Un peu de cinématique des fluides

- **Comment écrit-on le PFD à une particule de fluide $d\tau$?**

$\rightarrow \dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}$. $\quad \vec{F} = \vec{F_v} + \vec{F_c}$

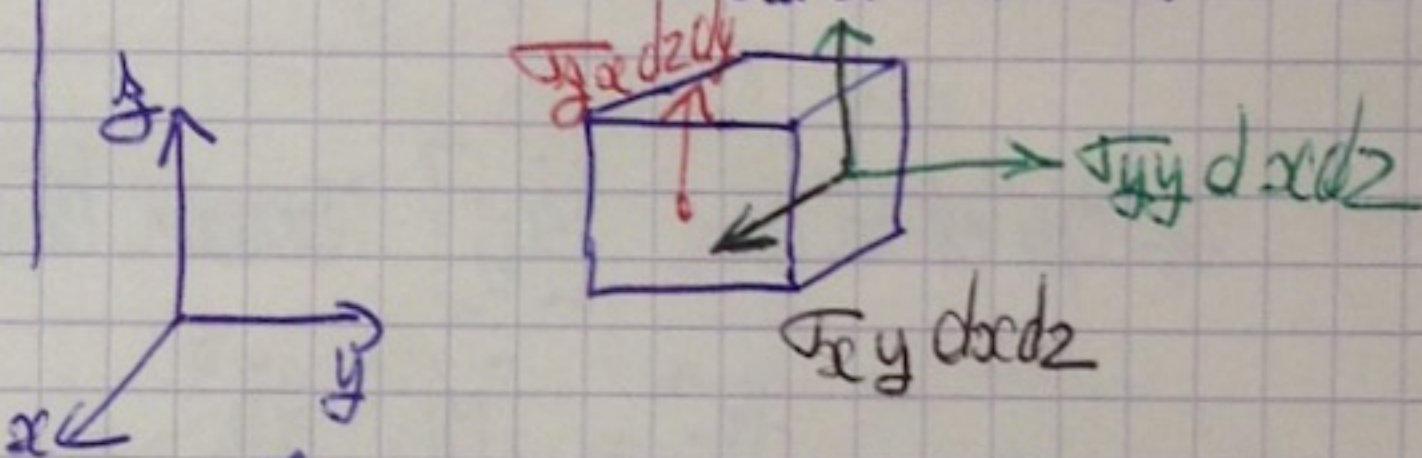
dérivée particulaire — forces volumiques — forces surfaciques

$\rightarrow \vec{F_v} = \iiint_{volume(t)} \rho \vec{g}\, d\tau$

$\vec{F_c} = \oiint_{\Sigma(t)} [\sigma] \times \vec{n}\, dS$

$\hookrightarrow$ tenseur des contraintes : $d\vec{F} = [\sigma]\ \vec{n}\, dS$

σ_{ij} : contrainte • sur la surface de normale $\vec{x_j}$
• dans la direction $\vec{x_i}$



En appliquant green-ostrogradsky : $\vec{F_c} = \iiint_{V(t)} \vec{div}\, [\sigma]\, d\tau$

⚠ ce $\vec{div}$ est un div qui s'applique à un tenseur :

$$\vec{div}\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \cdot & \sigma_{2\cdot} & \cdot \\ \cdot & \sigma_{3\cdot} & \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_3} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Pardon Manoël. C'est comme si on appliquait div à chaque ligne du tenseur des contraintes.

$\rightarrow$ Donc $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \iiint_{V(t)} \rho\vec{g} + \vec{div}\,[\sigma_{ij}]\, d\tau$

$\rightarrow$ Tenseur de contrainte de viscosité : $[\sigma_{ij}'] = [\sigma_{ij}] - \begin{pmatrix} -P & & 0 \\ & -P & \\ 0 & & -P \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ Donc $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \iiint_{V(t)} \rho\vec{g} - \vec{grad}\,P + \vec{div}\,[\sigma_{ij}']\, d\tau$

→ Aprésent exprimons $\frac{d\vec{P}}{dt} = \iiint_{V(t)} \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} \, d\tau$

- <u>Théorème de Reynolds</u> : $\frac{d}{dt}\iiint \rho v_i \, d\tau = \iiint \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v_i \vec{v}) \, d\tau$

- $\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho v_i\right] + \mathrm{div}(\rho v_i \vec{v}) = \rho \frac{D\vec{v}}{Dt}$

manipulat° calcul
+ conservat° de la masse

→ Donc $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \overrightarrow{\mathrm{div}}\left[\sigma_{ij}'\right]$

→ il reste à exprimer σ_{ij}' :

tenseur taux de déformat°

* Lien entre contraintes et déformations : linéarité $\sigma_{kl} = \Lambda_{klij}\left[e_{ij}\right]$

relat° de Newton $\sum_{ij}$

* qu'est ce que $[e_{ij}]$: tenseur taux de déformat° ?

$$d\vec{v} = [M_{ij}]\, d\vec{r} = \left[\frac{\partial v_{i}}{\partial x_j}\right]_{ij} \cdot d\vec{r}$$

$$d\vec{v} = [e_{ij}]\, d\vec{r} + [R_{ij}]\, d\vec{r}$$

avec $[e_{ij}] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right]_{ij}$: symétrique

$[R_{ij}] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right]_{ij}$: antisymétrique

- Comme $[R_{ij}]$ est antisymétrique → 3 coeff → vecteur

$$[R_{ij}]\, d\vec{r} = \vec{\Omega} \wedge d\vec{r} \quad \text{avec } \vec{\Omega} = \frac{1}{2}\, \overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \vec{v}.$$

- $$[e_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right) & \cdots \\ & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2}\right) \\ - & - & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

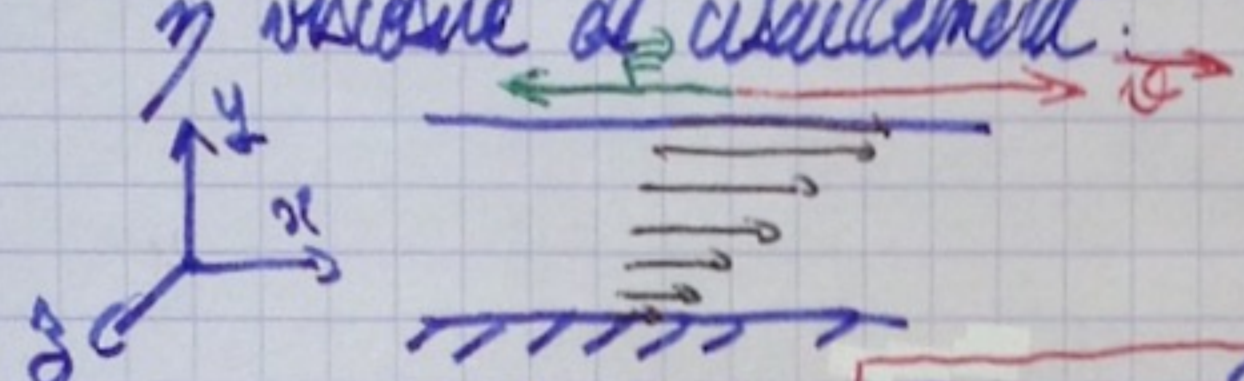
• Les termes diagonaux représentent les déformat° de type compression dilatat°
Les termes non-diagonaux représentant les déformat° de cisaillement.

$\Longrightarrow [e_{ij}]$: taux de déformat°.

→ **fluide newtonien** $\Longrightarrow \sigma'_{ij} = \Lambda_{ijkl}\, e_{kl}$

$= \eta \times \cdots + \zeta \cdots$

η viscosité de cisaillement.

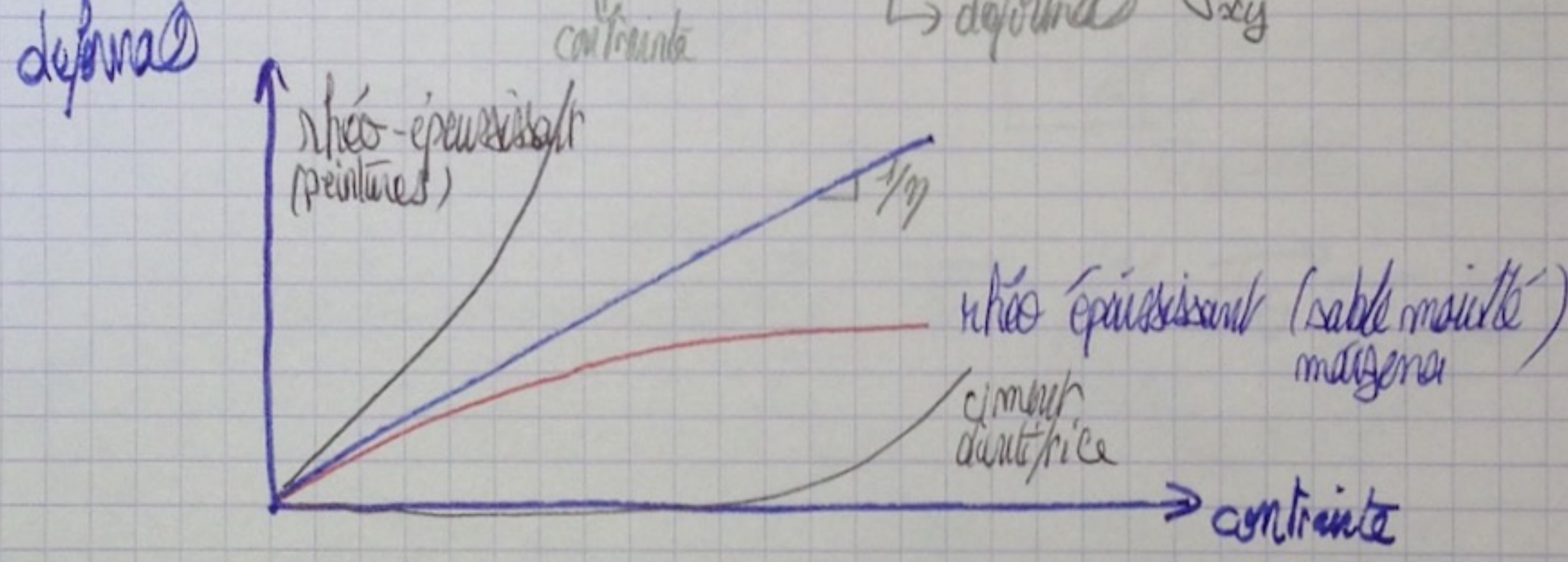


$$\vec{v} = v(y)\,\vec{e_x} = \frac{v_0\, y}{a}\,\vec{e_x}$$

$$\boxed{\frac{F_x}{S} = -\eta\,\frac{\partial v_x}{\partial y}}$$

contrainte

↳ déformat° σ_{xy}



→ Equat° de Navier-Stokes

• $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}\,P + \overrightarrow{div}[\sigma'_{ij}]$

• loi de compt

$\Longrightarrow \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho\vec{g} - \overrightarrow{grad}\,P + \eta\,\Delta\vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\overrightarrow{grad}(div\,\vec{v})$

ζ : seconde viscosité : contrainte associé à la compression dilatat°, $div\,\vec{v} \neq 0$

- Conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \, \mathrm{div}\,\vec{v} + \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho = 0$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0 \rightarrow \frac{D\rho}{Dt} + \rho \, \mathrm{div}\,\vec{v} = 0$$

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\frac{D\rho}{Dt}} = \frac{1}{v}\frac{Dv}{Dt}$$

→ variation relative du volume massique d'une particule au cours du temps.