En effet, intuitivement, si on modifie l'une de ces grandeurs, la norme F de la résultante va changer. Il reste à déterminer les exposants $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ tels que :

$$F = C \times R^{\alpha} U^{\beta} \rho^{\gamma} \eta^{\delta} \tag{D.1}$$

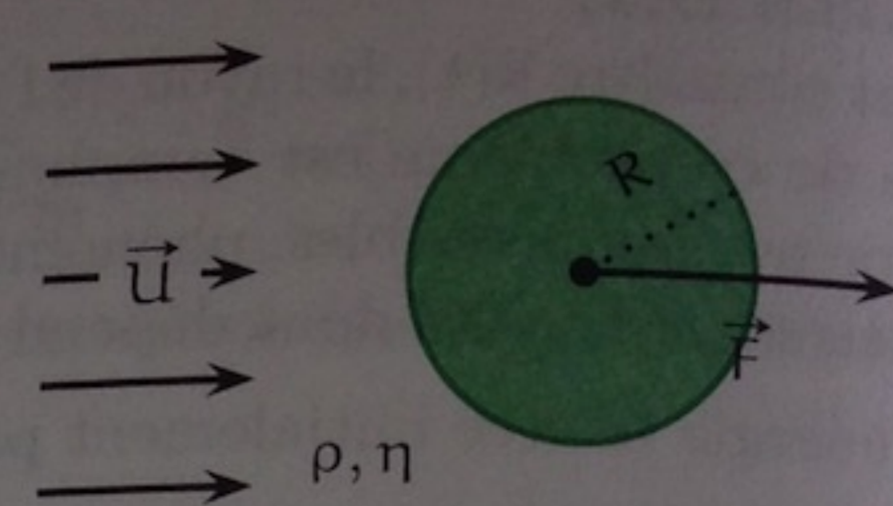

Fig. 4.1

ce que nous faisons en écrivant l'équation aux dimensions :

$$[F] = [R]^{\alpha}[U]^{\beta}[\rho]^{\gamma}[\eta]^{\delta} \iff \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{m}^{\alpha}(\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1})^{\beta}(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3})^{\gamma}(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1})^{\delta}$$

$$\iff \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2} = \mathrm{kg}^{\gamma+\delta}\cdot\mathrm{m}^{\alpha+\beta-3\gamma-\delta}\cdot\mathrm{s}^{-\beta-\delta} \iff \begin{cases} \alpha+\beta-3\gamma-\delta = 1 \\ \gamma+\delta = 1 \\ -\beta-\delta = -2. \end{cases} \tag{D.2}$$

Il y a trois équations pour quatre inconnues, ce qui était prévisible car il y a trois dimensions (longueur, masse, temps) pour quatre paramètres (U,ρ,η,R). Le système linéaire obtenu a une infinité de solutions : l'espace des solutions est de dimension $4-3=1$. Pour tenter de s'affranchir de ce problème, on donne une valeur arbitraire (non nulle) à un des quatre paramètres $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$. Cette valeur ne doit pas être zéro : par exemple, imposer $\delta = 0$ reviendrait à dire, d'après (D.1), que F ne dépend pas de la viscosité. Essayons avec la valeur arbitraire $\delta = 1$. Alors le système (D.2) impose, entre autres, $\gamma = 0$, ce qui n'est pas acceptable car F doit dépendre de ρ.
Plutôt que de tâtonner, il vaut mieux avoir une méthode systématique pour traiter les cas qui posent problème. Cette méthode sera fournie par le « théorème π de Buckingham ».

II.2. Théorème π de Buckingham

Le théorème présenté ici est admis. Sa démonstration utilise des considérations d'algèbre linéaire sur la dimension du sous-espace solution d'un système linéaire à n inconnues et r équations (théorème de Rouché-Fontené).

Théorème D.2. ***Théorème π de Buckingham***

Soit une loi physique liant n grandeurs physiques indépendantes. Soit r le nombre de dimensions indépendantes intervenant dans le problème. Alors :

- *on peut construire $n-r$ paramètres sans dimension indépendants ;*
- *la loi physique cherchée peut être mise sous la forme d'une relation entre ces $n-r$ paramètres sans dimension.*

Exemple D.3.

Utilisons ce théorème pour le cas (problématique) de l'action de traînée exercée par l'écoulement de fluide sur la sphère. Nous voulons établir une loi liant :

- la résultante F en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$;
- le rayon R de la sphère en m ;
- la vitesse U de l'écoulement en $\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$;
- la masse volumique ρ du fluide en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$;
- la viscosité η du fluide en $\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

Avec les notations du théorème, cela fait $n = 5$ grandeurs physiques indépendantes et $r = 3$ dimensions indépendantes (vues par les 3 unités m, kg, s). Le théorème nous permet de tirer deux conclusions :

- on peut construire $n - r = 5 - 3 = 2$ grandeurs sans dimension indépendantes ;
- la loi physique cherchée peut être mise sous la forme d'une relation mathématique liant ces deux grandeurs sans dimension.

Nous allons successivement exploiter ces deux points.

Construction des deux grandeurs sans dimension Parfois, on peut fabriquer par tâtonnement les nombres sans dimension cherchés. Dans le cas général, on procède mathématiquement en cherchant deux (car $n - r = 2$) pentuplets $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$ *indépendants* tels que :

$$F^{\alpha}R^{\beta}U^{\gamma}\rho^{\delta}\eta^{\varepsilon} \text{ soit sans dimension} \iff [F]^{\alpha}[R]^{\beta}[U]^{\gamma}[\rho]^{\delta}[\eta]^{\varepsilon} = 1.$$

Cette équation aux dimensions donne le système :

$$\begin{cases} \alpha + \delta + \varepsilon = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma - 3\delta - \varepsilon = 0 \\ -2\alpha - \gamma - \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{D.3}$$

Ce système linéaire est constitué de $r = 3$ équations indépendantes pour $n = 5$ inconnues. L'ensemble de ses solutions est donc un espace vectoriel engendré par $n - r = 2$ pentuplets indépendants $(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon)$, comme prévu par le théorème de Buckingham. Pour trouver l'un de ces pentuplets, il nous suffit de choisir arbitrairement 2 valeurs parmi les 5 du pentuplet, ce qui revient à ajouter deux équations arbitraires au système (D.3). Si ces deux équations arbitraires sont indépendantes des trois qui existent déjà dans le système, le nouveau système 5×5 obtenu aura une solution unique, qui sera le pentuplet cherché. (Si le système ainsi fabriqué n'est pas de rang 5, il faut faire un choix arbitraire plus chanceux des deux équations ajoutées...)

Construction de la première valeur sans dimension Par exemple, choisissons arbitrairement $\varepsilon = 0$ et $\beta = 1$. Le système linéaire (D.3), enrichi de ces deux nouvelles relations, a une solution unique :

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = \left(-\frac{1}{2},1,1,\frac{1}{2},0\right) \quad \Rightarrow \quad A = F^{-\frac{1}{2}}RU\rho^{\frac{1}{2}} \quad \text{est sans dimension.} \tag{D.4}$$

Construction de la deuxième valeur sans dimension De même, choisissons arbitrairement $\varepsilon = 1$ et $\beta = 0$. Après calcul, on trouve une unique solution :

$$(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon) = \left(-\frac{1}{2},0,0,-\frac{1}{2},1\right) \quad \Rightarrow \quad B = F^{-\frac{1}{2}}\rho^{-\frac{1}{2}}\eta \quad \text{est sans dimension.} \tag{D.5}$$

Les deux grandeurs sans dimension A et B ainsi fabriquées ne sont pas uniques car elles reposent sur des choix arbitraires. Toute combinaison de la forme A^pB^q est encore sans dimension. Toutes les grandeurs sans dimension possibles s'obtiennent à partir des A et B que nous avons trouvés. Mathématiquement, cela signifie que les deux pentuplets trouvés en (D.4) et (D.5) forment une base du sous-espace vectoriel solution de (D.3). Un exemple de combinaison du type A^pB^q est le quotient :

$$\frac{A}{B} = \frac{\rho UR}{\eta}$$

qui n'est autre que le nombre de Reynolds de l'écoulement. Nous garderons par exemple (mais ce n'est pas une obligation) le jeu suivant de deux nombres sans dimension :

$$A = F^{-1}R^2U^2\rho \quad \text{et} \quad Re = \frac{\rho U R}{\eta}.$$

Utilisation de la deuxième conclusion du théorème de Buckingham La deuxième conclusion du théorème de Buckingham stipule que la loi physique cherchée peut être mise sous la forme d'une relation entre les deux grandeurs sans dimension fabriquées. Autrement dit, il existe une fonction f telle que :

$$f(A,Re) = 0. \tag{D.6}$$

Cela n'est peut-être pas très parlant pour un novice, mais est d'une grande importance pratique pour les expérimentateurs (voir ci-après). En pratique, l'équation (D.6) peut être réarrangée en utilisant le **théorème des fonctions implicites**, noté TFI dans la suite. Le TFI dit que l'on peut exprimer une variable en fonction des autres, lorsque ces variables sont liées :

$$f(A,Re) = 0 \overset{\text{TFI}}{\Rightarrow} \text{ il existe une fonction } g \text{ telle que } A = g(Re) \quad \Rightarrow \quad F^{-1}R^2U^2\rho = g(Re). \tag{D.7}$$

La résultante F subie par la sphère est donc de la forme :

$$F = \rho U^2 R^2 \times \frac{1}{g(Re)}. \tag{D.8}$$

L'analyse dimensionnelle ne nous dit rien sur la forme de la fonction g, mais elle nous renseigne déjà beaucoup, en particulier dans le domaine expérimental.

Intérêt de l'analyse dimensionnelle pour un expérimentateur La seule chose qui reste à déterminer est g. Cela peut se faire par l'expérience. L'équation (D.7) indique à l'expérimentateur qu'il suffit de relever la courbe donnant $F^{-1}R^2U^2\rho$ en fonction de $\frac{\rho U R}{\eta}$ pour accéder à g. Savoir cela à l'avance simplifie grandement la tâche : un expérimentateur procédant naïvement ferait varier indépendamment les 4 paramètres (ρ,U,R,η) pour déterminer la loi qui les lie. Cela demanderait un nombre de mesures ingérable. En effet, en prenant 10 points de mesure pour chacune de ces 4 valeurs, cela fait 10^4 mesures à effectuer. En revanche, pour l'expérimentateur averti, le théorème de Buckingham dit directement que l'espace des paramètres pertinents n'a que deux dimensions. Cela évite de faire varier les paramètres au hasard. Il suffit à l'expérimentateur de prendre 10 points de mesure de ces deux paramètres sans dimension, c'est-à-dire de réaliser $10 \times 10 = 100$ mesures.

II.3. Coefficient de traînée

Dans le cours de mécanique des fluides, nous avons affirmé sans démonstration que le coefficient de traînée C_x d'un objet dans un écoulement incompressible ne dépend que du nombre de Reynolds. Par définition, la traînée est :

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\rho U^2 \times S \times C_x \, \vec{e}_x$$

avec :

- $\vec{U} = U\,\vec{e}_x$, la vitesse (uniforme) de l'écoulement loin en amont de l'objet ;
- ρ, la masse volumique du fluide ;
- S, le maître-couple de l'objet, c'est-à-dire l'aire de la projection de l'objet dans un plan orthogonal à $\vec{U}$.

Le facteur $\frac{1}{2}$ de la définition est purement arbitraire. Pour la sphère de l'exemple D.3, le maître-couple est $S = \pi R^2$ donc, d'après la définition de C_x, la norme de la traînée est :

$$F = \frac{1}{2}\rho U^2 \times \pi R^2 \times C_x. \tag{D.9}$$

En identifiant (D.8) et la relation (D.9) de l'exemple D.3, $C_x = \dfrac{2}{\pi \times g(Re)}$.

Cela prouve que le coefficient de traînée C_x n'est fonction que du nombre de Reynolds. La forme de la fonction $C_x(Re)$ dépend de la géométrie de l'objet placé dans l'écoulement.

Pour un écoulement supersonique, la célérité c du son constitue un paramètre supplémentaire, mais n'ajoute pas de dimension indépendante (c est une vitesse). Le théorème π prévoit l'existence d'un deuxième nombre sans dimension. C'est le nombre de Mach de l'écoulement, défini par $\mathcal{M} = \frac{U}{c}$. Le coefficient de traînée est donc fonction du nombre de Reynolds et du nombre de Mach.

II.4. Méthode générale

Méthode — **Méthode systématique pour l'analyse dimensionnelle**

1. Faire la liste des n grandeurs physiques pertinentes du problème (c'est sans doute l'étape la plus difficile).
2. Exprimer les dimensions de ces grandeurs (on peut procéder avec les unités dans le système MKSA).
3. Faire le décompte des r dimensions (*i.e.* des r unités indépendantes).
4. En déduire le nombre $p = n - r$ de grandeurs indépendantes sans dimension constructibles. Fabriquer ces grandeurs, notées a_i.
5. Le théorème de Buckingham dit que la loi cherchée est de la forme $f(a_1, a_2, \ldots, a_p) = 0$.
6. Si nécessaire, appliquer le théorème des fonctions implicites pour extraire un des a_i au choix. Par exemple, il existe une fonction g telle que :

$$a_1 = g(a_2, \ldots, a_p).$$

Tous les cas peuvent se traiter par cette méthode. Il ne faut pas hésiter à l'employer, même pour les cas apparemment simples.

Exemple D.4.

Revenons sur l'exemple D.1 de l'onde de choc créée par une explosion (voir page 355) et appliquons la méthode générale pour le traiter. Les paramètres physiques pertinents que l'on veut lier sont :

- R, le rayon de l'onde de choc (en mètres) ;
- E, l'énergie libérée initialement par l'explosion (en $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$) ;
- ρ, la masse volumique de l'atmosphère ambiante (en $kg \cdot m^{-3}$) ;
- t, le temps écoulé depuis le début de l'explosion (en s).

Cela fait quatre paramètres physiques pour trois dimensions. Il existe donc $4-3=1$ paramètre sans dimension constructible. Par l'équation aux dimensions $[R]^\alpha [E]^\beta [\rho]^\gamma t^\delta = 1$, on construit