

# LP30 Rayonnement dipolaire électrique.

15/48

16/28

## Introduction

Jusqu'à présent, nous avons étudié la propagation des ondes EM dans un milieu homogène au moyen de les produire. L'objectif prochain est de rayonnement (= transmission d'énergie sous la forme d'onde électromagnétique)

→ utilité : antenne téléphone portable

→ rayonnement naturel : onde de la vie coronaire (pourquoi le ciel est bleu?)

→ due à l'accélération des particules chargées.

Sources: Cap Prépa Renvoisé PC (seulement)

→ Pour cette leçon le chapitre de ce livre est un copié collé !

Prérequis :

→ équations de Maxwell, Loi de Faraday

→ stat source et potentiel

→ Définit du vecteur de Poynting énergie

→ Pour un truc + propre

cf la leçon de  
Leticia Yannick  
dans le dossier.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \lambda_0(\vec{E} + \operatorname{grad} \psi)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \lambda_0 \vec{A}$$

$$\operatorname{rot} (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \operatorname{grad} \psi$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \operatorname{grad} (\psi + \frac{\partial \phi}{\partial t})$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \psi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{A} = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \psi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = r + \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \vec{A} = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi \end{array} \right.$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi$$

## LP. 30 Rayonnement dipolaire

- I- Echant rapporté par un système de charges en mouvement.  
cas le plus général

I.1 Équation aux potentiels retardés. [cf slide]

L'équation reliant les potentiels ( $V, \vec{A}$ ) aux sources ( $\rho, \vec{j}$ )  
 en se placant dans la jauge de Lorentz :  $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\cancel{\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \xrightarrow{\text{cas non relativistique}} \quad V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} dP$$

$$\cancel{\vec{B} \cdot \vec{A} = \mu_0 \vec{j}} \quad \xrightarrow{\text{M}} \quad \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{j}(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} dP$$



On voit que la valeur du potentiel au point M, à l'instant t dépend  
 de la valeur des sources situées à la distance PM, à l'instant  $t - \frac{PM}{c}$ .

L'évolution du potentiel est en retard par rapport à celle des sources;  
 ce retard  $t_p = \frac{PM}{c}$  est la durée de propagation du signal de P à M

$$V(M, t) = V(M, 0) - c \int_0^t \text{div} \vec{A} dt'$$

$$t - \cancel{\frac{PM}{c}} = t_p'$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{A} & \longrightarrow & V(M, t) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} & \longrightarrow & \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array}$$

## I.-2 Début des potentiels ( $\vec{A}$ et $V$ ) à grande distance dans le cadre de l'ARQS des sources (fondus)

### 2 Hypothèses supplémentaires :

→ On ne s'intéresse qu'aux champs produits à grande distance (zone de rayonnement) :

a  $\ll \text{R}_M$  (faire schéma)

→ On suppose négligeable le retard dû à la taille du système.

$$\frac{a}{c} \ll T$$

$$t - \frac{PM}{c} \approx t - \frac{OM}{c} = t'$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_P \frac{q_P \vec{S}_P(t')}{PM}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_P \frac{q_P}{n} \frac{d \vec{O}_P}{dt'}(t')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi n r} \sum_P q_P \vec{O}_P(t')$$

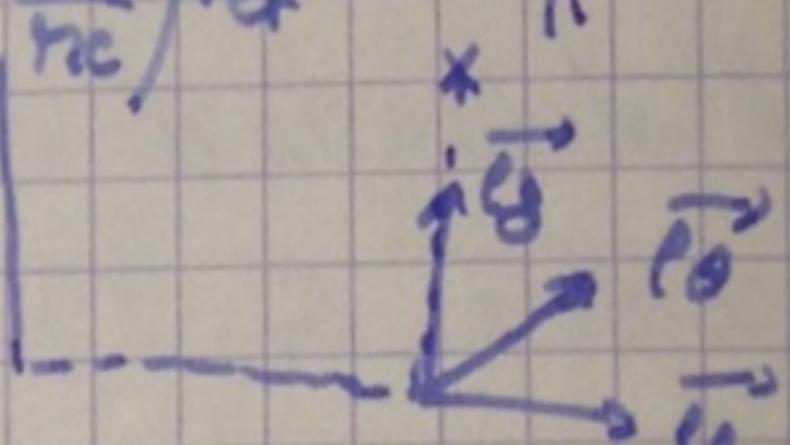
$$= \frac{\mu_0}{4\pi n r} \frac{d}{dt'} \vec{P}(t')$$

$$\boxed{\vec{A}(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi n r} \vec{P}(t')}$$

$$\begin{aligned} PM &= \sqrt{\|r_P - M\|^2} \\ &= n \sqrt{\|1 - \frac{r_P}{n}\|^2} \\ &= n \left(1 + \frac{r_P}{n^2}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PM^2 &= |\vec{P}_0 + \vec{O}_R|^2 \\ &= P_0^2 + OM^2 + 2 \vec{P}_0 \cdot \vec{O}_R \\ &= OM^2 \left(1 + \frac{OP^2}{OM^2} + \frac{2 \vec{P}_0 \cdot \vec{O}_R}{OP^2}\right) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(M, t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \operatorname{div}(\vec{A}(M, t')) dt \\ V(R, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{n^2} \right) \cdot \vec{P} \end{array} \right.$$



## I.-3 Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}(M, t)$$

$$\vec{P} = P(R) \hat{R} \quad \text{Dirac constante}$$

~~$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} \operatorname{rot} \left( \frac{\vec{P}}{R^2} \right)$$~~

$$n = \sqrt{P^2 + g^2}$$

~~$$\frac{\partial}{\partial P} \frac{1}{n} = \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{1}{n} \right) \times \frac{\partial g}{\partial P} = -\frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n} (P^2 + g^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2P$$~~

~~$$\frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{1}{n} \right) = -\frac{g}{n^2 \sqrt{P^2 + g^2}} = -\frac{g}{n^3}$$~~

~~$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} \frac{\vec{P}(t)}{R^3} \hat{e}_\theta$$~~

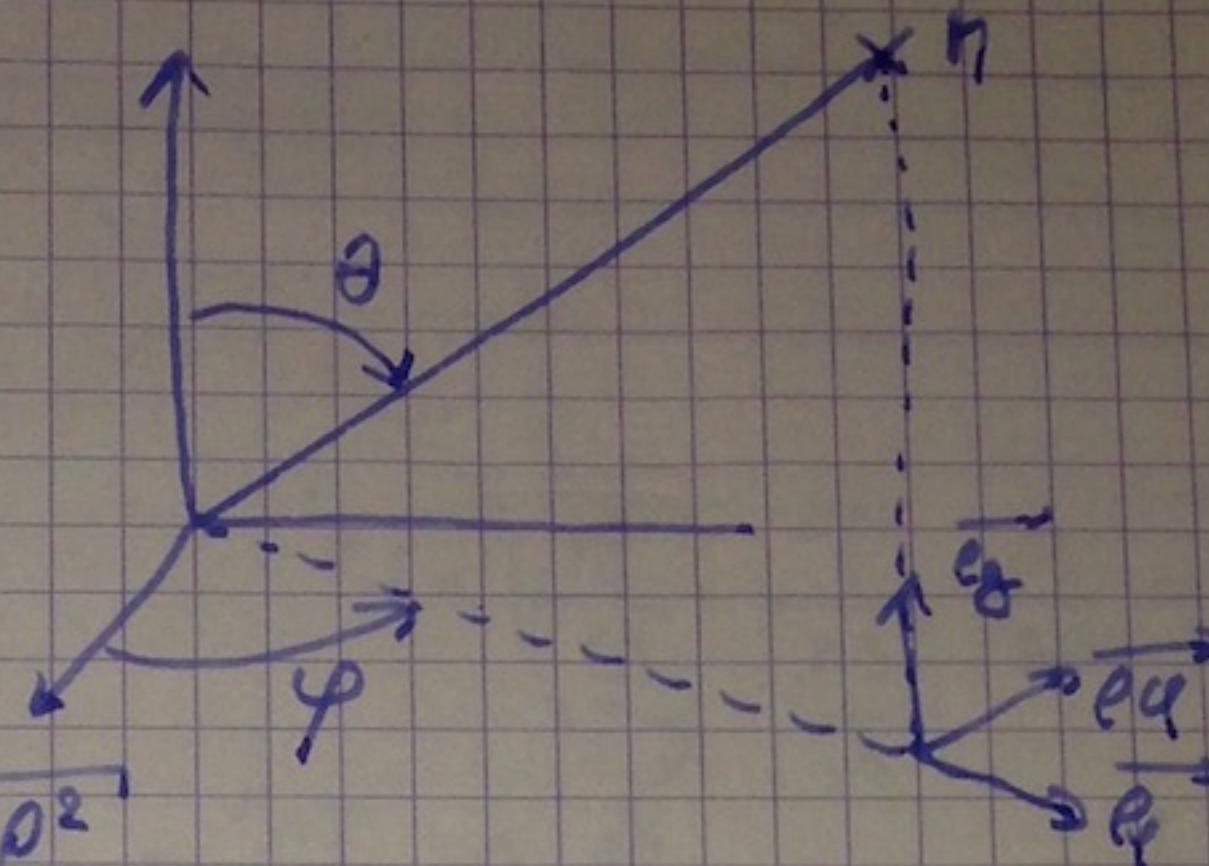
$$\operatorname{rot} \vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{\text{rot}}(\vec{A}(M, t)) \\ = \vec{\text{rot}}(\vec{A}(r) \hat{e}_\theta) \\ = -\frac{\partial A}{\partial \phi} \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi n} \vec{P}(t)$$

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi} = \frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial \phi} \times \frac{\partial t}{\partial \phi}; \quad n = \sqrt{g^2 + p^2}$$

$$= -\frac{1}{n^2} \times \frac{\vec{P}}{\vec{X}\sqrt{g^2 + p^2}} = -\frac{1}{n^2} \sin \theta$$



$$\frac{\partial \vec{A}(t')}{\partial \phi} = \frac{\partial \vec{P}(t - \frac{r}{c})}{\partial t'} \times \frac{\partial t'}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \ddot{\vec{P}} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial r} = \ddot{\vec{P}} \times \left( -\frac{1}{c} \right) \times \sin \theta$$

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \phi} = -\frac{\ddot{\vec{P}}}{c} \sin \theta$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi n} \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi} \dot{P}(t') + \frac{\partial \vec{P}}{\partial \phi} \times \frac{1}{n} \right] \hat{e}_\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi n} \left[ -\frac{1}{n^2} \sin \theta \dot{\vec{P}} \times \frac{\ddot{\vec{P}} \sin \theta}{cn} \right] \hat{e}_\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi n} \left[ \frac{\ddot{\vec{P}} \sin \theta}{c} + \frac{\dot{\vec{P}} \sin \theta}{n} \right] \hat{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi n} \left[ \frac{\ddot{\vec{P}}}{c} + \frac{\dot{\vec{P}}}{n} \right] \wedge \hat{e}_\varphi}$$

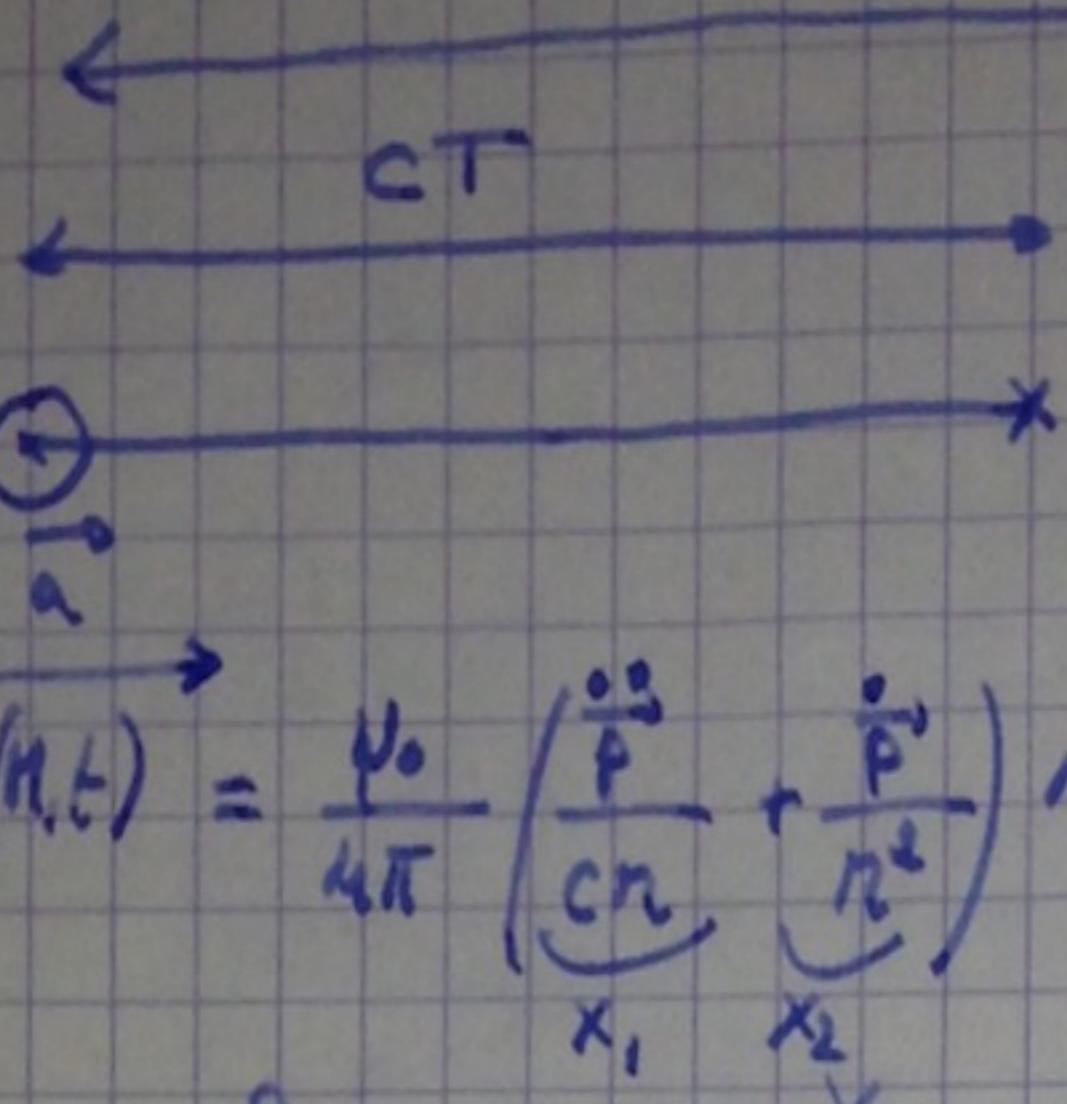
$$\vec{E} = \frac{3(\vec{P} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r - \vec{P}}{4\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$V = \frac{\vec{P} \cdot \hat{e}_r}{4\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$\hat{e}_\theta \wedge \hat{e}_r = \sin \theta \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ 2 \cos \theta \left( \frac{\vec{P}}{n^2} + \frac{\dot{\vec{P}}}{n^2 c} \right) + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right] \hat{e}_r + \frac{\sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{\vec{P}}{n^2} + \frac{\dot{\vec{P}}}{n^2 c} + \frac{\ddot{\vec{P}}}{n^2 c^2} \right] \hat{e}_\theta$$

M  
X



$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\ddot{\vec{P}}}{cn} + \frac{\dot{\vec{P}}}{n^2} \right) \wedge \vec{e}_r$$

$$x_1 = \frac{\ddot{P}}{cn} \sim \frac{P}{cT^2 n}$$

$$x_2 = \frac{\dot{P}}{n^2} \sim \frac{P}{T^2 n^2}$$

◇ Zone de champ proche ( $a \ll n \ll cT$ )

$$x_1 \ll x_2$$

~~$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{\vec{P}}(t)}{n^2} \right) \wedge \vec{e}_r$$~~

~~$$\vec{E}(M,t) = \frac{3(\vec{P}(t) \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r - \vec{P}(t)}{4\pi \epsilon_0 n^3} + \frac{Q(t)}{4\pi \epsilon_0 n^2} \vec{e}_r$$~~

ARQS étendue au récepteur · plus de retard

◇ Zone de rayonnement : ( $a \ll cT \ll n$ )

$$x_2 \gg x_1$$

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\vec{P}(t)}{cn} \right) \wedge \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{P}}{cn} \sin \theta \vec{e}_y$$

$$\vec{E}(M,t) \approx \frac{\ddot{P}(t) \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 c^2 n} \vec{e}_y$$

$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \\ \frac{P}{n^3} + \frac{\ddot{P}}{n^2 c} + \frac{\ddot{\ddot{P}}}{nc^2}$$

$$x_1 \sim \frac{P}{n^3}$$

$$x_2 \sim \frac{P}{T^2 n^2}$$

$$x_3 \sim \frac{P}{T^2 n c^2}$$

$$\frac{x_2}{x_1} \sim \frac{x_2}{T^2 n^2 c^2} \sim \frac{n}{T C}$$

$$x_2 \gg x_1$$

$$\frac{x_2}{x_1} \sim \frac{n}{T C}$$

$$x_2 \gg x_1$$

R ·  $\vec{B}$  et  $\vec{E} \propto \frac{1}{n}$  variation lente.  $t' = t - \frac{n}{c}$

• anisotropes :  $\theta = 0 \Rightarrow B = E = 0$

•  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  et  $\vec{E} \cdot \vec{n} = \vec{B} \cdot \vec{e}_r = 0 \Rightarrow$  mode plane longitudinale

$$\vec{P} = \sum q_i \vec{R}_i \quad \dot{\vec{P}} = \sum q_i \vec{v}_i \quad \ddot{\vec{P}} = \sum q_i \vec{a}_i$$

⇒ charge accélérées ⇒ champ rayonné

### I.3 Aspect énergétique du rayonnement.

$$\vec{T}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \times \vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \frac{\ddot{P}(t') \sin^2 \theta}{-16\pi^2 \epsilon_0 c^3 n^2} \hat{e}_r$$

→ anisotrope

→ rien suivant l'axe  $\hat{z}$

→ radial suivant  $\hat{e}_r$

$$P_{\text{ray}}(M) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{T}(M,t) \cdot d\vec{S}$$

$$P_{\text{ray}} = \int d\Omega P_{\text{ray}} d\Omega \sin \theta \quad \hat{e}_r \cdot \vec{T}(M,t) \hat{e}_r$$

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} (\sin(2\theta) + \sin(0))$$

$$P_{\text{ray}} = \frac{\ddot{P}^2(t')}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta$$

$$\sin^3 \theta = \sin \theta \left( \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin \theta - \sin \theta \cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \frac{1}{2} \sin(\theta))$$

$$= \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin(2\theta)$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta = - [\cos \theta]_0^{\pi/2} = 2$$

~~$$= \frac{3}{4} \times 2 - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$~~

$$\int_0^{\pi/2} \sin 3\theta d\theta = \frac{-1}{3} [\cos 3\theta]_0^{\pi/2} = \frac{-1}{3} (-2) = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{4} \times 2 - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Exemple: Dipôle de Hertz -

$$\vec{P} = q \vec{NP} = qa \cos(\omega t') \hat{e}_z$$

mine relativiste :  $\frac{qa}{T} \ll c$

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$\ddot{P} = -qa\omega^2 \cos(\omega t')$$

→ plus émission est rapide ( $\triangleq$  l'unité ARQS est relativiste)  
plus l'énergie est gd.



## II Rayonnement dipolaire et matériau

Jusqu'à présent supposé de manière très théorique un milieu avec des charges en mouvement  $\rightarrow \vec{P} \rightarrow \vec{\rho} \rightarrow$  rayonnement.

~~Si on a des charges en mouvement~~

Il est possible de créer un moment dipolaire dans un matériau en envoyant une onde électromagnétique sur le matériau.  $F$  de la force  $\rightarrow$  mouvement des charges oscillation  $\rightarrow$  rayonnement.

Faisons une expérience : expérience du lait cf Cap prépa

### II.1 Expérience introductive

Qualitativement :

Déplacement  $\rightarrow$  Rayonnement

$\Rightarrow$  modélisation de la matière pour aller + loin dans notre approche.

$$\langle P_{\text{ray}}^{(w)} \rangle = \frac{P_0^2 w^4}{16\pi c^3}$$

$$\vec{P}_0 = \alpha \delta \vec{E}$$

## II.2 Modélisation : Modèle de l'oscillateur électronique à résonance

- Modélisation champ électromagnétique d'atomes.

◊ Atome : → moyen  
→ masse électrique

◊ Bilan des forces :  $\vec{F}_{\text{ext}} = -Ze(\vec{E} + \vec{\omega} \times \vec{B}) = -Ze\vec{E}$

$$\cdot \vec{F}_e = -K\vec{r}$$

$$\cdot \vec{F}_d = -\frac{m}{2}\vec{v}$$

$$\text{PFD: } m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -K\vec{r} - \frac{m}{2} \frac{dv}{dt} - Ze\vec{E}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{m}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} + K\vec{r} = -\frac{Ze}{m} \vec{E}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{d\vec{r}}{dt} + w_0^2 \vec{r} = -\frac{Ze}{m} \vec{E}$$

$$\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{d\vec{p}}{dt} + w_0^2 \vec{p} = \frac{Z^2 e^2}{m} \vec{E}$$

$$\vec{p}_\omega = \frac{Z^2 e^2}{m w_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{w_0}\right)^2 + i \frac{\omega}{Q w_0}} = E \underline{\alpha}(\omega) \vec{E}_{w_0}$$

$$\underline{\alpha}(\omega) = \frac{\omega_0}{1 - \left(\frac{\omega}{w_0}\right)^2 + i \frac{\omega}{Q w_0}}$$

$$\omega_0 = \frac{Z^2 e^2}{m w_0^2 E}$$

$$g(\underline{\alpha}(\omega))$$

$$\omega_0$$

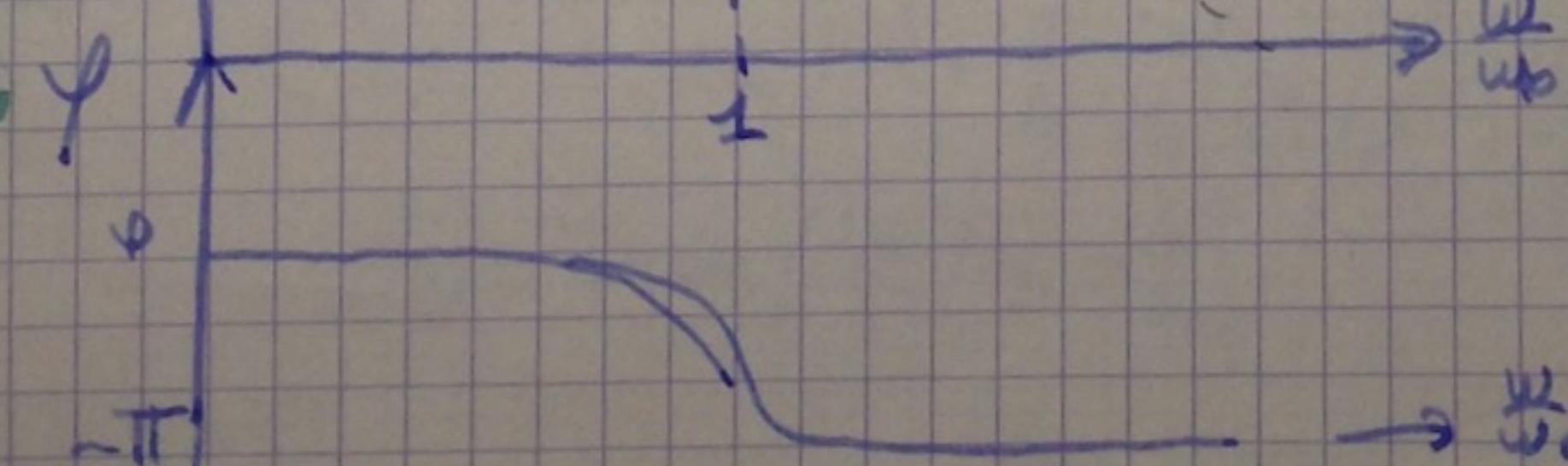
$$0$$

$$-\pi$$

$$1$$

$$\frac{\omega}{w_0}$$

$$\omega_0$$



## II. 3 Retour sur l'expérience

$$\langle P_{\text{ray}}^{(w)} \rangle = \frac{\omega^4 |P_w|^2}{12\pi c^3} = \frac{\omega^4 |E_w|^2}{12\pi c^3} |K(\omega)|^2$$

$\omega \approx 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$  (P)

$$K(0) = \frac{15^2 \times (4,6 \cdot 10^{13})^2}{\pi \times 88 \cdot 10^{-12} \times (10^{-10})^2} = 6 \cdot 10^6$$

$$m_0 = 10^{-30} \times 16$$

$$K = \frac{Z^2 e^2}{4\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$P_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{W}{\mu m}$$

Régime de Rayleigh :  $\omega \ll \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Les composantes en  $w$  sont plus rayonnées que les autres
- $\langle P_{\text{ray}} \rangle_{\text{blu}} = 16 \langle P_{\text{ray}} \rangle_{\text{rouge}}$
- Les composantes bleue rayonnée, rouge transmises.

Conclusion : *ouvrir sur les antennes*