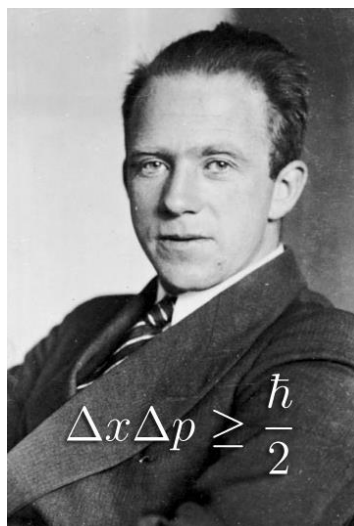


Approche Documentaire :

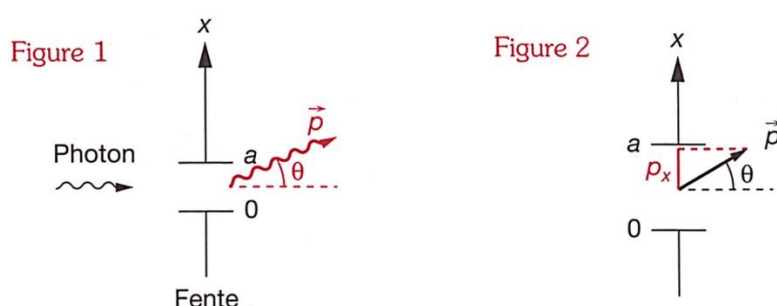
Les inégalités de Heisenberg



Werner Heisenberg (1901-1976)

Document 1 : Interprétation du phénomène de diffraction

■ Source : D'après D. Augier, C. More, *Physique MPSI-PTSI*, Compétences prépas, 2013, p. 184 :



« On s'intéresse au passage de la lumière au travers d'une ouverture dans un écran opaque, en effectuant une interprétation quantique. Considérons donc une fente de largeur a , éclairée en incidence normale par une lumière de longueur d'onde λ .

La lumière est en fait constituée de photons, qui vont passer au travers de la fente (cf. Fig 1). Le passage d'un photon au travers de cette fente constitue en fait une détermination de sa position selon l'axe Ox . En effet, si le photon passe au travers de la fente, c'est qu'il était localisé entre les abscisses $x = 0$ et $x = a$, et donc sa position est mesurée avec l'incertitude $\Delta x = \frac{a}{2}$ [...] vu que sa position est déterminée par $x = \frac{a}{2} \pm \frac{a}{2} = \frac{a}{2} \pm \Delta x$.

D'après l'inégalité de Heisenberg :

$$\Delta x \times \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

il existe une incertitude sur la quantité de mouvement du photon en projection sur l'axe Ox de l'ordre de :

$$\Delta p_x \sim \frac{\hbar}{2\Delta x} = \frac{\hbar}{a} \quad (*)$$

Cela signifie que, suite au passage par la fente, les différents photons présentent une variété de quantités de mouvement en projection selon Ox . Ainsi, p_x peut prendre toutes les valeurs entre $\pm \Delta p_x$ autour de la valeur moyenne nulle liée à l'incidence normale.

[Par ailleurs,] en considérant de petits angles,

$$p_x = p \cdot \sin \theta \simeq p \cdot \theta$$

où θ est l'angle entre la quantité de mouvement d'un photon et la normale à la fente (cf. Fig 2).

On déduit le lien entre l'incertitude Δp_x et l'incertitude $\Delta \theta$ indiquant la gamme de directions empruntées par les photons après le passage par la fente :

$$\Delta p_x = p \cdot \Delta \theta$$

La relation de de Broglie indique $p = h/\lambda$, soit :

$$\Delta p_x = \frac{h}{\lambda} \cdot \Delta \theta$$

En confrontant cette dernière relation avec celle fournie par l'inégalité de Heisenberg (*), on obtient :

$$\Delta \theta \geq \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{a}$$

On retrouve là un résultat d'optique bien connu, la diffraction :

$$\Delta \theta \sim \frac{\lambda}{a}$$

Un faisceau de lumière parallèle de longueur d'onde λ atteignant une ouverture de taille caractéristique a diffracte dans un cône de demi-angle au sommet de l'ordre de $\frac{\lambda}{a}$.

La mécanique quantique donne ainsi, dans un cadre plus général, une interprétation au phénomène de diffraction. »

Document 2 : Objets macroscopiques ou microscopiques

■ **Source :** Bernard Diu, *Traité de physique à l'usage des profanes*, Odile Jacob, 2000, p. 507-510 :

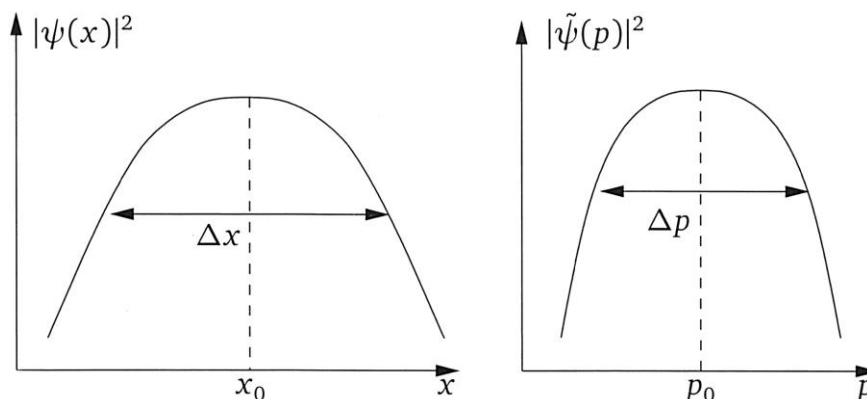


Illustration schématisant des inégalités de Heisenberg. La probabilité de présence $|\psi(x)|^2$ présente un maximum à $x = x_0$, qui donne la valeur la plus probable de la position de la particule. La probabilité de mesurer une impulsion p est donnée par une fonction $|\tilde{\psi}(p)|^2$ ($\tilde{\psi}(p)$ est la transformée de Fourier de $\psi(x)$). La valeur la plus probable de l'impulsion est donnée par le maximum à $p = p_0$ de $|\tilde{\psi}(p)|^2$

« La particule que nous voulons observer se trouve dans un état quantique caractérisé [...] par la **fonction d'onde** qu'on peut lui associer. Celle-ci, nous le savons, fournit — par son carré — la

probabilité de présence de la particule le long de l'axe Ox . Cela implique en premier lieu que cette particule ne se trouve pas en un point défini et unique, mais qu'elle peut se manifester partout où sa fonction d'onde n'est pas nulle, c'est-à-dire sur toute une plage de l'axe Ox , centrée en x_0 (figure ci-après), et d'extension Δx (pour faciliter l'argument, nous l'imaginons délimitée par deux bornes abruptes, $x_0 - \Delta x/2$ et $x_0 + \Delta x/2$). La terminologie est traditionnellement la suivante : la position de la particule le long de l'axe Ox est donnée par x_0 , mais avec une **incertitude** Δx . Bien entendu, suivant l'état de la particule — donc suivant la fonction d'onde qui la décrit —, cette incertitude est plus ou moins importante : elle peut être très étroite (particule bien localisée) ou très vaste (probabilité de présence très diluée).

La grandeur impulsion suit une règle analogue : elle vaut p_0 , mais avec une **incertitude** Δp_x ; l'intervalle Δp_x , où une mesure a toute chance de trouver l'impulsion de la particule peut, comme l'était Δx , être resserrée ou large.

On démontre pourtant l'inégalité reproduite ci-dessus (relation d'incertitude de Heisenberg) : le produit des deux incertitudes Δx et Δp_x , ne peut pas être inférieur à $\hbar/2$. Il en ressort, entre autres conséquences, que les incertitudes Δx et Δp_x , ne sauraient être, simultanément, aussi petites qu'on pourrait le vouloir : lorsque la borne inférieure $\hbar/2$ de leur produit est atteinte — voir ci-dessous quelques ordres de grandeur —, diminuer Δx (particule mieux localisée) ne peut s'obtenir que par une augmentation de Δp_x , (impulsion moins bien déterminée), et *vice versa*.

APPLICATION À UN OBJET MACROSCOPIQUE

Avançons jusqu'à des considérations numériques. [Considérons un] grain de poussière, tout petit objet néanmoins macroscopique. Imaginons que l'on sache mesurer sa position à un centième de micron près : pour un objet d'un micron de rayon, il y faut déjà de l'habileté et du doigté. L'incertitude Δp_x sur l'impulsion du granule est tenue de vérifier

$$\Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

ce qui lui impose d'être supérieure à $10^{-26} \text{ kg.m.s}^{-1}$. Mais l'impulsion elle-même du grain de poussière (masse de 10^{-15} kg environ ; vitesse aux alentours de 1 mm/s) vaut

$$p_0 = mv = 10^{-18} \text{ kg.m.s}^{-1}$$

Ce serait un exploit totalement inaccessible que de distinguer, pour un grain de poussière, une incertitude Δp_x , inférieure à p_0 par un facteur 10^8 (cent millions !).

Quelle conclusion tirer de là, en généralisant à l'ensemble de la physique macroscopique ? Dans ce domaine classique, la position d'un corpuscule est mesurée avec une incertitude $\Delta_m x$ ("m" pour "macroscopique"), et son impulsion avec une incertitude $\Delta_m p_x$. Ce sont ici des **incertitudes expérimentales**, liées aux appareils de mesure, tenant compte de leur sensibilité et de leurs imperfections. Il s'ensuit que les indéterminations $\Delta_m x$ et $\Delta_m p_x$ sont, chacune pour sa part, **énormément supérieures** aux incertitudes quantiques Δx et Δp_x , qui leur correspondent et qui doivent vérifier l'inégalité de Heisenberg. En physique, on résume ces affirmations en écrivant

$$\Delta_m x \gg \Delta x \quad \text{et} \quad \Delta_m p_x \gg \Delta p_x$$

[...]. Il en résulte évidemment que le produit $\Delta_m x \times \Delta_m p_x$ satisfait

$$\Delta_m x \times \Delta_m p_x \gg \Delta x \times \Delta p_x,$$

et qu'il reste donc **énormément supérieur** à $\hbar/2$: en physique macroscopique, la relation d'incertitude de Heisenberg est noyée dans les bas-fonds et ne joue donc aucun rôle ; c'est l'appareillage et l'habileté de l'expérimentateur seulement qui limitent la précision. Nous le dirons de façon un peu provocante : en physique classique, tout se passe comme si la constante de Planck était proprement **nulle**.

APPLICATION À UNE PARTICULE MICROSCOPIQUE

Appliquons en revanche la relation d'incertitude de Heisenberg à un électron atomique. Tenez ! Supposant [réaliste] le modèle de Bohr [, lequel est fondé sur le modèle de la représentation

planétaire de l'atome proposée par Rutherford], nous prendrons cet électron sur l'une des orbites privilégiées qu'introduit le modèle. Le rayon r de l'orbite et la vitesse v qu'y développe le corpuscule sont supposés vérifier ("condition de quantification")

$$mvr = n\hbar ; n = 1, 2, \dots$$

On m'accordera que, pour qu'on puisse ainsi parler en termes de trajectoire classique, il serait indispensable que les incertitudes Δr sur le rayon r de l'orbite et Δp sur l'impulsion $p = mv$ de l'électron — de quelque nature qu'elles soient — fussent inappréciables au regard de ces grandeurs elles-mêmes. Il faudrait donc, simultanément, que :

$$\Delta r \ll r \quad \text{et} \quad \Delta p \ll p.$$

Le produit $\Delta x \times \Delta p$, quant à lui, devrait être très inférieur au produit $r \times p$:

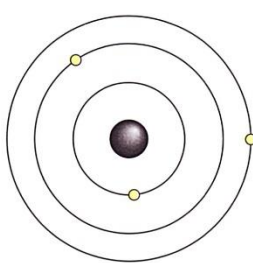
$$\Delta r \times \Delta p \ll r \times p$$

Mais comment $\Delta r \times \Delta p$ pourrait-il être *à la fois* très petit devant $n\hbar$ (valeur du produit $r \times p$ d'après la condition de quantification) et supérieur à $\hbar/2$ (relation d'incertitude de Heisenberg) ? Si par exemple n vaut un ou deux, le second membre $r \times p$ est égal à \hbar ou $2\hbar$, ce qui mène à peine à deux ou quatre fois la borne inférieure $\hbar/2$ de $\Delta r \times \Delta p$; il est clair que deux ou quatre (fois $\hbar/2$) n'est pas "beaucoup plus grand" que un (que $\hbar/2$).

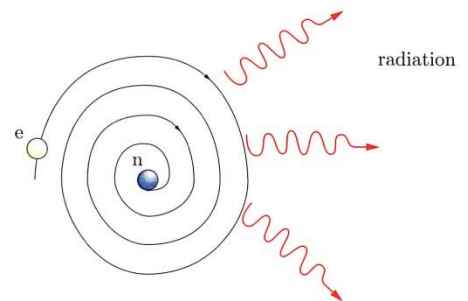
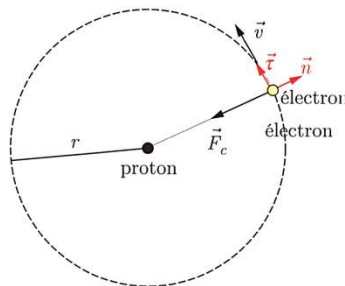
On conclut de ce qui précède que **le modèle de Bohr n'est pas cohérent. De façon plus générale, la notion de trajectoire perd toute signification dans un atome.** »

Document 3 : Modèle planétaire de l'atome de Rutherford (1912)

■ **Source** : Christian Gruber, Philippe-André Martin, *De l'atome antique à l'atome quantique*, PPUR, 2013, p. 186, 187 :



Modèle de l'atome de Rutherford.



Effondrement de l'atome.

« Rutherford introduit le modèle planétaire de l'atome : à l'image du système solaire il considère que l'atome est constitué d'un noyau quasi ponctuel, contenant presque toute la masse de l'atome, autour duquel "gravitent" les électrons quasi ponctuels également et très légers. La force qui maintient les électrons (chargés négativement) autour du noyau (chargé positivement) est la force électrique, force qui a la même forme que la force gravifique, mais dont l'intensité est environ mille fois plus grande :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

[...] lors d'un tel mouvement circulaire, l'électron subit une accélération reliée à sa vitesse v sur l'orbite par

$$a = \frac{v^2}{r}$$

D'autre part, l'énergie mécanique totale de ce système vaut :

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

Or selon l'électromagnétisme classique, toute particule accélérée rayonne de l'énergie. En vertu du principe de conservation de l'énergie, l'énergie mécanique devra donc diminuer ce qui, en vertu du signe négatif de \mathcal{E} , implique une diminution du rayon de l'orbite : l'électron va s'effondrer sur le noyau en une fraction de seconde ! Cette instabilité de l'atome est contraire à notre perception immédiate puisque les substances qui nous entourent sont en général stables (si elles ne sont pas radioactives ou soumises à des excitations extérieures) »

Document 4 : Inégalité d'Heisenberg et stabilité des atomes

■ **Source** : d'après Michel Le Bellac, *Le monde quantique*, EDP sciences, 2010, p. 82, 220-221.

« [Concernant] l'atome d'hydrogène. Si l'électron décrit une orbite circulaire de rayon r avec une impulsion $p = mv$, son énergie classique est

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (*)$$

En physique classique, le rayon de l'orbite de l'électron tend vers zéro ("l'électron tombe sur le noyau"), ce phénomène étant accompagné de l'émission de rayonnement électromagnétique : en effet, en physique classique, l'énergie de l'orbite circulaire

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

n'est pas bornée inférieurement et rien ne s'oppose à ce que le rayon de l'orbite devienne arbitrairement petit.

Essayons de comprendre pourquoi cette chute catastrophique de l'électron sur le noyau prédite par la physique classique ne se produit pas. **La clé de l'explication se trouve dans l'inégalité de Heisenberg.** Dans notre raisonnement, nous allons partir des variables classiques, le rayon de l'orbite r et l'impulsion p sur cette orbite, ainsi que des expressions classiques de l'énergie. Cependant, nous allons utiliser l'inégalité de Heisenberg pour limiter la validité des concepts classiques qui conduisent à l'instabilité de l'atome : **ce type de raisonnement est appelé semi-classique.**

La décroissance de l'énergie de l'orbite est compensée par l'émission dans l'espace d'énergie sous forme de rayonnement électromagnétique, ce qui assure la conservation de l'énergie. Mais sur une orbite de rayon r , la dispersion Δx de la position suivant l'axe des x est de l'ordre de r , ce qui fait que la dispersion sur l'impulsion est au moins de $\sim \hbar/\Delta x \sim \hbar/r$. Nous pouvons en déduire $rp \sim \hbar$ et l'expression de l'énergie (*) devient

$$\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \sim \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Si r devient très petit parce que l'électron se met à "tomber" sur le noyau, son impulsion devient grande, et il en résulte que son énergie cinétique $p^2/(2m)$, où m est la masse de l'électron, devient également grande.

Un principe général de la physique énonce qu'un état stable correspond au minimum de l'énergie. Dans le cas de l'atome d'hydrogène, l'énergie potentielle de l'électron est l'énergie potentielle d'attraction électrostatique du proton sur l'électron. Cette énergie potentielle est négative et décroît vers moins l'infini quand r tend vers zéro. Quand l'électron se rapproche du noyau, son énergie potentielle devient de plus en plus petite (plus grande en valeur absolue !), mais son énergie cinétique $\mathcal{E}_k = p^2/(2m) = \hbar^2/(2mr^2)$ devient de plus en plus grande et elle croît

plus vite que la valeur absolue de l'énergie potentielle quand $r \rightarrow 0$. L'état stable est obtenu en cherchant le compromis correspondant au minimum d'énergie.

Cherchons le minimum de \mathcal{E}

$$\frac{d\mathcal{E}}{dr} \sim -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0$$

ce qui donne un minimum pour :

$$r = a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \simeq 0,053 \text{ nm}$$

[qui est] le rayon de Bohr de l'atome d'hydrogène. Naturellement, le fait que l'on obtienne exactement a_0 dans ce calcul d'ordre de grandeur est un hasard heureux, qui nous permet de retrouver l'énergie de l'état fondamental :

$$\mathcal{E} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -\frac{me^4}{2.(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \simeq 13,6 \text{ eV}$$

S'il est bien entendu que ce calcul ne peut donner qu'un ordre de grandeur, la physique sous-jacente explique la raison profonde de la stabilité de l'atome : en raison des inégalités de Heisenberg, l'électron ne peut pas se trouver sur une orbite de rayon trop petit, sous peine d'acquérir une impulsion importante, qui fait croître son énergie cinétique. L'énergie de l'état fondamental est obtenue en recherchant le meilleur compromis possible entre énergie cinétique et énergie potentielle, de façon à obtenir le minimum de l'énergie totale.

De façon générale, c'est l'inégalité de Heisenberg qui est à la base de la stabilité des atomes. »

Document 5 : Fiche d'exploitation

Données :

Constante de planck : $h = 6,626.10^{-34} \text{ J.s}$

Masse de l'électron : $m_e = 9,109.10^{-31} \text{ kg}$

Charge de l'électron : $q_e = -e = -1,602.10^{-19}$

Définition de l'électronvolt : $1 \text{ eV} = 1e \times 1V = 1,602.10^{-19} \text{ J}$

Vitesse de la lumière : $c = 2,998.10^8 \text{ m.s}^{-1}$

Permittivité du vide : $\epsilon_0 = 8,854.10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$

1. **Doc. 1 :** Pourquoi l'interprétation de la diffraction nécessite une description quantique ?
2. **Doc. 2 :** Les inégalités d'Heisenberg sont-elles liées à la précision des mesures expérimentales ?
2. En utilisant les données numériques, retrouver les valeurs numériques du rayon de Bohr et de l'énergie de l'électron sur une telle orbite circulaire dans l'atome d'hydrogène classique (Doc 4).
3. Montrer que les inégalités d'Heisenberg interdisent d'envisager que l'électron de l'atome d'hydrogène soit confiné au voisinage immédiat du noyau dont le diamètre est de l'ordre du fermi (10^{-15} m).

Compléments :

Vérification expérimentale et caractère intrinsèque des inégalités d'Heisenberg

<https://cours.espci.fr/site.php?id=200&fileid=738>