

Chapitre 23

RAYONNEMENT DIPOLAIRE

AUJOURD'HUI, une grande partie des moyens de communication repose sur l'utilisation des ondes électromagnétiques, une antenne de téléphone portable ou un relais TV n'étant que deux dispositifs particuliers reposant sur ce type d'onde. Jusqu'à maintenant, nous avons caractérisé ces ondes mais sans nous intéresser aux moyens de les produire. Le but de ce chapitre est de pallier cette imprécision et d'apporter quelques éclaircissements sur la manière dont ces ondes sont générées.

Dans un premier temps, nous montrerons¹ comment les équations de Maxwell permettent de prévoir qu'un champ électromagnétique, perceptible à grande distance, est généré par des charges accélérées. Nous appliquerons dans un second temps les résultats obtenus au cas des antennes émettrices. Pour finir, nous montrerons comment la théorie du rayonnement permet d'expliquer certains phénomènes de la vie courante (comme la couleur bleue du ciel), lorsqu'elle est appliquée à un milieu matériel.

I. CHAMP RAYONNÉ PAR UN SYSTÈME DE CHARGES EN MOUVEMENT : CADRE THÉORIQUE GÉNÉRAL

I.1. Potentiel vecteur d'un système de charges et de courants

Considérons une distribution de charges occupant un domaine \mathcal{D} de l'espace et notons O l'origine des coordonnées. Ce domaine est le siège de courants créés par le mouvement des différentes charges et on suppose qu'en dehors de celui-ci il n'existe ni charges ni courants (voir figure 23.1, page 678). Les calculs étant beaucoup plus simples pour une distribution de charges discrète, nous les mènerons dans ce cadre et nous indiquerons les formules équivalentes dans la limite continue (LC).

Si les charges sont non relativistes, c'est-à-dire si leurs vitesses de déplacement sont petites devant c , on peut montrer, via les équations de Maxwell munies d'une condition de jauge de Lorentz, que le potentiel vecteur $\vec{A}(M,t)$ perçu en un temps t en un point M de l'espace s'écrit :

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_i \frac{q_i \vec{v}_i \left(P_i, t - \frac{|P_i M|}{c} \right)}{|P_i M|} \stackrel{LC}{\Rightarrow} \vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in \mathcal{D}} d\tau \frac{\vec{j}(P, t - \frac{PM}{c})}{|PM|} \quad (23.1)$$

le potentiel scalaire étant alors donné par intégration de la jauge de Lorentz :

$$V(M,t) = V(M,0) - c^2 \int_0^t dt' \operatorname{div} [\vec{A}(M,t')]. \quad (23.2)$$

Ces expressions sont connues sous le nom de potentiels retardés². Que veulent dire ces formules ? Elles traduisent simplement le fait que le champ électromagnétique met un certain temps à se

¹ La démonstration complète des champs rayonnés par un système de charges accélérées étant hors programme, nous donnerons simplement les grandes étapes du raisonnement qui permet d'obtenir l'expression des champs perçus.

² Dans le cas relativiste, on doit substituer à l'expression des potentiels retardés celle des potentiels de Lienard et Wiechert. Dans la vie « courante », les deux expressions coïncident et nous ne nous attarderons donc pas sur le cas relativiste.

Le retard de
 chaque source
 est le même
 $t - |\vec{P_i}M|/c \approx t - T$
 $c = k\lambda$

propager d'un point à un autre de l'espace. Au point M , la contribution aux potentiels provenant d'un point P du domaine des sources est celle qui correspond à l'état des courants et des charges autour de ce point au temps $t - |\vec{PM}|/c$, car l'information s'est propagée à une vitesse c . Les expressions (23.1) et (23.2) sont très compliquées mais fournissent la valeur des champs en tout point de l'espace. D'un point de vue pratique cependant, la majorité des situations peuvent être traitées dans un cadre restreint où deux contraintes supplémentaires sont imposées :

1. On ne s'intéresse qu'aux champs produits à grande distance (zone de rayonnement) : si la taille typique du domaine \mathcal{D} est notée a , on se borne à trouver les expressions des champs en des points M tels que $|\vec{OM}| \gg a$.
2. On suppose négligeable le retard dû à la taille du système. Plus précisément, si le système est de taille a et le temps typique de variation des charges et des courants est T , on suppose que $a/c \ll T$. En d'autres termes, le temps que met l'information à transiter entre deux points extrêmes de \mathcal{D} est supposé négligeable³ devant le temps T .

Avec ces deux hypothèses supplémentaires, l'expression des potentiels retardés se simplifie grandement. Pour tout point P de la distribution, on a alors $t - |\vec{PM}|/c \simeq t - |\vec{OM}|/c$ et l'ensemble des sources sont donc perçues avec le même retard. En notant $t' = t - |\vec{r}|/c$ le temps retardé, et $\vec{r}_i = \vec{OP}_i$ le vecteur position de la charge numéro i , on obtient :

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_i q_i \vec{v}_i(t') = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_i q_i \frac{d\vec{r}_i}{dt'}(t') = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d}{dt'} \left[\sum_i q_i \vec{r}_i(t') \right]$$

soit, en revenant à la définition du moment dipolaire de la distribution de charges au temps t' ,
 $\vec{p}(t') = \sum_i q_i \vec{r}_i(t')$:

$$\vec{A}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}}{r} \quad (23.3)$$

où $\dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt'}(t')$ est la dérivée temporelle au temps t' du moment dipolaire. Dans le cas continu, et sous les hypothèses prises, l'expression obtenue pour le potentiel vecteur est identique, le moment dipolaire étant alors donné par $\iiint_{\mathcal{D}} d\tau \rho_c(P,t') \vec{OP}$, où $\rho_c(P,t')$ est la densité volumique de charges au point P au temps retardé t' .

À partir de l'expression du potentiel vecteur, il est possible de déterminer de manière explicite l'expression du potentiel électrostatique $V(M,t)$ en utilisant la jauge de Lorentz, mais, ce calcul

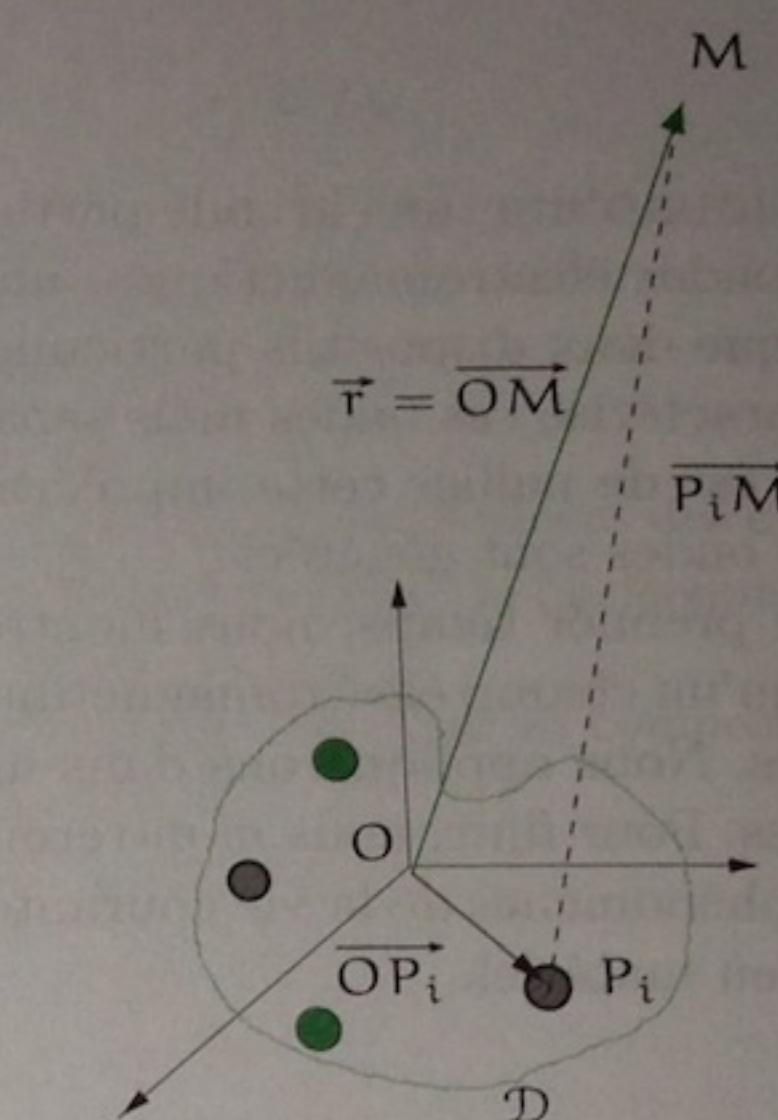


FIG. 23.1. Distribution de charges produisant un champ électromagnétique.

³ Cette seconde hypothèse n'a rien d'évident *a priori* et pour des antennes elle n'est généralement pas valable. Nous y reviendrons à la section II.

n'étant d'aucune utilité pour déterminer les champs électriques et magnétiques produits à grande distance, il ne sera pas effectué ici⁴.

I.2. Champs produits à grande distance

Si le point d'observation M est situé à grande distance du domaine \mathcal{D} des sources, la connaissance du vecteur \vec{A} est suffisante pour déterminer totalement les champs électrique et magnétique. Pour ce faire, il suffit d'exprimer $\vec{B}(M,t) = \vec{\text{rot}} [\vec{A}(M,t)]$, puis d'intégrer l'équation de Maxwell-Faraday pour remonter à l'expression du champ électrique. Pour simplifier les expressions obtenues, nous allons considérer le cas d'un moment dipolaire qui garde une direction constante⁵, direction que nous supposons dans la suite fixée par le vecteur unitaire \vec{e}_z (voir figure 23.2).

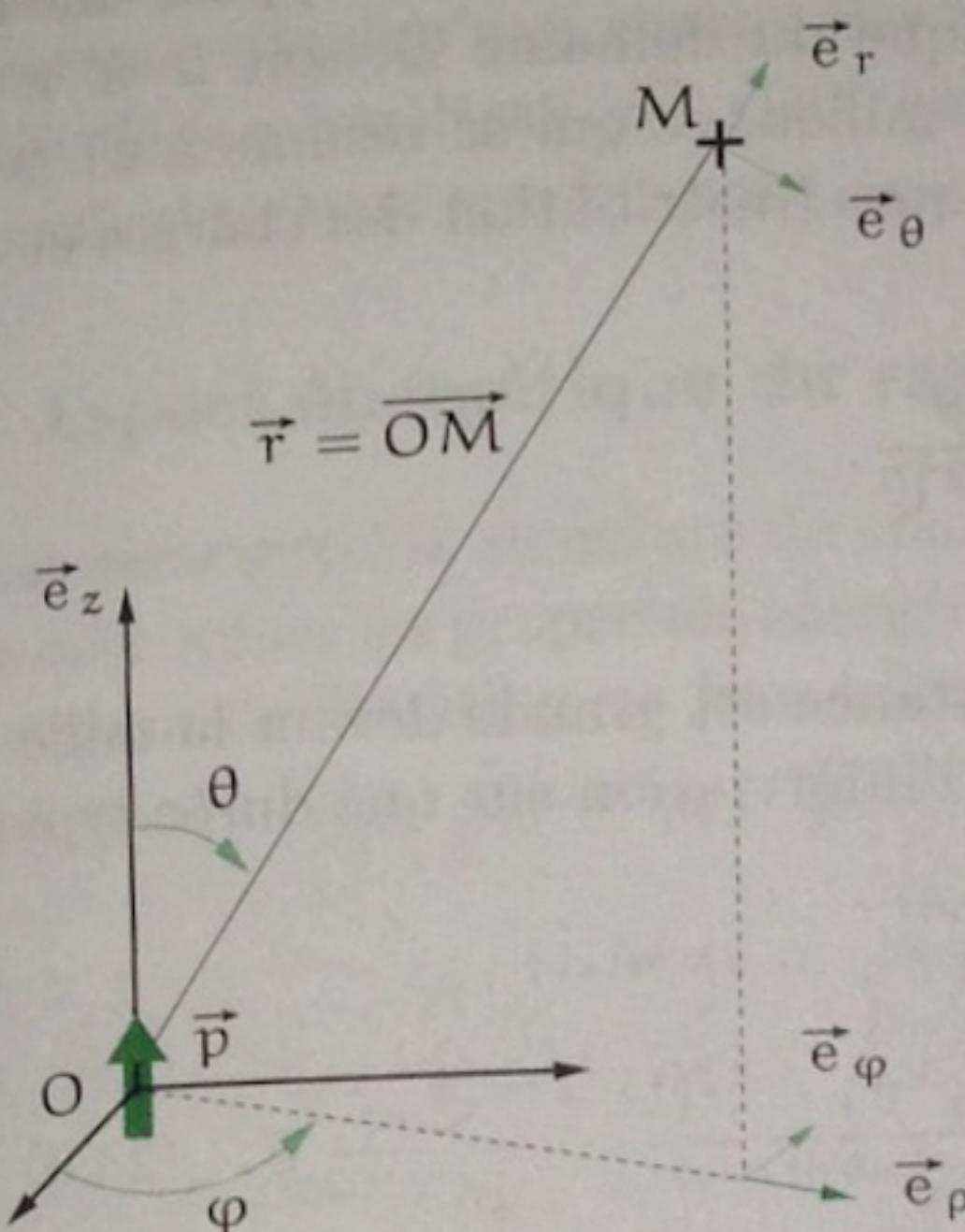


FIG. 23.2. Différents repères utiles lors du calcul du champ créé par un moment dipolaire.

En utilisant l'expression du rotationnel en base cylindrique, on obtient alors :

$$\vec{B}(M,t) = \vec{\text{rot}} \vec{A}(M,t) = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi$$

et comme $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$, $t' = t - r/c$ et $\sin(\theta) = \rho/r$:

$$\frac{\partial r}{\partial \rho} = \frac{\rho}{\sqrt{z^2 + \rho^2}} = \sin(\theta) \Rightarrow \frac{\partial \dot{p}}{\partial \rho} = \ddot{p}(t') \frac{\partial(t - r/c)}{\partial \rho} = -\frac{\ddot{p} \sin(\theta)}{c}$$

soit :

$$\vec{B}(M,t) = -\frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{\partial \dot{p}}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi - \frac{\mu_0 \dot{p}}{4\pi} \frac{\partial(1/r)}{\partial \rho} \vec{e}_\varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{p}}{cr} + \frac{\dot{p}}{r^2} \right) \sin(\theta) \vec{e}_\varphi$$

d'où, finalement :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\frac{\ddot{p}}{cr} + \frac{\dot{p}}{r^2} \right) \wedge \vec{e}_r \quad (23.4)$$

⁴ Sur ce point, voir M. Bertin, J.-P. Faroux et J. Renault, *Électromagnétisme 3*, Dunod (1986).

⁵ Ce n'est pas ici une perte de généralité car pour un mouvement quelconque on pourra toujours, par superposition linéaire, exprimer le moment dipolaire de la distribution comme la somme de trois moments dipolaires de directions fixées.

1. Ils décroissent lentement (proportionnellement à $1/r$).
2. Ils sont anisotropes et sont nuls en tout point situé suivant l'axe du moment dipolaire.
3. La dépendance temporelle en $t - r/c$ indique que le champ électromagnétique créé à grande distance se propage suivant \vec{e}_r , à une vitesse de c .
4. Localement, les deux champs sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation \vec{e}_r . Le champ électromagnétique a donc, localement, une structure d'onde plane.
5. Le champ électromagnétique à grande distance est généré par les dérivées temporelles secondes du moment dipolaire, c'est-à-dire qu'il n'existe que si les charges en mouvement sont accélérées.

Parmi ces propriétés, la dernière est à relever car elle traduit un fait physique de première importance : lorsqu'une charge électrique est accélérée, elle crée un champ électromagnétique du fait de son accélération⁹. Cette propriété est aujourd'hui très utilisée dans les accélérateurs de particules (type synchrotron) pour produire des rayons X.

1.3. Aspect énergétique du rayonnement

Ayant caractérisé la structure du champ électromagnétique créé à grande distance, nous souhaitons déterminer les propriétés énergétiques de celui-ci. Dans la zone de rayonnement, l'expression du vecteur de Poynting est immédiate en utilisant les formes (23.7) des champs créés :

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \wedge \vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \frac{\hat{p}^2(t') \sin^2(\theta)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \vec{e}_r. \quad (23.8)$$

Comme on pouvait s'y attendre, la puissance rayonnée est anisotrope. Entre autres, aucune puissance n'est rayonnée suivant l'axe du moment dipolaire et la puissance émise est maximale dans la direction perpendiculaire à cet axe. On note au passage que le vecteur de Poynting est radial et toujours dirigé suivant \vec{e}_r : l'énergie électromagnétique produite à grande distance est donc toujours cédée par le système de charges en mouvement au milieu extérieur (jamais l'inverse). Un système de charges en mouvement non uniforme produit donc toujours de l'énergie. La puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r s'obtient facilement en intégrant l'expression (23.8) sur cette sphère :

$$P_{ray}(r,t') = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta r^2 \sin(\theta) \vec{\Pi}(M,t) \cdot \vec{e}_r = \frac{\hat{p}^2(t')}{8\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\pi d\theta \sin^3(\theta)$$

soit, puisque l'intégrale restante vaut $4/3$:

$$P_{ray}(r,t') = \frac{\hat{p}^2(t')}{6\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (23.9)$$

La puissance rayonnée ne dépend donc pas explicitement¹⁰ de la distance, et cela ne fait que traduire la conservation de l'énergie électromagnétique. Pour caractériser les aspects anisotropes, il est usuel de représenter le diagramme de rayonnement, en puissance du champ.

⁹ Pour une analyse complète du champ créé par une charge seule en mouvement et des conséquences induites par celui-ci sur la dynamique propre de la charge, voir R.P. Feynman, *Electromagnetism 2*, Dunod (1999).

¹⁰ On note tout de même une dépendance implicite par le biais de la dépendance en t' . Des « vagues » sphériques d'énergie électromagnétique sont émises par le système de charges, et celles-ci se déplacent à une vitesse c sans être absorbées.

Définition 23.1. Diagramme de rayonnement en puissance

Soit $\vec{\Pi}(M, t)$ le vecteur de Poynting rayonné par un système de charges et de courants en un point M de l'espace. On nomme diagramme de rayonnement en puissance le tracé de la fonction représentative $F_p(\theta, \varphi)$ définie par :

$$F_p(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{\Pi}(r, \theta, \varphi, t)|}{|\vec{\Pi}_{\max}(r, \theta, \varphi, t)|}$$

la quantité $|\vec{\Pi}_{\max}(r, \theta, \varphi, t)|$ étant la valeur maximale de la norme du vecteur de Poynting qui puisse être obtenue à une distance r donnée de la source.

Le diagramme de rayonnement, en puissance, d'un dipôle de petite taille est représenté sur la figure 23.3.

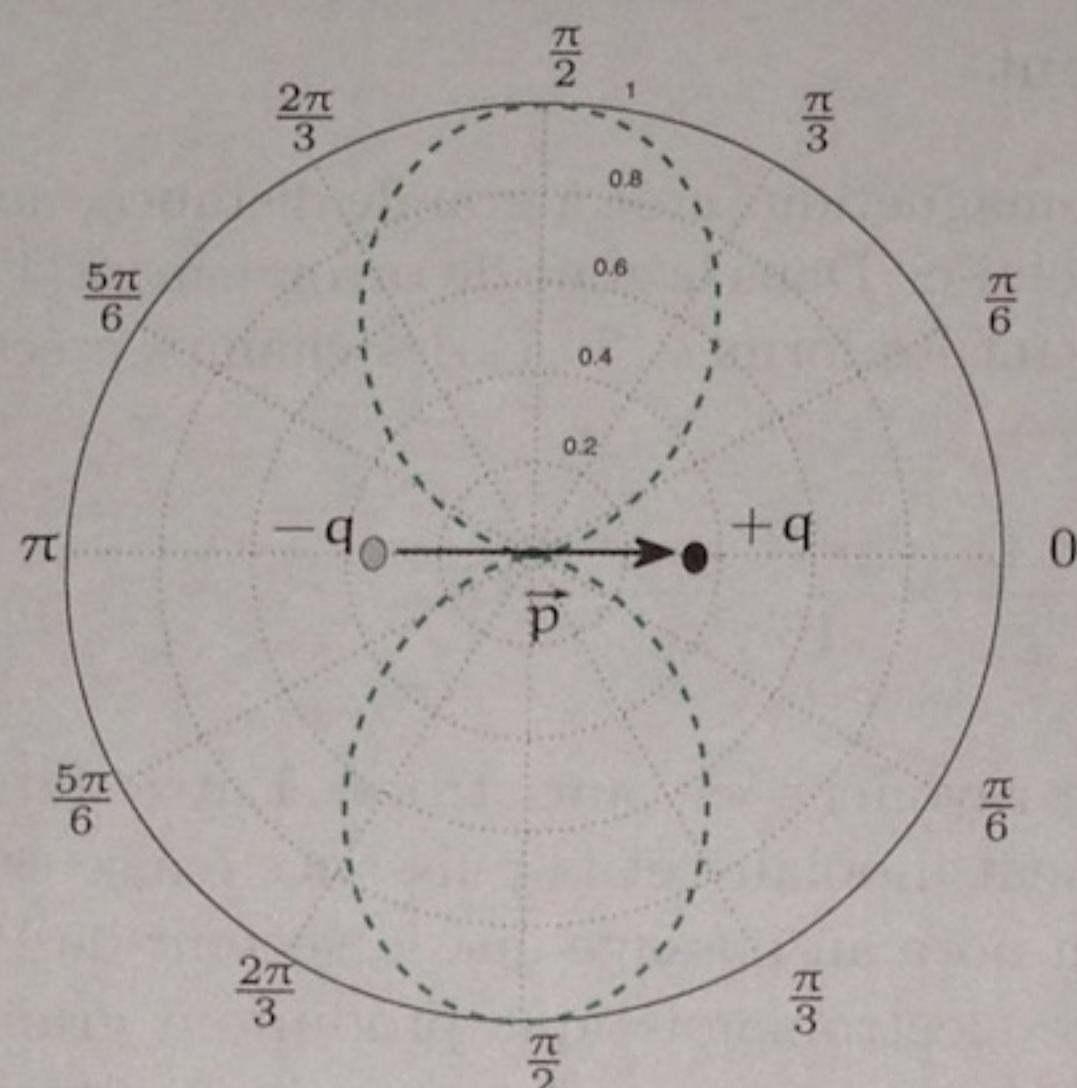


FIG. 23.3. Diagramme de rayonnement d'un dipôle à grande distance : puissance rayonnée par un dipôle variable, dans la zone de rayonnement, en fonction de l'angle θ d'observation. Les cercles concentriques indiquent la puissance perçue au point d'intersection avec la courbe colorée. À titre d'exemple, la puissance rayonnée suivant un angle de $\pi/6$ avec la direction du dipôle représente 20 % de la puissance maximale rayonnée (c'est-à-dire suivant un angle $\theta = \pi/2$).

À ce stade, il est utile de regarder quelques cas particuliers de distributions de charges qui interviennent fréquemment dans des situations physiques.

I.3.1. Charge unique en mouvement

Une charge unique q en mouvement forme, de façon certes un peu étrange, un dipôle dépendant du temps. Le moment dipolaire de cette distribution est $\vec{p}(t') = q z(t') \vec{e}_z$ si le mouvement de celle-ci se fait suivant l'axe z . En explicitant la dérivée seconde du moment dipolaire, on trouve $\ddot{p} = q \ddot{z}$ et celle-ci est donc proportionnelle à l'accélération de la charge en mouvement. La formule (23.9) s'écrit ici :

$$P_{\text{ray}}^{(q)}(t') = \frac{q^2 \ddot{z}^2(t')}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (23.10)$$

et la puissance rayonnée est proportionnelle au carré de l'accélération de la charge en mouvement. Ainsi, si un électron est freiné, en entrant par exemple en collision avec des atomes de cuivre, un rayonnement électromagnétique est généré par ce freinage¹¹. Si maintenant nous considérons

¹¹Le « Bremsstrahlung », ou rayonnement de freinage, est par exemple utilisé en cristallographie comme moyen de production de rayons X. Pour des précisions sur le type de rayonnement produit, voir E. Chpolski, *Physique atomique Tome 1*, Éditions Mir (1977), pages 354-355.

un électron soumis à une trajectoire circulaire, nous savons qu'il est soumis à une accélération centripète : conformément à la formule (23.10) cet électron doit émettre un rayonnement électromagnétique. D'où provient alors l'énergie émise ? De l'énergie mécanique de l'électron bien sûr, et c'est précisément une des raisons pour lesquelles la mécanique quantique est née ! Si un électron tournait effectivement autour du noyau comme le prévoyait Rutherford, il devrait s'écraser sur celui-ci au bout d'un temps fini, temps à l'issue duquel toute son énergie mécanique aurait été convertie en énergie électromagnétique.

I.3.2. Dipôle oscillant

On nomme dipôle oscillant, ou dipôle de Hertz, un doublet de charges $+q - q$ (l'une est généralement fixe) dont le moment dipolaire varie de façon sinusoïdale à une pulsation ω donnée. Si $P(t)$ et $N(t)$ sont les positions respectives de ces charges, le moment dipolaire de la distribution est donné par $\vec{p}(t') = q \overrightarrow{NP}(t') = q a \cos(\omega t') \vec{e}_z$. Soit $T = 2\pi/\omega$ la période de l'oscillation, la condition de mouvement non relativiste des charges s'écrit $2a/T \ll c$ qui s'identifie, dans ce cas de figure, à la condition de temps de retard négligeable entre les deux charges. Si cette condition est vérifiée, la puissance rayonnée par le système de charges en mouvement devient alors :

$$P_{\text{ray}}^{(\omega)}(t') = \frac{a^2 q^2 \omega^4 \cos^2(\omega t')}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

qui fournit une puissance moyenne émise :

$$\langle P_{\text{ray}}^{(\omega)} \rangle = \frac{a^2 q^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (23.11)$$

Un doublet de charges émet donc une puissance d'autant plus importante qu'il oscille rapidement (tout en restant dans la limite non relativiste). La puissance rayonnée étant proportionnelle à la puissance quatrième de la vitesse, un mouvement deux fois plus rapide fournit un rayonnement de puissance seize fois supérieur.

II. RAYONNEMENT DIPOLAIRE ET ANTENNES

Les propriétés fondamentales du rayonnement dipolaire ayant été établies, voyons comment elles s'appliquent de façon concrète et, dans cette optique, intéressons-nous aux antennes. Une antenne est un conducteur (ou un système de conducteurs) au sein duquel un courant variable est présent et qui génère, à grande distance, un rayonnement électromagnétique. Nous nous bornons ici à présenter le cas des antennes rectilignes, que nous considérons dans la suite orientées selon l'axe \vec{e}_z .

II.1. Courant d'antenne et moment dipolaire

II.1.1. Champs rayonnés à grande distance par une antenne de petite taille

Considérons un élément cylindrique de conducteur, de section S et de longueur ℓ suffisamment petite pour que le vecteur densité volumique de courant y soit constant à un temps donné. Si les charges sont réparties de façon discrète et si cet élément est globalement neutre, le moment dipolaire associé ne dépend pas de l'origine des coordonnées et s'écrit $\vec{p}_\ell(t) = \sum_i q_i \overrightarrow{OP}_i(t)$, la somme étant prise sur toutes les charges présentes au temps t dans l'élément considéré. La densité volumique de courant s'écrivant pour sa part $\vec{J}(t) = \frac{\sum_i q_i \vec{v}_i(t)}{\ell S}$, on constate que la

dérivée temporelle du moment dipolaire de cet élément vérifie :

$$\frac{d\vec{p}_\ell}{dt} = \vec{J}(t)\ell S = \ell i_\ell(t) \vec{e}_z \Rightarrow \ddot{p}_\ell(t') = \ell \frac{di_\ell}{dt'}(t') \quad (23.12)$$

et donc, conformément aux résultats de la section précédente, nous en déduisons qu'un conducteur parcouru par un courant variable émet à grande distance un champ électromagnétique capable de transmettre de l'information (c'est précisément ce qui est réalisé dans une antenne). Notons que sous l'hypothèse prise pour la taille ℓ de l'élément de conducteur, la condition $\ell \ll cT$ est vérifiée de façon immédiate (\vec{J} étant constant sur l'élément, celui-ci vérifie, par construction, l'approximation des régimes quasi stationnaires) et le champ électromagnétique rayonné par l'élément à grande distance est donné par la formule (23.7) en y injectant l'expression (23.12) liant moment dipolaire et intensité :

$$\vec{B}(M, t) \simeq \ell \frac{di_\ell}{dt'} \frac{\mu_0 \sin(\theta)}{4\pi cr} \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{E}(\vec{r}, t) \simeq \ell \frac{di_\ell}{dt'} \frac{\sin(\theta)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta. \quad (23.13)$$

Test 23.1.

Voiture télécommandée et antenne de commande

Une commande de voiture télécommandée est une antenne émettrice de petite taille. Est-il pertinent d'incliner l'antenne en direction de la voiture télécommandée pour contrôler cette dernière ?

II.1.2. Résistance de rayonnement d'une antenne de petite taille

Dans le cas d'une antenne de petite taille, l'injection de l'égalité (23.12) dans l'expression (23.9) de la puissance rayonnée à une distance r conduit à :

$$P_{\text{ray}}(r, t') = \frac{\ell^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{di_\ell}{dt'} \right)^2$$

qui correspond, dans le cas d'une intensité purement sinusoïdale $i(t') = I_0 \cos(\omega t' + \varphi_0)$, à une puissance moyenne rayonnée :

$$\langle P_{\text{ray}}(r, t') \rangle = I_0^2 \frac{\ell^2 \omega^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{I_0^2}{2} R_r(\omega).$$

La quantité $R_r(\omega)$ se nomme résistance de rayonnement de l'antenne à la pulsation ω . Plus cette quantité est élevée (tout en restant dans le cadre des antennes de petite taille), plus la puissance rayonnée est importante. De façon explicite, nous avons :

$$R_r(\omega) = \frac{\ell^2 \omega^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \left(2 \frac{\pi \mu_0 c}{3} \right)$$

soit, en introduisant la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ et en remarquant que $\frac{2\pi \mu_0 c}{3} = 790 \Omega$:

$$R_r(\omega) = 790 \left(\frac{\ell}{\lambda} \right)^2 \Omega \quad (23.14)$$

expression de la résistance de rayonnement valable pour $\frac{\ell}{\lambda} \ll 1$ afin d'assurer l'hypothèse de quasi-stationnarité de l'antenne. On note que si cette hypothèse est vérifiée, la puissance rayonnée, à intensité et fréquence fixées, croît proportionnellement au carré de la longueur de l'antenne. Pour augmenter la puissance d'émission, et donc augmenter la zone de réception du signal, il est donc nécessaire d'augmenter la taille de l'antenne.

II.2. Rayonnement à grande distance d'une antenne réelle

Pour obtenir un rayonnement de puissance acceptable, il est nécessaire d'augmenter la taille de l'antenne utilisée et de sortir de l'hypothèse de quasi-stationnarité de l'émetteur. Nous nous bornerons dans la suite à envisager des cas d'excitations sinusoïdales d'antennes filaires¹², les résultats non périodiques pouvant alors être obtenus par combinaison linéaire de ceux-ci (voir l'annexe A sur l'analyse de Fourier). D'un point de vue pratique, la gamme de fréquence couramment utilisée pour la transmission par antennes (WIFI, GPS, Bluetooth) correspond au domaine des micro-ondes (fréquences comprises entre 3 GHz et 300 GHz).

Passer de la description d'une antenne de petite taille à une antenne réelle ne pose pas de difficultés majeures : il suffit de considérer celle-ci comme une assemblée d'antennes élémentaires vérifiant l'hypothèse quasi stationnaire. Considérons la figure 23.4 : une antenne réelle de taille ℓ_a est parcourue par un courant sinusoïdal de pulsation ω et de répartition spatiale $f(z)$; on choisit le centre O de l'antenne comme point de référence des coordonnées. Le passage à la notation complexe fournit donc $I(z,t) = f(z) \exp(i\omega t)$, l'intensité réelle $I(z,t)$ vérifiant $I(z,t) = \Re[I(z,t)]$. Conformément aux résultats obtenus pour les antennes de petite taille, un élément de taille dz de l'antenne, centré sur le point P, produit en un point M un champ électromagnétique élémentaire dont la représentation complexe est donnée par :

$$d\vec{E}(M,t) \simeq \frac{(i\omega) \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{PM}|} \exp\left[i\omega\left(t - \frac{|\vec{PM}|}{c}\right)\right] dz f(z) \vec{e}_\theta.$$

En nous plaçant dans la zone de rayonnement où $|\vec{OM}| \gg |\vec{OP}|$, nous avons :

$$|\vec{PM}| = |\vec{PO} + \vec{OM}| = |\vec{OM}| \left(1 - 2 \frac{\vec{OM} \cdot \vec{OP}}{|\vec{OM}|^2}\right)^{1/2} \simeq r - z \cos(\theta)$$

et donc :

$$d\vec{E}(M,t) \simeq \exp(i\omega t') \frac{(i\omega) \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} dz f(z) \exp\left(i z \frac{\omega \cos(\theta)}{c}\right) \vec{e}_\theta.$$

Le champ électrique rayonné par l'antenne au point M s'obtient en superposant les champs rayonnés par chaque élément de l'antenne de taille ℓ_a , soit finalement :

$$\vec{E}(M,t) \xrightarrow{r \gg \ell_a} \exp\left(i\omega t' + i \frac{\pi}{2}\right) \frac{\sin(\theta)}{2\epsilon_0 c r \lambda} \int_{-\ell_a/2}^{+\ell_a/2} dz f(z) \exp\left(i 2\pi \frac{z}{\lambda} \cos(\theta)\right) \vec{e}_\theta. \quad (23.15)$$

Le champ électrique rayonné par l'antenne s'écrit donc comme le produit d'un terme dépendant uniquement de la position du point par un terme relié à la structure des courants dans l'antenne. Ce dernier terme, que nous nommerons par la suite facteur de structure de l'antenne, va différer suivant les antennes considérées, mais on peut noter qu'il s'identifie aux facteurs de structure qui

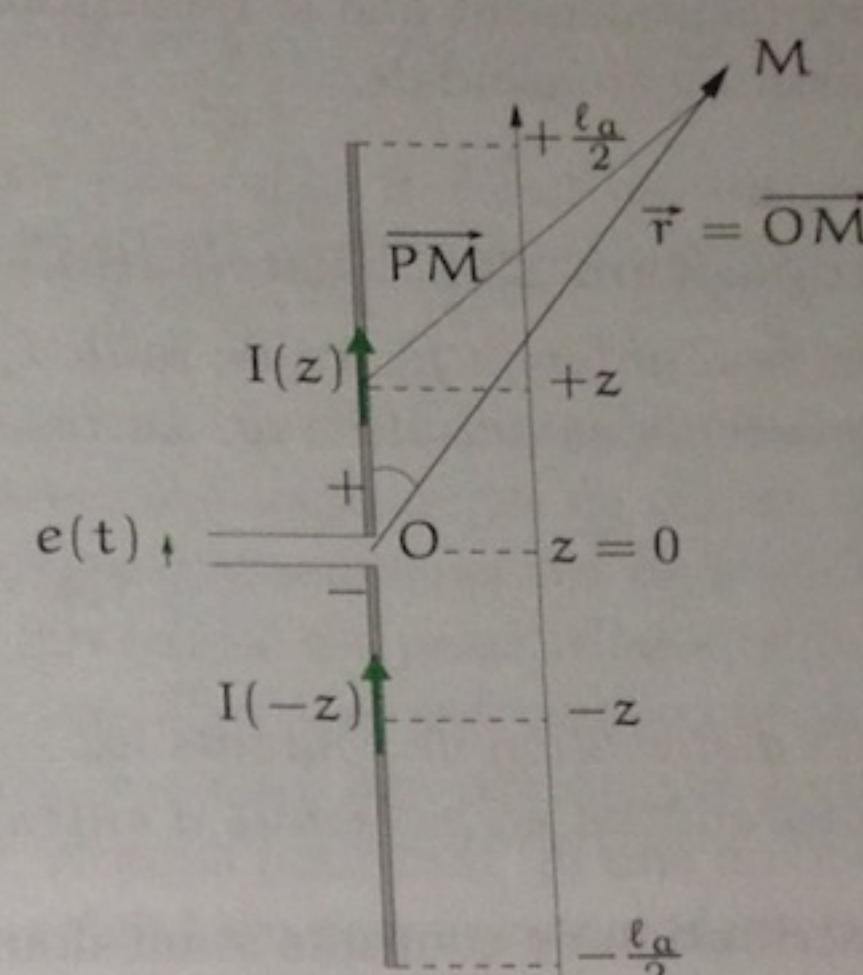


FIG. 23.4. Antenne linéaire.

¹²Bien d'autres types d'antennes, comme l'antenne Yagi utilisée pour la télévision, sont couramment employées mais leur traitement complet dépasse le cadre de ce livre. Sur ce sujet, voir P.F. Combes, *Micro-ondes. T. 2 : Circuits passifs, propagation, antennes*, Dunod (1997).

apparaissent en diffraction et qu'il s'écrit comme la transformée de Fourier spatiale de l'intensité dans l'antenne.

Afin de déterminer totalement la forme du champ électrique et donc la forme du rayonnement d'une antenne, il est nécessaire de préciser la distribution des courants dans celle-ci. Pour réaliser une antenne filaire réelle, on place deux conducteurs linéaires de taille $\ell_a/2$ proches l'un de l'autre et on impose une différence de potentiel sinusoïdale de pulsation ω entre ces deux conducteurs (voir figure 23.4). La symétrie du système ainsi formé impose une symétrie des courants entre les deux conducteurs, soit $I(z) = I(-z)$, et, les extrémités des antennes n'étant pas reliées à un conducteur, on a forcément $I(\ell_a/2) = I(-\ell_a/2) = 0$. Sous les conditions prises, il apparaît expérimentalement que la répartition des courants dans l'antenne est bien modélisée¹³ par une répartition sinusoïdale.

Proposition 23.2. Distribution de courants dans une antenne

Soit une antenne filaire de taille ℓ_a alimentée en son centre par une différence de potentiel sinusoïdale de pulsation ω . La répartition des courants dans l'antenne est de la forme :

$$f(z) = I_0 \sin \left(\frac{2\pi}{\lambda} \left[|z| - \frac{\ell_a}{2} \right] \right). \quad (23.16)$$

Cette distribution de courants est symétrique ($I(z) = I(-z)$) et vérifie la condition aux limites de courant nul en extrémité d'antenne.

La distribution de courants étant donnée, il est aisément de calculer le facteur de forme de l'antenne. Pour une longueur d'antenne ℓ_a donnée, on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{f}(\theta) &= \int_{-\ell_a/2}^{+\ell_a/2} dz I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(|z| - \frac{\ell_a}{2} \right) \right] \exp(i2\pi\frac{z}{\lambda} \cos(\theta)) \\ \hat{f}(\theta) &= \frac{I_0 \lambda}{\pi} \frac{\cos(\pi\ell_a/\lambda) - \cos(\pi\ell_a \cos(\theta)/\lambda)}{\sin^2(\theta)}. \end{aligned} \quad (23.17)$$

Test 23.2.

Facteur de structure d'une antenne à courants stationnaires

Retrouver l'expression (23.17) par un calcul direct.

Injecter l'expression (23.17) du facteur de structure d'antenne dans l'égalité (23.15) du champ rayonné à grande distance fournit :

$$\vec{E}(M,t) \xrightarrow{r \gg \ell_a} \exp \left(i\omega t' + i\frac{\pi}{2} \right) \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 c r} \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi\ell_a}{\lambda} \right) - \cos \left(\frac{\pi\ell_a \cos(\theta)}{\lambda} \right)}{\sin(\theta)} \right] \vec{e}_\theta. \quad (23.18)$$

Le terme entre crochets est un facteur sans dimension qui ne dépend que de l'orientation angulaire du point d'observation par rapport à l'antenne, on le note généralement $F(\theta)$: ce terme caractérise les propriétés de directivité de l'antenne considérée et sa représentation polaire se nomme diagramme de rayonnement¹⁴ en champ de l'antenne.

¹³La répartition réelle des intensités dans un conducteur est, en réalité, un sujet très compliqué, et nous n'en présentons ici qu'une version simplifiée. Pour des informations complémentaires, on pourra se reporter au cours sur les antennes dispensé à l'université Pierre et Marie Curie, consultable à l'adresse http://www.edu.upmc.fr/physique/phys325/IMG/pdf_cours4.pdf.

¹⁴Dans ce cas, c'est un diagramme de rayonnement non normalisé. Certains auteurs nomment diagramme de rayonnement en champ le diagramme polaire de $F(\theta)/F_{\max}$.

Les résultats précédents permettent de calculer toutes les grandeurs électromagnétiques à grande distance pour une distribution de courant donnée. En pratique, on montre que certaines configurations d'antennes sont préférables pour permettre un transfert efficace d'énergie par ondes radio. Pour qu'une puissance correcte soit transmise par un générateur à une antenne, il est nécessaire que la taille de celle-ci permette une génération efficace d'ondes stationnaires dans les conducteurs et la longueur ℓ_a de l'antenne doit donc être choisie judicieusement.

Proposition 23.3. Résonance d'antenne

Afin qu'une puissance optimale soit transmise par un générateur à une antenne, celle-ci doit être excitée à une de ses fréquences propres.

Mathématiquement, la résonance d'antenne se traduit par $\ell_a = n\frac{\lambda}{2}$, n étant un entier et $\lambda = \frac{\omega}{c}$ la longueur d'onde associée à la fréquence de pulsation ω .

L'expression du champ électrique obtenue par résonance d'antenne se déduit immédiatement de la formule (23.18) en posant $\ell_a = n\lambda/2$. La figure 23.5 présente les diagrammes de rayonnement associés aux cas $n = 1, 2$ et 3 . Comme on le voit, changer le type d'antenne permet de modifier la directivité du rayonnement. Soulignons que modifier cette directivité est primordial lorsqu'il est nécessaire de ne pas perdre de puissance en émettant dans tout l'espace mais seulement suivant une direction donnée (par exemple, si une antenne émettrice cherche à émettre des informations vers une antenne réceptrice située en un point bien précis). Notons pour finir qu'une association judicieuse d'antennes (un réseau) permet d'avoir une directivité du rayonnement dans le plan orthogonal à l'antenne (voir exercice 23.4 pour une illustration).

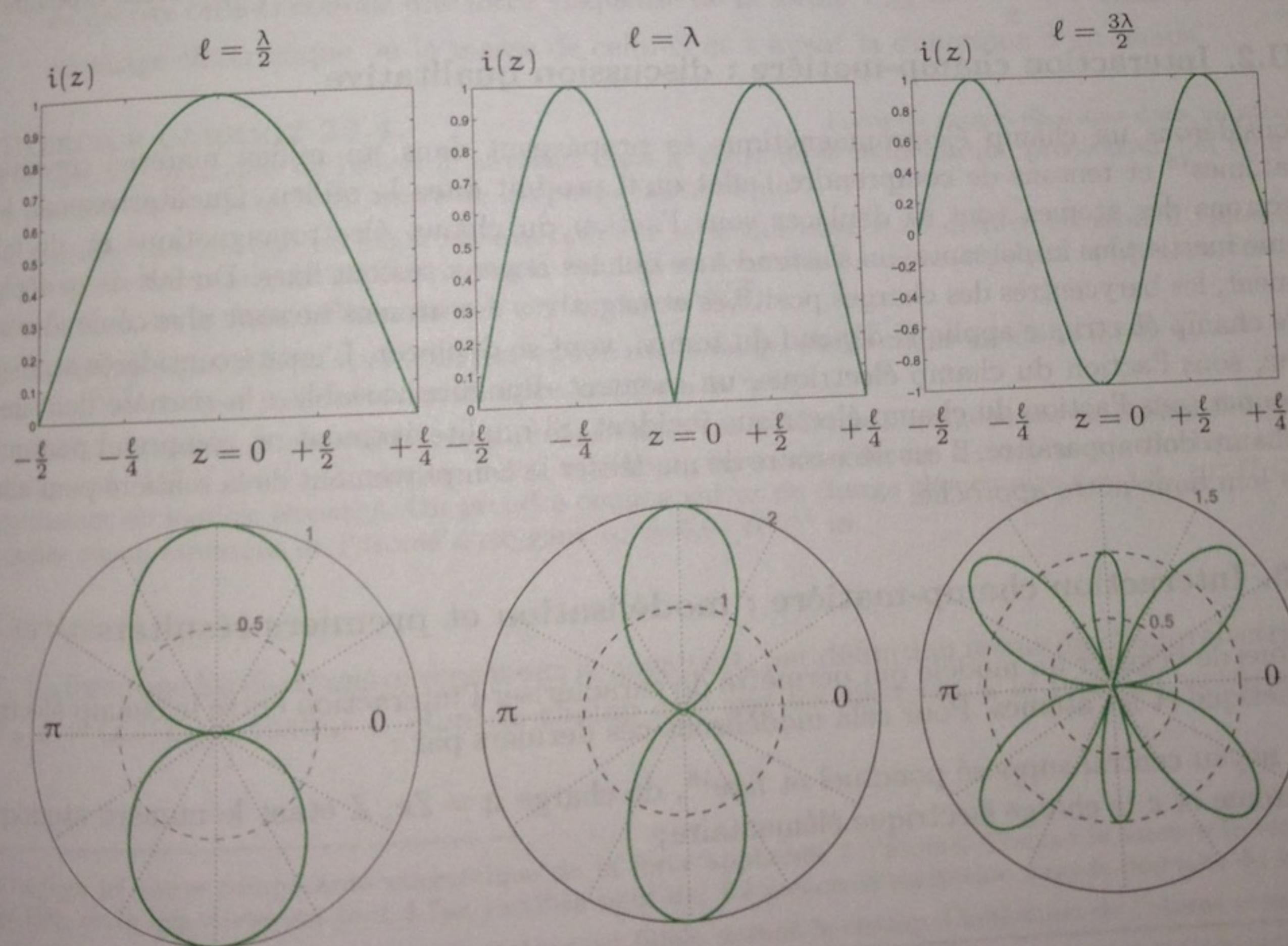


FIG. 23.5. Diagramme de rayonnement (en champ) de quelques antennes en résonance.

III. RAYONNEMENT DIPOLAIRE ET MATIÈRE

III.1. Une expérience introductory

Dans certains cas, comme dans les antennes, les systèmes rayonnants sont contrôlés par un expérimentateur qui impose certaines conditions au système (par exemple, un type de courant donné) afin d'obtenir un champ rayonné qui lui convient. Il existe cependant de nombreuses situations où des systèmes rayonnent sans être directement contrôlés par un expérimentateur : leur rayonnement est alors gouverné par leurs propriétés physiques propres, propriétés que nous ne contrôlons pas *a priori*.

Pour illustrer notre propos, considérons l'expérience suivante.

- ◊ Une source de lumière blanche (typiquement une lampe quartz-iode) éclaire, en incidence normale, une cuve remplie d'eau. Le faisceau dans la cuve est visible grâce aux poussières en suspension dans l'eau et, en sortie de la cuve, un cercle de lumière blanc se forme sur un écran (voir planches couleur).
- ◊ Lorsque quelques gouttes de lait sont ajoutées à l'eau, on observe l'émission d'une lumière bleutée. Dans le même temps, le cercle lumineux formé sur l'écran indique que la lumière transmise à travers la cuve est essentiellement rouge (voir planches couleur).
- ◊ La lumière diffusée perpendiculairement à la direction de propagation se révèle de plus polarisée (voir planches couleur).

Pour comprendre cette expérience, nous avons besoin de savoir comment la matière réagit au passage du champ électromagnétique créé par le faisceau de lumière et nous allons voir que les résultats observés s'interprètent aisément en utilisant les propriétés du rayonnement dipolaire.

III.2. Interaction champ-matière : discussion qualitative

Considérons un champ électromagnétique se propageant dans un milieu matériel constitué d'atomes¹⁵ et tentons de comprendre l'effet qu'il produit dans le milieu. Qualitativement, les électrons des atomes vont se déplacer sous l'action du champ électromagnétique et, du fait d'une inertie plus importante, on s'attend à ce que les noyaux restent fixes. Du fait de ce déplacement, les barycentres des charges positives et négatives des atomes ne sont plus confondus et, si le champ électrique appliqué dépend du temps, vont se déplacer. L'entité considérée acquiert donc, sous l'action du champ électrique, un moment dipolaire variable : la matière doit ainsi rayonner sous l'action du champ électrique incident. Si qualitativement on comprend pourquoi ce champ doit apparaître, il est nécessaire de modéliser le comportement de la matière pour aller plus loin dans notre approche.

III.3. Interaction champ-matière : modélisation et premiers résultats

Tentons de dégager un modèle qui permette de caractériser l'interaction entre le champ électromagnétique et les atomes. Pour cela modélisons ces derniers par :

- ◊ un noyau central supposé ponctuel et fixe¹⁶, de charge $q = Ze$, Z étant le numéro atomique de l'atome et e la charge électrique élémentaire ;

¹⁵On choisit ici de raisonner sur des atomes pour fixer les idées. Un raisonnement analogue est possible sur des molécules.

¹⁶Le rapport des masses étant de l'ordre de 1 000, le noyau peut être, en bonne approximation, identifié au centre de gravité du système et donc considéré comme fixe puisque la résultante des forces sur l'atome est nulle.

où un nuage électronique modélisé par une distribution de charges sphérique et uniforme de rayon a_0 . L'atome étant électriquement neutre, ce nuage porte une charge totale $-Ze$ et la densité volumique de charges du nuage électronique de rayon a_0 est donnée par $\rho = -\frac{3Ze}{4\pi a_0^3}$.

Pour modéliser la réaction de la matière vis-à-vis du champ, nous devons décrire la réponse du nuage électronique à cette excitation, donc appliquer le principe fondamental de la dynamique à celui-ci. Pour cela, il est nécessaire de faire une approximation : nous supposons que, sous l'action du champ électrique, le nuage électronique se déplace « en bloc » et conserve sa forme sphérique. Muni de cette hypothèse supplémentaire, le nuage électronique est soumis à trois forces.

1. Une force due au champ électromagnétique excitateur. Si le champ électrique varie faiblement à l'échelle du nuage électronique, cette force est simplement égale à la charge du nuage multipliée par la valeur du champ électrique¹⁷, soit mathématiquement $\vec{F}_e = -Ze \vec{E}(t)$.
2. Une force de rappel du noyau visant à rétablir la position d'origine des électrons. Comme le montre l'exercice corrigé 23.4, pour des champs électriques suffisamment faibles¹⁸, cette force est du type élastique et s'écrit $\vec{F}_r = -K \vec{r}$, \vec{r} désignant le déplacement relatif du nuage électronique par rapport au noyau et K étant une constante de raideur qui s'exprime en fonction de paramètres microscopiques de l'atome.
3. Enfin, puisque sous l'action du champ les électrons se déplacent, une partie de leur énergie mécanique doit être convertie en énergie de rayonnement. D'un point de vue mécanique, le nuage électronique est donc soumis à une force non conservative. Un problème se pose ici clairement : nous ne savons pas quelle est la forme mathématique de cette force et nous devons donc la modéliser. On choisit d'adopter la modélisation la plus simple possible¹⁹ et de décrire celle-ci comme une force visqueuse de la forme $\vec{F}_{dis} = -\frac{m \vec{v}}{\tau}$, \vec{v} étant la vitesse du nuage électronique, m la masse de celui-ci et τ ayant la dimension d'un temps.

EXERCICE CORRIGÉ 23.4.

Force de rappel élastique dans un atome

On considère le modèle de l'électron envisagé dans le cadre de la modélisation précédente. On note P la position du noyau et N le centre de la sphère électronique.

1. Calculer la force que les électrons exercent sur le noyau lorsque ce dernier est situé à l'intérieur de la sphère électronique. On exprimera le résultat en fonction du rayon a_0 de la sphère, du nombre atomique Z , de la charge élémentaire e et du vecteur \overrightarrow{NP} .
2. En déduire que la force que le noyau exerce sur le nuage électronique est de la forme $\vec{F}_r = -K \vec{r}$, où $\vec{r} = \overrightarrow{PN}$ et K est une constante dont on précisera la valeur.
3. Calculer le déplacement relatif noyau-nuage induit sur un atome d'oxygène par un champ électrique statique de $10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Comparer cette valeur au rayon de l'atome d'oxygène et conclure sur la pertinence du modèle envisagé. On prendra comme valeur de charge élémentaire $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, et comme rayon atomique de l'atome d'oxygène $a_0 = 6,0 \cdot 10^{-11} \text{ m}$.

Corrigé

1. La force que les électrons exercent sur le noyau est, par définition même du champ électrique, $\vec{F}_{e/n} = (Ze) \vec{E}$, le champ \vec{E} étant le champ créé par les électrons à la position occupée par

¹⁷On néglige ici toute composante magnétique de la force appliquée à l'atome. Comme le montre le test 23.3 page 690, cette hypothèse est tout à fait justifiée pour des fréquences d'excitation dans le domaine du visible.

¹⁸Ce résultat est justifiable si le champ excitateur est faible devant le champ d'ionisation de l'atome considéré.

¹⁹En pratique, la modélisation adoptée fournit de très bons résultats mais n'est pas totalement satisfaisante d'un point de vue conceptuel. Elle prévoit en effet une puissance dissipée proportionnelle à ω^2 et pas ω^4 comme le suggéraient les résultats établis sur une charge accélérée. Pour de plus amples informations sur la force de rayonnement, nous renvoyons le lecteur au cours de A. Aspect, C. Fabre et G. Grynberg (pages 177-179) consultable à l'adresse http://catalogue.polytechnique.fr/Files/p_PHY551_T1_Ed05.pdf.

le noyau. La sphère électronique étant uniformément chargée, le champ en un point intérieur à celle-ci se calcule facilement par le théorème de Gauss et s'écrit $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{-Ze\vec{NP}}{4\pi\epsilon_0 a_0^3}$. La force exercée par les électrons sur le noyau a donc pour expression $\vec{F}_{e/n} = -\frac{-Z^2 e^2 \vec{NP}}{4\pi\epsilon_0 a_0^3}$.

2. D'après le principe des actions réciproques, la force $\vec{F}_{n/e}$ que le noyau exerce sur le nuage électronique est l'opposé de la force $\vec{F}_{e/n}$, soit, en notant $\vec{r} = \vec{PN} = -\vec{NP}$: $\vec{F}_{n/e} = -\frac{-Z^2 e^2 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 a_0^3}$.

En posant $K = \frac{Z^2 e^2}{4\pi\epsilon_0 a_0^3}$, cette force est bien du type élastique.

3. À la position d'équilibre du nuage électronique, les forces appliquées se compensent. Si on note \vec{r}_0 cette position, on a donc :

$$-K\vec{r}_0 - Ze\vec{E}_{\text{stat}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{r}_0 = \frac{-Ze\vec{E}_{\text{stat}}}{K} = \frac{4\pi\epsilon_0 a_0^3 \vec{E}_{\text{stat}}}{Ze}.$$

Dans le cas de l'atome d'oxygène $Z = 8$, ce qui fournit $|\vec{r}_0| \simeq 3,1 \cdot 10^{-7} a_0$. Le déplacement du nuage électronique est très faible devant le rayon typique de l'atome et le modèle de rappel élastique semble donc parfaitement raisonnable.

Le modèle exposé ici est généralement nommé modèle de l'électron élastiquement lié. Dans le cadre de cette modélisation, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la sphère électronique s'écrit :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -K\vec{r} - \frac{m}{\tau} \frac{d\vec{r}}{dt} - Ze\vec{E}(t)$$

soit, en introduisant la pulsation propre du système $\omega_0^2 = K/m$ et le facteur de qualité $Q = \omega_0 \tau$:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2 \vec{r} = -\frac{Ze}{m} \vec{E}(t). \quad (23.19)$$

Remarquons maintenant que connaître la position du nuage électronique à un instant donné permet de connaître exactement le moment dipolaire de l'atome à ce temps. Nous savons en effet que, pour un système de charges électriquement neutre, le moment dipolaire \vec{P} s'obtient en multipliant la charge totale positive (ici portée par le noyau, soit $q = Ze$) par le vecteur allant du barycentre des charges négatives vers celui des charges positives (soit ici $-\vec{r}$). En multipliant l'équation (23.19) par $-Ze$, nous obtenons :

$$\frac{d^2(-Ze\vec{r})}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d(-Ze\vec{r})}{dt} + \omega_0^2(-Ze\vec{r}) = \frac{Z^2 e^2}{m} \vec{E}(t)$$

soit, en revenant à la définition du moment dipolaire \vec{p} :

$$\frac{d^2 \vec{p}}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\vec{p}}{dt} + \omega_0^2 \vec{p} = \frac{Z^2 e^2}{m} \vec{E}(t). \quad (23.20)$$

Cette équation générale détermine totalement la valeur du moment dipolaire induit sur l'atome par un champ électrique donné. Nous nous intéressons dans la suite au cas d'une excitation du type sinusoïdal²⁰.

Test 23.3.

Pourquoi négliger la composante magnétique de la force de Lorentz?

Comparer l'ordre de grandeur de la force magnétique et celui de la force électrique agissant sur le nuage électronique pour une fréquence d'excitation dans le visible.

²⁰Pour un champ non sinusoïdal, la résolution se fait aisément dans le domaine de Fourier.

III.4. Moment dipolaire induit par un champ sinusoïdal

Considérons un champ électrique sinusoïdal agissant sur l'atome. Dans le cadre de notre modélisation, la dynamique du dipôle atomique induit par ce champ est pilotée par l'équation (23.20). Cette équation étant linéaire à coefficients constants, toute excitation du type sinusoïdal fournit une réponse du système à la même fréquence.

Notons ω la pulsation du champ excitateur et passons en notation complexe²¹ : nous avons $\vec{E}(t) = \vec{E}_\omega \exp(i\omega t)$ et nous cherchons $\vec{p}(t) = \vec{p}_\omega \exp(i\omega t)$. En injectant ces formes dans l'équation (23.20) on obtient :

$$-\omega^2 \vec{p}_\omega + i\omega \frac{\omega_0}{Q} \vec{p}_\omega + \omega_0^2 \vec{p}_\omega = \frac{Z^2 e^2}{m} \vec{E}_\omega$$

et finalement :

$$\vec{p}_\omega = \left(\frac{Z^2 e^2}{m \omega_0^2} \right) \frac{\vec{E}_\omega}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} = \epsilon_0 \underline{\alpha}(\omega) \vec{E}_\omega. \quad (23.21)$$

Ainsi, si l'excitation est sinusoïdale, le moment dipolaire atomique induit est d'amplitude²² proportionnelle à celle du champ excitateur. La quantité $\underline{\alpha}(\omega)$ introduite ici se nomme polarisabilité de l'atome à la pulsation ω ; elle traduit la capacité de l'atome à créer un dipôle²³ lorsqu'il est excité à une pulsation ω donnée. De façon explicite, cette quantité s'écrit :

$$\underline{\alpha}(\omega) = \frac{\alpha_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{i}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}, \quad \text{avec } \alpha_0 = \frac{Z^2 e^2}{\epsilon_0 \omega_0^2}. \quad (23.22)$$

La quantité α_0 est la polarisabilité statique de l'atome et, si le champ appliqué à l'atome est statique (*i.e.* $\omega = 0$), l'atome acquiert un moment dipolaire $\vec{p}_0 = \epsilon_0 \alpha_0 \vec{E}$. Si le champ n'est pas statique et qu'il oscille à ω donnée, le champ électrique prend la forme $\vec{E}(t) = \Re[\vec{E}_0 \exp(i\omega t)]$, et le moment dipolaire induit $\vec{p}(t)$ s'obtient en prenant la partie réelle du vecteur complexe qui lui est associée. Cette opération fournit :

$$\vec{p}(t) = \epsilon_0 |\underline{\alpha}(\omega)| \vec{E}_0 \cos(\omega t + \Phi_\omega)$$

$$\text{où } |\underline{\alpha}(\omega)| = \frac{\alpha_0}{\left[\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad \text{et} \quad \tan(\Phi_\omega) = \frac{\frac{1}{Q^2} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1}.$$

Si ces expressions générales sont un peu compliquées (pour une représentation graphique, voir figure 23.6), il est toutefois utile de dégager trois cas limites particuliers.

²¹Cela revient à écrire l'équation différentielle dans le domaine de Fourier. Les coefficients \vec{E}_ω et \vec{p}_ω s'identifient, dans cette représentation, aux composantes de Fourier associées à la pulsation ω du champ excitateur et du moment dipolaire.

²²Attention : si à une pulsation ω donnée les champs complexes \vec{E}_ω et \vec{p}_ω sont proportionnels, ce n'est généralement pas le cas des champs réels $\vec{E}(t)$ et $\vec{p}(t)$. Seules les amplitudes de ces derniers sont généralement proportionnelles et ces deux champs sont déphasés.

²³Dans l'hypothèse d'une répartition sphérique de charge de l'entité polarisable (ici l'atome), on remarque que le dipôle induit est colinéaire au champ excitateur. Si les entités considérées ne sont pas à géométrie sphérique, ce n'est généralement pas le cas.

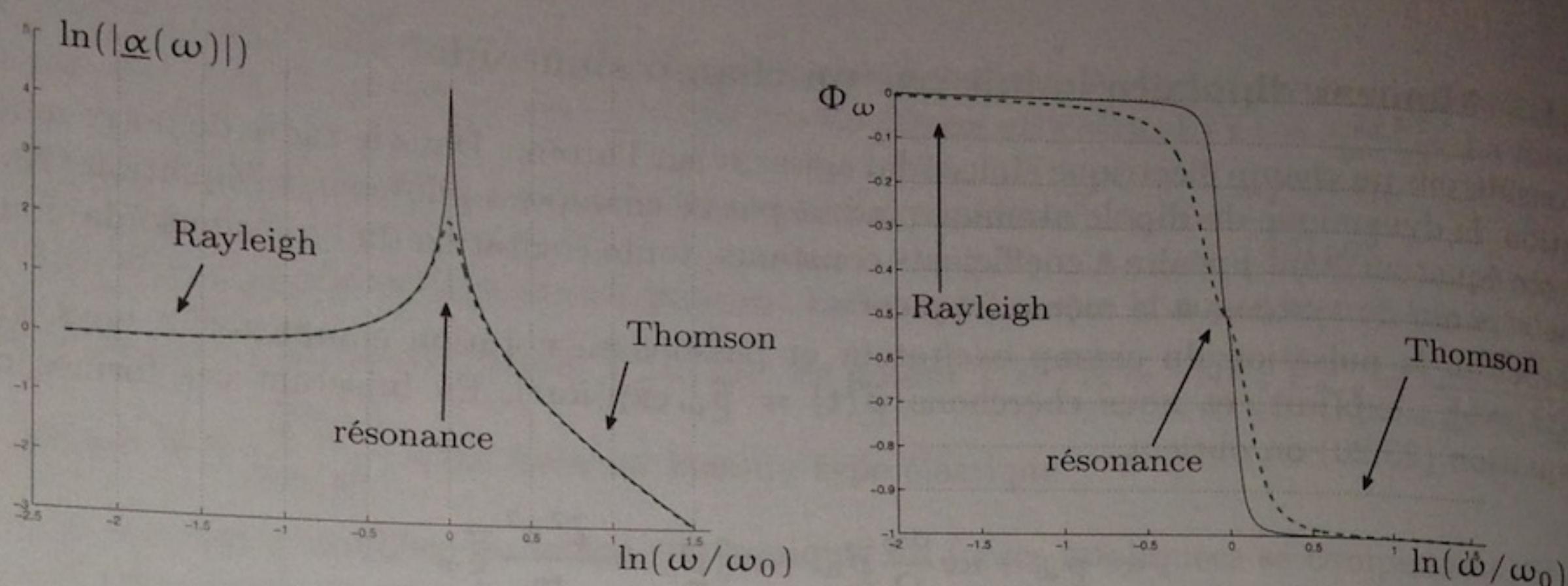


FIG. 23.6. Évolution du module de la polarisabilité d'un atome (à gauche) et du déphasage Φ_ω entre champ exciteur et dipôle induit (à droite) en fonction de la fréquence. Les courbes noires correspondent à un facteur de qualité $Q = 10$, celles en couleur à un facteur de qualité $Q = 100$.

◊ **Régime de Rayleigh** ($\omega \ll \omega_0$) :

$$|\underline{\alpha}(\omega)| \simeq \alpha_0 \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \right) \quad \text{et} \quad \Phi_\omega \simeq 0. \quad (23.23)$$

Lorsque les fréquences d'excitation sont faibles devant la fréquence propre de vibration de l'atome, le dipôle généré voit donc son amplitude contrôlée majoritairement par la susceptibilité statique et celui-ci oscille en phase avec le champ inducteur.

◊ **Régime de résonance** ($\omega \simeq \omega_0$) :

La résonance a lieu lorsque $|\underline{\alpha}(\omega)|$ est maximum, soit $\omega = \omega_r = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$. En pratique, le facteur de qualité de l'oscillateur est très grand (pour le césium, il est par exemple de l'ordre de 10^8) et la fréquence de résonance s'identifie à la fréquence propre de vibration du nuage électronique. Dans le régime de résonance, on a alors :

$$|\underline{\alpha}(\omega)| = \frac{\alpha_0 Q}{\left[1 + 4Q^2 \left(\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad \text{et} \quad \Phi_\omega \simeq -\frac{\pi}{2}. \quad (23.24)$$

On remarque que, pour $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$, la polarisabilité de l'atome évolue de façon lorentzienne. On notera que, du fait des grandes valeurs du facteur de qualité, le modèle de l'électron élastiquement lié ne fait pas réellement sens dans ce domaine de fréquence puisque des oscillations de très grandes amplitudes du nuage sont alors générées.

◊ **Régime de Thomson** ($\omega \gg \omega_0$) :

$$|\underline{\alpha}(\omega)| \simeq \alpha_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left(1 + \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \right) \quad \text{et} \quad \Phi_\omega \simeq -\pi. \quad (23.25)$$

Lorsque les fréquences d'excitation sont beaucoup plus grandes que la fréquence propre de vibration de l'atome, l'amplitude du dipôle induit décroît proportionnellement au carré de la pulsation. Le dipôle induit est alors en opposition de phase avec le champ inducteur.

Test 23.4.

Polarisabilité des atomes et volume atomique

En remontant à l'expression de α_0 et en utilisant les résultats de l'exercice corrigé 23.4, montrer que la polarisabilité des atomes doit augmenter avec leur taille. Déduire de ce calcul l'unité de la polarisabilité.

III.5. Rayonnement des dipôles induits : retour sur l'expérience

Puisque nous avons caractérisé les dipôles induits sous l'action d'un champ électrique extérieur, intéressons-nous aux champs rayonnés par ceux-ci. La puissance totale rayonnée par un dipôle d'amplitude p_{ω} oscillant à la pulsation ω est donnée, conformément à la formule (23.11), par :

$$\langle P_{\text{ray}}^{(\omega)} \rangle = \frac{\omega^4 |p_{\omega}|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\omega^4 |E_{\omega}|^2 |\alpha(\omega)|^2}{12\pi\epsilon_0 c^3}. \quad (23.26)$$

La puissance rayonnée par un dipôle induit est donc proportionnelle au carré de l'amplitude du champ exciteur, c'est-à-dire à la puissance de celui-ci. Dans l'expérience abordée en début de section, le champ électrique employé appartient au domaine visible ($\omega \approx 10^{14} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$) et les particules qui vont se polariser sous l'action du champ électrique sont des molécules lipidiques du lait²⁴. Si la quantité de lait introduite dans l'eau est faible, ces molécules ne se groupent pas sous forme de micelles géantes²⁵ et leurs tailles restent petites devant les longueurs d'ondes du spectre visible. De plus, leurs fréquences électroniques propres sont de l'ordre de $10^{16} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ et nous sommes typiquement dans un cas où $\omega \ll \omega_0$. En injectant la forme asymptotique (23.23) de la polarisabilité dans l'expression (23.26) de la puissance rayonnée, nous obtenons :

$$\langle P_{\text{Rayleigh}}^{(\omega)} \rangle = \frac{\omega^4 \alpha_0^2 |E_{\omega}|^2}{12\pi c^3}. \quad (23.27)$$

La puissance rayonnée par les dipôles, proportionnelle à ω^4 , est donc d'autant plus importante que la fréquence est élevée. Le rayonnement bleuté observé vient précisément de cela : les dipôles absorbent une partie du rayonnement incident (rayonnement directif) et le réémettent, sous forme de rayonnement dipolaire, dans tout l'espace (rayonnement non directif). C'est pour les pulsations de plus haute fréquence (qui correspondent au bleu) que ce phénomène est le plus important. Le faisceau de lumière blanche initiale va donc, au cours de son cheminement dans la cuve, s'appauvrir petit à petit en rayonnement de haute fréquence. En sortie de cuve, la quasi-totalité de l'énergie associée au bleu a été absorbée et réémise de façon dipolaire par les molécules lipidiques, et seules les composantes de plus basse pulsation (correspondant au rouge) sont transmises avec une faible atténuation²⁶ à travers la cuve. On observe donc un cercle rouge en sortie de cuve, et un rayonnement bleuté diffus dans la cuve. Soulignons que ce phénomène est parfaitement visible dans la vie quotidienne puisqu'il est une des principales causes de la couleur bleue du ciel : dans l'atmosphère, le rayonnement solaire subit une diffusion Rayleigh qui appauvrit le rayonnement direct transmis en couleur bleue. Cette couleur étant diffusée par l'atmosphère, le ciel nous apparaît bleu. Au lever et au coucher du soleil, cet effet est très visible du fait de la grande épaisseur d'atmosphère traversée alors par la lumière solaire ; la lumière transmise de façon directe est alors essentiellement rouge²⁷.

Comme nous l'avons souligné en introduction, l'aspect bleuté n'est pas le seul fait remarquable de cette expérience : il y a, de plus, une polarisation de la lumière diffusée dans la cuve. Ici encore, les caractéristiques du rayonnement dipolaire permettent d'expliquer cette propriété : la lumière émise initialement est non polarisée et le champ électrique exciteur est, conformément aux équations de Maxwell, transverse. Si la direction de propagation du faisceau incident est

²⁴L'expérience fonctionne d'ailleurs mieux avec du lait entier.

²⁵Si la taille des particules diffusantes devient comparable à λ , la diffusion de la lumière a toujours lieu mais les résultats observés sont alors très différents. Pour une introduction à ce régime de diffusion (régime de Mie), voir A. Masson et R. Dupeyrat, *Bulletin de l'union des physiciens*, 540(1) (1971).

²⁶Du fait du comportement en ω^4 de la puissance rayonnée, la partie rouge du spectre est seize fois moins diffusée que la partie bleue de celui-ci.

²⁷On prendra cependant garde à ne pas interpréter cette couleur rouge comme provenant uniquement de la diffusion Rayleigh car la réfraction atmosphérique a aussi une part de responsabilité dans ce phénomène.

suivant \vec{e}_z , des moments dipolaires sont excités de façon équiprobable suivant \vec{e}_x et \vec{e}_y . Si la direction d'observation se fait selon \vec{e}_x , conformément au diagramme de rayonnement 23.3, aucune puissance ne nous parvient des dipôles excités suivant cette direction ; le champ électrique reçu par l'observateur ne provient donc que des dipôles polarisés suivant \vec{e}_y et ceux-ci émettent un champ électrique polarisé suivant cette même direction : on a donc bien une polarisation du rayonnement observé²⁸. De même, la lumière émise par diffusion Rayleigh dans le ciel est polarisée²⁹.

III.6. Pour aller plus loin : influence de la polarisabilité sur la propagation de la lumière

Nous avons dérivé l'expression de la polarisabilité dans le modèle de l'électron élastiquement lié et nous avons vu que celle-ci permet de comprendre et d'interpréter quelques faits optiques notables. En réalité, l'importance du rayonnement dipolaire en optique est énorme car il permet de relier l'optique et l'électromagnétisme. On montre en effet en électromagnétisme que, dans un milieu matériel isolant³⁰ isotrope et non magnétique, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= -\frac{\operatorname{div} \vec{P}}{\epsilon_0}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu_0 \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \end{aligned} \quad (23.28)$$

où $\vec{P}(r,t)$ désigne la densité volumique de dipôles électriques induits à la position \vec{r} , à la date t , par le champ électrique.

Au contraire des équations de Maxwell dans le vide, ce système d'équation n'est pas fermé et il est nécessaire de modéliser le comportement de la matière pour pouvoir déterminer la valeur des champs électrique et magnétique en tout temps et en tout point. Cette étape de modélisation est difficile dans le cas général, mais on peut montrer que, pour des champs électriques d'amplitude suffisamment faible, il est raisonnable de supposer que la densité volumique de dipôles induits est reliée de façon linéaire au champ électrique ; on suppose donc que si³¹ le champ électrique prend la forme $\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp(i\omega t)$, alors il existe une quantité $\chi(\vec{r},\omega)$, nommée susceptibilité électrique, telle que $\vec{P}(\vec{r},t) = \epsilon_0 \chi(\vec{r},\omega) \vec{E}(\vec{r},t)$. Dans le cas général, c'est-à-dire en dehors de toute modélisation préalable, les équations de Maxwell conduisent à une équation de propagation du champ électrique qui s'écrit :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\frac{\operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{P})}{\epsilon_0} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (23.29)$$

²⁸Notons qu'à l'inverse, la lumière transmise de façon directe n'est pas polarisée.

²⁹On pourra s'en convaincre en observant le ciel à travers un polariseur. Pour faire cette expérience, il est très important de ne pas observer la lumière transmise de façon directe (non polarisée et de forte puissance, donc dangereuse) mais la lumière diffusée ; on regardera donc le ciel à travers un polariseur en visant un point à 90° de la position apparente du soleil.

³⁰Ces matériaux sont généralement nommés diélectriques. Pour une présentation pédagogique de la physique des diélectriques, voir D. Sivoukhine, *Cours de physique générale : Électricité*, Éditions Mir (1983).

³¹L'hypothèse de linéarité ne fournit une proportionnalité que si le champ électrique est de pulsation fixée. On est ici dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire et ce sont les coefficients de Fourier temporels des deux champs qui sont proportionnels. On notera de plus que, dans un matériau non isotrope (comme un cristal liquide en phase smectique), la polarisabilité est généralement un tenseur d'ordre 2 (pour simplifier, une matrice 3 × 3) et que le champ électrique et le vecteur polarisation ne sont alors généralement pas colinéaires.

équation qui se résume à l'équation de d'Alembert en l'absence de dipôles induits (donc dans le vide) et qui permet, dans le cadre des milieux linéaires et non homogènes, de retrouver les lois de l'optique géométrique³².

Test 23.5.

Équation de propagation du champ électrique dans un milieu diélectrique

Retrouver l'équation de propagation (23.29) en utilisant les équations de Maxwell dans la matière.

Le cas des milieux non homogènes étant un peu compliqué, il ne sera pas abordé ici et nous allons nous concentrer sur celui des milieux homogènes linéaires. Pour ces milieux, si le champ électrique est de la forme $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp(i\omega t)$, la densité volumique de dipôles s'écrit $\underline{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \underline{\chi}(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t)$ et l'équation de propagation (23.29) se résume, dans le cas d'un champ électrique monochromatique, à :

$$\Delta \vec{E} - \frac{1 + \underline{\chi}(\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \quad (23.30)$$

Pour des matériaux diélectriques, homogènes, linéaires et isotropes, un champ électrique monochromatique se propage donc suivant une équation de d'Alembert identique à celle vérifiée dans le vide, mais cette propagation se fait à une vitesse différente de la vitesse de la lumière dans le vide.

Test 23.6.

Propagation dans un LHI

Démontrer en utilisant les équations de Maxwell que, dans un milieu linéaire, homogène et isotrope (LHI), un champ électrique de la forme $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp(i\omega t)$ suit bien l'équation de propagation (23.30).

Il est tentant, à ce stade, de dire que la vitesse de propagation de la lumière dans le matériau est donnée par $c_\phi = c / \sqrt{1 + \underline{\chi}(\omega)}$, mais c'est généralement faux car la quantité $\underline{\chi}(\omega)$ est généralement un nombre complexe. Pour s'en convaincre, considérons un milieu diélectrique très dilué, un gaz atomique par exemple. Sous l'action d'un champ électrique extérieur, les atomes du gaz vont acquérir un certain moment dipolaire. Si le champ électrique incident varie sur une distance typique ℓ , et si cette distance est grande devant la distance typique séparant les atomes du gaz, on peut considérer que dans un volume mésoscopique $d\tau$ centré sur une position \vec{r} , tous les atomes perçoivent le même³³ champ électrique $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}) \exp(i\omega t)$ et acquièrent donc le même moment dipolaire $\underline{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \underline{\alpha}(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t)$. La densité volumique de moment dipolaire est alors donnée par $\vec{P}(\vec{r}, t) = n_a \underline{P}(\vec{r}, t)$, $n_a(\vec{r})$ étant la³⁴ densité volumique d'atome à la position \vec{r} . On a donc finalement :

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = n_a \epsilon_0 \underline{\alpha}(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \underline{\chi}(\omega) \vec{E}(\vec{r}, t) \Rightarrow \underline{\chi}(\omega) = n_a \underline{\alpha}(\omega). \quad (23.31)$$

Comme la polarisabilité $\underline{\alpha}(\omega)$ des atomes est *a priori* une grandeur complexe, il en est bien de même de la quantité $1 + \underline{\chi}(\omega)$; l'équation d'onde (23.30) ne se résume donc généralement pas à une équation de d'Alembert.

Si l'équation (23.30) n'est pas une équation de d'Alembert, qu'est-elle alors ? Pour répondre à cette question, nous considérons le cas du gaz d'atome évoqué précédemment. Premièrement,

³²Voir L. Dettwiller, *Qu'est-ce que l'optique géométrique ?*, Dunod (1990).

³³Dans le cas de milieux denses, le champ électrique perçu par les atomes est notablement différent du champ électrique macroscopique \vec{E} qui agit sur le matériau. Pour des précisions sur ce sujet, voir R.P. Feynman, *Electromagnétisme 1*, Dunod (1999).

³⁴Nous supposons ici que la densité moyenne du gaz est fixée au moins localement. Entre autres, s'il y a des fluctuations temporelles de cette densité, celles-ci se font sur des échelles de temps beaucoup plus longues que les périodes d'oscillation du champ électrique.

on peut remarquer que si le champ électrique est de pulsation ω très différente de la pulsation caractéristique ω_0 des atomes, la polarisabilité de ceux-ci est essentiellement réelle et il en va donc de même de la susceptibilité du milieu. Si on note $\underline{\chi}(\omega) = \chi'(\omega) + i\chi''(\omega)$ les parties réelle et imaginaire de la susceptibilité, on a alors $\underline{\chi}(\omega) \simeq \chi'(\omega)$. Le champ électrique suit alors quasiment une équation de d'Alembert et se propage dans le milieu à une vitesse $c_\varphi(\omega) \simeq \frac{c}{\sqrt{1+\chi'(\omega)}}$; la quantité $n' = \sqrt{1+\chi'(\omega)}$ s'identifie alors à l'indice optique du milieu matériel. Notons au passage deux résultats.

1. Puisque, conformément à la relation (23.31), $\chi'(\omega)$ est proportionnel à la densité des atomes polarisables, cette vitesse de propagation tend bien vers c lorsque la densité tend vers 0. Plus généralement, l'indice optique d'un milieu dilué augmente linéairement avec sa densité (loi de Gladstone).
2. À très haute fréquence, la polarisabilité des atomes tend vers 0 et il en va donc de même pour la susceptibilité du milieu et pour son indice optique. Les champs de hautes fréquences se propagent donc, dans la matière, à une vitesse proche de c et sont très peu sujets à la réfraction au passage d'une interface.

Si la pulsation d'excitation se rapproche de ω_0 , la polarisabilité des atomes ne s'identifie plus à sa partie réelle et la susceptibilité du milieu devient donc complexe. Supposons alors que dans le milieu existe un champ électrique de la forme $\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp(i\omega t - i\vec{k} \cdot \vec{r})$. L'équation de propagation (23.30) appliquée à ce champ fournit l'équation de dispersion :

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{1 + \underline{\chi}(\omega)}{c^2} \omega^2$$

et la susceptibilité étant complexe, il en est de même du vecteur \vec{k} .

Si on introduit $1 + \underline{\chi}(\omega) = (n'(\omega) + i n''(\omega))^2$, on remarque alors que le vecteur d'onde³⁵ s'écrit $\vec{k} = \vec{k}' + i \vec{k}''$ avec $\vec{k}' = \frac{\omega n'(\omega)}{c} \vec{u}'$ et $\vec{k}'' = \frac{\omega n''(\omega)}{c} \vec{u}''$. Le champ électrique se propageant dans le matériau a donc pour expression :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left(i\omega \left[t - \frac{n'(\omega)}{c} \vec{u}' \cdot \vec{r} \right] \right) \exp \left(\frac{\omega n''(\omega)}{c} \vec{u}'' \cdot \vec{r} \right)$$

et il y a donc propagation du champ dans la direction \vec{u}' à une vitesse $c_\varphi(\omega) = c/n'(\omega)$, ainsi qu'une modification de l'amplitude de ce champ due à $n''(\omega)$, et donc à $\alpha''(\omega)$. Dans la plupart des cas, la partie imaginaire du vecteur d'onde a pour effet de faire décroître le champ électrique au cours de la propagation et traduit une absorption de l'énergie électromagnétique du champ par la matière. La partie réelle du vecteur d'onde est relative à la propagation et, $n'(\omega)$ dépendant de la fréquence, le milieu est dispersif. Pour finir, notons qu'on peut montrer, dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire, que la dispersion d'un milieu conditionne sa faculté à absorber le rayonnement et réciproquement³⁶.

³⁵Rien n'impose *a priori* que \vec{k}' et \vec{k}'' soient colinéaires; par exemple, pour les ondes évanescentes, ces deux vecteurs d'ondes sont orthogonaux.

³⁶Pour de plus amples informations sur le lien entre absorption et dispersion, voir A. Alastuey, M. Magro et P. Pujol, *Physique et outils mathématiques*, CNRS Éditions-EDP Sciences (2008).

le vecteur unitaire \vec{e}_r étant défini par $\vec{e}_r = \vec{r}/r$. Comme on le voit sur cette expression, la contribution majoritaire au champ magnétique provient, à grande distance, des modifications temporelles du dipôle électrique de la distribution. Un calcul similaire permet d'exprimer le champ électrique, calcul plus aisé à réaliser en se plaçant en base sphérique⁶. On trouve alors :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2\cos(\theta) \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} \right) + \frac{Q_{\text{tot}}}{r^2} \right] \vec{e}_r + \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{rc^2} \right] \vec{e}_\theta \quad (23.5)$$

Q_{tot} représentant la charge totale de la distribution⁷. Ainsi, pour un champ électrique créé par une distribution de charges et de courants dépendant du temps, les contributions à grande distance proviennent du caractère dynamique du dipôle et, dans le cas stationnaire, le champ obtenu s'identifie au champ dipolaire statique de la distribution.

Revenons sur les hypothèses prises pour faire les calculs. Nous avons toujours supposé une très grande distance d'observation par rapport à la taille typique du domaine \mathcal{D} , soit $a \ll r$. De plus, nous avons négligé les temps de propagation dans le milieu, ce qui se résume à $cT \gg a$, si T est le temps typique de variation des grandeurs électriques (distribution des charges et des courants). En ordre de grandeur nous avons :

$$\frac{\dot{p}(t')}{r^2 c} \simeq \frac{p}{r^2 c T} \quad \text{et} \quad \frac{\ddot{p}}{rc^2} \simeq \frac{p}{rc^2 T^2}.$$

Deux cas limites sont identifiables⁸.

◊ **Zone de champ proche** ($a \ll r \ll cT$) : même si la distance est grande devant la taille du système, elle reste petite devant la distance parcourue par l'information sur une durée typique de variation. Dans ce cas de figure :

$$\vec{B}(M,t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}(t) \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \text{et} \quad \vec{E}(\vec{r},t) \simeq \frac{3(\vec{p}(t) \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}(t)}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad (23.6)$$

et les champs perçus sont alors conformes à ceux calculés dans une limite quasi stationnaire ; entre autres, il décroissent au moins proportionnellement à l'inverse du carré de la distance aux sources. On note de plus que l'état électrique du système de sources est perçu sans retard (on a $\vec{p}(t)$ et plus $\vec{p}(t')$).

◊ **Zone de rayonnement** ($a \ll cT \ll r$) : la distance d'observation est cette fois-ci très grande et le retard induit par la vitesse finie de propagation de l'information est primordial. On a alors :

$$\vec{B}(M,t) \simeq \frac{\mu_0 \ddot{p}(t') \sin(\theta)}{4\pi c r} \vec{e}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{E}(\vec{r},t) \simeq \frac{\ddot{p}(t') \sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \vec{e}_\theta \quad (23.7)$$

et les champs perçus décroissent proportionnellement à l'inverse de la distance aux sources. Dans la zone de rayonnement, on a donc des champs qui décroissent lentement.

Pour la majorité des applications concrètes, les situations physiques rencontrées sont celles de la zone de rayonnement et il convient de détailler ce cas de figure. Les champs perçus à grande distance possèdent plusieurs caractéristiques importantes.

⁶ Voir pour les détails J.-P. Pérez, R. Carles et R. Fleckinger, *Électromagnétisme : fondements et applications*, Dunod (2002).

⁷ Du fait des hypothèses de domaine limité, la charge totale Q_{tot} est nécessairement invariante au cours du temps pour assurer la conservation globale de la charge électrique.

⁸ Le domaine de rayonnement intermédiaire, correspondant à $a \ll r$ et $r \simeq cT$, ne sera pas envisagé ici, car trop complexe et ne correspondant pas à de nombreux cas pratiques.