

# MP 33 — Régimes transitoires.

**Avant-propos :** Ce montage a été présenté le 25/09/2013 par *Joévin Giboudot* et corrigé par *R. Mathevet*. Les (nombreuses) remarques faites par le correcteur ont été écrites dans le compte rendu en italique précédé du symbole ☞.

## Rapports du Jury

☞ (2011) – “Les régimes transitoires ne se réduisent pas à la relaxation des systèmes linéaires en électricité. Par ailleurs, l’établissement de régimes forcés peut conduire à une physique bien plus variée que le retour à une situation d’équilibre.”

☞ (2010, 2009) – “Il existe des régimes transitoires dans plusieurs domaines de la physique et pas uniquement en électricité. Bien que le régime transitoire des systèmes linéaires, évoluant en régime de réponse indicielle, puisse parfois se ramener à l’étude d’un circuit RC, la simple mesure du temps de réponse d’un tel circuit ne caractérise pas l’ensemble des propriétés des régimes transitoires. D’autre part, l’établissement de régimes forcés peut conduire à une physique bien plus variée que le retour à une situation d’équilibre.”

☞ (2008) – “Ce nouveau montage a été peu choisi cette année. Notons pourtant que les régimes transitoires interviennent dans de nombreux domaines de la physique et pas seulement en électricité !”

## Bibliographie

- [1] Donnini, Quaranta, *Dict. de phys. exp. Tome IV Électricité et appl.*. Pierron, 2004.
- [2] Donnini, Quaranta, *Dict. de phys. exp. Tome II Thermodyn. et appl.*. Pierron, 1997.
- [4] Bellier, *Montage de physique : Électri., électromag., électron., acoust.* Dunod, 3<sup>ème</sup> éd.
- [5] CAP Prépa Physique PC-PC\*, 2<sup>ème</sup> année. Pearson, 2010.
- [6] Duffait, *Expériences d’électronique*. Bréal, 1999.
- [7] CAP Prépa Physique MPSI-PCSI-PTSI, 1<sup>ère</sup> année. Pearson, 2009.

## Programme

☞ **PCSI** – Thème : *Circuit linéaire du premier ordre ; Notions et contenus* : Régime libre, réponse à un échelon. *Réaliser pour un circuit l’acquisition d’un régime transitoire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.* Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l’évolution d’un système du premier ordre soumis à un échelon. Déterminer analytiquement la réponse temporelle dans le cas d’un régime libre ou d’un échelon. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

☞ **PCSI** – Thème : *Oscillateurs amortis ; Notions et contenus* : Circuit RLC série et oscillateur mécanique amorti par frottement visqueux. *Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique. Réaliser l’acquisition d’un régime transitoire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.* Analyser, sur des relevés expérimentaux, l’évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire, selon la valeur du facteur de qualité.

## Plan

- 1 **Constante de temps d’un circuit RC**
  - 1.1 Mesures et modélisation
  - 1.2 Diagramme de Bode du circuit RC
- 2 **Différents régimes transitoires : circuit RLC**
  - 2.1 Principe du montage
  - 2.2 Régime pseudo-périodique
  - 2.3 Réponse indicielle d’un SLIT ([6] p.149)
- 3 **Diffusion lente du glycérol dans l’eau**
  - 3.1 Principe du montage ([2] 1 p.468)
  - 3.2 Mesures
- 4 **Conclusion**
- 5 **Théorie**

## Introduction

→ En électricité lorsque l’on soumet le circuit à un échelon de tension, il se peut que l’établissement du régime permanent (ou stationnaire) dans le circuit ne soit pas immédiate au contraire du cas où le circuit est purement résistif.

→ On appelle le régime précédent le régime permanent : le **régime transitoire** ! En électricité, il faut souvent se donner la peine pour le voir.

On va étudier un système du premier ordre dans la première partie et on montrera que sa caractéristique se résume à la connaissance d’un paramètre : la fréquence de coupure. Et un système du deuxième ordre caractérisé cette fois par la fréquence de coupure ainsi que le facteur de qualité. On verra également les atouts des systèmes linéaires à invariance temporelle (SLIT) lors de l’étude de la réponse indicielle. Finalement nous étudierons le régime transitoire d’une solution inhomogène de glycérol dans l’eau, ce qui nous permettra de remonter à une estimation de la valeur du coefficient de diffusivité.

## 1 Constante de temps d’un circuit RC

**Objectif :** *On mesure la constante de temps d’un circuit RC et on montre l’influence de  $R$  et de  $C$  sur  $\tau$ . On vérifie que  $\omega_c \tau = 1$*

La résolution des équations différentielles linéaires possède la propriété que la somme de solution est encore solution de l’équation différentielle.

Dans la résolution du système on voit alors apparaître une solution correspondant au régime transitoire qui doit s’annuler au bout d’un temps  $\tau$  infini en théorie (mais pas

en pratique) et une solution correspondant au régime permanent qui est atteint au bout d'une durée grande devant celle du régime transitoire (mathématiquement, ce temps est infini).

On va voir que dans la pratique à cause des frottements (ou de la dissipation de l'énergie fournie au système) que le temps du régime transitoire (ou temps caractéristique) est beaucoup plus court que l'infini.

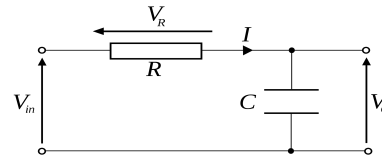
## 1.1 Mesures et modélisation

► **Expérience [4] 3.4.3 p.77** : On mesure l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire en mesurant la constante de temps d'un circuit RC.

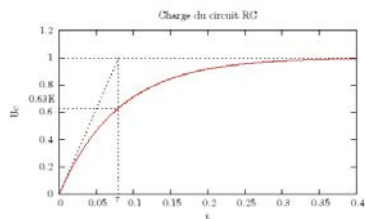
🔍 Il est plus judicieux de faire cette mesure à l'oscilloscope qu'avec LatisPro. L'oscilloscope est un vrai **instrument de mesure**. De plus il faut déclencher l'oscilloscope à l'aide de l'external trigger branché sur la sortie "Output TTL" du GBF qui délivre une tension crête à crête 0-5V.

La tension aux bornes du condensateur s'écrit  $u_C(t) = E(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$  avec :

$$\tau = R_t C = (R + r_G)C$$



🔍 Il est plus judicieux de s'intéresser à la décharge du condensateur. En faisant une acquisition sur LatisPro pendant une durée correspondant à environ  $5\tau$  on peut ensuite tracer  $\ln u_C(t)$  en fonction de  $t$  et ainsi modéliser notre résultat par une droite. On peut ainsi conclure sur la validité de notre modèle qui suppose que pour un système du 1<sup>er</sup> ordre la tension s'écrit comme une exponentielle décroissante.



On voit bien que la tension dans le condensateur met un certain temps à arriver au régime permanent.

On mesure à l'aide des curseurs de l'oscilloscope, le temps correspondant à  $0.63E/R_t$  qui correspond à la valeur de  $\tau$ .

En tant que **bons expérimentateurs**, on utilise la loi de propagation des incertitudes (pour les incertitudes composées) pour effectuer un calcul d'incertitude sur la valeur

$$\text{attendue du temps caractéristique : } \left(\frac{\Delta\tau_{att}}{\tau_{att}}\right)^2 = \left(\frac{\Delta C}{C}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R_t}{R_t}\right)^2$$

On a  $C = ? \pm ? \text{ nF}$  et  $R_t = R + r_G = ? \pm ? \Omega$ .

Ce qui nous conduit à

$$\tau_{att} = ? \pm ? \text{ s}$$

L'incertitude sur la valeur mesurée correspond à l'incertitude de lecture. On a

$$\tau_{exp} = ? \pm ? \text{ s}$$

On définit alors le temps de réponse du système comme la durée équivalente à  $5\tau$  correspondante à 99.3% de la valeur maximale atteinte par le système lors du régime permanent.

► On montre qualitativement l'influence de R et de C sur le temps de montée. On voit que plus C et R sont grand et plus  $\tau$  est grand donc la durée du régime transitoire est important. On peut observer aussi que la courbe a toujours la même forme même si les paramètres changent (on verra que ce n'est plus le cas pour un système du 2<sup>ème</sup> ordre).

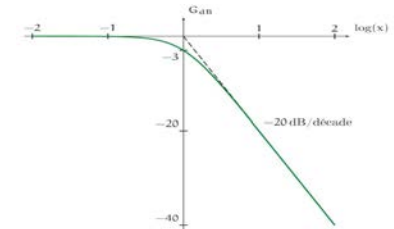
## 1.2 Diagramme de Bode du circuit RC

On passe en régime sinusoïdale et on observe qualitativement à l'oscilloscope la tension aux bornes du condensateur en fonction de la fréquence : on voit que les fréquences hautes sont coupées, on a donc un **filtre passe-bas**.

### Courbe de Gain

On trace alors la courbe de gain en tension du circuit RC et on mesure sa fréquence de coupure  $\omega_c$ .

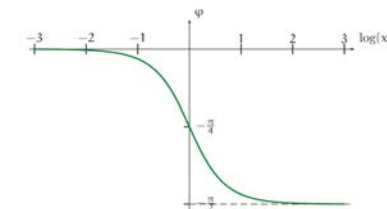
🔍 Il faut prendre devant le jury le point correspondant à la fréquence de coupure donc à  $u_{C,max}/\sqrt{2}$ .



On vérifie alors que l'on a bien  $\omega_c \cdot \tau = 1$  ce qui est la condition d'un système du premier ordre. Le calcul d'incertitude donne :  $(\Delta(\omega_c \tau))^2 = 1 \cdot \left(\frac{\Delta\omega_c}{\omega_c}\right)^2 + \left(\frac{\Delta\tau}{\tau}\right)^2$ . On a donc **un seul paramètre** à connaître car ces deux là sont couplés.

On voit alors que plus  $\tau$  est petit plus  $\omega_c$  est grand, autrement dit, plus le régime transitoire est court plus la bande de fréquence coupée par le fil est grande. On a en lien entre le domaine **temporelle** et **fréquentielle**.

### Courbe de Phase



A la fréquence de coupure la tension aux bornes du condensateur est en retard de  $\pi/4$  avec la tension d'entrée.

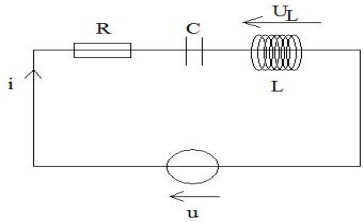
🔍 On mesure à l'oscilloscope devant le jury le point pour lequel la phase est égale à  $-45^\circ$ .

**Transition** : On va maintenant s'intéresser à un système linéaire du 2<sup>ème</sup> ordre et voir quels sont les caractéristiques d'un tel système.

## 2 Différents régimes transitoires : circuit RLC

### 2.1 Principe du montage

On soumet le système à une excitation correspondant à un signal crête de fréquence  $f$ .



On montre que l'équation différentielle du système grâce à la loi des mailles s'écrit :

$$u \equiv E = Ri + u_c + L \frac{di}{dt}$$

On montre que l'équation canonique du système s'écrit :  $\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E$  avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la pulsation propre du système,  $\lambda = \frac{R}{2L}$  le coefficient d'amortissement et  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  le facteur de qualité.

➔ Le facteur de qualité permet de caractériser l'amortissement. Plus l'amortissement est grand ( $\lambda \gg 1$ ) plus le facteur de qualité est petit. On va donc vérifier expérimentalement que le facteur de qualité est un indice de la durée du régime transitoire. À savoir que **plus le facteur de qualité est élevé plus le régime transitoire sera long !**

On a donc un paramètre supplémentaire par rapport au circuit du premier ordre.

☞ *Seul le régime pseudo-périodique est intéressant puisque les deux autres régimes (critiques et apériodique) ne sont que des régimes ressemblant au cas du circuit RC, le facteur de qualité n'intervient quasiment pas dans ces régimes. Par contre pour le régime pseudo-périodique, on voit clairement que le facteur de qualité est directement liée à la durée des oscillations donc du régime transitoire.*

### 2.2 Régime pseudo-périodique

Ce régime est pseudo-périodique puisqu'il subit un amortissement de son oscillation à cause des frottements. Le temps caractéristique  $\tau_p$  du régime transitoire est donné par le terme exponentielle décroissant :

$$\tau_p = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

➔ Plus le facteur de qualité est grand, moins l'amortissement est important et plus les oscillations (et donc le régime transitoire) dureront longtemps.

On modélise à l'aide de Latispro et on trouve que  $\tau_p = ??? \pm ??? s$ .

☞ *C'est ici que Latispro est meilleur que l'oscilloscope car il permet de faire des modélisations ! Justifier lors de l'échantillonnage que l'on veut faire une acquisition sur une demi-période et que l'on veut avoir une fréquence d'échantillonnage qui réponde au critère de Shannon. C'est justification fait partie de l'épreuve du montage.*

☞ *On peut éventuellement faire une mesure de la pseudo-période, mais ça n'avait pas l'air d'emballer le correcteur.*

➔ On voit que les oscillations peuvent avoir une amplitude élevée par rapport à la valeur d'entrée : on a un dépassement de la valeur de consigne ce qui peut provoquer des problèmes sur le système.

**Exemple** : surtension aux bornes d'un condensateur qui peut alors atteindre sa tension de claquage (la tension de claquage d'un isolant électrique est la tension électrique minimale qui rend conductrice une portion d'un isolant. Le courant traverse alors l'isolant qui est détruit).

On a cette fois deux paramètres relevant pour des systèmes linéaires du second ordre  $T$  et  $\tau$  dans le domaine temporelle et  $Q$  et  $\omega$  dans le domaine fréquentielle. Ces deux domaines sont toujours reliés.

On va maintenant étudier ce système (diagramme de gain) dans le domaine fréquentiel comme on l'a fait pour le circuit RC mais cette fois on ne tracera pas le diagramme point par point, on va étudier **la réponse indicielle** du système.

### 2.3 Réponse indicielle d'un SLIT ([6] p.149)

**Objectif** : *On va montrer que la connaissance du régime transitoire à une fréquence donnée permet de caractériser complètement la réponse d'un SLIT à n'importe quelle fréquence. On trace la courbe de gain pour différentes valeur de  $R$ .*

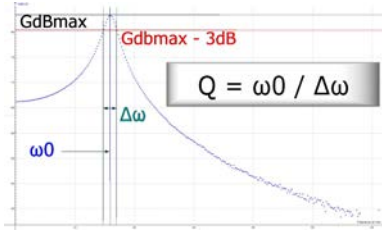
Grâce à la courbe de gain on visualise facilement les deux paramètres caractérisant les systèmes linéaires du deuxième ordre. On voit que l'on a toujours une **fréquence de coupure**, mais également une résonance qui est caractérisé par son **acuité** directement reliée au **facteur de qualité**.

➔ **Expérience** : On envoie un signal crête en entrée de fréquence  $f$  dans un circuit RLC série où les paramètres ont été choisis de manière à avoir un régime pseudo-périodique ( $Q > 1/2$ ). On acquiert le signal de sortie du système à savoir la tension aux bornes du condensateur à l'aide de LatisPro pour différentes valeurs de  $R$ . Ensuite on effectue un traitement des courbes à l'aide du logiciel tel qu'il est décrit ci-après.

Pour un *Système Linéaire à Invariance Temporelle (SLIT)* soumis à un échelon de tension, on sait que la dérivée temporelle du signal de sortie  $\frac{ds(t)}{dt}$  correspond à la réponse **impulsionnelle** du système  $h_{imp}(t)$  (cf. **Théorie**). Alors en calculant la transformée de Fourier de cette réponse **impulsionnelle**, on obtient la fonction de transfert  $H(\omega)$  du système. On trace alors le diagramme de gain du système.

$$e(t) \xrightarrow{\text{SLIT}} s(t) \equiv h_{\text{ind}}(t) \xrightarrow{d/dt} h_{\text{imp}}(t) \xrightarrow{T.F.} H(\omega) \xrightarrow{20 \log(|H(\omega)|)} G_{\text{dB}}(\omega)$$

**Objectif :** On cherche à mesurer la valeur de  $Q$  grâce à l'acquisition effectuée devant le jury.



Devant le jury on relève les valeurs de  $\omega_r$  (pulsation de résonance),  $\omega_{c1}$  et  $\omega_{c2}$  avec leurs incertitudes de lecture respectives.

On peut alors calculer  $Q_{\text{exp}}$  avec les incertitudes.

Dans Latispro, on rentre directement les équations de calcul d'incertitude pour qu'il effectue instantanément le calcul. On a :

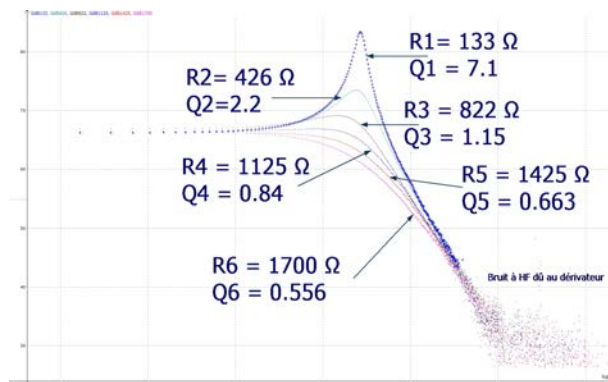
$$Q_{\text{att}} = \frac{1}{R_t} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad \text{donc} \quad \left( \frac{\Delta Q_{\text{att}}}{Q_{\text{att}}} \right)^2 = \left( \frac{\Delta C}{2C} \right)^2 + \left( \frac{\Delta L}{2L} \right)^2 + \left( \frac{\Delta R_t}{R_t} \right)^2$$

Et on compare avec la valeur mesurée grâce aux pulsations de coupure et à la pulsation de résonance :

$$Q_{\text{exp}} = \frac{\omega_r}{\Delta \omega}, \quad \text{donc} \quad \left( \frac{\Delta Q_{\text{exp}}}{Q_{\text{exp}}} \right)^2 = \left( \frac{\Delta(\Delta \omega)}{\Delta \omega} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \omega_r}{\omega_r} \right)^2$$

avec  $\Delta \omega = \omega_{c2} - \omega_{c1}$  et  $\Delta(\Delta \omega)$  calculé à l'aide de la formule des incertitudes composées comme précédemment.

On peut alors étudier l'influence de  $R$  sur l'acuité de la résonance en superposant des diagrammes de gain pour plusieurs valeurs de  $R$ .



1. Le temps de persistance rétinienne est de 24 images par seconde donc 24Hz, donc  $\approx 0.05s$ .

➤ **Expérience :** Pour supprimer le bruit, il est intéressant d'effectuer un lissage avant la dérivé et après la dérivé du signal. La dérivée et la transformé de Fourier n'en sera que meilleur car on supprime du bruit (cf. aide de Latispro dans *Dérivée*). Ce n'est pas obligatoire.

➤ **Expérience :** Pour arriver à superposer les différentes courbes il est important de rester sur la même feuille de LatisPro et de faire des acquisitions sur un même nombre de point. Attention, il va falloir ajuster la durée d'acquisition et donc la fréquence d'échantillonnage pourrait être trop petite pour le logiciel si on veut garder un nombre de points constants. Il faut alors prévoir à l'avance et prendre un nombre de points adéquat et suffisant pour faire la transformée de Fourier.

☞ On ne trouve pas les bonnes valeurs absolues de Gain, la translation verticale de la tension acquise ne change rien. Par contre si on divise cette tension acquise par une valeur proche de 2030 alors on retombe sur les bonnes valeurs de gain.

On voit sur la courbe de gain que l'on a affaire à un **filtre passe-bas** qui peut posséder un grand gain au niveau de la résonance. On fait alors l'acquisition et le calcul pour plusieurs valeurs de  $R$  pour montrer son influence sur l'acuité de la résonance.

On montre bien que plus le facteur de qualité est élevé plus la résonance est fine. Plus la résonance est fine plus le coefficient d'amortissement est faible donc plus la résistance est faible. On a alors un long régime transitoire avec beaucoup d'oscillations.

On remarque également sur les courbes que la pulsation de résonance n'est pas égale à la pulsation propre du système, or on utilise la pulsation de résonance pour le calcul de  $Q$  alors qu'il est définie par rapport à  $\omega_0$ . On montre par le calcul que  $\omega_0 = \omega_r$  à 1% près lorsque  $Q > 5$  (cf. Test 12.1 p.269 [7]). Donc on peut raisonnablement faire le calcul avec  $\omega_r$ .

On voit sur les courbes que plus  $Q$  est grand est plus  $\omega_r$  se rapproche de  $\omega_0$ .

On a vu que le régime transitoire dans le cas de phénomènes électrique était rapide et quasiment invisible à l'oeil nu<sup>1</sup>. Ce n'est pas toujours le cas !

On peut observer dans la vie de tous les jours des régimes transitoires plus long et visible à l'oeil nu.

### 3 Diffusion lente du glycérol dans l'eau

**Objectif :** Mettre en évidence la lente diffusion du glycérol dans l'eau et remonter grâce à l'étude de ce régime transitoire au coefficient de diffusivité du glycérol dans l'eau.

#### 3.1 Principe du montage ([2] 1 p.468)

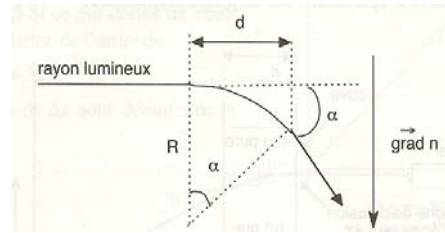
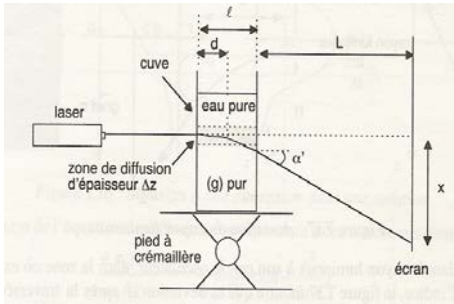
On dépose une couche d'eau dans un récipient rectangulaire dans lequel on rajoute délicatement à l'aide d'une burette une solution de glycérol moyennement concentré au fond de la cuve. On évite de bouger la solution pour éviter de créer des mouvements de convection et fausser l'expérience. On va alors voir apparaître le phénomène de diffusion



de matière au niveau de la zone de contact des deux solutions.

On envoie un faisceau laser sur le récipient au niveau de la zone de mélange entre l'eau et le glycérol. L'indice dépendant de la fraction de glycérol dans le mélange, il se crée alors un gradient d'indice.

Le faisceau laser est alors réfracté à cause du gradient d'indice lors de sa traversé dans le milieu. On mesure alors l'évolution de la dispersion angulaire du faisceau dans le temps.



On montre que (cf. [2]) l'on a :

$$\Delta z \cong 4\sqrt{\ln 2}\sqrt{Dt} \quad , \quad \tan \alpha' = \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad \sin \alpha' = n_0 \sin \alpha$$

Ce qui nous amène à :

$$\alpha \cong \frac{\ell(n_g - n_{\text{eau}})}{4n_0\sqrt{\ln 2 \cdot D \cdot t}} \quad (33.1)$$

### 3.2 Mesures

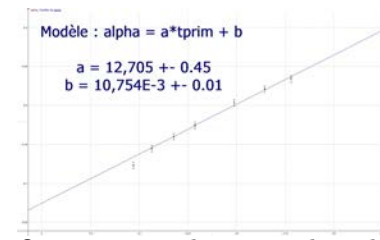
Pour les indices de réfraction : pour de la glycérine pure  $n_g = 1.47$  et pour un mélange à 50% en masse de glycérol  $n_g = 1.40 \pm 0.01$ . On prend en compte la réfraction à la sortie de la cuve et on prend comme indice de réfraction pour le milieu objet, une valeur moyenne des deux indices :  $n_0 = 1.36 \pm 0.02$ .

Pour **1 heure**<sup>2</sup> < t < 4 heures on mesure x à l'aide du papier millimétré posé sur l'écran. On trace alors α en fonction de  $1/\sqrt{t}$  afin de vérifier la relation (33.1).

☞ Contrairement à ce qu'indique [2], il vaut mieux tracer  $1/\alpha^2$  en fonction de t pour pouvoir s'affranchir de l'origine des temps de la diffusion qui nous est inconnue précisément. Cette origine des temps interviendra alors dans l'ordonnée à l'origine de la modélisation.

2. Les premiers point ne sont pas garder car la diffusion est très importante au début (grand gradient de concentration), et le modèle linéaire n'est plus trop valable.

3. Il faudrait utiliser un autre logiciel tel Igor, ce dont on a pas le temps de s'occuper cette année.



Le coefficient directeur de la droite nous donne alors la valeur de  $D_{\text{mes}} = ??? \pm ??? m^2/s$  avec son incertitude.

On compare alors avec la valeur tirée du Handbook de chimie, qui nous donne pour une solution de glycérol à dilution infinie à 25 °C  $D_{\text{att}} = 1.06 \cdot 10^{-9} m^2/s$  ou avec la valeur donnée dans [2] pour une solution aqueuse de glycérol à 10°C :  $D_{\text{att}} = 4.0 \cdot 10^{-10} m^2/s$ .

Les incertitudes de lectures sont prises en compte dans la dispersion des points. On peut sur la modélisation faire apparaître les barres d'incertitudes et s'assurer que la modélisation passe bien entre les barres d'incertitudes. Pour faire un calcul plus poussé d'incertitude<sup>3</sup>, il faudrait utiliser la pondération, c'est-à-dire que chaque mesure est pondérée par un poids relatif à la valeur de son incertitude.

Ici on sent que beaucoup de facteurs ne nous sont pas accessibles (l'indice moyen  $n_0$ , l'indice du glycérol  $n_g$  qui dépendent de la température...). Ce qui signifie qu'il serait inutile de faire un calcul poussé d'incertitude. Il faut juste savoir reconnaître les limites de précision de notre manipulation et se contenter de cela.

On voit que le temps caractéristique pour que la solution devienne homogène est **très lent**. Comparer à l'ordre de grandeur de la diffusion du sucre dans le café ( $L \approx \sqrt{Dt}$  avec L la longueur caractéristique de la tasse) et en conclure qu'il faut mélanger le sucre dans le café.

### 4 Conclusion

- On a vu différents régimes transitoires dans différents domaines de la physique.
- On a vu que ces différents régimes transitoires pouvaient être long ou court. Et quand en fonction du système ils étaient caractériser par certains paramètres.
- Régime transitoire, indésirable la plupart du temps. On a vu comment avoir un ordre de grandeur du temps du régime transitoire, et le maîtriser. Il est néanmoins inévitable. Par exemple en mécanique, dans les amortisseurs. Pour les voitures, on cherche à se placer au régime critique ce qui permet de revenir le plus rapidement possible à la position d'équilibre.
- On a traité que des systèmes linéaires, on peut étendre l'étude à des systèmes non linéaires.
- On verra dans un prochain montage que se passe-t-il lorsqu'on fait osciller le circuit à un pulsation donné!

### Autre expérience possible :

- Frottement solide avec deux diodes « tête-bêche » pour avoir un comportement non linéaire.
- Régime sinusoïdal forcé.
- Diffusion thermique dans un barreau métallique

## Expériences présentées à retirer

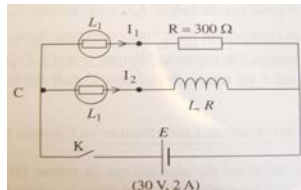
### Introduction

→ On s'intéresse à l'allumage d'une ampoule, dans la vie quotidienne on appuie sur le bouton et l'ampoule s'allume automatiquement comme sur cette petite expérience. Si cette fois on branche deux ampoules en dérivation dont l'une est reliée à une inductance, on observe maintenant un temps caractéristique de l'établissement du régime permanent pour la deuxième ampoule plus grand que pour la première. On observe un décalage dans la vision de l'allumage des deux lampes.

Doit-on penser que l'échelon de tension s'est produit plus tard et que l'on a délai ? ou bien que le régime permanent est juste atteint plus lentement. **Dans le cas de système linéaire, il ne peut pas avoir de délai sinon la théorie n'est plus linéaire !**

Ce qui signifie que le temps caractéristique du régime transitoire a bien été plus long dans le deuxième cas et c'est ce que l'on va mesurer en modélisant notre système par une bobine et une résistance.

➤ **Expérience [1] 3 p.42 :** On met en évidence un temps caractéristique du régime transitoire plus long au moment de l'établissement du courant à l'aide d'ampoules reliées soit à une résistance soit à une bobine.



On a mis en évidence un régime particulier avant l'établissement d'un régime permanent : c'est le **régime transitoire**. Comme on l'a vu dans cet expérience et comme on va le voir dans ce montage, ce régime est caractérisé par une durée (plus longue dans le deuxième circuit que dans le premier) et on va voir dans ce montage la dépendance de cette durée en fonction des paramètres du système.

☞ *Cette expérience est inutile car ce n'est pas l'esprit du montage. Il faut prendre des mesures pour les manips que l'on présente. De plus cette expérience montre un comportement non-linéaire de la résistance de la lampe avec la température.*

### Les différents régimes du RLC

**Objectif :** On montre à l'oscilloscope les différents régimes transitoires en fonction des paramètres du système. On estime les constantes de temps des trois régimes pour les comparer entre elles.

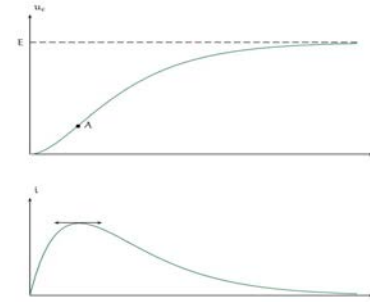
➤ **Expérience [4] 3.5.1 p.78 :** En jouant sur la valeur de la résistance, on va

montrer sur l'oscilloscope les trois régimes d'oscillations libre (ou régimes transitoire) : pseudo-périodique, apériodique, critique.

☞ *Il n'est pas utile de présenter qualitativement les différents régimes du circuit RLC. Il faut montrer des manips avec des mesures.*

### Régime critique

→ Il correspond au régime pour lequel les frottements (ou dissipations) sont trop forts pour qu'il existe une oscillation autour de l'équilibre (ou du régime permanent) mais pas assez forts pour que le régime soit apériodique.



On mesure  $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  et que le temps caractéristique  $\tau_c$  du régime transitoire est donné par  $\tau_c = \frac{1}{\lambda}$

On remarque expérimentalement qu'il est difficile d'obtenir le régime critique à savoir  $R = R_c$ . On mesure  $R = 50 + r_L + ??? = ??? \pm ??? \Omega$

On modélise tout de même l'acquisition sur Latispro par une fonction exponentielle décroissante. On trouve  $\tau_c = ??? \pm ??? s$  que l'on comparera avec les valeurs de  $\tau$  pour les autres régimes.

→ Le régime critique est le régime qui permet le retour le plus rapide du système à l'équilibre donc **dans lequel le régime transitoire est le plus court**. C'est ce régime qui est étudié pour fabriquer les amortisseurs car on souhaite que la voiture revienne rapidement à la situation d'équilibre et n'oscille pas pendant 5min (cf. Analogie électromécanique) !

### Régime apériodique

→ On qualifie d'apériodique l'évolution d'un système en régime transitoire lorsque des oscillations autour de l'équilibre sont impossibles en raison de frottement ou de phénomène de dissipation trop importants.

Le temps caractéristique  $\tau_a$  du régime transitoire est donné par 
$$\tau_a = \frac{1}{\lambda - \Omega} = \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} > \tau_c$$

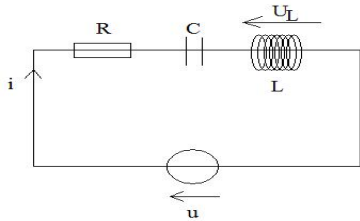
Comme on l'a vu, dans la pratique il est difficile d'arriver au régime critique (cas limite), on tend alors vers le régime apériodique.

À l'aide d'une acquisition sur Latispro et d'une modélisation du signal par une fonc-

tion exponentielle décroissante, on remonte à la valeur du temps caractéristique du régime transitoire. On trouve  $\tau_a = ??? \pm ???$ .

## 5 Théorie

### Circuit RLC



On montre que l'équation différentielle du système grâce à la loi des mailles s'écrit :

$$u \equiv E = Ri + u_c + L \frac{di}{dt}$$

On peut alors écrire l'équation différentielle du second ordre :

$$\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + 2\lambda \frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c = \omega_0^2 E} \Rightarrow \underbrace{x^2 + 2\lambda x + \omega_0^2 = 0}_{\text{Eq}^\circ \text{ carct. homogène}}$$

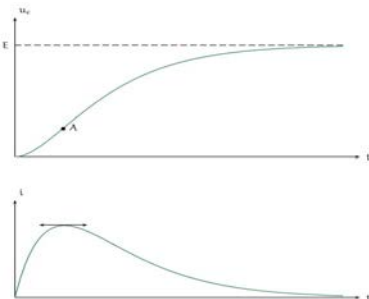
On a posé  $2\lambda = R/L$  avec  $\lambda$  le coefficient d'amortissement,  $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$  la pulsation propre du système, et  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  le facteur de qualité du système.

Le facteur de qualité permet de caractériser l'amortissement du système. Plus l'amortissement est grand ( $\lambda \gg 1$ ) plus le facteur de qualité est petit, on verra que ça a un lien avec la durée du régime transitoire.

Le système d'équation différentielle à résoudre est du second ordre, ce qui signifie qu'en fonction des caractéristiques du système plusieurs solutions et donc plusieurs régimes sont envisageable. !

#### Régime critique

→ Il correspond au régime pour lequel les frottements (ou dissipations) sont trop forts pour qu'il existe une oscillation autour de l'équilibre (ou du régime permanent) mais pas assez forts pour que le régime soit apériodique.



On a  $Q = 1/2$ ,  $\lambda = \omega_0$  et  $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$  la résistance critique.

La solution de l'équation différentielle est :  $u_c(t) = E + (At + B)e^{-\lambda t}$

Le temps caractéristique  $\tau$  du régime transitoire est donné par le terme exponentiel  $e^{-\lambda t} = e^{-t/\tau_c}$ , donc :

$$\boxed{\tau_c = \frac{1}{\lambda}}$$

Le régime critique est le régime qui permet le retour le plus rapide du système à l'équilibre. C'est ce régime qui est étudié pour fabriquer les amortisseurs.

Le système n'a pas le temps d'osciller, il revient immédiatement dans le régime permanent.

#### Régime apériodique

→ On qualifie d'apériodique l'évolution d'un système en régime transitoire lorsque des oscillations autour de l'équilibre sont impossibles en raison de frottement ou de phénomène de dissipation trop importants.

On a  $\lambda > \omega_0$  (amortissement fort),  $Q < 1/2$  et  $R > R_c$ .

$$u_c(t) = E + Ae^{-(\lambda - \Omega)t} + Be^{-(\lambda + \Omega)t} \quad \text{avec} \quad \Omega = \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

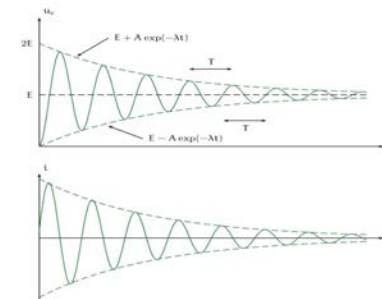
Cette fonction n'est pas périodique. Le temps caractéristique  $\tau$  du régime transitoire est donné par le terme exponentielle décroissant le moins vite :

$$\boxed{\tau_a = \frac{1}{\lambda - \Omega} = \frac{1}{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}} > \tau_c}$$

La durée du régime transitoire, donc le temps de retour en régime permanent, est plus grande que celle du régime critique, qui est donc le régime transitoire non oscillant le plus court.

→ Ce régime n'est pas intéressant, il est entre le régime pseudo-périodique et le régime critique. Mais dans la pratique il est difficile d'arriver au régime critique (cas limite), on tend alors vers le régime apériodique !

#### Régime pseudo-périodique



On a  $\lambda < \omega_0$  (amortissement faible),  $Q > 1/2$  et  $R < R_c$ .

Les solutions de l'équation caractéristique s'écrivent :  $x_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = \lambda \pm j\omega$ .

On trouve alors  $u_c(t) = E + Ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \phi)$

La solution est pseudo-périodique puisqu'elle est amortie par un terme exponentielle. Le temps caractéristique  $\tau_p$  du régime transitoire est donné par le terme exponentielle décroissant :

$$\tau_p = \frac{1}{\lambda} = \frac{2Q}{\omega_0}$$

Cette durée augmente lorsque  $Q$  augmente. Le facteur de qualité caractérise la **qualité des oscillations**, les meilleurs oscillations correspondant au cas harmonique, obtenu pour  $Q$  infini.

Plus le facteur de qualité  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$  est grand, moins l'amortissement est important ( $\lambda$  faible devant  $\omega_0$ ) et plus les oscillations (et donc le régime transitoire) dureront longtemps.

## Réponse indicielle d'un SLIT

Un système linéaire à invariance temporelle (cf. [5] p.118) possède certaine propriétés

Un système linéaire à invariance temporelle sur lequel on envoie comme signal d'entrée une impulsion  $e(t) = \delta(t)$  possède un signal de sortie  $s(t)$  qui s'écrit comme :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t') e(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t') \delta(t') dt' = h_{\text{imp}}(t) = \text{réponse impulsionnelle}$$

Or on voit que la première égalité conduit à un produit de convolution entre la réponse impulsionnelle  $h_{\text{imp}}(t)$  et l'entrée  $e(t)$ . Si on travaille dans l'espace de Fourier, on obtient :

$$S(\omega) = H(\omega) \cdot E(\omega) \quad \Rightarrow \quad H(\omega) = \frac{S(\omega)}{E(\omega)} = \text{fonction de transfert du système}$$

Or en pratique il est difficile d'envoyer des impulsions, on préfère envoyer des signaux créneaux modélisé par une fonction de Heaviside  $\theta(t)$  ( $\theta(t) = 0$  si  $t < 0$  et  $\theta(t) = 1$  si  $t > 0$ ). On étudie alors la réponse **indicielle** (ie. la réponse à un échelon  $e(t) = e_0 \cdot \theta(t)$ ) du système :

$$s(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-t') e(t') dt' = \int_0^t h(t') dt' = h_{\text{ind}}(t)$$

On remarque alors que la réponse **impulsionnelle** correspond à la dérivée temporelle de la réponse **indicielle**. En pratique il suffira alors de dériver la tension de sortie mesurée pour avoir la réponse impulsionnelle du système.

**C'est magique : la transformée de Fourier de la dérivée de la tension de sortie nous donne alors la fonction de transfert du système!** On peut alors tracer le gain en fréquence de notre système pour toutes les valeurs de fréquence.

$$T.F. \left[ \frac{d}{dt} h_{\text{ind}}(t) \right](\omega) = T.F. [h_{\text{imp}}(t)](\omega) = H(\omega) \quad \Rightarrow \quad G_{\text{dB}} = 20 \log H(\omega)$$

## Calcul sur la concentration en masse du glycérol

On veut une solution à 50% en masse en glycérol et je veux prélever  $V_0 = 20$  mL de la solution mère que je mélange avec un volume  $V_{\text{eau}}$  pour obtenir un  $V_{\text{tot}} = V_{\text{eau}} + V_0$ . J'ai une solution mère à  $\alpha\%$  en masse de glycérol que l'on détermine en pesant un certain de volume de solution mère et en lisant le pourcentage en masse dans le Handbook correspondant à la masse volumique mesuré  $\rho_0$ .

Par le calcul on arrive au résultat :

$$V_0 = \frac{V_{\text{tot}}}{1 + \alpha \rho_0 / \rho_{\text{eau}}}$$

Pour faire la solution à 50%, il suffit de prélever à la pipette une quantité  $V_0 = 20$  mL de solution mère, de le mettre dans un bécher. Puis de rajouter à la burette graduée une quantité d'eau adéquat dans le bécher. Mélanger et mettre un volume suffisant dans une burette pour mettre dans la cuve pour l'expérience.

## Questions

➔ Pour la modélisation et le calcul de  $\tau$  pour 0.63E, il n'est pas gênant que le modèle passe en dehors des points? Pourquoi prendre 10000 points sur Latis si on ne se sert que d'un seul pour mesurer  $\tau$ ? Si la modélisation passe à côté de vos points, le système est-il vraiment du 1er ordre?

➔ A quoi correspondent vos trois diagrammes de Bode en gain superposés? Comment ont-ils été effectués? Vous effectuez des lissages, mais ces opérations commutent-elles? On peut donc trouver le diagramme en partant d'un signal donné pour une seule fréquence? Quel est le lien avec la réponse indicielle?

➔ Pour votre étude qualitative, vous dites que lorsqu'on fait varier  $R$ , l'amplitude varie. Est-ce vraiment une « amplitude »?

➔ Quelle est la différence entre régime critique et régime apériodique? Le régime apériodique est une somme d'exponentielles.

➔ expliquez d'où vient la loi de la déviation qui relie l'angle au gradient d'indice pour la diffusion du glycérol. Comment est relié l'indice aux concentrations?

➔ Sources d'incertitudes autres que la lecture pour la pseudopériode à l'oscillo? Quelles incertitudes liées à l'oscillo? Quel lien entre fréquence de résonance et temps caractéristique du transitoire? Retour sur les incertitudes sur regressi.