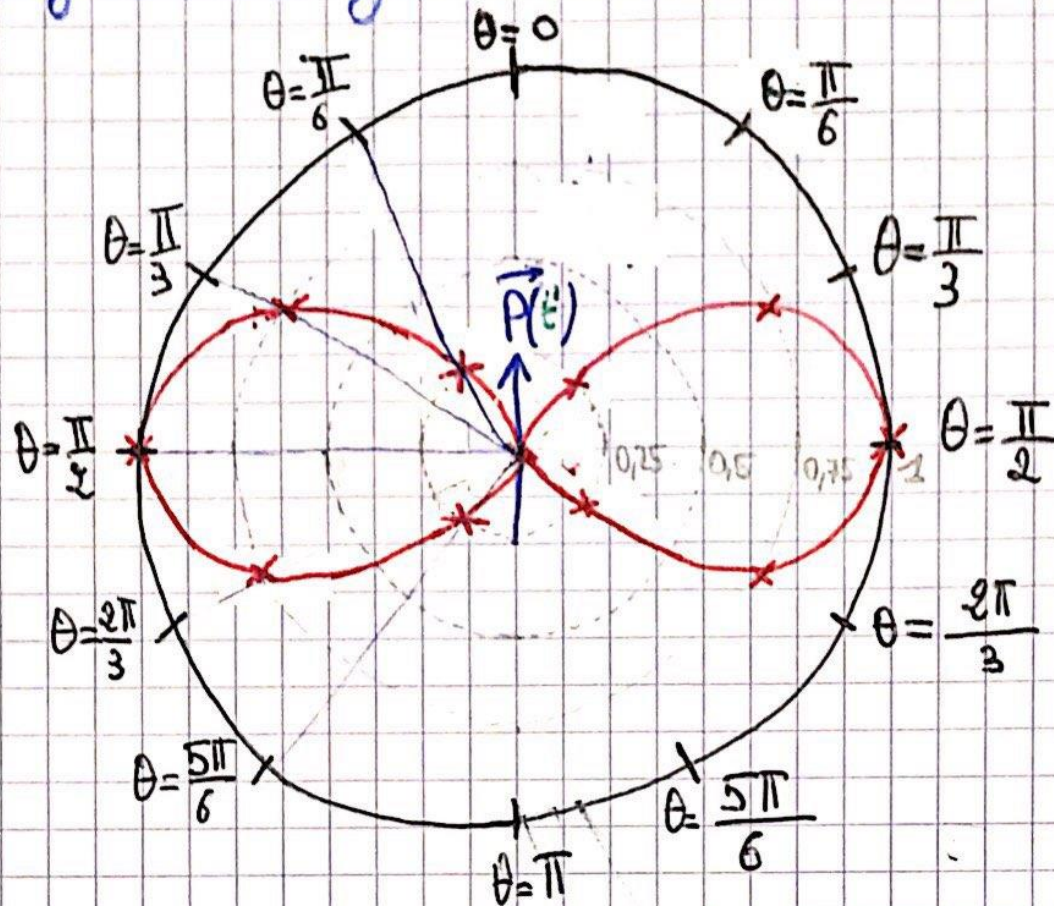
$$\vec{E}(M,t) \approx \frac{\ddot{P}(t')}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \sin \theta \vec{e}_\theta$$



Aspect énergétique du rayonnement.

$$\vec{\Pi}(M, t) = \frac{\vec{E}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t)}{\mu_0} = \frac{\vec{P}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 \mu_0^2} \vec{e}_r$$

Diagramme de rayonnement en puissance



A t_0 et r_0 fixé

$$F(\theta) = \frac{\|\vec{\Pi}(r_0, t_0, \theta)\|}{\|\vec{\Pi}_{\max}\|}$$
$$F(\theta) = \sin^2(\theta)$$

$$P_{\text{ray}}(t) = \iint_{\mathcal{V}(t)} \vec{\Pi}(M, t) \cdot d\vec{S}$$



$$P_{\text{ray}}(t) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \underbrace{\frac{\ddot{P}^2(t') \sin^2 \theta}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 \hbar^2}}_{\vec{\Pi}(M, t)} \cdot \underbrace{\vec{e}_r \cdot \hbar^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r}_{d\vec{S}}$$

$$P_{\text{ray}}(t) = \frac{\ddot{P}^2(t')}{6\pi \epsilon_0 c^3}$$

si $\vec{P}(t') = qa \cos(\omega t') \vec{e}_z$

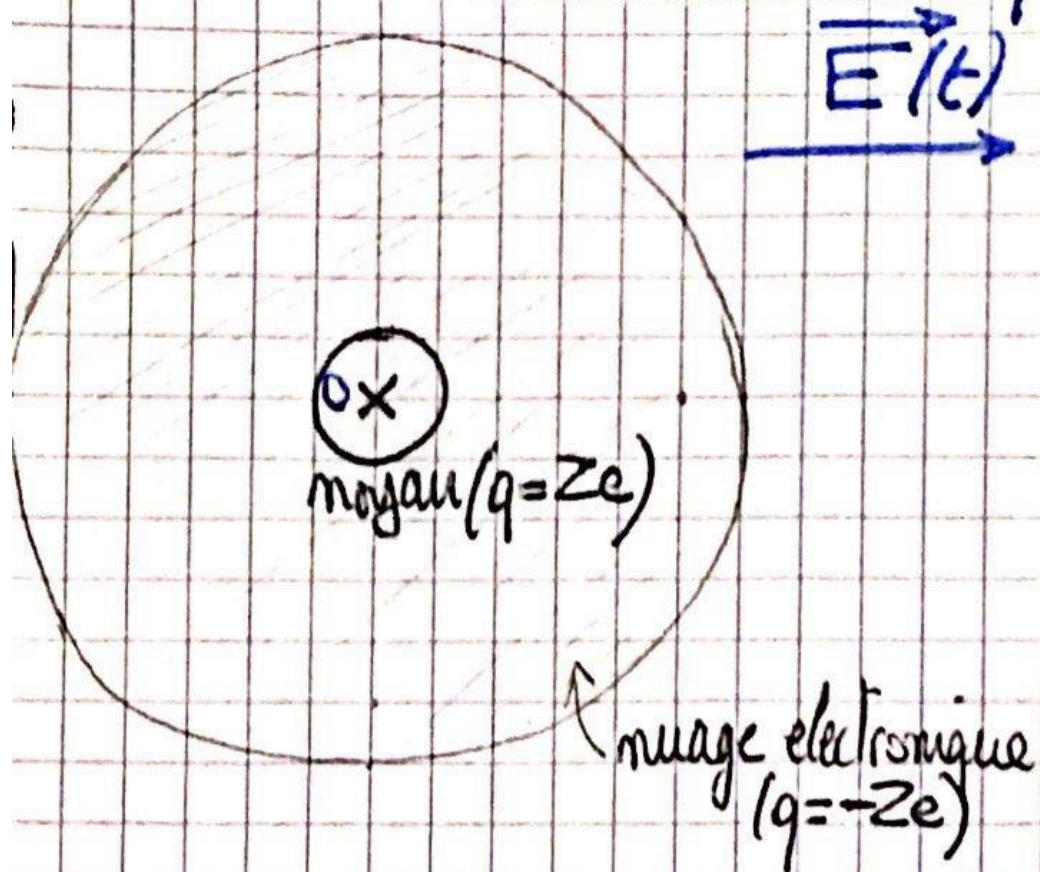
$$P_{\text{ray}}^{(\omega)}(t) = \frac{(qa)^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \omega^4 \cos^2(\omega t')$$

$$\langle P_{\text{ray}}^{(\omega)} \rangle = \frac{(qa)^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \omega^4$$



Hypothèse non relativiste et ARQS
 $\frac{2a}{T} \ll c \Leftrightarrow 4\pi a \omega \ll c$

Modèle de l'électron élastiquement lié.



- noyau fixe
- Le nuage électronique est soumis à 3 forces :

$$* \vec{F}_E = -Ze \vec{E}(t)$$

$$* \vec{F}_n = -K \vec{r} \quad \text{déplacement relatif du nuage p.r. noyau}$$

$$* \vec{F}_{dis} = -\frac{m}{\sigma} \vec{v}$$

• PFD au nuage électronique :

• Avec $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ et $Q = \omega_0 \Gamma$:

• En multipliant par $-Ze$
et $\vec{p} = -Ze\vec{\pi}$:

• En complexe pour une
pulsation ω :

$$m \frac{d^2 \vec{\pi}}{dt^2} = -K \vec{\pi} - \frac{m}{\Gamma} \frac{d\vec{\pi}}{dt} - Ze \vec{E}(t)$$

$$\frac{d^2 \vec{\pi}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{\pi}}{dt} + \omega_0^2 \vec{\pi} = \frac{-Ze}{m} \vec{E}(t)$$

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{Ze^2}{m} \vec{E}(t)$$

$$\underline{\vec{p}} = \frac{Ze^2}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + i \frac{\omega}{\omega_0 Q}} \underline{\vec{E}}_\omega$$

Les résultats précédents permettent de calculer toutes les grandeurs électromagnétiques à grande distance pour une distribution de courant donnée. En pratique, on montre que certaines configurations d'antennes sont préférables pour permettre un transfert efficace d'énergie par ondes radio. Pour qu'une puissance correcte soit transmise par un générateur à une antenne, il est nécessaire que la taille de celle-ci permette une génération efficace d'ondes stationnaires dans les conducteurs et la longueur ℓ_a de l'antenne doit donc être choisie judicieusement.

Proposition 23.3. Résonance d'antenne

Afin qu'une puissance optimale soit transmise par un générateur à une antenne, celle-ci doit être excitée à une de ses fréquences propres.

Mathématiquement, la résonance d'antenne se traduit par $\ell_a = n\lambda/2$, n étant un entier et $\lambda = \frac{u}{\omega}$ la longueur d'onde associée à la fréquence de pulsation ω .

L'expression du champ électrique obtenue par résonance d'antenne se déduit immédiatement de la formule (23.18) en posant $\ell_a = n\lambda/2$. La figure 23.5 présente les diagrammes de rayonnement associés aux cas $n = 1, 2$ et 3. Comme on le voit, changer le type d'antenne permet de modifier la directivité du rayonnement. Soulignons que modifier cette directivité est primordial lorsqu'il est nécessaire de ne pas perdre de puissance en émettant dans tout l'espace mais seulement suivant une direction donnée (par exemple, si une antenne émettrice cherche à émettre des informations vers une antenne réceptrice située en un point bien précis). Notons pour finir qu'une association judicieuse d'antennes (un réseau) permet d'avoir une directivité du rayonnement dans le plan orthogonal à l'antenne (voir exercice 23.4 pour une illustration).

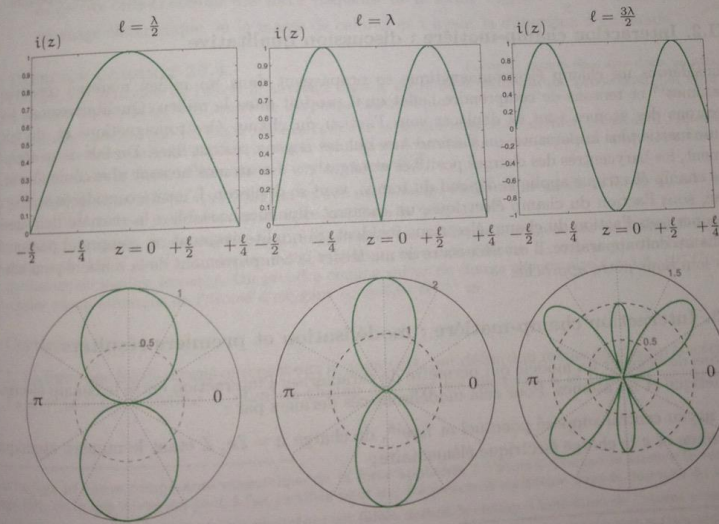


FIG. 23.5. Diagramme de rayonnement (en champ) de quelques antennes en résonance.