

Lampe à incandescence, corps noir, loi de Stefan et filtre passe-bas thermique

par André DEIBER

Lycée Fustel de Coulanges - 67000 Strasbourg
et Olivier KEMPF

IUFM d'Alsace - Site de Strasbourg

GRESEP Groupe de Recherche de l'IUFM d'Alsace et de l'Université Louis Pasteur

RÉSUMÉ

L'exploitation des données sur la résistivité du tungstène, des moyens expérimentaux limités et des méthodes rudimentaires permettent la vérification quantitative de la loi de Stefan en négligeant, a priori, les phénomènes convecto-diffusifs [1]. L'association d'une lampe à incandescence et d'une photodiode met en évidence l'évolution spectrale de la lumière émise en fonction de la température. Une étude plus poussée montre que l'inertie thermique du filament implique un comportement en fréquence assimilable à un filtre passe-bas thermique. Une analyse précise de cette dernière expérience montre que l'on peut effectivement négliger la convection, du moins pour une ampoule de faible puissance (6 V ; 0,5 A). Comme nous le montrons expérimentalement en annexe, ce modèle n'est pas transposable à une ampoule 220 V.

L'exploitation d'un tableur permet de dégager la grande richesse expérimentale d'un filament d'ampoule à incandescence. La situation se révèle totalement ouverte quant aux hypothèses portant sur les échanges énergétiques du filament avec le reste de l'ampoule, il devient possible de développer une véritable stratégie de recherche sur un substrat expérimental archi-classique et ce dès le niveau du lycée du moins pour certaines parties.

1. LE FILAMENT DE LA LAMPE SE COMPORTE COMME UN CORPS NOIR

D'après la loi de Stefan, la puissance d'origine thermique rayonnée par un corps noir varie en T^4 . En régime permanent, la puissance rayonnée est aisée à relier à la puissance électrique absorbée. La première difficulté porte sur la détermination de la température du filament.

1.1. La résistance du filament est une grandeur thermométrique

Le filament des lampes à incandescence est souvent constitué de tungstène très pur. D’après JONES et LANGMUIR [2] la variation de la résistivité ρ de ce métal est une fonction quasi parabolique de la température absolue T dans le domaine de température 900 K-3000 K.

T [K]	ρ [$10^{-8} \Omega \cdot m$]
900	22,0
1200	31,0
1500	40,4
1800	50,0
2100	60,1
2400	70,4
2700	81,0
3000	92,0
3300	103
3600	115

Tableau 1

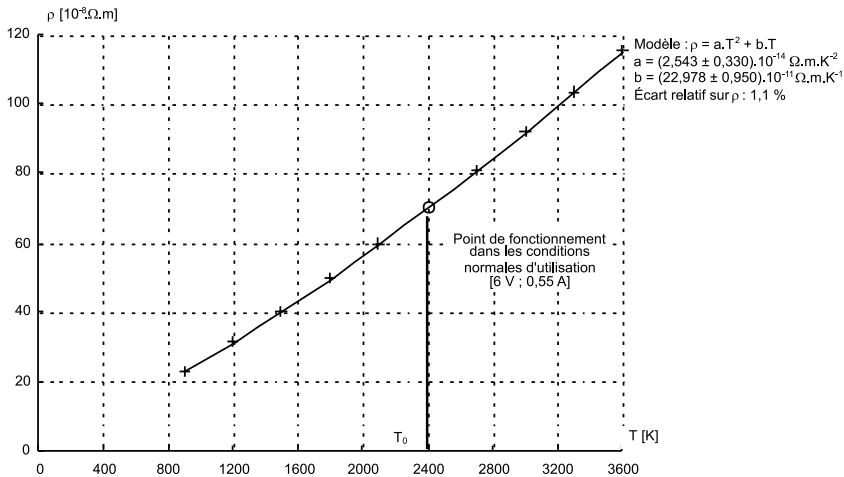


Figure 1 : Résistivité d’un filament de tungstène en fonction de la température T .

Une modélisation des données effectuée par un tableur scientifique donne :

$$\rho = aT^2 + bT$$

avec :

$$a = 2,54 \cdot 10^{-14} \, \Omega \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-2}$$

et :

$$b = 23,0 \cdot 10^{-11} \, \Omega \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1}$$

La résistance R du filament supposé cylindrique dépend de ρ selon $R = \rho \frac{1}{S}$. Par ailleurs, le coefficient de dilatation linéique $\alpha = \frac{1}{\ell} \left. \frac{d\ell}{dT} \right|_{T_0 = 2400 \text{ K}}$ vaut $4,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$.

Une variation de température de 1 000 K entraîne une variation relative de $\ell \left(= \frac{\Delta \ell}{\ell} \right)$ de l'ordre de 1 %, qui s'applique à la longueur du filament et à son diamètre, d'où une variation relative de $\frac{\ell}{S}$ de – 1 % si la dilatation du filament est isotrope. Or la résistivité ρ varie environ d'un facteur 2 de 2 000 K à 3 000 K, donc on peut négliger la dilatation du filament devant les variations de $\rho(T)$, et l'on obtient :

$$R(T) = K [aT^2 + bT]$$

En règle générale, la température de fonctionnement habituel du filament est voisine de 2 400 K, et ceci quelle que soit la puissance électrique de l'ampoule et sa tension d'alimentation (c'est la longueur du filament et sa section qui font la différence).

La connaissance de la valeur de R pour la température $T_0 = 2400 \text{ K}$ donne accès à K suivant $K = \frac{R(T_0)}{aT_0^2 + bT_0}$, où $R(T_0)$ représente la valeur expérimentale de la résistance du filament pour 2 400 K, donc pour la tension d'alimentation normale U_0 prévue par le constructeur.

La relation $R(T) = K[aT^2 + bT]$ est aisée à inverser en :

$$T = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a \frac{R}{K}}}{2a} > 0$$

1.2. Point de fonctionnement et température du filament

On étudie la caractéristique d'une lampe électrique de type (6 V ; 0,5 A ces valeurs ne sont pas critiques) pour des valeurs relativement élevées de la tension d'alimentation ($0 \leq E \leq 9 \text{ V}$).

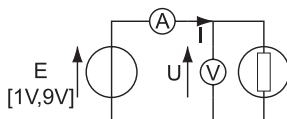


Figure 2

Lors de la modification de la tension d'alimentation, la température s'ajuste très rapidement à sa valeur d'équilibre. La mesure de U et I entraîne directement la connaissance de $R = \frac{U}{I}$ donc de T .

Les données I et U introduites dans un tableur (vingt points suffisent) donnent directement la résistance du filament soit :

$$R = \frac{U}{I}$$

On admet encore que pour le point de fonctionnement nominal mesuré (6 V ; 0,55 A continu), la température du filament est égale à 2 400 K [3, 4]. Cela nous permet de déterminer le coefficient K du filament par $K = \frac{R(2400 \text{ K})}{a \times (2400 \text{ K})^2 + b \times 2400 \text{ K}}$. On

obtient, avec $R(2400 \text{ K}) = 10,8 \, \Omega$, la valeur de $K = \frac{10,8 \, \Omega}{6,99 \cdot 10^{-7} \, \Omega \cdot \text{m}} = 15,5 \cdot 10^6 \text{ m}^{-1}$

(les valeurs numériques précises dépendent du type de lampe retenu).

La relation $T = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4a \frac{U}{I} \frac{1}{K}}}{2a} > 0$ permet de calculer, *via* le tableur, les

diverses températures pour les points de fonctionnement (U ; I). Celles-ci varient entre 1 200 K et 2 800 K.

Suivant le point de fonctionnement, on constate une forte augmentation de la résistance avec la température.

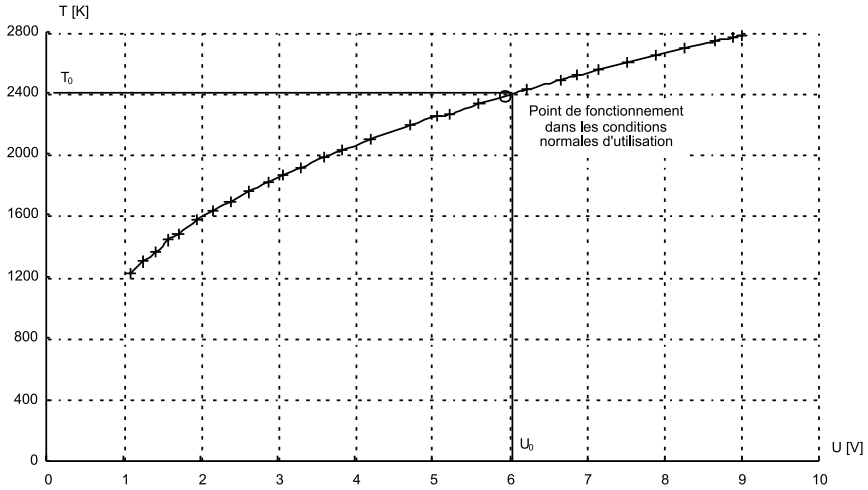


Figure 3 : Température d'un filament de tungstène en fonction de la tension U aux bornes de la lampe à incandescence.

1.3. Bilan énergétique du filament

1.3.1. Détermination de l'exposant de la loi de Stefan

Les échanges énergétiques du filament avec le milieu extérieur sont *a priori* complexes. Pour l'instant, nous retenons l'hypothèse de deux types d'échanges. Le filament absorbe une puissance électrique $P_e = UI$ et les pertes thermiques du filament assimilé à un corps noir se font exclusivement par rayonnement. La puissance thermique perdue par rayonnement est, d'après la loi de Stefan, proportionnelle à T^4 si on néglige la variation de S_{lat} avec T . La puissance thermique reçue par le filament en provenance de l'ampoule en verre à la température T_a est aussi proportionnelle à T_a^4 .

À l'équilibre thermique, on a donc :

$$P_e + \sigma S_{lat} (T_a^4 - T^4) = 0$$

et :

$$UI = \sigma S_{lat} (T^4 - T_a^4)$$

où σ désigne la constante de Stefan-Boltzmann, et S_{lat} la surface latérale du filament.

Pour confirmer ce modèle, on peut tenter de modéliser $P_e = f(T)$ par :

$$P_e = c (T^4 - T_a^4)$$

en négligeant la variation S_{lat} avec T , les paramètres c et T_a sont ajustés par régression. On constate alors que l'influence de T_a sur la courbe est faible (cf. figure 4).

On peut aussi tenter une modélisation du type $P_e = c (T^n - T_a^n)$ qui donne n voisin de 4,05.

Nous constatons que l'accord avec la loi de Stefan est tout à fait satisfaisant. La forme de la caractéristique d'une lampe à incandescence traduit un rayonnement du filament typique d'un corps noir.

Pour un public averti, la courbe $\ln(P_e) = f(T)$ est pratiquement un segment de droite de pente 4,05. En pratique $T^4 \gg T_a^4$ dans le domaine étudié d'où $P_e \propto T^4$ et $\ln(P_e) = 4 \ln(T) + c'$ (cf. figure 5).

1.3.2. Critique du modèle

♦ Le fait de trouver par régression une valeur 4,05 proche de la valeur de l'exposant 4 de la loi de Stefan ne doit pas faire illusion. D'une part, l'intervalle de confiance sur la pente a est de 8 %. C'est la valeur élevée de cet exposant qui garantit le succès de cette mesure. En effet dans le domaine de température étudié (1 400 - 3 200 K), une variation de 4 à 4,04 entraîne une variation relative des puissances de $\left(\frac{3200}{1400}\right)^{0,04} - 1 \cong 3,4 \%$. Cet égard peut englober tous les défauts de notre modèle.

♦ La constante c obtenue par modélisation est égale à σS_{lat} . En modélisant le filament par un cylindre de longueur ℓ et de rayon r , on peut déterminer ℓ par la relation :

$$\ell = \frac{c}{\sigma 2\pi r}$$

On peut mesurer le rayon du filament à l'aide d'un microscope doté d'un oculaire micrométrique. Pour la lampe étudiée, r est voisin de 0,03 mm et $\sigma = 5,68 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$; on en déduit une longueur théorique du filament de 0,5 cm, ce qui est manifestement trop peu. En effet comme le point de fonctionnement est [6 V ; 0,5 A ; 2 400 K], on connaît dans ces conditions la résistance du filament ($R = 12 \Omega$) et sa résistivité ($\rho = 70,4 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$); on en déduit la valeur du rapport $\frac{\ell}{\pi r^2} = \frac{R}{\rho}$; puis la valeur de $\ell \cong 50 \text{ mm}$ connaissant r .

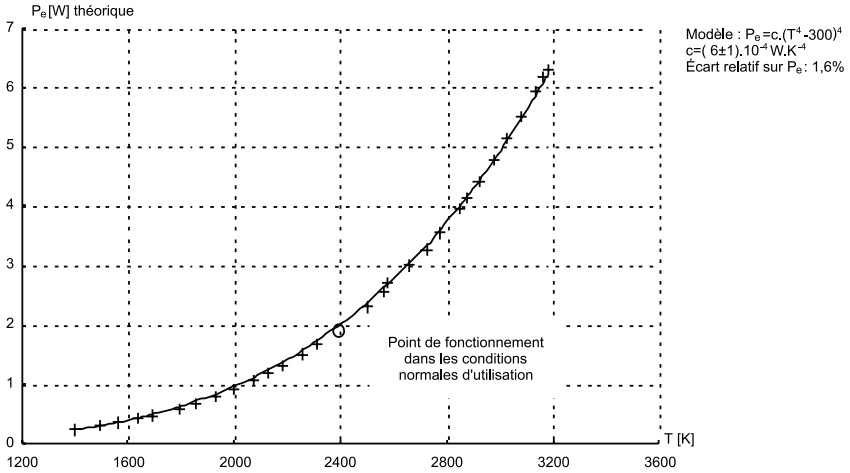


Figure 4 : Puissance électrique en fonction de la température du filament.

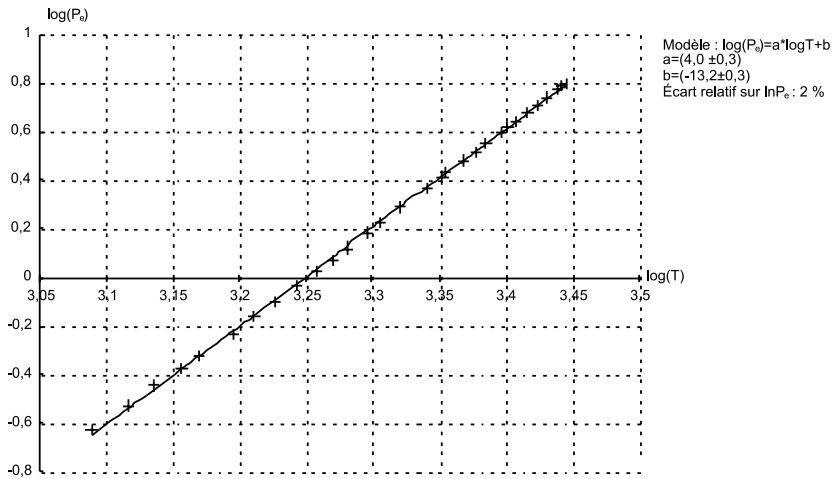


Figure 5 : $\ln(P_e)$ en fonction de $\ln(T)$.

Mais n'oublions pas que le tungstène n'est pas un corps noir idéal : l'émissivité ε du tungstène vaut 0,115 à 1 000 K et 0,28 à 2 000 K. En retenant l'hypothèse du corps noir, nous avons sous-estimé ℓ . D'autre part, la loi de Stefan s'applique au rayonnement d'un corps convexe. Or compte tenu la structure spiralée du filament, certains tronçons absorbent l'énergie émise par d'autres parties du filament.

♦ Ce dernier peut *a priori* échanger de l'énergie par conduction avec les tiges métalliques servant de support. La photographie de la figure 6 prise avec un caméscope numérique au 1/8000 (pour ne pas saturer les capteurs CCD) montre que le filament rayonne de manière uniforme sur toute sa longueur. Le raccord en température avec les tiges-supports ne concerne donc qu'une petite fraction du filament.

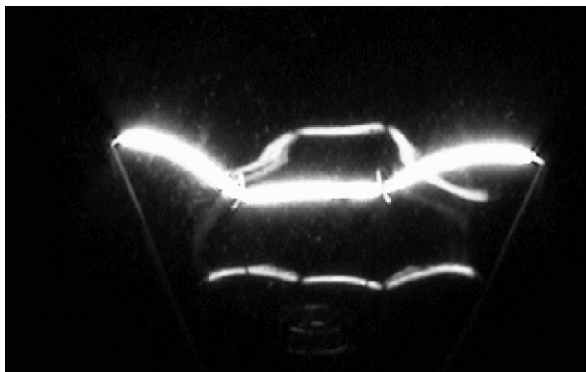


Figure 6

Admettons que la température varie de 1 000 K sur une distance de 2 mm comptée le long du filament. Le gradient de température $\frac{1000}{2 \cdot 10^{-3}} = 510^5 \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ associé à la conductivité thermique du tungstène $\lambda = 174 \text{ WK}^{-1} \text{ m}^{-1}$ donne une densité de courant thermique $j_Q = 8,72 \cdot 10^7 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. La section πr^2 du filament s'avère assez faible pour limiter les pertes par conduction à $j_Q \pi r^2$, soit $2,7 \cdot 10^{-1} \text{ W}$, (en tenant compte des deux extrémités du filament) à comparer à la puissance nominale de $6 \times 0,5 = 3 \text{ W}$.

♦ Enfin le filament échange de l'énergie avec le gaz essentiellement par convection.

Seule une étude fine de la courbe $P_e = f(T)$ permettrait d'interpréter quantitativement ces effets.

Le modèle simple développé plus haut s'avère aussi performant qu'un modèle, du type :

$$P_{ther} = \sigma S_{lat} (T^4 - T_a^4) + h S_{lat} (T - T_a)$$

obtenu en ajoutant un terme convecto-diffusif. Nous reviendrons sur ce point ultérieurement.

Une expérience simple permet de montrer que dans ces ampoules de faibles puissances, il y a peu de gaz. En chauffant le verre de l'ampoule au bec Mecker, on constate que l'enveloppe de verre s'effondre sur elle-même, signe d'un net différentiel de pression en faveur de la pression atmosphérique même à température interne élevée.

1.4. Pourquoi le verre s'échauffe-t-il ?

L'échauffement du verre n'est pas la preuve de l'échauffement préalable du gaz par le filament. Ce dernier émet un rayonnement dont la répartition spectrale de la densité volumique de rayonnement u_λ est donnée par la relation de Planck :

$$u_\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{1}{\left[\exp\left(\frac{hc}{k\lambda T}\right) - 1 \right]}$$

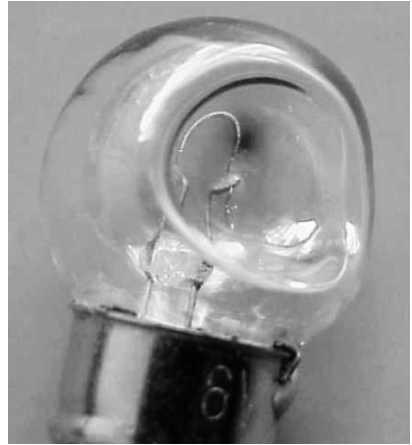


Figure 7 : Ampoule en verre après fusion.

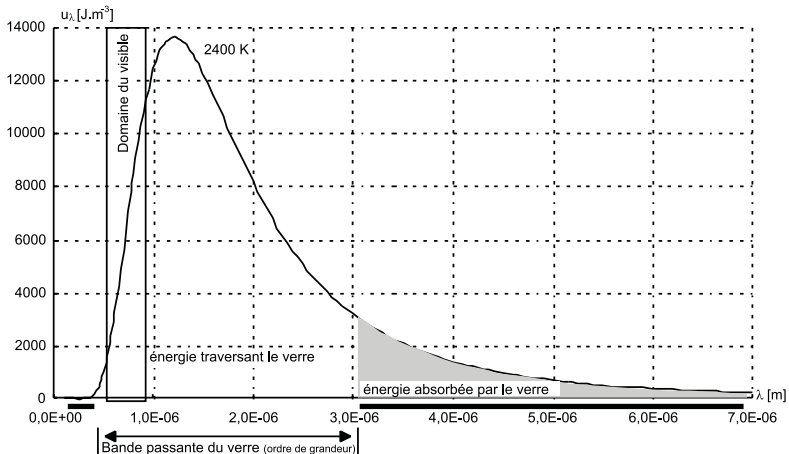


Figure 8 : Courbe de Planck pour $T = 2\,400\text{ K}$.

Rappelons que la puissance émise par unité de surface de corps noir est proportionnelle à la densité volumique de rayonnement présent dans une cavité thermostatée.

Le graphe de la figure 8 indique :

- qu'une faible partie de ce rayonnement se situe dans le domaine visible (3,5 % à 2 400 K), l'essentiel étant situé dans le proche infrarouge. Or le verre de l'ampoule n'est pas forcément transparent dans ce domaine de longueur d'onde. On peut admettre une bande passante du verre situé entre $0,4\ \mu\text{m}$ et $3\ \mu\text{m}$;
- qu'une partie sensible du rayonnement émis par le filament est arrêtée par le verre. L'échauffement qui en résulte est d'ailleurs relativement lent à s'établir vu l'inertie thermique de l'ampoule et du culot. On pourrait étudier l'évolution de la température du verre à l'aide d'un thermocouple.

L'échange thermique entre le filament et le verre se fait donc probablement par les deux mécanismes : rayonnement et convecto-diffusif (*via* le gaz).

1.5. Et si on empêchait les photons de sortir

Pour contrecarrer ces échanges énergétiques on entoure une ampoule électrique avec un film de papier aluminium. Comme le montre le graphe de la figure 9 la caractéristique est modifiée, ce qui signifie que pour une tension d'alimentation donnée la température en présence de l'aluminium est supérieure à la température en son absence.

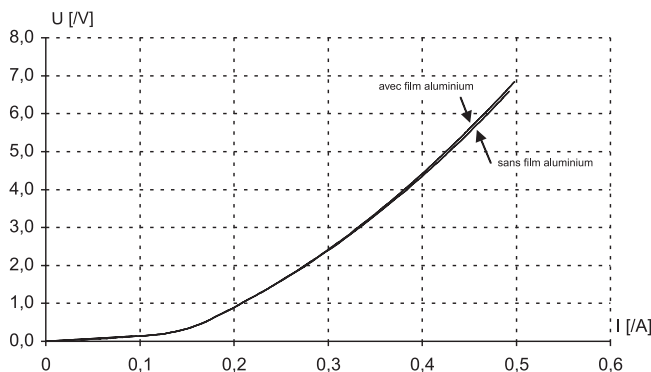


Figure 9 : Comparaison des caractéristiques avec et sans film aluminium.

Néanmoins le film aluminium n'est pas une paroi adiabatique pour le rayonnement. Les nombreuses réflexions aboutissent à une absorption totale car le coefficient de réflexion en énergie est toujours inférieur à 1, même s'il en est voisin.

2. MISE EN ÉVIDENCE DE L'ÉVOLUTION DE LA COMPOSITION SPECTRALE DE LA LUMIÈRE AVEC LA TEMPÉRATURE

Pour mesurer des flux lumineux, on dispose de capteurs optiques (photodiode, photorésistor, ...) et des capteurs thermiques (des thermocouples mesurent une élévation de température suite à l'absorption du rayonnement).

Les photodiodes ne réagissent de manière sensible que dans un domaine étroit de longueur d'onde dans le visible et le proche infrarouge pour l'essentiel ($0,4 \mu\text{m} \leq \lambda \leq 1,4 \mu\text{m}$). À titre d'exemple, le graphe de la figure 10 donne la sensibilité spectrale relative $S_{rel} = f(\lambda)$ de la photodiode BPW34 en fonction de la longueur d'onde.

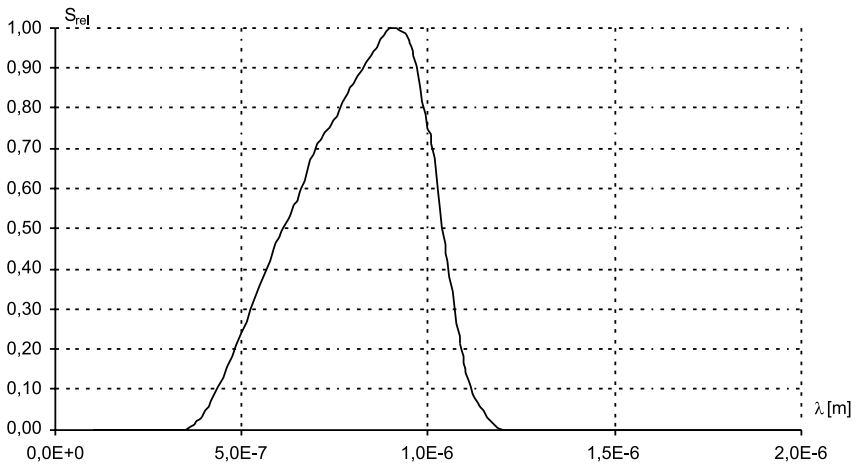


Figure 10

On peut trouver les caractéristiques de la photodiode BPW34 sur le site de la société Siemens à l'adresse suivante :

<http://www.infineon.com/products/37/pdf/bpw34.pdf>

Les thermopiles ont une réponse spectrale très plate dans la mesure où elles absorbent la quasi-totalité du rayonnement émis par les sources usuelles.

L'usage de ces deux capteurs va permettre de dégager l'évolution de la composition spectrale de la lumière avec la température.

2.1. Usage des capteurs optiques

La tension de sortie U_s du montage ci-dessous est l'image du flux lumineux Φ_ℓ capté par la photodiode BPW34.

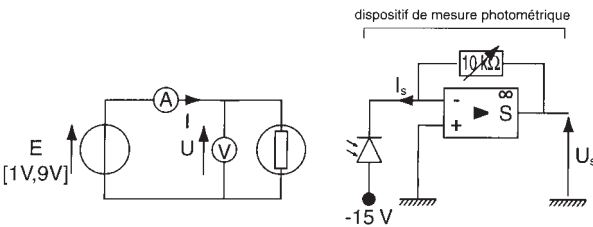


Figure 11

2.1.1. Puissance électrique absorbée et réponse de la photodiode

La puissance électrique $P_e(T)$ absorbée par le filament, transformée en puissance rayonnée partiellement absorbée par le verre, est comparée au flux lumineux capté ϕ d'image U_s .

On représente graphiquement $P_e(T)$ et $U_s(t)$ de telle sorte que les deux extrémités des courbes coïncident. Le graphe de la figure 12 montre clairement que la puissance électrique n'est pas proportionnelle au flux lumineux capté.

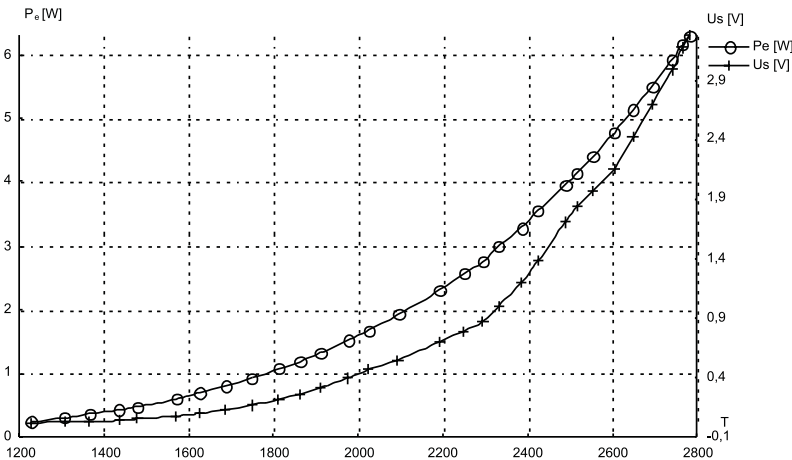


Figure 12 : Puissance électrique et tension de sortie u_s en fonction de T .

2.1.2. Que mesure réellement la photodiode ?

D'après ce qui précède, la réponse de la photodiode croît plus rapidement que la puissance électrique absorbée par le filament. On peut comprendre ceci de manière qualitative en remarquant que l'échauffement du filament modifie la composition spectrale du rayonnement émis. Le maximum de la loi de répartition suit la loi de déplacement de Wien $\lambda_m T = C^{te}$. En conséquence la proportion d'énergie rayonnante captée par la photodiode augmente avec la température. Mais il est possible d'aller plus loin (avec des étudiants d'enseignement supérieur) en vérifiant de manière quantitative que la réponse de la photodiode est le produit de la sensibilité relative $S_{rel}(\lambda)$ du capteur et de la composition spectrale $u_\lambda(\lambda)$ de la source.

Illustrons ce point en superposant les deux graphes de la figure 13 $u_\lambda(\lambda)$ et $S_{rel}(\lambda) \times u_\lambda(\lambda)$ pour une température de 2 250 K : la réponse de la photodiode est représentée par l'aire située sous la courbe $S_{rel}(\lambda) \times u_\lambda(\lambda)$ (en hachuré).

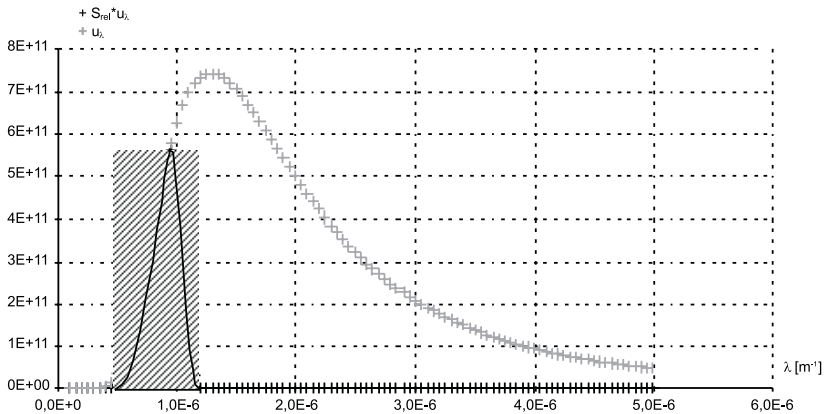


Figure 13

On peut donc procéder ainsi pour diverses températures et confronter cette aire (issue d'un calcul théorique *via* un tableur) avec la réponse expérimentale de la photodiode dont U_s est l'image.

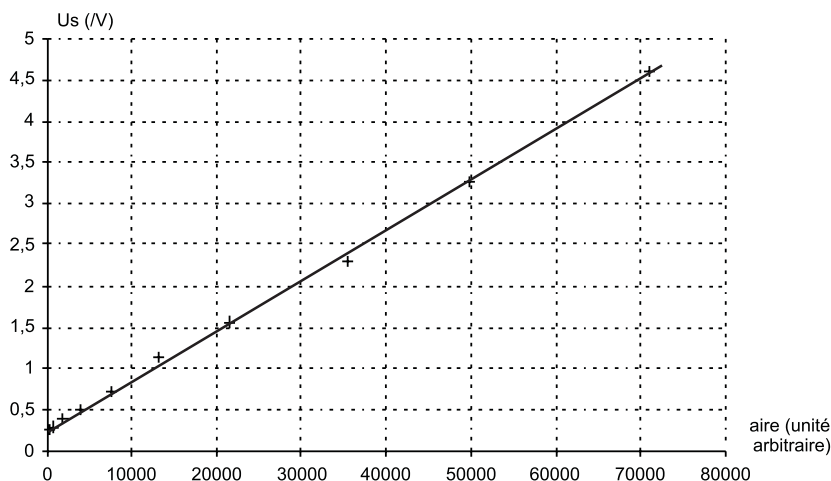


Figure 14

Il est clair que l'accord entre les deux courbes est tout à fait satisfaisant si on tient compte de lumières parasites. On entrevoit qu'il est donc possible d'estimer la température du filament directement à partir de la réponse de la photodiode *via* la relation empirique $u_s = kT^{7,2}$. Cette expression sera largement utilisée dans l'étude du comportement en fréquence du filament.

2.1.3. Introduction d'un filtre interférentiel : vérification directe de la loi de Planck

On associe au capteur optique un filtre interférentiel, qui ne transmet qu'une bande spectrale très étroite $\Delta\lambda = 10$ nm du rayonnement incident. Un filtre interférentiel est une lame à faces parallèles d'épaisseur e , taillée dans un matériau transparent d'indice de réfraction n , dont les faces sont traitées de telle sorte qu'elles soient très réfléchissantes. À une onde incidente de longueur d'onde λ est associée, par le jeu des réflexions au sein de la lame une série d'ondes émergentes d'amplitude décroissante. L'onde incidente arrivant sur la lame en incidence normale, le déphasage ψ entre une onde transmise et l'onde ayant subi deux réflexions supplémentaires (sans déphasage de π) s'exprime en fonction de n , e et λ selon $\psi = \frac{2\pi}{\lambda} 2ne$. Les radiations transmises par le filtre sont celles qui réalisent la condition d'interférences constructives entre deux ondes successives, soit $\lambda_t = \frac{2ne}{m}$ avec m entier.

Lorsqu'un tel filtre est interposé entre la lampe et la photodiode, l'amplificateur opérationnel délivre une tension image du flux émis par le filament dans l'intervalle de longueurs d'onde $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$. Comme la bande passante du filtre est très petite devant l'étendue spectrale du filament aux températures considérées, la réponse de l'association filtre / photodiode / amplificateur opérationnel est proportionnelle au flux surfacique émis par un corps noir en équilibre thermodynamique :

$$\frac{d\phi_e}{d\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \times \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{k_B \lambda T}\right) - 1} \quad (\text{loi de Planck})$$

Par ailleurs la bande passante du filtre se situe en deçà de l'extremum de la distribution spectrale, on peut donc appliquer l'approximation de Wien en négligeant l'unité devant l'exponentielle. En théorie le logarithme de la tension de sortie de l'amplificateur opérationnel est une fonction affine de $1/T$.

En pratique lorsque l'ampoule est éteinte, la tension de sortie affiche une valeur résiduelle de 0,26 V liée aux lumières parasites et aux défauts électroniques. En représentant $\ln(U_s - 0,26)$ en fonction de $1/T$ on obtient une droite de pente $5,8 \cdot 10^4$ K, à comparer à la valeur théorique $\frac{hc}{k_B \lambda} = 2,9 \cdot 10^3$ K pour $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ (filtre vert à l'observation directe par transparence).

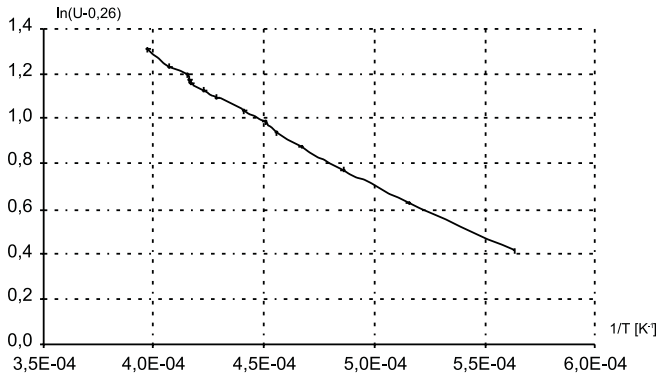


Figure 15

Si la forme de la courbe et l'ordre de grandeur sont satisfaisants, il faut néanmoins chercher une explication au désaccord numérique. On peut supposer que la radiation $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$ correspond à l'ordre d'interférence $m = 2$, ce qui implique l'existence d'une

autre radiation transmise par le filtre et captée par la photodiode $\lambda' = 1 \mu\text{m}$ ($m = 1$). Dans cette hypothèse, les valeurs théorique et expérimentale s'accordent bien. Vu la plus grande sensibilité de la photodiode à $1 \mu\text{m}$ tout se passe comme si c'était la seule longueur d'onde transmise.

3.2. Usage d'une thermopile

On procède de même avec une thermopile, qui n'est qu'une association en série de thermocouples fixés sur un corps noir absorbant efficacement le rayonnement. Nos mesures ont été réalisées avec une antiquité d'âge vénérable, mais qui s'est avérée fort performante à l'usage.

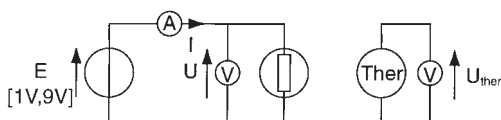


Figure 16

On constate que la tension de sortie du capteur suit les variations de la puissance électrique avec la température. Ce capteur absorbe à la fois le rayonnement émis par le filament et celui émis par le verre.

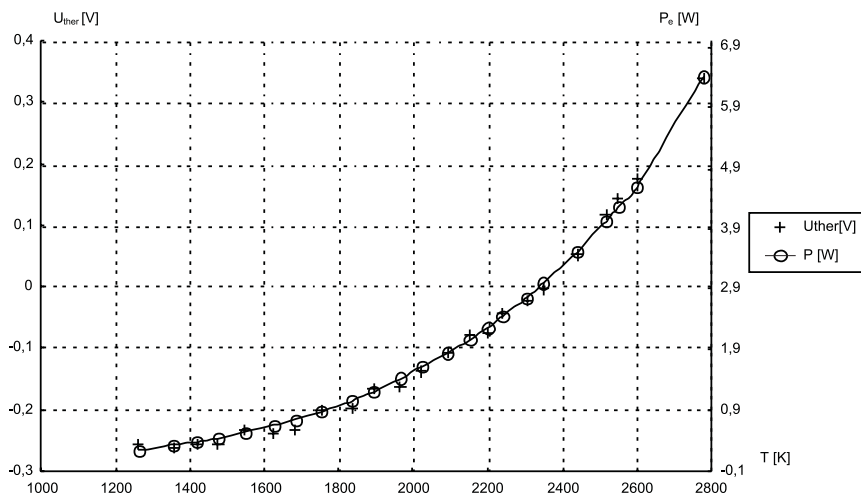


Figure 17 : Puissance électrique et tension U_{th} en fonction de la température.

Cela signifie bien que le capteur thermique absorbe le rayonnement incident dans un très large domaine de longueur d'onde allant de la fraction de micromètre à plusieurs dizaines de micromètres.

On entrevoit l'importance historique de ce dispositif de mesure dans l'étude expérimentale du corps noir lors de la deuxième moitié du XIX^e siècle.

3. INERTIE THERMIQUE DU FILAMENT : CONSÉQUENCES

L'inertie thermique du filament est suffisante pour avoir un effet sensible sur la luminosité lorsque la lampe est alimentée par une tension sinusoïdale de fréquence relativement basse.

3.1. Variation dans le temps de la luminosité de la lampe alimentée en basse fréquence

Pour mettre en évidence ce phénomène on propose le montage suivant :

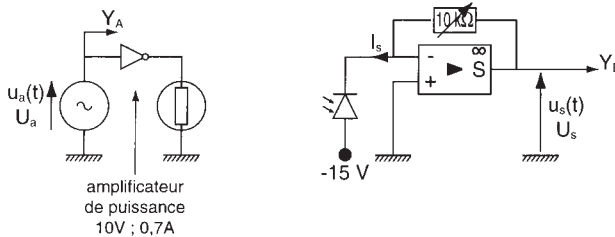


Figure 18

Si on dispose d'une lampe électrique ne nécessitant que 100 mA, on peut se passer de l'amplificateur de puissance et alimenter directement la lampe avec le générateur de fonctions sur la sortie 50 Ω . Vu la fréquence étudiée, le générateur de puissance n'introduit pas de déphasage par rapport au générateur de fonction.

L'aspect des oscillogrammes obtenus est le suivant :

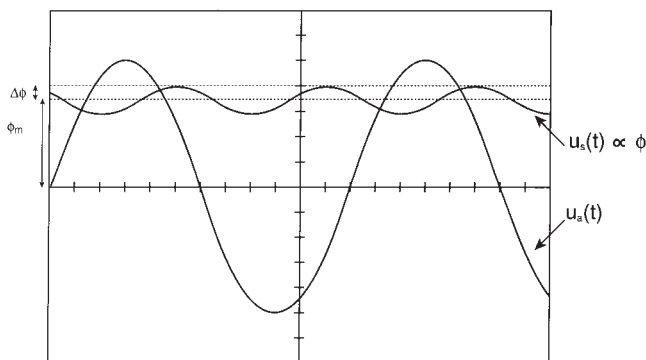


Figure 19 : Exemple pour $f_a = 10$ Hz.

Ceux-ci appellent plusieurs remarques qualitatives :

- la fréquence du flux lumineux mesurée par $u_s(t)$ est le double de la fréquence d'alimentation de la lampe ;
- le flux lumineux ϕ varie autour d'une valeur moyenne ϕ_m pratiquement insensible à la fréquence d'alimentation f_a ;
- par contre, l'amplitude $\Delta\phi$ de la composante alternative de la luminosité décroît rapidement lorsque f_a augmente ;
- lorsque la tension d'alimentation est maximale, le flux lumineux ne l'est pas, donc $\phi(t)$ est déphasé par rapport à $u_a^2(t)$.

On peut procéder à une analyse quantitative de ces phénomènes, mais l'outil mathématique nécessaire la réserve aux étudiants de l'enseignement supérieur.

3.2. Analyse quantitative

La puissance P_s fournie par le générateur varie de manière périodique autour d'une valeur moyenne :

$$P_s = u(t) \cdot i(t) \cong \frac{u_a^2}{R_0} \cos^2 \left(\frac{\omega}{2} t \right) = \frac{U_a^2}{2 R_0} (1 + \cos(\omega t))$$

La fréquence de la puissance reçue par le filament est donc bien le double de la fréquence d'excitation $u_a(t)$. Le filament échange de l'énergie avec le milieu extérieur *via*

les phénomènes convecto-diffusif et le rayonnement. C'est l'inertie thermique du filament qui explique ce retard de phase entre le flux lumineux reçu par la photodiode et la puissance $P_g \propto \cos^2(\omega t)$.

La température $T(t)$ varie sinusoïdalement autour d'une valeur moyenne :

$$T(t) = T_0 + \theta(t)$$

avec $\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi)$, $\omega = 4\pi f_a$ et $\theta_m \ll T_0$.

Les oscillations de température autour d'une valeur moyenne T_0 vont induire un flux lumineux ϕ variant de manière périodique entre $\phi_m - \Delta\phi$ et $\phi_m + \Delta\phi$.

La photodiode ne reçoit qu'une petite partie de la puissance émise par rayonnement (cf. § 2.1.). Une variation de température se traduit à la fois une modification de la composition spectrale du rayonnement émis par la loi de Wien $\lambda_m T = \text{cste}$ et une variation de la puissance émise ($\propto T^4$).

Ceci se retrouve dans la dépendance $u_s = kT^{7,2}$ donc $\Phi = K'T^{7,2}$. Dans le cadre de cette approximation, il vient :

$$\Phi = K'T^{7,2} = K'(T_0 + \theta(t))^{7,2} \cong K'T_0^{7,2} + 7,2 K'T_0^{6,2} \theta(t)$$

ce qui entraîne $\Delta\Phi = 7,2 K'T_0^{6,2} \theta_m$.

3.3. Modèle théorique : filtre passe bas thermique

Cette analyse théorique repose sur les hypothèses suivantes :

♦ Le filament absorbe l'énergie électrique et rayonne suivant la loi de Stefan. On néglige les phénomènes convecto-diffusifs, et l'énergie magnétique liée à l'inductance propre du filament spiralé car $2\pi L f_a \ll R_0$.

La confrontation avec l'expérience effectuée au § 3.5.2 montre que l'on peut négliger la différence entre $R(T)$ et $R(T_0) = R_0$ et la puissance absorbée vaut :

$$p_e(t) = \frac{U_a^2}{2 R_0} \cos^2\left(\frac{\omega}{2} t + \varphi\right)$$

♦ La capacité calorifique $C_p = mc_p$ du tungstène est constante dans le domaine de variation de T . En effet une variation de C_p introduirait un terme en $\theta \frac{d\theta}{dt}$ qui s'avère être du second ordre en $\frac{\theta_m}{T_0}$.

Dans ce contexte, le bilan énergétique du filament entre les instants t et $t + dt$ s'écrit :

$$mc_p \frac{dT}{dt} = -\sigma S_{lat} [T^4 - T_a^4] + p_e(t)$$

$$mc_p \frac{dT}{dt} \approx -\sigma S_{lat} [T_0^4 + 4 T_0^3 \theta - T_a^4] + \frac{U_a^2}{2 R_0} [1 + \cos(\omega t)]$$

En régime forcé, on sépare les constantes des fonctions sinusoïdales :

$$\sigma S_{lat} [T_0^4 - T_a^4] = \frac{U_a^2}{2 R_0}$$

et :

$$mc_p \frac{d\theta}{dt} + 4 \sigma S_{lat} T_0^3 \theta = \frac{U_a^2}{2 R_0} \cos(\omega t)$$

– La première équation signifie qu'en pratique la quatrième puissance de la température moyenne est proportionnelle à la puissance moyenne, car $T_a \ll T_0$. On a donc :

$$\sigma S_{lat} T_0^4 R_0 = \frac{U_a^2}{2} = U_e^2$$

ce qui entraîne $T_0 \propto U_a^{1/2}$. On retrouve la même relation entre la tension appliquée et la température moyenne, qu'en courant continu.

– La seconde équation peut s'écrire :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{4 \sigma S_{lat}}{mc_p} T_0^3 \theta = \frac{U_a^2}{2 mc_p R_0} \cos(\omega t)$$

En notation complexe, il en résulte que :

$$\theta = \frac{\theta_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec :

$$\omega_c = \frac{4 \sigma S_{lat}}{m c_p} T_0^3 = \frac{8 \sigma}{\rho r c_p} T_0^3$$

et :

$$\theta_0 = \frac{U_a^2}{8 \sigma S_{lat} R_0 T_0^3} \approx \frac{T_0}{4}$$

D'après ce modèle, le filament se comporte comme un filtre où la grandeur d'entrée est la composante alternative de la puissance électrique et l'écart en température joue le rôle de grandeur de sortie. On peut illustrer l'ensemble par une symbolique empruntée à l'électronique :

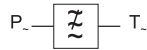


Figure 20

Notons que la fréquence de coupure de ce filtre passe-bas, $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ ne dépend pas de la longueur du fil. La valeur approchée de la fréquence de coupure est :

$$f_c = \frac{8 \sigma}{\rho r c_p} T_0^3 \approx 4 \text{ Hz}$$

(en prenant pour le tungstène vers 2 000°K, une capacité thermique massique :

$$c_p \approx 0,16 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

et une masse volumique de $19 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$). En tenant compte de l'émissivité $\varepsilon = 0,22$, la fréquence de coupure est encore plus basse, ce qui justifie l'approximation $\theta \ll T_0$ dans le domaine (5 Hz - 500 Hz). Remarquons d'ailleurs que la fréquence de coupure est indépendante de la longueur du filament qui s'élimine dans le rapport $\frac{S_{lat}}{m}$.

Ce modèle implique donc bien :

- un retard de phase de $\theta(t)$ par rapport à $u_a(t)^2$;
- une variation d'amplitude de la modulation du flux lumineux $\propto \theta(t)$ (cf. § 3.2.) avec la fréquence suivant la loi :

$$\Delta\phi(f) = \frac{\phi_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}$$

avec :

$$\phi_0 = 4\sigma T_0^3 \theta_0 S_{lat} = \sigma S_{lat} T_0^4 = \frac{U_a^2}{2 R_0}$$

Si de plus :

$$f \gg f_c$$

avec :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$$

on a :

$$\Delta\phi(f) \approx \frac{f_c}{f} \phi_0$$

Ce comportement du filament en filtre passe-bas thermique peut-être confronté avec succès à l'expérience.

3.4. Estimation expérimentale de la fréquence de coupure

Cette valeur de la fréquence est confirmée par l'étude d'un enregistrement vidéo (consultable sur Internet¹) de la mise sous tension de la lampe. En effet, on constate par l'analyse du niveau de gris moyen d'une surface englobant le filament, que l'on obtient le régime stationnaire selon une croissance exponentielle. La constante de temps est de l'ordre de 31 ms, soit une pulsation « associée » de $(32 \pm 2) \text{ rad.s}^{-1}$ correspondant à une fréquence d'environ $(5 \pm 1) \text{ Hz}$ (l'estimation de l'erreur sur la pulsation résulte de la modélisation de la courbe ci-dessous). On observera que l'on n'a pas introduit dans le modèle le point expérimental (0,0) ne sachant pas *a priori* ce qu'il se passe dans les quarante premières millisecondes.

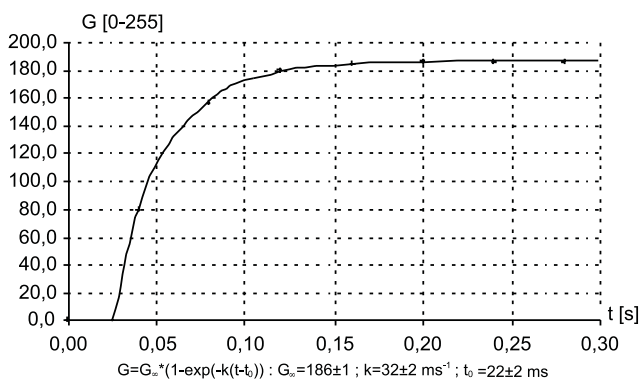


Figure 21

1. <http://www.cnam.fr/hebergement/udp/index.htm>

On pourra trouver dans l'annexe 3 des informations relatives aux traitements de l'image.

3.5. Diagramme de Bode thermique

3.5.1. Expérience

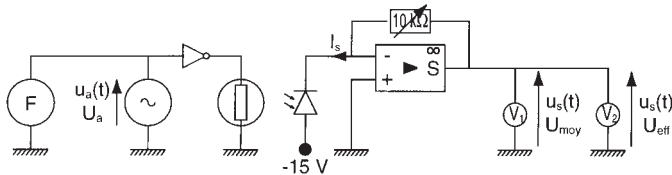


Figure 22

V_1 est un voltmètre continu qui mesure la tension moyenne de $u_s(t)$ (en mode DC) soit U_{moy} et donne une image de ϕ_{moy} .

V_2 est un voltmètre alternatif qui mesure la tension efficace de $u_s(t)$ (en mode AC) soit U_{eff} et donne une image de $\Delta\phi$.

F est un fréquencemètre donnant la fréquence f d'alimentation de la lampe (égale à la moitié de la fréquence de la composante alternative du flux lumineux).

On étudie $V_1(f)$ et $V_2(f)$ dans le domaine 5 Hz - 500 Hz.

3.5.2. Résultats expérimentaux : diagramme de Bode thermique

Les graphes U_{moy} ($= V_1$) et de U_{eff} ($= V_2$) (cf. figure 23) en fonction de f confirment l'analyse qualitative effectuée au § 3.1.

En coordonnées logarithmiques de base 10, les points se placent sur un segment de droite de pente égale à -1 (cf. figure 24).

Cela confirme le comportement fréquentiel de $\Delta\phi(\omega)$ suivant un filtre passe-bas du premier ordre.

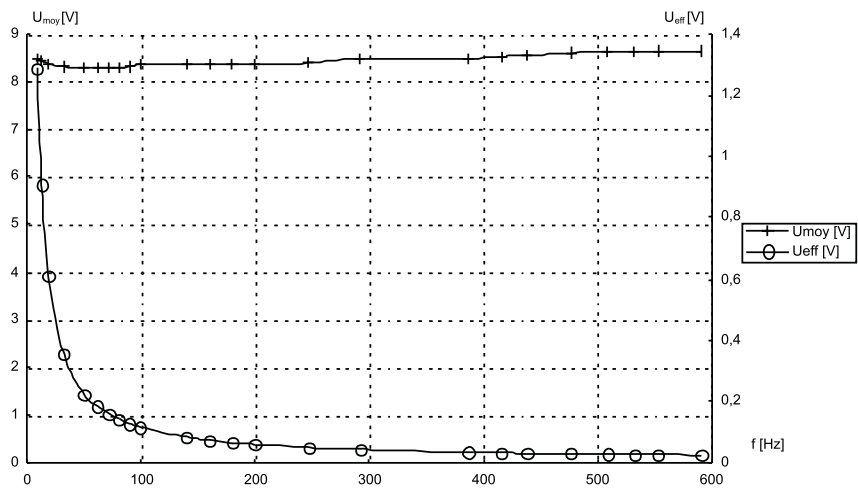


Figure 23 : U_{moy} ($= V_1$) et de U_{eff} ($= V_2$) en fonction de f .

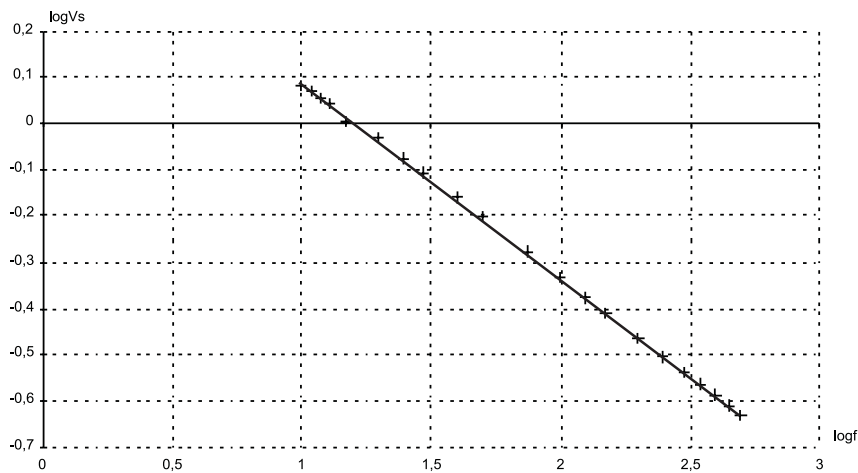


Figure 24

3.5.3. Peut-on effectivement négliger la convection pour une lampe de faible puissance ?

L'excellent accord fréquentiel ne doit pas nous leurrer ; on obtient le même comportement si nous prenons en compte les échanges thermiques filament-gaz modélisés par un terme en $hS_{lat} (T - T_a)$. Pour valider pleinement notre modèle, il faut donc lui faire subir un test plus sévère. Pour cela, étudions l'influence de la valeur efficace de la tension d'alimentation de l'ampoule, à fréquence fixée, sur l'amplitude $\Delta\Phi$ des oscillations de flux lumineux.

Comparons les deux diagrammes de Bode correspondant aux deux tensions d'alimentations de 6 V (température moyenne 2400 K) et 4 V (température moyenne 2100 K).

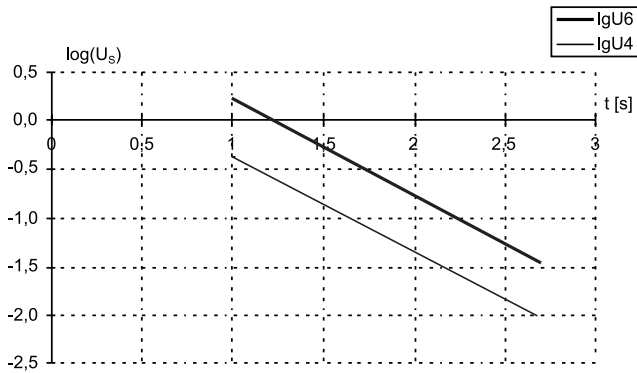


Figure 25

Les deux droites sont parallèles, ce qui confirme la nature du filtre. De surcroît l'influence de la température moyenne milite en faveur des pertes par rayonnement même si on ne peut pas encore, à ce stade exclure les pertes par convection.

Pour trancher définitivement notons que :

$$u_s = KT^{7,2} = K (T_0 + \phi_{\max})^{7,2} \approx KT_0^{7,2} + 7,2 KT_0^{6,2} \theta_{\max} = KT_0^{7,2} + 7,2 KT_0^{6,2} \frac{T_0}{4} \frac{\omega_c}{\omega}$$

d'où :

$$u_s = u_s(0) + K''T^{6,2+1+3}$$

car :

$$\omega_c \propto T_0^3$$

On en déduit $u_s(alt) \propto T_0^{10,2}$ puis $\log \frac{u_s(alt, 6V)}{u_s(alt, 4V)} = 10,2 \log \frac{T_0(6V)}{T_0(4V)}$ à une fré-

quence donnée. On trouve à 50 Hz respectivement 0,575 et 0,592 pour ces deux rapports. En conséquence on peut probablement négliger les phénomènes de convection dans le cas des ampoules à incandescence de faible puissance.

CONCLUSION

L'outil informatique puise sa force dans l'efficacité et la rapidité du traitement des données. Ne concevoir son usage que dans le contexte d'une acquisition *via* un système interfacé procède d'une vision réductrice. Un nombre minime de données est souvent suffisant pour une utilisation performante d'un tableur scientifique. Le nombre de points de mesure est peut-être moins important que l'exploitation optimale de ces valeurs afin d'en tirer toute l'information scientifique. Dans le cas précis de la lampe électrique, l'ordinateur permet de porter un autre regard sur une expérience somme toute banale.

REMERCIEMENTS

Nous tenons ici à remercier Bernard SIX pour son aide et la société BEMAC (Strasbourg) pour la mise à disposition de l'Imac DV.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] EVARISTE, «Vérification expérimentale directe de la loi de Stefan», La Brochure d'Evariste - Physique Chimie n° 110-113, 1994.
- [2] JONES et LANGMUIR, «Properties of Tungsten in General Electric Review», CRC Handbook of chemistry and Physics n° 67th, 1986-1987.
- [3] M. CHAPELET, «Le rôle du gaz dans les lampes à incandescence», BUP **86** n° 740, 3-6, janvier 1992.
- [4] J.-L. VIGNES et F. PERROT, «Données sur l'émission de la lumière et les lampes», BUP **87** n° 756, 1143-1151, juillet-août-septembre 1993.

Annexe 1

Dans quelle mesure peut-on généraliser cette étude au cas d'une ampoule de type 220 V ?

Il est déjà instructif d'étudier la caractéristique $U_{eff} = f(I_{eff})$ en faisant varier la tension d'alimentation entre 90 V et 250 V alternatif 50 Hz. Comme on se trouve en basse fréquence, on peut négliger l'inductance du filament pour en déduire la résistance puis la température T . Le graphe de la puissance électrique $U_{eff} \times I_{eff} = P_e$ en fonction de la température n'est pas en bon accord avec une loi du type $P_e \propto T^4$ comme le montre le graphe de la figure 26.

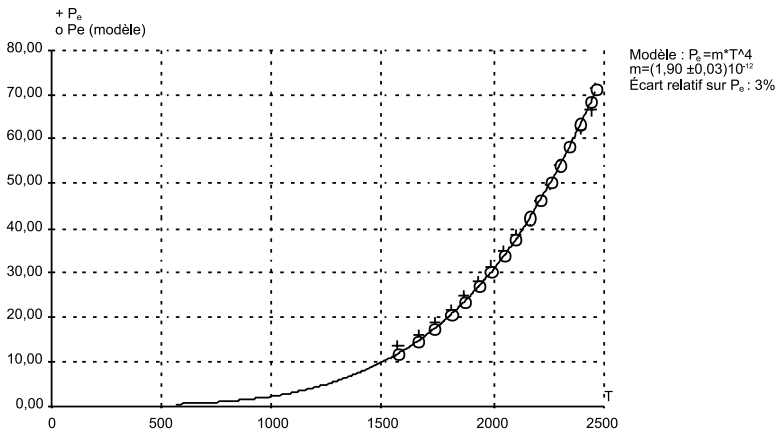


Figure 26

Le modèle peut être notablement amélioré en ajoutant un terme de type convecto-diffusif en $h (T - T_m)$. On peut prendre, comme température T_m une valeur moyenne (le graphe correspond au cas $T_m = 1000$ K), ce qui entraîne un bon accord avec la courbe.

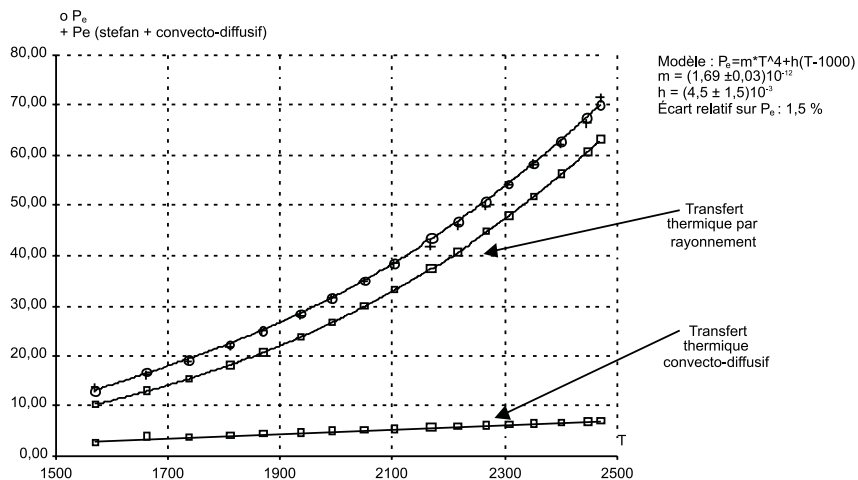


Figure 27

Comparons les deux contributions énergétiques par rayonnement et par convection : d'après les paramètres de la modélisation de $P_e = f(T)$, on trouve une contribution convective de l'ordre de 10 % de l'ensemble.

Annexe 2

Mise en évidence de la sublimation du filament

En survoltant sensiblement l'ampoule on peut mettre en évidence la sublimation du tungstène. Pour cela il suffit d'enregistrer à la fois l'image de l'intensité du courant et la tension aux bornes de l'ampoule sur une durée de vingt minutes en alimentant en 14 volts une lampe prévue pour 6 volts. On observe la tension étant pratiquement constante que l'intensité et par voie de conséquence la résistance statique augmente. Compte tenu de la modélisation on observe que la résistance statique augmente d'environ 11 % avant la rupture du filament. Comme la température du point triple du tungstène est de l'ordre de 3200 K, le filament se sublime ce qui se traduit par une diminution de son diamètre et corrélativement une augmentation de sa résistance. La perte en masse est de l'ordre de :

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{\Delta \pi r^2 L}{\pi r^2 L} = 2 \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta R}{R} \approx 11 \%$$

On peut observer le noircissement du verre, donc formation du métal à l'état finement divisé et à terme l'éclat métallique.

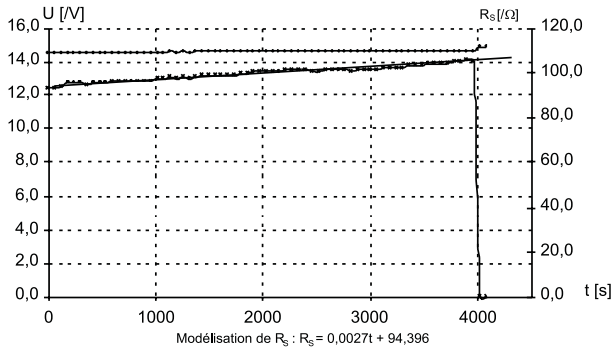


Figure 28

Annexe 3

Acquisition et Analyse d'image

L'allumage du filament de la lampe a été filmé avec une caméra numérique Canon MV200. Compte tenu des conditions particulières de tournage, les divers réglages (mise au point, durée d'exposition, vitesse d'obturation 1/8000) ont été réglés manuellement sur l'image du filament de la lampe en fonctionnement. Le film numérique a été directement récupéré sur un Imac DV (Imac Graphite Spécial Edition - Apple) grâce à la connexion firewire intégrée. Ensuite une sélection fine des dix images consécutives visualisant l'échauffement du filament a été réalisée *via* le logiciel Imovie. Cette petite séquence a ensuite été traitée par un logiciel d'analyse d'image médicale NIH Image² et le logiciel Imovie. Ce logiciel importe la séquence Quicktime en image à raison d'une par 40 ms. Il suffit alors de sélectionner la surface de l'image que l'on souhaite analyser. On peut alors mesurer la densité moyenne de la surface sélectionnée sur une échelle allant de 0 à 255. Cette densité est évaluée à partir de l'analyse des niveaux de gris (256) des différents pixels contenus dans le rectangle de sélection, ce qui réalise une mesure de l'intensité lumineuse moyenne correspondant à cette surface.

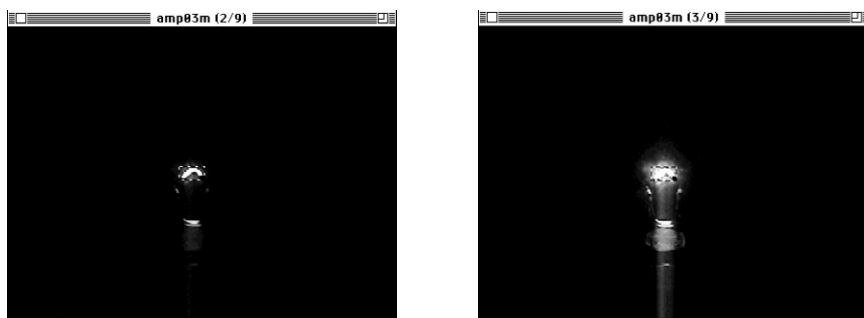


Figure 29 : Exemple de deux images consécutives avec le rectangle de sélection.

L'utilisation du logiciel Regressi, moyennant quelque petit calcul, permet alors de tracer et de modéliser la courbe.

2. NIH Image by Wayne Rasband National Institute of Health, USA.

<http://rsb.info.nih.gov/nih-image/>

NIH Image est du domaine public c'est un graticiel. Le logiciel est suivi commercialement dans une version gratuite chez Scion Corporation en version MACOS ou Windows.