

Effet de peau dans une bobine

Modélisation - Bilan énergétique d'un circuit R-L-C série

par Michel KROB
Lycée Joliot-Curie - 35000 Rennes
michel.krob@wanadoo.fr

Dans la première partie de cet article, nous nous proposons de vérifier expérimentalement le bilan énergétique d'un circuit électrique constitué d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine à air placés en série, évoluant en régime libre pseudo-périodique à partir de conditions initiales connues. Cette vérification expérimentale repose sur l'acquisition numérique du courant traversant le circuit. L'interprétation correcte des résultats obtenus nécessite l'utilisation, dans le schéma électrique du circuit, du modèle dit basses fréquences de la bobine à air. Ce modèle traduit en fait la croissance quadratique de la partie réelle de l'impédance de la bobine en fonction de la fréquence.

La seconde partie de cet article vise à justifier théoriquement le modèle électrique basses fréquences proposé : le phénomène physique qui en est à l'origine, est l'effet de peau. En modélisant la bobine à air qui comprend plusieurs épaisseurs d'enroulement, par autant de couches cylindriques illimitées, de même axe et parcourues par des courants volumiques annulaires, il est possible, à partir des équations de Maxwell, de mettre en évidence le phénomène précédemment décrit sous deux hypothèses. Toutes deux sont liées à l'épaisseur de peau qui doit être, à la fois, petite devant le rayon intérieur de la bobine et grande devant le diamètre du fil avec lequel elle est réalisée. Ces deux conditions fixent le domaine de validité fréquentielle du modèle basses fréquences.

1. Position du problème

1.1. Circuit

Considérons le montage suivant :

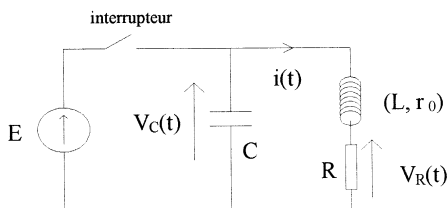


figure 1

où :

- E désigne la f.e.m. délivrée par une alimentation de puissance d'impédance interne r_g ,

- C un condensateur, R une résistance et (L, r_0) une bobine à air sans noyau, d'inductance L et de résistance r_0 .

Notons $V_C(t)$ la tension aux bornes de C , $V_R(t)$ la tension aux bornes de R et $i(t)$ le courant traversant le circuit $R - L - C$ une fois l'interrupteur ouvert.

1.2. Conditions initiales

Pour $t \leq 0$, l'interrupteur est fermé ; le condensateur se charge, à travers r_g (et éventuellement l'impédance de l'interrupteur), sous une tension que nous notons U_0 , et la bobine est parcourue par un courant que nous notons I_0 .

A l'instant $t = 0$, l'interrupteur est ouvert laissant le circuit évoluer en régime libre à partir des conditions initiales :

$$V_C(t=0) = U_0 \text{ et } i(t=0) = I_0 \quad (1.1)$$

1.3. Bilan énergétique

Une fois l'interrupteur ouvert, c'est à dire pour $t \geq 0$, le circuit évolue en régime libre régi par l'équation différentielle :

$$L \frac{di}{dt} + R_{\text{totale}} i - V_C(t) = 0 \quad (1.2)$$

où R_{totale} désigne la résistance totale du circuit $R - L - C$ série. En multipliant (1.2) par $i(t)$, et en remarquant que $i = -C \frac{dV_C}{dt}$, il vient :

$$Li \frac{di}{dt} + R_{\text{totale}} i(t)^2 + CV_C(t) \frac{dV_C}{dt} = 0$$

Enfin, après intégration entre $t = 0$ et $t = +\infty$ en tenant compte des valeurs finales nulles de $i(t)$ et $V_C(t)$, nous obtenons la relation suivante :

$$\frac{1}{2} L I_0^2 + \frac{1}{2} C U_0^2 = \int_0^{+\infty} R_{\text{totale}} i(t)^2 dt \quad (1.3)$$

qui exprime qu'au bout d'un temps "suffisamment" long, l'énergie électromagnétique initialement emmagasinée dans le condensateur et la bobine s'est dissipée par effet Joule.

C'est ce bilan énergétique que nous nous proposons de valider expérimentalement, en estimant séparément son premier et son second terme.

1.4. Résistance totale du circuit et modélisation de la bobine

Supposons dans la suite de la discussion que le choix des différents éléments du circuit assure un régime libre du type pseudo-périodique.

La vérification du bilan énergétique suppose l'estimation correcte de la résistance totale R_{totale} du circuit, et a priori, nous nous attendons à ce que cette résistance soit égale à la somme de la résistance r_0 de la bobine et de la résistance R mesurées en continu :

$$R_{\text{totale}} = r_0 + R \quad (1.4)$$

Or, il s'avère que la partie réelle $r(w)$ de l'impédance $Z(jw)$ de la bobine dépend de la pulsation w selon une relation du type :

$$r(w) = r_0 [1 + \alpha w^2] \quad (1.5)$$

($\alpha > 0$) dans un domaine de basses pulsations. Elle augmente donc en fonction de la fréquence, et ce, de manière tout à fait perceptible. Pour traduire ce phénomène sur le schéma de la figure 1, il est possible d'utiliser le modèle électrique de la bobine à air suivant:

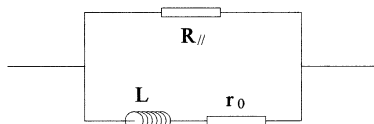


figure 2

valable sur un domaine de basses fréquences. En effet, l'impédance de la bobine vaut alors :

$$Z(jw) = \left(\frac{1}{R_{//}} + \frac{1}{r_0 + jLw} \right)^{-1}$$

et en supposant que :

$$\frac{r_0}{R_{//}} \ll 1 \text{ et } \left(\frac{Lw}{R_{//}} \right)^2 \ll 1 \quad (1.6)$$

son expression se simplifie bien en une relation du type (1.5) :

$$Z(jw) \simeq r_0 + \frac{L^2}{R_{//}} w^2 + jLw \quad (1.7)$$

Nous validerons expérimentalement ce modèle dans la suite de ce document ; nous montrerons également comment le comportement traduit par (1.5) résulte de l'effet de peau et se déduit des équations de Maxwell en modélisant simplement la bobine à air.

En reportant le modèle de la bobine dans le circuit de la figure 1, nous obtenons :

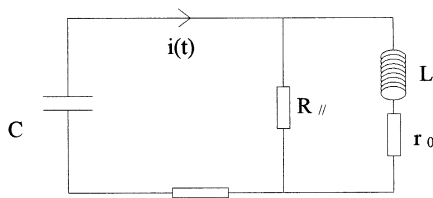


figure 3

Nous en déduisons l'équation différentielle régissant ce circuit :

$$\left[1 + \frac{R}{R_{//}} \right] L \frac{d^2 i}{dt^2} + \left[\left(1 + \frac{r_0}{R_{//}} \right) R + r_0 + \frac{L}{CR_{//}} \right] \frac{di}{dt} + \left[1 + \frac{r_0}{R_{//}} \right] \frac{1}{C} i = 0$$

Sous les hypothèses (1.6) et sous la condition :

$$\frac{R}{R_{//}} \ll 1 \quad (1.8)$$

(qui seront vérifiées expérimentalement), l'équation précédente se simplifie en :

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \left[R + r_0 + \frac{L}{CR_{//}} \right] \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

Donc, le circuit de la figure 3 est bien équivalent à un circuit de type $R - L - C$ série de capacité C , d'inductance L , mais dont la résistance totale ne vaut plus $R + r_0$, mais :

$$R_{\text{totale}} = R + r_0 + \frac{L}{CR_{//}} \quad (1.9)$$

Comment faire le lien entre la relation (1.7) qui correspond à l'excitation de la bobine en régime forcé sinusoïdal, et la relation (1.9) qui correspond à l'évolution du circuit de la figure 3 en régime libre ? En supposant que le coefficient de qualité Q_{equi} du circuit de la figure 3 soit suffisamment important pour pouvoir confondre la pseudo-pulsation Ω_0 du régime libre du circuit avec sa pulsation propre w_0 qui vaut $\frac{1}{\sqrt{LC}}$, soit :

$$Q_{\text{equi}} = \frac{1}{R_{\text{totale}}} \sqrt{\frac{L}{C}} \gg 1 \Rightarrow \Omega_0 = \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_{\text{equi}}^2}} w_0 \simeq w_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.10)$$

nous pouvons réécrire la relation (1.9) sous la forme :

$$R_{\text{totale}} = R + r_0 + \frac{L^2}{R_{//}} \Omega_0^2 \quad (1.11)$$

Donc, nous pouvons dire que tout se passe comme si la résistance totale du circuit de la figure 3, lorsqu'il évolue en régime libre pseudo-périodique faiblement amorti (i.e. $Q_{\text{equi}} \gg 1$), dépendait de manière quadratique de sa pseudo-pulsation Ω_0 selon la relation (1.11) ; en diminuant la valeur de C dans le circuit, on augmente naturellement la pseudo-pulsation Ω_0 et, fait remarquable, la résistance totale augmente de manière quadratique en fonction de Ω_0 .

En conséquence, il apparaît qu'il va falloir soigner la mesure de R_{totale} pour valider le bilan énergétique, et qu'une simple mesure de la résistance totale du circuit à l'ohmmètre, c'est à dire en continu ($w = 0$), conduit à l'erreur grossière de confondre (1.4) avec (1.11).

2. Protocole expérimental

Vouloir vérifier expérimentalement la relation (1.3) impose de mesurer avec la plus grande précision possible $i(t)$, I_0 et U_0 (qui apparaissent au carré dans le bilan énergétique), ainsi que R_{totale} , L et C . La démarche va être la suivante :

1. mesures préliminaires : nous allons mesurer tout d'abord la valeur de C au capacimètre, les valeurs de R et r_0 à l'ohmmètre de précision et déterminer précisément la valeur de L en amenant le circuit $R - L - C$ étudié à la résonance.

2. mesures des conditions initiales : nous réalisons le circuit de la figure 1 pour lequel nous mesurons U_0 et I_0 lorsque l'interrupteur est fermé. Nous pouvons alors estimer la quantité :

$$\frac{1}{2}LI_0^2 + \frac{1}{2}CU_0^2.$$

3. mesure de la résistance totale du circuit R_{totale} : nous ouvrons l'interrupteur en réalisant l'acquisition numérique de la tension $V_R(t)$ qui est une image de $i(t)$, la modélisation de cette tension par la méthode des moindres carrés conduit à l'estimation de R_{totale} connaissant C .

4. mesure de l'énergie dissipée par effet Joule : ayant estimé R et R_{totale} , il est possible d'estimer numériquement la quantité :

$$\int_0^{+\infty} R_{\text{totale}} i(t)^2 dt$$

à partir des échantillons $\{V_R(t_I)\}_{I=1,\dots,N}$ de la tension $V_R(t)$, et ainsi de valider le bilan énergétique.

Détaillons les points 2, 3 et 4 (l'étude de la résonance du circuit pour la mesure de L est détaillée dans la section 3.6).

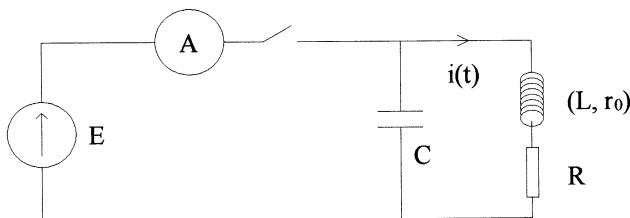
2.1. Mesures des conditions initiales

Indiquons tout d'abord que les paramètres du circuit sont dimensionnés de sorte que :

$$\frac{1}{2}LI_0^2 \gg \frac{1}{2}CU_0^2 \quad (2.1)$$

En conséquence, la mesure de la valeur de la tension initiale U_0 aux bornes du condensateur qui ne pose pas de difficulté, ne nécessite pas une grande précision.

Par contre, la mesure du courant I_0 doit être précise ; pour ce faire, nous allons inclure de manière permanente un ampèremètre de précision dans le circuit comme indiqué :



Lorsque l'interrupteur est fermé, l'ampèremètre permet la mesure du courant initial I_0 : en effet, qu'importe la chute de tension à ses bornes, il mesure bien le courant initial traversant la bobine (en supposant n'avoir pas à tenir compte du courant dérivé par la résistance de fuite du condensateur). Une fois l'interrupteur ouvert, l'ampèremètre n'a aucune influence sur le régime libre du circuit.

2.2. Mesures de la résistance totale du circuit

Le régime libre du circuit étant pseudo-périodique amorti, nous pouvons écrire l'expression de $i(t)$ sous la forme :

$$i(t) = A_0 \exp(-\alpha t) \sin(\beta t + \varphi_0) \quad (2.2)$$

avec :

$$\alpha = \frac{R_{\text{totale}}}{2L} \text{ et } \beta = \Omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R_{\text{totale}}^2}{4L^2}}$$

où A_0 et φ_0 dépendent des conditions initiales (1.1). Nous supposons connaître avec une très bonne précision la valeur C de la capacité du condensateur ; ainsi, la mesure des paramètres α et β conduisent à l'obtention de R_{totale} (et également de L) par :

$$R_{\text{totale}} = \frac{2\alpha}{C[\alpha^2 + \beta^2]} \quad (\text{et} \quad L = \frac{1}{C[\alpha^2 + \beta^2]})$$

Pour identifier au mieux les paramètres α et β , nous allons donc modéliser une partie des échantillons $\{V_R(t_I)\}_{I=1,\dots,N}$ dont nous réalisons l'acquisition numérique, par la fonction :

$$M(t, \vec{p}) = \widehat{V}_0 \exp(-\hat{\alpha}t) \sin(\hat{\beta}t) \quad (2.3)$$

dont nous cherchons à régler le vecteur paramètre $\vec{p} = (\widehat{V}_0 \ \hat{\alpha} \ \hat{\beta})^T$ au mieux au sens du critère quadratique :

$$j(\vec{p}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [V_R(t_I) - M(t_I, \vec{p})]^2 \quad (2.4)$$

Afin qu'il y ait adéquation entre le modèle (2.3) et l'expression du courant (2.2), il convient de prendre l'origine des échantillons $\{V_R(t_I)\}_{I=1,\dots,N}$ lors de l'un de leur passage par zéro (on se débarrasse alors de l'identification d'un paramètre supplémentaire relatif à la phase φ_0 du courant à l'origine qui ne nous intéresse pas).

L'optimisation du critère (2.4) est faite par la méthode de Gauss-Newton. Notons que généralement, l'algorithme de Gauss-Newton converge beaucoup plus vite qu'un algorithme du gradient, mais a un domaine de convergence plus réduit, c'est pourquoi nous prenons comme conditions initiales du vecteur paramètre des valeurs proches des valeurs théoriques escomptées.

Enfin, on pourra également comparer la valeur de L obtenue avec celle que l'on a déduite de l'étude de la résonance du circuit.

2.3. Mesure de l'énergie dissipée dans le circuit

La résistance R_{totale} ayant été estimée, la mesure de l'énergie dissipée par effet Joule dans le circuit nécessite encore la connaissance du courant $i(t)$. Par une mesure à l'ohmmètre, nous supposons connaître avec une très bonne précision la valeur de la résistance R ; ainsi, les échantillons du courant $\{i(t_I)\}_{I=1,\dots,N}$ sont déduits des échantillons de tension $\{V_R(t_I)\}_{I=1,\dots,N}$ par :

$$\{i(t_I)\}_{I=1,\dots,N} = \frac{\{V_R(t_I)\}_{I=1,\dots,N}}{R}$$

L'estimation de l'énergie dissipée ε résulte de l'estimation numérique de $\int_0^{+\infty} R_{\text{totale}} i(t)^2 dt$, ainsi :

$$\varepsilon = R_{\text{totale}} T_e \sum_{I=1}^N i^2(t_I) = \frac{R_{\text{totale}} T_e}{R^2} \sum_{I=1}^N V_R^2(t_I) \quad (2.5)$$

où $T_e (= t_{I+1} - t_I)$ désigne la période d'échantillonnage. En supposant que T_e soit très faible devant la pseudo-période $\frac{2\pi}{\omega_0}$ du circuit, on admet pouvoir négliger l'erreur commise en remplaçant l'intégrale par une somme discrète, devant celles que l'on commet en mesurant R_{totale} et R .

3. Expérimentation

3.1. Ordres de grandeur et dipôles utilisés

Les dipôles utilisés sont les suivants :

- pour l'inductance : une bobine à air Leybold de 1000 spires sans noyau ; les indications du constructeur sont : $L = 36 \text{ mH}$ et $r_0 = 9,5 \Omega$ (sans précision).
- pour la résistance R : une boîte AIOP $\times 1 \Omega$ (précision 0,5 % - courant maximal de 750 mA) réglée sur $R = 10 \Omega$.
- pour le condensateur : une boîte de condensateurs de précision (0,5 % - 300 V max) réglée sur $C = 80 \text{ nF}$.
- une alimentation de puissance (30 V - 2 A) délivrant une tension $E \simeq 7.5 \text{ V}$.

Alors, les ordres de grandeur des conditions initiales et de l'énergie emmagasinée sont les suivants :

$$I_0 \simeq \frac{E}{r_0 + R} \simeq 385 \text{ mA}, U_0 \simeq E \simeq 7.5 \text{ V} \text{ et } \frac{1}{2} L I_0^2 \simeq 2,7 \text{ mJ} \gg \frac{1}{2} C U_0^2 \simeq 2.2 \mu\text{J}$$

ce qui valide bien l'hypothèse (2.1). Par ailleurs, le régime libre du circuit est bien du type pseudo-périodique amorti ($R_{\text{totale}} \simeq 19,5 \Omega < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 1340 \Omega$). La fréquence propre du circuit $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ est de l'ordre de 2970 Hz et le coefficient de qualité associé $Q = \frac{2\pi L f_0}{R_{\text{totale}}} \simeq 34,4$ qui est bien nettement supérieur à 1 (cf (1.10)).

Remarque : Le condensateur doit être choisi de manière à supporter une surtension à ses bornes de l'ordre de $QE \simeq 260 \text{ V}$.

3.2. Mesures préliminaires

Nous commençons par mesurer les valeurs de la capacité C , de la résistance R et de la résistance r_0 de la bobine avec un multimètre de bonne précision :

$$C = 80.00 \text{ nF} (\pm 0.3 \%) \quad R = 10.05 \Omega (\pm 0.3 \%) \quad r_0 = 9.10 \Omega (\pm 0.3 \%)$$

En amenant le circuit à la résonance, nous trouvons $L = 36.81 \text{ mH} (\pm 0.5 \%)$.

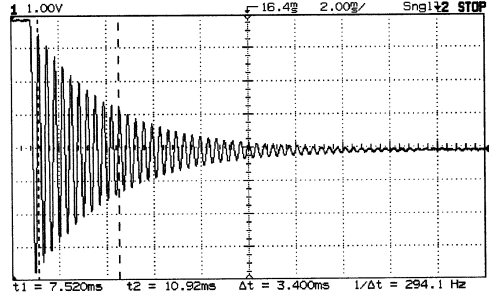
La mesure des conditions initiales conduit à $I_0 = 389 \text{ mA} (\pm 0.3 \%)$ et $U_0 = 7.45 \text{ V} (\pm 0.5 \%)$. Nous trouvons donc :

$$\frac{1}{2} L I_0^2 + \frac{1}{2} C U_0^2 = 2.79 \text{ mJ}$$

avec une précision de l'ordre de 1.1 % (en raison de (2.1)).

3.3. Acquisition de la tension aux bornes de la résistance

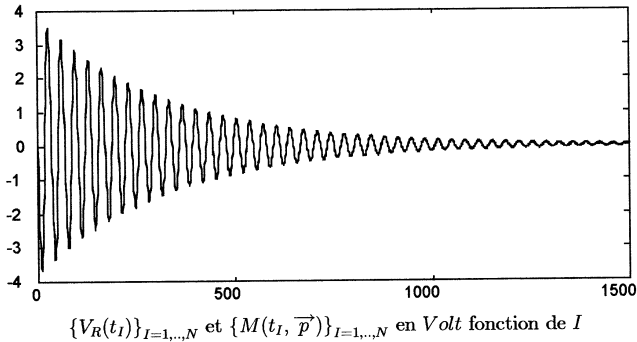
L'acquisition de la tension $V_R(t)$ est réalisée à l'aide de l'oscilloscope *HP 54601B* ; les données sont exploitées à l'aide de *Matlab*. Donnons l'allure de $V_R(t)$:



Nous avons programmé sur *Matlab* l'algorithme des moindres carrés précédemment décrit qui a convergé vers la valeur suivante :

$$R_{\text{totale}} = 22.61 \, \Omega \quad (3.1)$$

Nous avons également trouvé $L = 36.80 \, mH$, ce qui est en accord avec notre mesure à la résonance. Nous représentons sur le même graphe ci-dessous les échantillons $\{V_R(t_I)\}_{I=1,\dots,N}$ et le modèle $M(t, \vec{p})$ aux instants d'échantillonnage $\{t_I\}_{I=1,\dots,N}$ pour les valeurs des paramètres à la convergence ($N = 1500$ points) ; l'accord est remarquable :



3.4. Estimation de l'énergie dissipée

La période d'échantillonnage $T_e = 10 \, \mu s$ est bien largement inférieure à la pseudo-période du régime libre qui vaut $340 \, \mu s$. Le calcul de la relation (2.5) conduit à :

$$\varepsilon = \frac{R_{\text{totale}} T_e}{R^2} \sum_{I=1}^N V_R^2(t_I) = 2.80 \, mJ \quad (3.2)$$

Remarque : Les deux valeurs (3.1) et (3.2) que nous venons de donner, sont le résultat d'une seule mesure. Pour déterminer la précision de ε en supposant par ailleurs ne pas faire d'erreur systématique dans nos mesures, il convient de répéter plusieurs fois l'expérience afin de dresser une statique des résultats qui donnera un intervalle de confiance associé à un niveau de confiance connu (dédit de la loi de Student). Ainsi, en répétant 10 fois l'expérience, nous avons finalement obtenu :

$$\varepsilon = 2.78 \text{ mJ } (\pm 2\%)$$

avec un niveau de confiance de 99 % (on peut faire de même pour le terme $\frac{1}{2} L I_0^2 + \frac{1}{2} C U_0^2$).

3.5. Comparaison et critique des résultats

En conclusion, nous obtenons donc les résultats suivants qui valident notre démarche :

$$\frac{1}{2} L I_0^2 + \frac{1}{2} C U_0^2 = 2.79 \text{ mJ } \pm 0.03 \text{ mJ et } \varepsilon = 2.78 \text{ mJ } \pm 0.06 \text{ mJ}$$

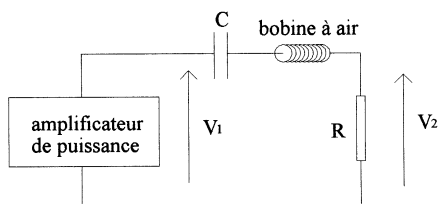
Remarque : On note bien la différence relative importante entre la résistance $R_{\text{totale}} = 22.61 \Omega$ du circuit et la somme $R + r_0 = 19.15 \Omega$, différence qui est de l'ordre de 18 % ; si l'on remplaçait dans l'expression (2.5) R_{totale} par $R + r_0$, l'on obtiendrait :

$$\varepsilon = 2.36 \text{ mJ } \pm 0.05 \text{ mJ}$$

la comparaison avec la quantité $\frac{1}{2} L I_0^2 + \frac{1}{2} C U_0^2$ n'est plus du tout satisfaisante (et le serait encore moins pour une valeur de C plus faible, i.e. pour une valeur de Ω_0 plus grande).

3.6. Validation du modèle basses fréquences de la bobine à air

Toute la démarche que nous venons de faire, repose sur la modélisation de la bobine que nous avons donnée (cf figure 2) ; il nous faut maintenant valider ce modèle et en identifier les paramètres. Pour ce faire, nous réalisons le circuit suivant :



où R est une boîte AIOP $\times 1 \Omega$ réglée sur $R = 10 \Omega$, C une boîte de condensateurs de capacités variables dont nous supposons le comportement idéal sur la plage de fréquences explorées. Pour des valeurs de C comprises entre 10 nF et $11 \mu\text{F}$, nous amenons le circuit à la résonance (comprise entre 200 Hz et 9000 Hz) ; alors, l'ensemble du condensateur et de la bobine est équivalent à une impédance purement résistive égale à $r(w_0)$ et nous avons :

$$\frac{V_2(jw_0)}{V_1(jw_0)} = \frac{R}{r(w_0) + R} \Rightarrow r(w_0) = \left[\frac{V_1(jw_0)}{V_2(jw_0)} - 1 \right] R$$

Pour chaque valeur de C dont nous mesurons précisément la valeur au capacimètre, nous relevons expérimentalement les valeurs de la fréquence de résonance f_0 , et les valeurs efficaces de V_1 et V_2 : nous en déduisons les valeurs de $r(f_0)$ et de $L(f_0)$. Ainsi, nous obtenons :

| | | | | | | | | | |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| f_0 en Hz | 249 | 411 | 793 | 994 | 1314 | 1517 | 1859 | 2078 | 2306 |
| V_1 en mV | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 |
| V_2 en mV | 261 | 260 | 258 | 256 | 253 | 250 | 245 | 241 | 237 |
| C en μF | 11.07 | 4.10 | 1.010 | 0.700 | 0.400 | 0.300 | 0.200 | 0.160 | 0.130 |
| L en mH | 36.90 | 36.57 | 36.65 | 36.62 | 36.68 | 36.69 | 36.65 | 36.71 | 36.76 |
| r en Ω | 9.20 | 9.28 | 9.43 | 9.58 | 9.81 | 10.05 | 10.46 | 10.80 | 11.15 |
| f_0 en Hz | 2508 | 2766 | 2933 | 3383 | 3702 | 4148 | 4785 | 5854 | 8233 |
| V_1 en mV | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 |
| V_2 en mV | 233 | 228 | 225 | 215 | 208 | 197 | 182 | 159 | 114 |
| C en nF | 109.5 | 90.0 | 80.0 | 60.1 | 50.2 | 40.0 | 30.0 | 20.0 | 10.1 |
| L en mH | 36.78 | 36.79 | 36.81 | 36.83 | 36.82 | 36.80 | 36.88 | 36.96 | 37.00 |
| r en Ω | 11.51 | 11.98 | 12.28 | 13.32 | 14.11 | 15.46 | 17.56 | 21.55 | 34.03 |

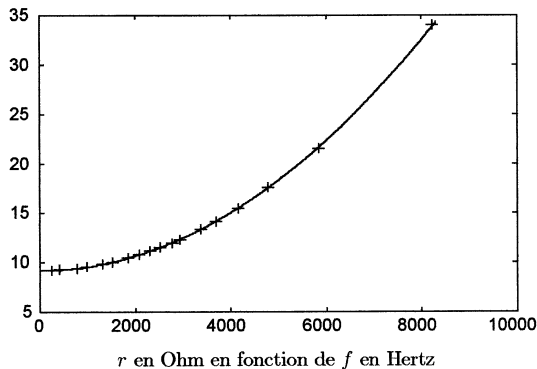
On remarque que les variations relatives de L n'excèdent pas 0.7 % de sa valeur moyenne (écart type 0.12 mH) ; on prend pour L la valeur moyenne obtenue :

$$L = 36.77 \text{ mH}$$

On peut chercher la meilleure droite de régression liant r à w^2 : on trouve ainsi que :

$$r(w) = 9.18 + 9.25 \cdot 10^{-9} w^2 \quad (3.3)$$

avec un coefficient de corrélation égal à 0.9999. Traçons sur un même graphique la courbe modélisée et les points expérimentaux :



Le modèle est remarquablement bien vérifié ; ses paramètres valent d'après (2.1) :

$$L = 36.77 \text{ mH}, r_0 = 9.18 \Omega \text{ et } R_{//} = 146 \text{ k}\Omega$$

Ils sont en accord avec les mesures de r_0 et de L que nous avons obtenues à l'ohmmètre et à la résonance ; ils vérifient bien les hypothèses (1.6) et (1.8) sur le domaine de fréquences étudiées.

4. Modélisation de la bobine à air

Nous présentons une modélisation simple [1] de la bobine à air qui permet, à partir des équations de Maxwell, de comprendre pourquoi la partie réelle de son impédance est une fonction quadratique de la fréquence, sur un domaine limité de basses fréquences (cf (1.5)). A l'origine de ce comportement, nous avons naturellement l'effet de peau, c'est à dire la tendance générale des courants alternatifs à devenir superficiels lorsque la fréquence augmente : cette évolution de la répartition des courants se manifeste par une augmentation de la résistance à mesure que la fréquence croît.

Plus précisément, nous allons montrer tout d'abord que la résistance d'un fil rectiligne est bien une fonction quadratique et croissante de la fréquence, sur un domaine limité de basses fréquences (cf (1.5)) ; nous vérifierons ensuite que, sur ce domaine, la valeur maximale que prend la résistance, reste très voisine de la valeur prise en courant continu.

Ensuite, nous montrerons qu'en réalisant, avec ce même fil, un solénoïde infini formé de n couches, la résistance du solénoïde demeure bien une fonction quadratique de la fréquence, pour des fréquences suffisamment basses, mais que cette fois-ci, la valeur maximale que prend sa résistance sur ce domaine de fréquence, est beaucoup plus importante que la valeur prise en courant continu, et l'est d'autant plus que le nombre n de couches est élevé.

4.1. Description qualitative

Un tel comportement quadratique en fonction de la fréquence peut nous étonner. En effet, typiquement, pour un fil rectiligne de longueur L , de conductivité σ et de section droite circulaire de rayon a , on sait que pour les pulsations w suffisamment élevées satisfaisant à :

$$\frac{a}{\delta} \gg 1$$

où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma w}}$, le courant ne circule plus uniformément dans tout le conducteur, mais presque uniquement sur une coquille périphérique d'épaisseur δ , appelée épaisseur de peau : l'effet de peau est alors très marqué. En première approximation, on peut dire que la surface de la section effectivement parcourue par le courant ne vaut plus $S = \pi a^2$, mais $S' = 2\pi a\delta$; et donc que la résistance du fil à la pulsation w est égale à :

$$R(w) = \frac{L}{\sigma S'} = R_0 \frac{a}{2\delta}$$

où $R_0 = \frac{L}{\sigma S}$ est l'expression usuelle de la résistance du fil (étudié en courant continu). Nous avons donc une augmentation de la résistance en \sqrt{w} , et non pas en w^2 .

Nous allons cependant montrer que nous avons bien le comportement quadratique souhaité lorsque l'effet de peau est peu marqué :

$$\frac{a}{\delta} \ll 1$$

c'est à dire pour des fréquences suffisamment basses : la répartition spatiale du courant est alors très légèrement non uniforme.

Mais, sous cette dernière condition, les conséquences de l'effet de peau sur l'augmentation de la résistance du fil en fonction de la fréquence restent négligeables, contrairement au cas d'un solénoïde infini formé de n couches de ce même fil. Pourquoi ? Qualitativement, pour

une même intensité, le champ magnétique maximal créé par le solénoïde multicouche est plus important que celui d'un fil ; de plus, en modélisant le solénoïde par n couches cylindriques illimitées, de même axe et parcourues par des courants volumiques annulaires, le champ magnétique en un point d'une couche du solénoïde multicouche, est dû, non seulement, au courant traversant la couche considérée, mais encore à l'action des couches qui lui sont extérieures. Ainsi, l'effet de peau sera globalement d'autant plus prononcé au sein d'une couche que celle-ci est proche de l'axe du solénoïde ; et dans une couche donnée, l'effet de peau sera plus marqué sur sa face la plus proche de l'axe là où le champ magnétique est le plus important (on parle d'effet de proximité [2]). L'ensemble de ces résultats se démontre aisément après avoir supposé que le rayon de la section droite du cylindre sur lequel s'appuie l'enroulement du solénoïde multicouche, est grand devant l'épaisseur de peau δ .

Pour plus de précisions sur l'évolution de l'impédance complexe de la bobine sur une large gamme de fréquences, on se reportera aux références [1], [2] et [3] ; pour des résultats théoriques et techniques sur la modélisation des dipôles passifs, indiquons la référence [3].

4.2. Hypothèses et notations

Supposons que le conducteur étudié soit alimenté à ses deux extrémités par une f.e.m sinusoïdale de pulsation w et parcouru par un courant sinusoïdal d'intensité $I(t)$:

$$I(t) = I \cos(wt).$$

Notons σ la conductivité du conducteur et supposons sa perméabilité relative égale à 1.

En supposant que la pulsation w soit suffisamment basse pour se placer dans l'approximation de l'effet de peau (densité de charge nulle dans tout le volume conducteur et courant de déplacement négligeable devant le courant de conduction), le champ électrique \vec{E} et le champ magnétique \vec{B} satisfont alors dans le conducteur à l'équation :

$$\Delta \vec{\underline{\underline{E}}} + \underline{k}^2 \vec{\underline{\underline{E}}} = 0 \quad (4.1)$$

où $\vec{\underline{\underline{E}}}$ désigne la représentation complexe du champ considéré (en $\exp(-iwt)$) et \underline{k} le module d'onde complexe défini par :

$$\underline{k} = \frac{1+i}{\delta} \text{ avec } \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma w}}$$

Les applications numériques seront faites pour le cuivre pour lequel $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 \Omega^{-1} m^{-1}$.

4.3. Définition de la résistance

Une définition simple de $R(w)$ est donnée par l'effet Joule : la valeur moyenne sur une période $T = \frac{2\pi}{w}$ du flux du vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ à travers les surfaces délimitant le conducteur s'identifie avec la puissance dissipée par effet Joule dans ce dernier selon :

$$< \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S} > = \iint < \vec{\Pi} > d\vec{S} = -\frac{1}{2} R(w) I^2 \quad (4.2)$$

On rappelle que :

$$< \vec{\Pi} > = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right] \text{ et } I^2 = |\underline{I}(t)|^2$$

4.4. Cas du fil cylindrique de section circulaire

4.4.1. Calcul du champ électromagnétique dans le fil

Considérons un fil cylindrique d'axe Oz , de section droite circulaire de rayon a , illimité suivant Oz et parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I \cos(\omega t)$. Associons à l'axe Oz du fil, un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Supposons que la densité volumique de courant parcourant le fil s'écrive en représentation complexe :

$$\vec{j}(r, t) = \underline{j}(r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_z$$

Dans le fil, le champ électrique s'écrit également donc sous la forme :

$$\vec{E}(r, t) = \underline{E}(r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_z$$

car $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. En tenant compte des symétries et des invariances de la densité de courant, nous cherchons le champ magnétique sous la forme :

$$\vec{B}(r, t) = \underline{B}(r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta$$

Nous allons maintenant déterminer les expressions de $\underline{E}(r)$ et $\underline{B}(r)$ dans le fil.

En reportant l'expression de $\vec{E}(r, t)$ dans (4.1), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \underline{E}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \underline{E}}{dr} + \underline{k}^2 \underline{E} = 0$$

La solution de cette équation qui est bornée en zéro, s'écrit :

$$\vec{E}(r, t) = \underline{\lambda} J_0(\underline{k}r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_z \quad (4.3)$$

où J_0 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0, et $\underline{\lambda}$ une constante complexe que l'on va exprimer en fonction de I , \underline{k} , a et σ ; en représentation complexe, nous avons :

$$I \exp(-i\omega t) = \iint \vec{j} d\vec{S} = \sigma \iint \vec{E} d\vec{S} = \frac{2\pi\sigma a \underline{\lambda}}{\underline{k}} J_1(\underline{k}a) \exp(-i\omega t) \quad (4.4)$$

soit :

$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{k}I}{2\pi\sigma a J_1(\underline{k}a)}$$

Pour faciliter la lecture de la relation (4.3), donnons l'expression réelle du champ électrique. Remarquons tout d'abord que la constante $\underline{\lambda}$ dépend de la fréquence par le biais de \underline{k} , écrivons-la sous la forme $A_0(w) \exp(-i\varphi_0(w))$; utilisons ensuite le développement en série de $J_0(\cdot)$:

$$J_0(\underline{k}r) = 1 - \frac{1}{4}(\underline{k}r)^2 + \frac{1}{64}(\underline{k}r)^4 + \dots = 1 - \frac{i}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{16}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4 + \dots$$

Ainsi, nous obtenons en nous limitant à l'ordre 4 :

$$\vec{E}(r, t) = A_0(w) \begin{bmatrix} \cos(\omega t + \varphi_0(w)) - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{\delta}\right)^2 \sin(\omega t + \varphi_0(w)) \\ -\frac{1}{16}\left(\frac{r}{\delta}\right)^4 \cos(\omega t + \varphi_0(w)) + \dots \end{bmatrix} \vec{u}_z \quad (4.5)$$

Le champ électrique n'est plus uniforme spatialement et l'est d'autant moins que l'effet de peau est important, c'est à dire si $\frac{a}{\delta} \gg 1$. De manière plus condensée, on peut encore écrire le champ $\vec{E}(r, t)$ sous la forme :

$$\vec{E}(r, t) = E_0(r, w) \cos(wt + \varphi(r, w)) \vec{u}_z \quad (4.6)$$

où l'on note bien que le module et la phase dépendent de r et de w .

L'expression de $\vec{B}(r, t)$ résulte, quant à elle, de l'équation de Maxwell-Faraday ; ainsi, nous obtenons à partir de (4.3) :

$$\frac{\partial \vec{B}(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial E(r)}{\partial r} \exp(-iwt) \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{B}(r, t) = -\frac{i\lambda k}{w} J_1(kr) \exp(-iwt) \vec{u}_\theta \quad (4.7)$$

où J_1 est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1. En utilisant l'expression de $J_1(\cdot)$ sous forme de série :

$$J_1(kr) = \frac{kr}{2} \left(1 - \frac{1}{8} (kr)^2 + \frac{1}{192} (kr)^4 + \dots \right) = (1+i) \frac{r}{2\delta} \left(1 - \frac{i}{4} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{48} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 + \dots \right)$$

nous obtenons en nous limitant à l'ordre 4 :

$$\vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 \sigma A_0(w) r}{2} \left[\cos(wt + \varphi_0(w)) - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 \sin(wt + \varphi_0(w)) - \frac{1}{48} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \cos(wt + \varphi_0(w)) + \dots \right] \vec{u}_\theta \quad (4.8)$$

Remarque : Lorsque l'effet de peau devient négligeable (i.e. $\frac{a}{\delta} \rightarrow 0$), alors $\frac{r}{\delta}$ tend vers 0 et la constante λ tend vers $\frac{I}{\sigma \pi a^2}$ (soit $A_0(w)$ vers $\frac{I}{\sigma \pi a^2}$ et $\varphi_0(w)$ vers 0) ; les expressions (4.5) et (4.8) tendent alors vers :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{I}{\sigma \pi a^2} \cos(wt) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(r, t) = \frac{\mu_0 I r}{2 \pi a^2} \cos(wt) \vec{u}_\theta$$

Ce résultat se compare directement aux expressions des champs trouvées dans le cas d'un courant permanent d'intensité I et de densité volumique uniforme $\frac{I}{\pi a^2}$ ($\vec{E} = \frac{I}{\sigma \pi a^2} \vec{u}_z$ et $\vec{B} = \frac{\mu_0 I r}{2 \pi a^2} \vec{u}_\theta$).

4.4.2. Expression de la résistance par unité de longueur

A partir de (4.3) et (4.7), nous pouvons calculer la valeur moyenne du flux du vecteur de Poynting à travers le cylindre de rayon a , d'axe Oz et de hauteur unité :

$$\iint < \vec{\Pi} > d\vec{S} = -\frac{\pi |\lambda|^2}{w \mu_0} \operatorname{Re} [i \underline{k}^* a J_0(\underline{k}a) J_1^*(\underline{k}a)]$$

De la relation (4.4), nous tirons :

$$I = \frac{2\pi \sigma a \lambda}{\underline{k}} J_1(\underline{k}a) \quad (4.9)$$

Nous pouvons alors écrire le bilan (4.2) qui conduit à l'expression de la résistance par unité de longueur $R(w)$:

$$R(w) = R_0 \operatorname{Re} \left[i \underline{k}^* a \frac{J_0(\underline{k}a)}{2 J_1(\underline{k}a)} \right] = R_0 \operatorname{Re} \left[\frac{1 - \frac{1}{2} i \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 + \dots}{1 - \frac{1}{4} i \left(\frac{a}{\delta} \right)^2 - \frac{1}{48} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 + \dots} \right] \quad (4.10)$$

où $R_0 = \frac{1}{\pi a^2 \sigma}$ est la résistance par unité de longueur dans le cas d'un courant permanent.

4.4.3. Approximation pour les basses fréquences

Plaçons-nous dans l'hypothèse où $\frac{a}{\delta} \ll 1$, c'est à dire dans le cas d'un effet de peau faiblement marqué. Le domaine des fréquences concernées s'écrit :

$$f \ll f_c = \frac{1}{\pi \mu_0 \sigma a^2} \quad (4.11)$$

Alors, le développement de Taylor de (4.10) à l'ordre 4 en $\frac{a}{\delta}$ conduit à :

$$\frac{R(f)}{R_0} = 1 + \frac{1}{48} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4 = 1 + \frac{1}{48} \left(\frac{f}{f_c} \right)^2 \quad (4.12)$$

Pour un fil de cuivre de rayon $a = 0.25 \text{ mm}$, on trouve :

$$f_c \simeq 70 \text{ kHz}$$

Donc, sur le domaine de basses fréquences défini par (4.11), nous avons bien le comportement quadratique souhaité (cf(1.5)). Si l'on considère que $\frac{a}{\delta} = 0.25$ est la limite de validité du développement limité, l'augmentation relative de la résistance par rapport à sa valeur dans le cas d'un courant permanent, est quasiment nulle : elle n'excède pas 0.008 % sur toute la plage de fréquence.

Pour mesurer la non-uniformité spatiale de la densité de courant, il va falloir la "comparer" à sa moyenne spatiale. Plus précisément, la densité complexe de courant s'exprime par :

$$\vec{j}(r, t) = \sigma \vec{E}(r, t)$$

En revenant aux grandeurs réelles, on peut écrire d'après (4.6) :

$$\vec{j}(r, t) = j(r, w) \cos(wt + \varphi(r, w)) \vec{u}_z \quad (4.13)$$

Le module de $\vec{j}(r, t)$ nous renseigne sur l'enveloppe de la densité de courant, donc sur les valeurs maximales qu'elle atteint en tout point du conducteur ; nous avons d'après (4.3) :

$$\left| \vec{j}(r, t) \right| = j(r, w) = |\lambda \sigma J_0(kr)|$$

A un instant t donné, la moyenne spatiale de $\vec{j}(r, t)$ vaut d'après (4.4) :

$$\vec{j}_0(t, w) = \frac{I}{\pi a^2} \exp(-iwt) \vec{u}_z = \frac{2\sigma \lambda}{a k} J_1(ka) \exp(-iwt) \vec{u}_z$$

Notons j_0 son module.

Le rapport du module de la densité de courant par le module de sa moyenne spatiale est une mesure possible de la non-uniformité spatiale de la densité de courant à une fréquence donnée :

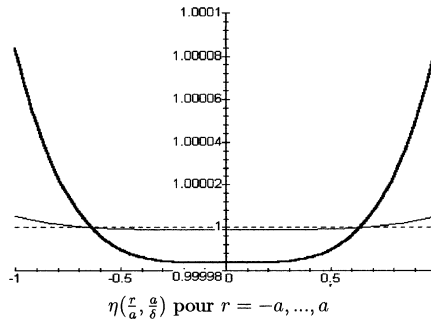
$$\eta\left(r, \frac{a}{\delta}\right) = \frac{j(r, w)}{j_0} = \frac{\left| \frac{ka}{2} J_0(kr) \right|}{\left| \frac{ka}{2} J_1(ka) \right|} = \left| \frac{1 - \frac{1}{2}i \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 \left(\frac{r}{a}\right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 \left(\frac{r}{a}\right)^4 + \dots}{1 - \frac{1}{4}i \left(\frac{a}{\delta}\right)^2 - \frac{1}{48} \left(\frac{a}{\delta}\right)^4 + \dots} \right|$$

En effet, lorsque l'effet de peau devient négligeable, on trouve bien que :

$$\eta\left(r, \frac{a}{\delta}\right) \xrightarrow{\frac{a}{\delta} \rightarrow 0} 1$$

Remarque : Notons que $\eta\left(r, \frac{a}{\delta}\right)$ est une fonction de la fréquence par le biais de $\frac{a}{\delta}$.

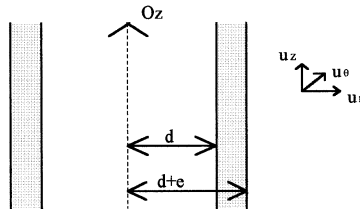
Traçons $\eta\left(\frac{r}{a}, \frac{a}{\delta}\right)$ pour $\frac{a}{\delta} = 0, 1$ et $0, 2$:



La non-uniformité de la densité de courant est très peu marquée : les variations maximales de $\eta\left(\frac{r}{a}, \frac{a}{\delta}\right)$ autour de 1 sont de l'ordre de 0.01 % pour $\frac{a}{\delta} \leq 0, 2$.

4.5. Cas du solénoïde illimité à 1 couche

Nous enroulons le fil précédent sur un cylindre infini d'axe Oz , de section droite circulaire de rayon d ; notons e l'épaisseur de l'unique couche qui vaut alors $2a$; nous la supposons faible devant d ($e \ll d$) :



Notons $I(t) = I \cos(\omega t)$ l'intensité sinusoïdale traversant le fil et N le nombre de spires par unité de longueur le long de l'axe Oz du solénoïde infini ainsi réalisé. Supposons les spires en grand nombre par unité de longueur et jointives, alors :

$$N = 1/e \quad (4.14)$$

4.5.1. Modélisation et forme du champ

Associés à l'axe Oz du solénoïde, un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Les spires étant jointives et en grand nombre par unité de longueur, nous pensons à modéliser le solénoïde par une couche cylindrique infinie, comprise entre les cylindre d'axe Oz , de rayon d et de rayon $d + e$, parcourue par des courants volumiques annulaires dont la densité s'écrit en représentation complexe :

$$\vec{j}(r, t) = \underline{j}(r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta$$

Pour $d \leq r \leq d + e$, le champ électrique s'écrit également sous la forme :

$$\vec{E}(r, t) = E(r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta$$

En tenant compte des symétries et des invariances de la densité de courant, nous cherchons alors, pour le champ magnétique, une solution à (4.1) sous la forme :

$$\text{pour } d \leq r \leq d + e, \vec{B}(r, t) = B(r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_z$$

qui satisfait aux conditions aux limites suivantes :

$$\vec{B}(r = d, t) = B_0 \exp(-i\omega t) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(r = d + e, t) = \vec{0}$$

choisies par analogie au cas d'un solénoïde infini parcouru par un courant permanent.

Remarque : Le théorème d'Ampère (valable sous sa forme classique dans l'approximation de l'effet de peau à l'intérieur du conducteur) nous donne l'expression du courant $I(t)$ en fonction de B_0 :

$$NI(t) = \frac{B_0}{\mu_0} \exp(-i\omega t) \Rightarrow I = \frac{B_0}{N\mu_0} \quad (4.15)$$

Ainsi, B_0 est réel, notons-le B_0 dans la suite. Remarquons que le champ magnétique ne peut pas être rigoureusement uniforme pour $0 \leq r \leq d$ car il satisfait en fait à :

$$\Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{d^2 B}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dB}{dr} + \frac{\omega^2}{c^2} B = 0$$

sous la condition aux limites $B(r = d) = B_0$.

Par ailleurs, dans le cadre de ce modèle, on supposera que la surface de la section droite du fil vaut en fait $\frac{e}{N} = e^2$.

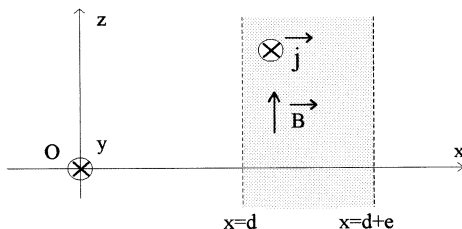
4.5.2. Hypothèses

Les calculs vont être menés en déterminant tout d'abord l'expression du champ magnétique dans la couche cylindrique, l'expression du champ électrique se déduisant directement de l'équation de Maxwell-Ampère. Nous allons travailler sous deux hypothèses :

1. l'épaisseur de peau δ est très faible devant le rayon de courbure de la surface intérieure de la couche cylindrique, c'est à dire le rayon intérieur d du solénoïde :

$$\frac{d}{\delta} \gg 1 \quad (4.16)$$

Nous montrerons que physiquement, cette hypothèse revient à assimiler la couche cylindrique infinie à une couche plane infinie, d'épaisseur e , délimitée par les plans d'équation $x = d$ et $x = d + e$:



et parcourue par un courant de densité volumique $\vec{j}(x, y, z, t) = \vec{j}(x) \exp(-i\omega t) \vec{u}_y$, ($\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$) désignant la base associée aux coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'axes (Ox, Oy, Oz) .

En tenant compte des symétries et des invariances de la densité de courant, le problème se résume donc à trouver l'expression d'un champ magnétique sous la forme suivante :

$$\vec{B}(x, y, z, t) = \underline{B}(x) \exp(-i\omega t) \vec{u}_z$$

pour $d \leq x \leq d + e$, qui satisfait aux conditions aux limites $\underline{B}(x = d) = B_0$ et $\underline{B}(x = d + e) = 0$ (l'expression du champ électrique se déduisant de l'équation de Maxwell-Ampère).

2. L'épaisseur de peau δ est grande devant l'épaisseur e de la couche, c'est à dire le diamètre du fil :

$$\frac{e}{\delta} \ll 1 \quad (4.17)$$

On s'attend alors, comme pour le cas du fil rectiligne que nous venons de traiter, à observer un comportement quadratique en fonction de la fréquence de la résistance du solénoïde.

Remarque : Ces deux hypothèses dont la première va fortement simplifier la résolution mathématique du problème en évitant le recours aux fonctions de Bessel et à leur développement asymptotique [1], imposent bien pour le solénoïde que l'épaisseur de la couche d'enroulement soit faible devant le rayon intérieur du solénoïde $e \ll d$; on ne peut pas les faire simultanément dans le cas du fil illimité que nous avons traité : le rayon de courbure de la surface délimitant le fil vaut a et l'épaisseur du fil $2a$.

4.5.3. Calcul du champ électromagnétique dans la couche

Déterminons tout d'abord l'expression du champ magnétique. En reportant l'expression de $\vec{B}(r, t)$ pour $d \leq r \leq d + e$, dans (4.1), nous obtenons pour $\underline{B}(r)$:

$$\frac{d^2 \underline{B}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\underline{B}}{dr} + \underline{k}^2 \underline{B} = 0 \quad (4.18)$$

Montrons que :

$$\tilde{\underline{B}}(r) = C_1 \exp(ikr) + C_2 \exp(-ikr) \quad (4.19)$$

est bien solution de (4.18) sous l'hypothèse (4.16), C_1 et C_2 désignant deux constantes dépendant des conditions aux limites. En effet, comme $d \leq r \leq d + e$, cette hypothèse implique que $\frac{\delta}{r} \ll 1$ dans toute la couche et l'on a bien :

$$\frac{d^2 \tilde{\underline{B}}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\tilde{\underline{B}}}{dr} = -C_1 \underline{k}^2 \left[1 - \frac{i}{i+1} \frac{\delta}{r} \right] \exp(ikr) - C_2 \underline{k}^2 \left[1 + \frac{i}{i+1} \frac{\delta}{r} \right] \exp(-ikr) \stackrel{\frac{\delta}{r} \ll 1}{\approx} -\underline{k}^2 \tilde{\underline{B}}$$

En fait, sous l'hypothèse (4.16), l'équation (4.18) se simplifie en :

$$\frac{d^2 \underline{B}}{dr^2} + \underline{k}^2 \underline{B} = 0$$

avec les conditions aux limites $\underline{B}(r = d + e) = 0$ et $\underline{B}(r = d) = B_0$: le problème est formellement équivalent à celui de la recherche du champ magnétique à l'intérieur d'une couche plane infinie d'épaisseur e que nous avons décrit ci-dessus.

La solution de cette équation vérifiant les conditions aux limites s'écrit finalement :

$$\underline{B}(r, t) = B_0 \frac{\sin(\underline{k}(d + e - r))}{\sin(\underline{k}e)} \exp(-i\omega t) \vec{u}_z \quad (4.20)$$

où l'on note bien que \underline{k} est complexe. On peut la réécrire sous la forme :

$$\underline{B}(r, t) = B_0 \frac{\sin\left(\frac{d+e-r}{\delta}\right) \cosh\left(\frac{d+e-r}{\delta}\right) + i \cos\left(\frac{d+e-r}{\delta}\right) \sinh\left(\frac{d+e-r}{\delta}\right)}{\sin\left(\frac{e}{\delta}\right) \cosh\left(\frac{e}{\delta}\right) + i \cos\left(\frac{e}{\delta}\right) \sinh\left(\frac{e}{\delta}\right)} \exp(-i\omega t) \vec{u}_z \quad (4.21)$$

Afin de faciliter la lecture de ces dernières quantités, donnons l'expression réelle du champ magnétique. Tout d'abord, le développement en série de Laurent de (4.21) à l'ordre 4 en $\frac{e}{\delta}$ et $\frac{d+e-r}{\delta}$ conduit à :

$$\underline{B}(r, t) = B_0 \frac{d + e - r}{e} \left[\begin{aligned} &1 - \frac{i}{3} \left(\left(\frac{e}{\delta} \right)^2 - \left(\frac{d+e-r}{\delta} \right)^2 \right) \\ &- \frac{1}{90} \left(7 \left(\frac{e}{\delta} \right)^4 + 3 \left(\frac{d+e-r}{\delta} \right)^4 - 10 \left(\frac{e}{\delta} \right)^2 \left(\frac{d+e-r}{\delta} \right)^2 \right) + \dots \end{aligned} \right] \exp(-i\omega t) \vec{u}_z$$

puis, en prenant la partie réelle, nous obtenons :

$$\vec{B}(r, t) = B_0 \frac{d + e - r}{e} \left[\begin{aligned} &\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \left(\left(\frac{e}{\delta} \right)^2 - \left(\frac{d+e-r}{\delta} \right)^2 \right) \sin(\omega t) + \\ &- \frac{1}{90} \left(7 \left(\frac{e}{\delta} \right)^4 + 3 \left(\frac{d+e-r}{\delta} \right)^4 - 10 \left(\frac{e}{\delta} \right)^2 \left(\frac{d+e-r}{\delta} \right)^2 \right) \cos(\omega t) + \dots \end{aligned} \right] \vec{u}_z \quad (4.22)$$

L'expression de $\vec{E}(r, t)$ résulte, quant à elle, de l'équation de Maxwell-Ampère ; ainsi, nous obtenons à partir de (4.20) :

$$\vec{E}(r, t) = -\frac{1}{\mu_0 \sigma} \frac{\partial \underline{B}(r)}{\partial r} \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta \Rightarrow \vec{E}(r, t) = \frac{k B_0 \cos(\underline{k}(d + e - r))}{\mu_0 \sigma \sin(\underline{k}e)} \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta \quad (4.23)$$

soit en raison de (4.14) et de (4.15) :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{I}{\sigma e^2} \frac{\underline{k} e \cos(\underline{k}(d + e - r))}{\sin(\underline{k}e)} \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta \quad (4.24)$$

Donnons l'expression réelle du champ électrique à l'ordre 4 en $\frac{e}{\delta}$ et $\frac{d+e-r}{\delta}$:

$$\vec{E}(r, t) = \frac{I}{\sigma e^2} \left[\begin{aligned} &\cos(\omega t) - \frac{1}{3} \left(\left(\frac{e}{\delta} \right)^2 - 3 \left(\frac{d+e-r}{\delta} \right)^2 \right) \sin(\omega t) \\ &- \frac{1}{90} \left(15 \left(\frac{d+e-r}{\delta} \right)^4 + 7 \left(\frac{e}{\delta} \right)^4 + 30 \left(\frac{e}{\delta} \right)^2 \left(\frac{d+e-r}{\delta} \right)^2 \right) \cos(\omega t) + \dots \end{aligned} \right] \vec{u}_\theta \quad (4.25)$$

Remarque : Lorsque l'effet de peau devient négligeable (i.e. $\frac{e}{\delta} \rightarrow 0$), alors $\frac{d+e-r}{\delta}$ tend vers 0 pour $d \leq r \leq d + e$; les expressions (4.22) et (4.25) tendent alors vers :

$$\vec{E}(r, t) = \frac{I}{\sigma e^2} \cos(\omega t) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(r, t) = B_0 \frac{d+e-r}{e} \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Ce résultat se compare directement aux expressions des champs trouvées dans le cas d'un courant permanent d'intensité I et de densité volumique uniforme $\frac{I}{e^2}$ traversant l'enroulement de la bobine (alors $\vec{E} = \frac{I}{\sigma e^2} \vec{u}_\theta$ et $\vec{B} = B_0 \frac{d+e-r}{e} \vec{u}_z$).

4.5.4. Expression de la résistance par unité de longueur

A partir de (4.20) et (4.24), nous pouvons calculer alors la valeur moyenne du flux de $\vec{\Pi}$ à travers le cylindre de rayon d , d'axe Oz et de hauteur unité (la surface extérieure de la couche cylindrique n'intervient pas car le champ magnétique y est nul) :

$$\iint < \vec{\Pi} > d\vec{S} = -\frac{\pi d (NI)^2}{\sigma} \operatorname{Re} \left[\frac{k e \cos(ke)}{\sin(ke)} \right] \quad (4.26)$$

Des relations (4.15) et (4.26), nous déduisons l'expression de la résistance équivalente par unité de longueur $R(w)$ en appliquant (4.2) après avoir remarqué qu'une hauteur unité le long de l'axe du solénoïde correspond à une longueur $2\pi dN$ de fil :

$$\iint < \vec{\Pi} > d\vec{S} = -\frac{2\pi dN}{2} R(w) I^2$$

soit :

$$\begin{aligned} R(w) &= \frac{N}{\sigma e} \operatorname{Re} \left[\frac{k e \cos(ke)}{\sin(ke)} \right] = R_0 \operatorname{Re} \left[\frac{k e \cos(ke)}{\sin(ke)} \right] \\ &= \frac{e \sinh(\frac{2e}{\delta}) + \sin(\frac{2e}{\delta})}{\delta \cosh(\frac{2e}{\delta}) - \cos(\frac{2e}{\delta})} R_0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

où $R_0 = \frac{N}{\sigma e} = \frac{1}{\sigma e^2}$ correspond à la résistance du fil par unité de longueur dans le cas continu (e^2 correspondant à la section droite du fil dans le cadre de notre modélisation).

4.5.5. Approximation pour les basses fréquences

Tous les calculs ont été fait sous l'hypothèse (4.16) ; le domaine de fréquences qui lui est associé, est le suivant :

$$\frac{d}{\delta} \gg 1 \Rightarrow f \gg f_{c1} = \frac{1}{\pi \mu_0 \sigma d^2} \quad (4.28)$$

Supposons de plus que l'épaisseur de peau soit grande devant l'épaisseur de la couche, c'est à dire le diamètre du le fil :

$$\frac{e}{\delta} \ll 1 \Rightarrow f \ll f_{c2} = \frac{1}{\pi \mu_0 \sigma e^2} \quad (4.29)$$

alors, le développement de Taylor de (4.27) à l'ordre 4 en $\frac{e}{\delta}$ conduit à :

$$\frac{R(f)}{R_0} = 1 + \frac{4}{45} \left(\frac{e}{\delta} \right)^4 = 1 + \frac{4}{45} \left(\frac{f}{f_{c2}} \right)^2 \quad (4.30)$$

Pour une bobine de rayon $d = 2.5 \text{ cm}$ réalisé avec un fil de cuivre de rayon $a = e/2 = 0.25 \text{ mm}$, on trouve

$$f_{c1} \simeq 7 \text{ Hz} \quad \text{et} \quad f_{c2} \simeq 17.5 \text{ kHz}$$

Nous avons toujours le comportement quadratique souhaité dans la plage de basses fréquences satisfaisant à (4.28) et (4.29).

Pour comparer le résultat au cas du fil (cf (4.12)), rappelons que $e = 2a$, d'où :

$$\frac{R(f)}{R_0} = 1 + \frac{64}{45} \left(\frac{a}{\delta}\right)^4$$

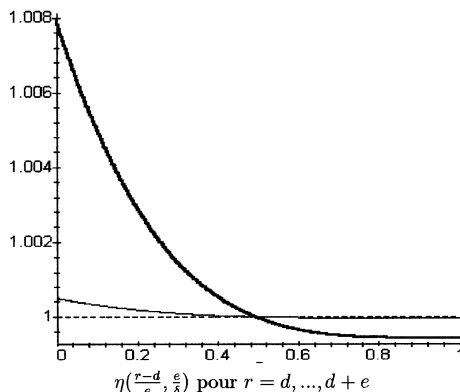
Le phénomène s'accroît d'un facteur de l'ordre de 70. Si l'on considère que $\frac{a}{\delta} = 0.25$ est la limite de validité du développement limité, l'augmentation relative de la résistance par rapport à sa valeur dans le cas d'un courant permanent, n'excède pas 0.5 % sur toute la plage de fréquence : elle reste encore relativement faible. En effet, le champ magnétique responsable de l'effet de peau est le champ propre de la bobine, et n'est pas renforcé par la présence d'autres couches.

Comme pour le fil, pour mesurer la non-uniformité spatiale de la densité de courant à une fréquence donnée, nous traçons l'allure de la fonction $\eta(r, \frac{e}{\delta})$, rapport du module de la densité de courant par le module de sa moyenne spatiale qui vaut ici $\frac{I}{e^2}$; en raison de (4.24), nous avons :

$$\eta(r, \frac{e}{\delta}) = \left| \frac{ke \cos(k(d+e-r))}{\sin(ke)} \right| = 2 \frac{e}{\delta} \sqrt{\frac{\sinh^2\left(\frac{d+e-r}{\delta}\right) + \cos^2\left(\frac{d+e-r}{\delta}\right)}{\cosh\left(\frac{2e}{\delta}\right) - \cos\left(\frac{2e}{\delta}\right)}}$$

On rappelle que $\eta(r, \frac{e}{\delta})$ est fonction de la fréquence par le biais de $\frac{e}{\delta}$.

Traçons $\eta(\frac{r-d}{e}, \frac{e}{\delta})$ pour $\frac{e}{\delta} = 0, 2$ et $0, 4$ (soit $\frac{a}{\delta} = 0, 1$ et $0, 2$) :

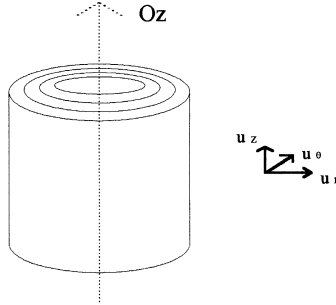


La non-uniformité de la densité de courant est plus marquée que pour le fil : les variations maximales de $\eta(\frac{r-d}{e}, \frac{e}{\delta})$ autour de 1 sont de l'ordre de 0.8 % pour $\frac{a}{\delta} \leq 0, 2$. Notons qu'ici la densité de courant est plus importante sur la face interne du bobinage : en effet, le champ magnétique augmente en module lorsque l'on se déplace vers l'axe du solénoïde (cf (4.22)) et concentre donc le courant sur la face interne de la bobine.

4.6. Cas du solénoïde illimité à n couches

Enfin, terminons notre étude par le cas d'un solénoïde à n couches : nous supposons avoir enroulé le fil précédent sur un cylindre infini d'axe Oz , de section droite circulaire de rayon

d , en n couches cylindriques illimitées, d'égale épaisseur $e = 2a$; nous négligeons l'épaisseur de l'isolant entre chaque couche. L'épaisseur d'une couche, c'est à dire le diamètre du fil, est supposée faible devant d ($e \ll d$). Notons e' l'épaisseur totale du solénoïde ($e' = ne$).



Notons $I(t) = I \cos(\omega t)$ l'intensité sinusoïdale traversant le fil, et N le nombre de spires par couche et par unité de longueur le long de l'axe Oz du solénoïde multicouche ainsi réalisé ; supposons-les jointives ($N = 1/e$) et en grand nombre par unité de longueur.

4.6.1. Modélisation et forme du champ

Nous reprenons une démarche totalement analogue à celle du solénoïde à une couche. Associons à l'axe Oz du solénoïde, un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) de base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. La $p^{\text{ième}}$ couche cylindrique ($1 \leq p \leq n$) est comprise entre les cylindres d'axe Oz , de rayon $d + (p-1)e$ et de rayon $d + pe$. Les spires étant jointives et en grand nombre par unité de longueur, nous pensons à modéliser la distribution de courant du solénoïde par n couches cylindriques infinies de courants annulaires dont la densité volumique s'écrit pour la $p^{\text{ième}}$ couche, en représentation complexe, sous la forme :

$$\vec{j}_p(r, t) = \underline{j}_p(r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta$$

Pour $d + (p-1)e \leq r \leq d + pe$, le champ électrique s'écrit également donc sous la forme :

$$\vec{E}_p(r, t) = \underline{E}_p(r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta$$

En tenant compte des symétries et des invariances de la densité de courant, nous cherchons alors, pour le champ magnétique de la $p^{\text{ième}}$ couche, une solution à (4.1) sous la forme :

$$\vec{B}_p(r, t) = B_p(r) \exp(-i\omega t) \vec{u}_z$$

avec les conditions aux limites (où $B_0 = \mu_0 NI$) :

$$B_p(r = d + (p-1)e) = (n - p + 1)B_0 \quad \text{et} \quad B_p(r = d + pe) = (n - p)B_0 \quad (4.31)$$

dont les expressions résultent directement de l'application du théorème d'Ampère.

4.6.2. Calcul du champ électromagnétique

Nous nous proposons de déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}_p(r, t)$ dans la $p^{\text{ième}}$ couche (l'expression du champ électrique se déduisant de $\vec{E}_p(r, t)$ par l'équation de Maxwell-Ampère) sous les deux hypothèses (4.16) et (4.17) : ce problème est formellement équivalent à celui de la détermination du champ magnétique dans le solénoïde monocouche, seules changent les conditions aux limites (cf (4.31)).

Ainsi, sous l'hypothèse (4.16), la solution de l'équation (4.1) pour le champ magnétique dans la $p^{\text{ième}}$ couche, vaut :

$$\vec{B}_p = \left[\frac{\cos \left[k(r - d - (p - \frac{1}{2})e) \right]}{\cos \left[k\frac{e}{2} \right]} [n - p + 1] - \frac{\sin \left[k(r - d - (p - 1)e) \right]}{\sin [ke]} \right] B_0 \exp(-i\omega t) \vec{u}_z \quad (4.32)$$

L'équation de Maxwell-Ampère conduit à :

$$\vec{E}_p = ke \left[\frac{\sin \left[k(r - d - (p - \frac{1}{2})e) \right]}{\cos \left[k\frac{e}{2} \right]} [n - p + 1] + \frac{\cos \left[k(r - d - (p - 1)e) \right]}{\sin [ke]} \right] \frac{I}{\sigma e^2} \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta \quad (4.33)$$

Remarque : Lorsque l'effet de peau devient négligeable (i.e. $\frac{e}{\delta} \rightarrow 0$), au sein de la $p^{\text{ième}}$ couche, la quantité $\frac{d+pe-r}{\delta}$ tend vers 0 ; pour $d + (p - 1)e \leq r \leq d + pe$, les expressions (4.32) et (4.33) tendent alors vers :

$$\vec{E}_p(r, t) = \frac{I}{\sigma e^2} \cos(\omega t) \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}_p(r, t) = nB_0 \frac{d+ne-r}{ne} \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Ce résultat se compare directement aux expressions des champs trouvées dans le cas d'un courant permanent d'intensité I et de densité volumique uniforme $\frac{I}{e^2}$ traversant l'enroulement de la bobine (alors $\vec{E} = \frac{I}{\sigma e^2} \vec{u}_\theta$ et $\vec{B} = nB_0 \frac{d+ne-r}{ne} \vec{u}_z$).

4.6.3. Expression de la résistance par unité de longueur

Calculons alors la valeur moyenne du flux de $\vec{\Pi}$ à travers le cylindre de rayon d , d'axe Oz et de hauteur unité (la surface extérieure n'intervient pas car le champ magnétique est alors nul) après avoir noté que :

$$\vec{B}(r = d, t) = nB_0 \exp(-i\omega t) \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{E}(r = d, t) = \frac{I}{\sigma e^2} \frac{ke(n \cos(ke) + 1 - n)}{\sin(ke)} \exp(-i\omega t) \vec{u}_\theta$$

soit :

$$\iint < \vec{\Pi} > d\vec{S} = -\frac{\pi d k n I^2}{\sigma e^2} \operatorname{Re} \left[\frac{n \cos(ke) + 1 - n}{\sin(ke)} \right]$$

Nous en déduisons l'expression de la résistance équivalente par unité de longueur $R(w)$ en appliquant (4.2) après avoir remarqué qu'une hauteur unité le long de l'axe du solénoïde correspond à une longueur $2\pi dnN$ de fil si l'on suppose de plus que $e' \ll d$:

$$\begin{aligned} R(w) &= \frac{1}{\sigma e^2} \operatorname{Re} \left[ke \frac{n \cos(ke) + 1 - n}{\sin(ke)} \right] = R_0 \operatorname{Re} \left[ke \frac{n \cos(ke) + 1 - n}{\sin(ke)} \right] \\ &= \frac{e}{\delta} \frac{[n - 2(n - 1) \cosh(\frac{e}{\delta})] \sin(\frac{2e}{\delta}) + [n - 2(n - 1) \cos(\frac{e}{\delta})] \sinh(\frac{2e}{\delta})}{\cosh(2\frac{e}{\delta}) - \cos(2\frac{e}{\delta})} R_0 \quad (4.34) \end{aligned}$$

où $R_0 = \frac{1}{\sigma e^2}$ correspond à la résistance par unité de longueur dans le cas continu.

4.6.4. Approximation pour les basses fréquences

Tous les calculs ont été menés sous l'hypothèse (4.16) ; comme précédemment, supposons de plus que l'épaisseur de peau soit grande devant le diamètre du fil (cf hypothèse (4.17)), alors le développement de Taylor de (4.34) à l'ordre 4 en $\frac{e}{\delta}$ conduit à :

$$\frac{R(f)}{R_0} = 1 + \left[\frac{n}{6} - \frac{7}{90} \right] \left(\frac{e}{\delta} \right)^4 = 1 + \left[\frac{n}{6} - \frac{7}{90} \right] \left(\frac{f}{f_{c2}} \right)^2 \quad (4.35)$$

Nous avons toujours le comportement quadratique souhaité dans la plage de basses fréquences satisfaisant à (4.28) et (4.29) ; pour le comparer au cas du fil illimité (cf (4.12)), supposons qu'il y ait $n = 10$ couches ($e = 2a$), d'où :

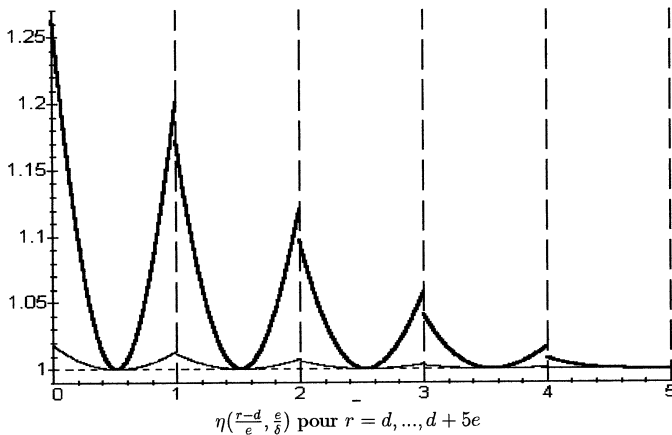
$$\frac{R(f)}{R_0} = 1 + \frac{1144}{45} \left(\frac{a}{\delta} \right)^4$$

Le phénomène s'accroît par rapport au fil d'un facteur de l'ordre de 1200. Si l'on considère que $\frac{a}{\delta} = 0.25$ est la limite de validité du développement limité, l'augmentation relative maximale de la résistance par rapport à sa valeur dans le cas d'un courant permanent, atteint 10 % : elle est enfin importante.

Comme pour le fil, pour mesurer la non-uniformité spatiale de la densité de courant à une fréquence donnée, nous traçons l'allure de la fonction $\eta(r, \frac{e}{\delta})$, rapport du module de la densité volumique de courant par le module de sa moyenne spatiale ; l'expression de $\eta(r, \frac{e}{\delta})$ pour $d + (p-1)e \leq r \leq d + pe$ vaut donc d'après (4.33) :

$$\eta(r, \frac{e}{\delta}) = \left| \frac{ke \sin \left[k(r - d - (p - \frac{1}{2})e) \right]}{\cos \left[k \frac{e}{2} \right]} [n - p + 1] + \frac{ke \cos [k(r - d - (p - 1)e)]}{\sin [ke]} \right|$$

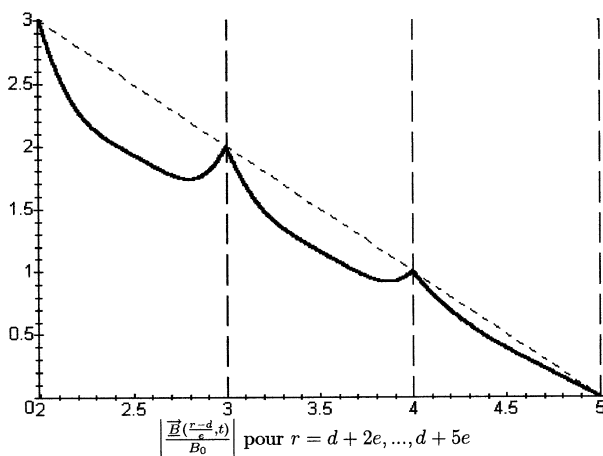
Dans le cas où $n = 5$, traçons $\eta(\frac{r-d}{e}, \frac{e}{\delta})$ pour $\frac{e}{\delta} = 0, 2$ et $0, 4$ (soit $\frac{a}{\delta} = 0, 1$ et $0, 2$) :



La non-uniformité de la densité de courant est plus marquée que pour le fil : les variations maximales de $\eta(\frac{r-d}{\delta}, \frac{a}{\delta})$ autour de 1 sont de l'ordre de 25 % pour $\frac{a}{\delta} \leq 0,2$. L'allure pour la couche la plus externe est celle que nous avons trouvée pour le solénoïde monocouche ; exceptée cette couche-ci, le champ magnétique au sein d'une couche est non seulement dû à son champ propre, mais encore aux champs créés par les couches qui lui sont extérieures, donc, l'effet de peau dans une couche est d'autant plus marqué que celle-ci est proche de l'axe Oz ; de plus, au sein d'une couche, la densité de courant est plus importante sur la face interne du bobinage, là où le champ magnétique (qu'elle produit) est plus important.

Remarque : Comme le suggère l'allure de $\eta(r, \frac{a}{\delta})$, la composante tangentielle du champ électrique \vec{E} trouvé est discontinue à la traversée d'une couche. Il s'agit là d'une limite de ce modèle trop simple dans lequel nous n'avons pas tenu compte d'une nécessaire épaisseur d'isolant.

Plus précisément, la continuité de la composante tangentielle du champ électrique est liée à celle de la dérivée spatiale du champ magnétique par rapport à r en raison de l'équation de Maxwell-Ampère (cf (4.23)). Traçons l'allure du module de $\frac{\vec{B}(r,t)}{B_0}$ pour les trois couches les plus externes de notre précédente bobine, en régime permanent (en pointillé) et dans le cas où $\frac{a}{\delta} = 2$ (en gras) afin de mieux visualiser le phénomène :



Comme nous le voyons sur ces courbes, les conditions aux limites qui traduisent que chaque couche est parcourue par un courant de même intensité (cf (4.31)), imposent qu'à la séparation entre la $p^{\text{ième}}$ et la $(p+1)^{\text{ième}}$ couche, c'est à dire en $r = d + pe$, le module du champ magnétique $|\vec{B}(r, t)|$ garde la même valeur qu'en régime permanent (i.e. $(n - p)B_0$). Par ailleurs, l'effet de peau a tendance à faire diminuer le module du champ magnétique au centre de chaque couche par rapport à sa valeur en régime permanent. En conséquence, il devient donc impossible d'obtenir un raccordement continu de la dérivée spatiale du champ magnétique à la séparation entre couches en négligeant l'épaisseur de l'isolant.

5. Comparaison avec l'expérience et conclusion

Les caractéristiques de la bobine Leybold utilisée sont les suivantes : fil de cuivre de rayon $a \simeq 0.25 \text{ mm}$, rayon intérieur $d \simeq 2.5 \text{ cm}$, $n = 10$ couches. On trouve son modèle théorique en appliquant (4.35) :

$$\text{pour } 7 \text{ Hz} \ll f \ll 17.5 \text{ kHz} \quad , \quad \frac{R(w)}{R_0} = 1 + 1,32 \cdot 10^{-10} w^2$$

résultat que l'on compare avec le modèle expérimental (cf (3.3)) :

$$\text{pour } f \leq 9 \text{ kHz} \quad , \quad \frac{r(w)}{r_0} = 1 + 1,01 \cdot 10^{-9} w^2.$$

Commentons l'ensemble des résultats obtenus. La modélisation de la bobine que nous avons donnée, conduit bien théoriquement à un comportement quadratique de sa résistance en fonction de la fréquence qui valide ainsi le modèle électrique basses fréquences proposé. Expérimentalement, ce phénomène est remarquablement bien vérifié. Cependant, il faut se garder de conclure trop hâtivement quant à l'adéquation complète des comportements expérimentaux et théoriques. En effet, l'expression des champs obtenue théoriquement, résulte d'une modélisation excessivement simplificatrice de la densité de courant supposée annulaire et ne dépendant que de la distance à l'axe (solénoïde infini, spires jointives, en très grand nombre par unité de longueur et non inclinées). En fait, les bobines utilisées au laboratoire sont courtes (longueur du même ordre de grandeur que le rayon) : de nombreuses spires (qui sont de surcroît nécessairement inclinées) sont donc plongées dans un champ magnétique qui a également une composante transversale à l'axe de la bobine, cause d'un effet de peau supplémentaire non négligeable.

6. Références

- | | | | |
|-----|------------------|---------------------------------|------------------------------|
| [1] | Sommerfeld | "Electrodynamics" | <i>Academic Press, 1952</i> |
| [2] | Kovacic | "Effet de peau dans une bobine" | <i>BUP n° 738, Nov. 1991</i> |
| [3] | Grivet et Legros | "Physique des circuits" | <i>Masson, 1960</i> |

Remerciements : Je remercie le professeur Faroux de m'avoir indiqué la référence [1] et mes collègues M. Madrolle et Hild des améliorations qu'ils ont apportées à ce document.