

Étude théorique et expérimentale de pendules pesants couplés : modes normaux de vibration

par **Alain GIBAUD**

Université du Maine - Laboratoire de physique de l'état condensé
Faculté des Sciences - UMR 6087 CNRS - 72085 Le Mans Cedex 09
alain.gibaud@univ-lemans.fr

et **Thomas GIBAUD**

Université de Fribourg - Département de physique
1700 Fribourg - Suisse
thomas.gibaud@unifr.ch

RÉSUMÉ

Cet article vise à présenter une étude des modes de vibration de deux pendules pesants couplés par l'intermédiaire d'un ressort. Nous présentons successivement l'analyse théorique des modes de vibration puis l'étude expérimentale des modes symétrique, antisymétrique et finalement quelconque. Nous montrons comment le couplage des deux pendules peut facilement être ajusté en déplaçant la position du ressort par rapport aux axes de rotation des deux pendules. L'étude expérimentale des modes de vibration est réalisée au moyen d'une webcam et l'analyse de la période des modes propres a été entreprise au moyen du logiciel synchronie. La mesure simultanée des amplitudes d'oscillation des deux pendules est présentée puis les résultats expérimentaux sont confrontés au modèle théorique.

1. INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DU DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

Le couplage de deux oscillateurs et plus généralement le couplage de deux grands physiques sont à la base de très nombreux concepts de la physique moderne. Le couplage de deux oscillateurs débouche de façon plus générale sur le couplage de N oscillateurs [1-2]. Ce type de couplage est à l'origine des vibrations de réseaux et fait intervenir la notion de phonons permettant d'expliquer les phénomènes de dispersion des ondes se propageant dans un solide. Cette étude est restreinte au couplage de deux oscillateurs mécaniques.

Le dispositif étudié présenté sur la figure 1 (cf. page ci-après) est formé de deux pendules pesants identiques constitués d'une tige métallique de longueur totale $l = 80,5$ cm sur laquelle sont fixés un couteau à $d_1 = 30$ cm de l'une des extrémités de la tige et une masse $m = 1,55$ kg très lourde par rapport à celle de la tige $m_t = 640$ g. La masse m est positionnée à la distance $d = 35,5$ cm de l'axe rotation. Les deux pendules sont

couplés par un ressort de raideur $k = 103 \text{ N/m}$. La position du ressort est ajustable grâce à une bague de masse $m_b = 120 \text{ g}$ située au dessus de l'axe de rotation de la tige. La distance du point d'attache du ressort aux axes de rotation des tiges notée h a été fixée à $h = 10 \text{ cm}$.

Un tel dispositif est particulièrement bien adapté pour l'étude du couplage, car en effet la position de la bague m_b joue un rôle clé sur le couplage. On voit bien que si la bague est localisée sur l'axe de rotation le couplage sera nul, car la longueur du ressort ne changera pas au cours du mouvement des deux tiges. Pour un couplage non nul, il suffit d'éloigner la bague de O. Plus la distance h est grande et plus le couplage sera fort. On a donc une façon d'ajuster le couplage entre les deux oscillateurs en faisant varier la position OB de la bague.

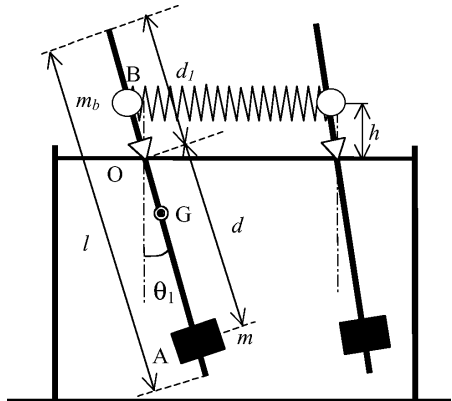


Figure 1 : Schéma des deux pendules couplés par le ressort.

Le mouvement des deux pendules est enregistré au moyen d'une webcam de type Philips Toucam. Le nombre d'images par seconde a été réglé de trente (modes symétrique et antisymétrique) à dix images par seconde pour un mode quelconque.

2. ÉTUDE THÉORIQUE DU COUPLAGE DES DEUX PENDULES

2.1. Calcul du moment d'inertie du pendule par rapport à O

Le pendule est constitué de plusieurs éléments : la bague, la tige et la masse. Chacun de ces éléments contribue au moment d'inertie du pendule qui tourne autour d'un seul axe de rotation z passant par O perpendiculaire au plan de la feuille. Si la longueur de la tige l est bien supérieure à son rayon R_t , le moment d'inertie de la tige par rapport à son centre de masse G est donné par :

$$J_{zz/G} = m_t \frac{R_t^2}{4} + m_t \frac{l^2}{12} \approx m_t \frac{l^2}{12}$$

Par application du théorème de Huygens, on obtient le moment d'inertie de la tige par rapport à O :

$$J_{zz/O} = J_{zz/G} + m_t OG^2 = m_t \frac{l^2}{12} + m_t \left(\frac{l}{2} - d_1 \right)^2$$

Un calcul similaire s'applique à la masse m située à la distance $d = OA$ de l'axe de rotation. Cette masse cylindrique de rayon R_{ex} , de rayon intérieur R_{int} et hauteur h_m étant très lourde, on ne fera pas d'approximation. Il s'ensuit que :

$$J_{zzm/O} = J_{zzm/G} + mOA^2 = m \frac{h_m^2}{12} + m \frac{R_{int}^2 + R_{ex}^2}{4} + md^2$$

La bague étant quasi ponctuelle on admettra que son moment d'inertie est donné par :

$$J_{zzmb/O} = m_b h^2$$

Le moment d'inertie complet du pendule est donc donné par :

$$J = J_{zzmb/O} + J_{zzmt/O} + J_{zzm/O}$$

2.2. Équation différentielle du pendule pesant non couplé

Pour le pendule pesant non couplé, il suffit d'appliquer le théorème des moments en O pour trouver l'équation différentielle du mouvement du pendule. Les forces qui agissent sur le pendule sont la réaction de l'axe en O, le poids de la barre en G, le poids de la bague en B et le poids de la masse en A. Le théorème des moments s'écrit donc :

$$J\ddot{\theta}_1 \vec{k} = \sum \vec{M}_{F/O} = \vec{M}_{R/O} + \vec{M}_{P_b/O} + \vec{M}_{P_i/O} + \vec{M}_{P_m/O} = -g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_i \right) - m_b h \right) \sin \theta_1 \vec{k}$$

Il s'ensuit que l'équation différentielle du mouvement est donnée par :

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_i \right) - m_b h \right)}{J} \sin \theta_1 = 0$$

Pour des mouvements de faible amplitude, cette équation devient linéaire et correspond à celle d'un oscillateur harmonique du type :

$$\ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_1^2 = \frac{g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_i \right) - m_b h \right)}{J}$$

2.3. Lagrangien du système couplé

Nous proposons de résoudre le problème des deux pendules couplés en utilisant le Lagrangien. Cette méthode a le mérite d'être relativement simple et efficace pour l'étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté : il suffit de faire l'inventaire des énergies contribuant au mouvement. Le système couplé constitué des deux pendules et du ressort de couplage possède de l'énergie cinétique de rotation et une énergie potentielle de gravitation ainsi qu'une énergie élastique de couplage. L'énergie cinétique de rotation des deux pendules est donnée par :

$$E_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_2^2$$

L'énergie potentielle est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur de chacun des pendules et de l'énergie élastique de déformation du ressort de couplage. Si l'on prend la référence d'énergie potentielle de pesanteur nulle en $\theta_i = 0$, l'énergie potentielle du pendule 1 est donnée par :

$$E_{pp} = g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_i \right) - m_b h \right) (1 - \cos \theta_1)$$

Pour des petits angles, cette expression devient :

$$E_{pp} = g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_1 \right) - m_b h \right) \frac{\theta^2}{2}$$

Le ressort étant non tendu au point de départ, son énergie élastique est donnée par :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k \Delta l^2 = \frac{1}{2} k (x_1 - x_2)^2$$

Les allongements x_1 et x_2 des deux ressorts sont liés aux angles θ_1 et θ_2 . Si ces angles sont petits on a :

$$E_{pe} = \frac{1}{2} k h^2 (\theta_1 - \theta_2)^2$$

Le Lagrangien du système complet est donc donné par :

$$L = E_c - E_{pp} - E_{pe}$$

$$L = \frac{1}{2} J \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}_2^2 - g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_1 \right) - m_b h \right) \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2} - \frac{1}{2} k h^2 (\theta_1 - \theta_2)^2$$

2.4. Équations différentielles du mouvement

Les équations différentielles du mouvement des pendules sont données par :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dL}{d\theta_1} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_1} \right) \\ \frac{dL}{d\theta_2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dL}{d\dot{\theta}_2} \right) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \frac{g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_1 \right) - m_b h \right)}{J} \theta_1 + \frac{k h^2}{J} (\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \frac{g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_1 \right) - m_b h \right)}{J} \theta_2 - \frac{k h^2}{J} (\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

Ces équations auraient pu être obtenues comme au paragraphe 2.2. en faisant le bilan des moments appliqués au système. Si l'on introduit la pulsation propre ω_1 du pendule pesant et la pulsation de couplage, $\omega_c^2 = \frac{k h^2}{J}$, on aboutit à un système, (S), de deux équations différentielles linéaires à deux inconnues (θ_1, θ_2) :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \omega_1^2 \theta_1 + \omega_c^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ \ddot{\theta}_2 + \omega_2^2 \theta_2 - \omega_c^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

2.5. Les modes normaux

Pour un système de *deux oscillateurs couplés*, il existe *deux modes normaux de vibra-*

tion pour lesquels tous les oscillateurs vibrent à la même fréquence et ont des amplitudes de vibration fixées. Si les conditions initiales du mouvement :

- ♦ correspondent aux modes normaux alors les oscillateurs continueront à osciller selon ces modes normaux ;
- ♦ ne correspondent pas aux modes normaux, alors on observe des déplacements non-harmoniques de chaque oscillateur.

Nous allons rechercher des solutions de même pulsation ω en posant :

$$\begin{cases} \theta_1 = x_0 \cos \omega t \\ \theta_2 = y_0 \cos \omega t \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} \ddot{\theta}_1 = -\omega^2 x_0 \cos \omega t = -\omega^2 \theta_1 \\ \ddot{\theta}_2 = -\omega^2 y_0 \cos \omega t = -\omega^2 \theta_2 \end{cases}$$

ce qui substitué dans le système d'équations différentielles conduit à un système d'équations algébriques :

$$\begin{aligned} \text{(S)} &\Leftrightarrow \begin{cases} -\omega^2 \theta_1 + \omega_1^2 \theta_1 + \omega_c^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ -\omega^2 \theta_2 + \omega_2^2 \theta_2 + \omega_c^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases} \\ \text{(S)} &\Leftrightarrow \begin{cases} (\omega_1^2 + \omega_c^2 - \omega^2) \theta_1 - \omega_c^2 \theta_2 = 0 \\ -\omega_c^2 \theta_1 + (\omega_2^2 + \omega_c^2 - \omega^2) \theta_2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

En introduisant les constantes $A = \omega_1^2 + \omega_c^2$ et $B = -\omega_c^2$, ces équations s'écrivent :

$$\text{(S)} \Leftrightarrow \begin{cases} (A - \omega^2) \theta_1 + B \theta_2 = 0 \\ B \theta_1 + (A - \omega^2) \theta_2 = 0 \end{cases}$$

Nous avons donc deux équations simultanées en θ_1 et θ_2 qui imposent :

- ♦ soit $\theta_1 = \theta_2 = 0$ (pas de déplacement) ;
- ♦ soit de choisir ω pour que ces deux équations soient identiques.

$$\text{Si tel est le cas alors : } \frac{\theta_1}{\theta_2} = -\frac{B}{(A - \omega^2)} = -\frac{(A - \omega^2)}{B}$$

$$\text{ce qui conduit à : } (A - \omega^2)^2 = B^2 \Rightarrow A - \omega^2 = \pm B$$

Il s'ensuit que le système peut osciller selon deux pulsations particulières données

$$\text{par : } \begin{cases} \omega_+^2 = A + B \\ \omega_-^2 = A - B \end{cases}$$

La première solution $\omega_+^2 = A + B = \omega_1^2$ n'est rien d'autre que la pulsation propre du pendule pesant non couplé. La seconde solution $\omega_-^2 = A - B = \omega_1^2 + 2\omega_c^2$ dépend du couplage entre les deux oscillateurs. Les deux pulsations ainsi trouvées constituent les modes normaux de vibration des deux oscillateurs couplés. La connaissance des modes normaux nous permet de remonter aux amplitudes θ_1 et θ_2 .

- ♦ Pour la première valeur de ω^2 on obtient :

$$\omega^2 = A + B \Rightarrow (A - \omega^2) \theta_1 + B \theta_2 = 0 \Rightarrow -B \theta_1 + B \theta_2 = 0 \text{ soit } \theta_1 = \theta_2$$

Les deux pendules oscillent alors en phase ; on parlera du mode symétrique.

♦ Pour la seconde valeur de ω^2 on obtient :

$$\omega^2 = A - B \Rightarrow B\theta_1 + B\theta_2 = 0 \text{ soit } \theta_1 = -\theta_2$$

Les deux pendules oscillent alors en opposition de phase ; on parlera du mode anti-symétrique.

2.6. Solutions générales

Comme les équations différentielles du mouvement sont linéaires, la solution générale est une combinaison linéaire des modes normaux, *i.e.* :

$$\begin{cases} \theta_1 = D \cos \omega_1 t + E \sin \omega_1 t + F \cos \omega_- t + G \sin \omega_- t \\ \theta_2 = D \cos \omega_1 t + E \sin \omega_1 t - F \cos \omega_- t - G \sin \omega_- t \end{cases}$$

et pour la vitesse angulaire :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = -D\omega_1 \sin \omega_1 t + E\omega_1 \cos \omega_1 t - F\omega_- \sin \omega_- t + G\omega_- \cos \omega_- t \\ \dot{\theta}_2 = -D\omega_1 \sin \omega_1 t + E\omega_1 \cos \omega_1 t + F\omega_- \sin \omega_- t + G\omega_- \cos \omega_- t \end{cases}$$

Supposons qu'à $t = 0$, $\theta_1 = a$, $\theta_2 = 0$ et que les pendules soient initialement au repos.

Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} \theta_1(0) = a = D + F \\ \theta_2(0) = 0 = D - F \end{cases}$$

ce qui donne $D = a/2$, $F = a/2$. Pour les vitesses angulaires on a :

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1(0) = 0 = -E\omega_1 + G\omega_- \\ \dot{\theta}_2(0) = 0 = E\omega_1 - G\omega_- \end{cases}$$

soit $E = G = 0$.

Il s'ensuit que pour $t > 0$:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t + \cos \omega_- t) \\ \dot{\theta}_2 = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_- t) \end{cases}$$

Les deux modes normaux sont excités simultanément. On constate en réécrivant ces équations que les pendules effectuent des battements :

$$\begin{cases} \theta_1 = a \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_-}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_-}{2} t\right) \\ \theta_2 = a \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_-}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_-}{2} t\right) \end{cases}$$

On distingue dans ces deux solutions la pulsation moyenne $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_-}{2}$ et la pulsation de battement $\Delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_-}{2}$ qui est la pulsation de battement entre les deux ondes.

On rappelle à ce stade que $\omega_-^2 = \omega_1^2 + 2\omega_c^2 = \omega_1^2 + 2\frac{kh}{J}$.

Pour observer de beaux battements il faut donc que :

$$\omega_- - \omega_1 \ll \frac{\omega_1 + \omega_-}{2}$$

Il est clair que cela se produit si $\omega_- \approx \omega_1$ ce qui correspond à un couplage faible. Il faut donc pour bien observer les battements mettre le ressort k à une distance h pas trop éloignée de O de façon à réduire l'influence du couplage.

3. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

3.1. Pendule pesant non couplé

Le pendule pesant non couplé a été étudié au moyen de la webcam de type Toucam de chez Philips. Les mesures ont été effectuées à la cadence de trente images par seconde avec une ouverture au 1/250 s. Cette valeur est déterminante pour obtenir une image nette quand le pendule se déplace vite (passage par zéro). Le fichier obtenu sauvegardé avec l'extension .avi peut être lu sous synchronie.

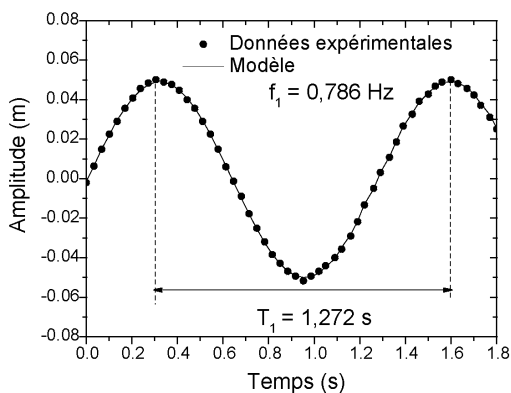


Figure 2

Le résultat de l'enregistrement est donné figure 2. La période mesurée du pendule est égale à $T_1 = 1,272 \text{ s}$. Cette valeur est à comparer à la valeur théorique calculée :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_i \right) - m_b h \right)}}$$

Avec les valeurs des paramètres, la valeur calculée de la période est égale à 1,262 s ce qui est très proche de la valeur mesurée.

3.2. Modes symétriques et antisymétriques

Après avoir couplé les deux oscillateurs au moyen du ressort de raideur k , nous

avons mesuré le mouvement des deux oscillateurs couplés en mode symétrique et antisymétrique. Pour le mode symétrique, on lance les deux pendules avec le même angle et sans vitesse initiale. Pour le mode antisymétrique, on lance les deux pendules avec une amplitude opposée et sans vitesse initiale. Les résultats de l'analyse de la séquence vidéo sont reportés à la figure 3.

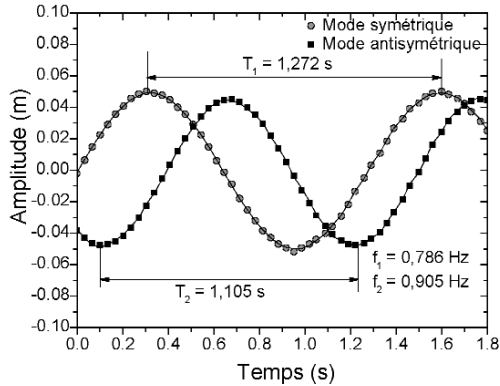


Figure 3 : Représentation de l'amplitude d'oscillation pour les modes symétriques et antisymétriques mesurée à l'aide de la webcam. Chaque point correspond à une image du fichier filmé à raison de trente images par seconde.

On retrouve bien la fréquence du pendule pesant non couplé dans le cas du mode symétrique alors que celle du mode antisymétrique est légèrement supérieure compte tenu du faible couplage entre les deux oscillateurs (h petit). La connaissance de la constante de raideur k , de la position de la bague h et du moment d'inertie d'un pendule permet de calculer la période théorique du mode antisymétrique. On a :

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{g \left(md + m_i \left(\frac{l}{2} - d_1 \right) - m_b h \right)}}$$

On trouve que la période calculée du mode antisymétrique est $T_2 = 1,09 \text{ s}$ soit une fréquence $f_2 = 0,92 \text{ Hz}$. Ces valeurs sont de nouveau en bon accord avec les résultats expérimentaux.

3.3. Mode quelconque

Nous avons ensuite mesuré un mode quelconque en lançant les deux pendules sans vitesse initiale, mais avec une amplitude nulle pour l'un des pendules et maximale pour l'autre. Les résultats de l'analyse de la séquence vidéo sont reportés à la figure 4 (cf. page ci-contre).

On observe bien le phénomène de battements dans les oscillations des deux pendules ce qui correspond au transfert de l'énergie d'un pendule à l'autre. Chaque point corres-

pond à une image prise avec une vitesse d'acquisition de dix images par seconde.

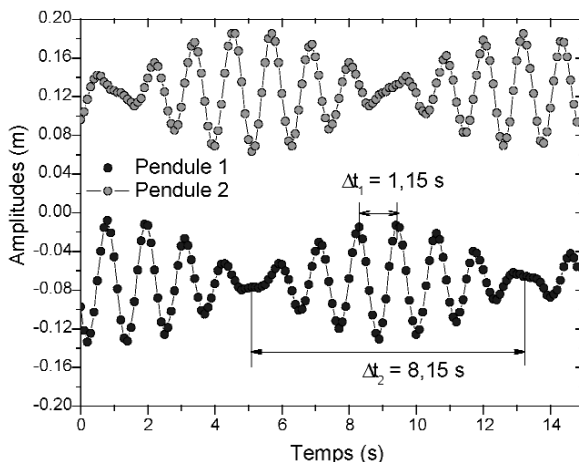


Figure 4 : Illustration des amplitudes des deux pendules pour un mode quelconque.

On peut observer compte tenu du faible couplage des battements comme nous l'avons présenté dans l'étude théorique. Deux fréquences caractéristiques sont attendues :

- ♦ une fréquence moyenne $\bar{f} = \frac{\bar{\omega}}{2\pi} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4\pi} = \frac{f_1 + f_2}{2}$ soit une période $\Delta t_2 = \frac{1}{f_2 - f_1}$;
- ♦ une fréquence de battement $f_{bat} = f_2 - f_1$ soit une période $\Delta t_1 = \frac{1}{f_2 - f_1}$.

L'étude théorique permet d'estimer ces deux périodes. On obtient $\Delta t_1 = 1,17$ s et $\Delta t_2 = 7,83$ s. Ces deux valeurs sont très proches des valeurs mesurées $\Delta t_1 = 1,1 \pm 0,3$ s et $\Delta t_2 = 8,1 \pm 0,3$ s. Nous rappelons que les valeurs expérimentales sont obtenues ici par simple pointé sans modélisation des courbes ce qui justifie les erreurs importantes.

On peut également observer sur la figure 3 que les deux modes de vibration produisent des oscillations qui résultent du transfert d'énergie entre les deux pendules couplés. Quand l'un des pendules oscille avec une grande amplitude l'autre s'arrête et réciproquement. Ce phénomène est remarquablement bien observé avec ce dispositif. La fréquence des battements est ajustable très facilement en modifiant la hauteur h de la bague. En déplaçant la bague vers l'axe de rotation, on observe des battements de durée de plus en plus longue.

En conclusion, nous avons montré que l'étude simultanée des oscillations de deux pendules couplés par un ressort peut être appréhendée au moyen d'une webcam. Le dispositif expérimental proposé est très intéressant, car il permet de faire varier le couplage des deux oscillateurs en modifiant simplement la hauteur h du point d'attache du ressort sur les tiges. Les résultats sont facilement analysés au moyen du logiciel *Synchronie*. L'accord entre la théorie et l'expérience est dans la marge d'erreur expérimentale.

REMERCIEMENTS

Nous remercions Gilles RIPAULT pour la mise en place du dispositif expérimental.

BIBLIOGRAPHIE ET NETOGRAPHIE

- [1] DUFFAIT R. « Étude expérimentale des oscillateurs mécaniques ». *Bull. Un. Prof. Phys. Chim.*, octobre 2004, vol. 98, n° 867 (1), p. 1307-1338.
- [2] KITTEL C., KNIGHT W., RUDERMAN M. et LALLEMAND P. (Trad.). *Mécanique - Vol. I : Berkeley : cours de physique*. Paris : A. Colin, 1972.
- [3] Jean-Jacques ROUSSEAU :
<http://subaru2.univ-lemans.fr/enseignements/physique/02/meca/pendcoup1.html>



Alain GIBAUD
Professeur
 Université du Maine
 Le Mans (Sarthe)



Thomas GIBAUD
Doctorant et assistant
 Université de Fribourg
 Fribourg (Suisse)