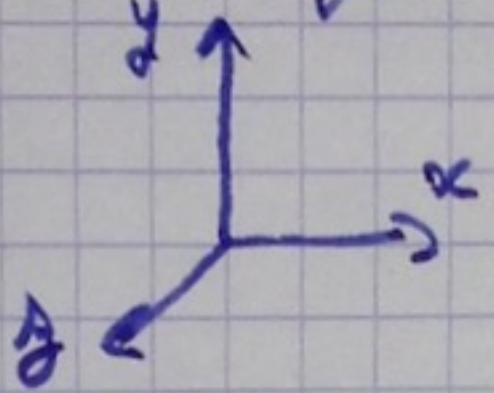
Chap 9 Dynamique des écoulements visqueux incompressibles

I- viscosité d'un fluide

III- Écoulement de Couette plan

Cas général : Écoulements unidirectionnels



$$\vec{v} = \begin{vmatrix} v_x(\vec{r},t) \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

- Conserv. masse $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ écoulement incompressible

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 0 \qquad v_x(y,z,t)$$

- Navier-Stokes :

$$\rho \frac{Dv_x}{Dt} = \rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \underbrace{v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}}_{0}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \Delta v_x$$

$$-\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = 0 \qquad P^* = P + \rho g y$$

$$P^*(x,t)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial P^*}{\partial x} + \eta\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]$$

$$\underbrace{\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \eta\left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right]}_{G(y,z,t)} = \underbrace{-\frac{\partial P^*}{\partial x}}_{F(x,t)}$$

Donc $\frac{\partial P^*}{\partial x} = G(t)$

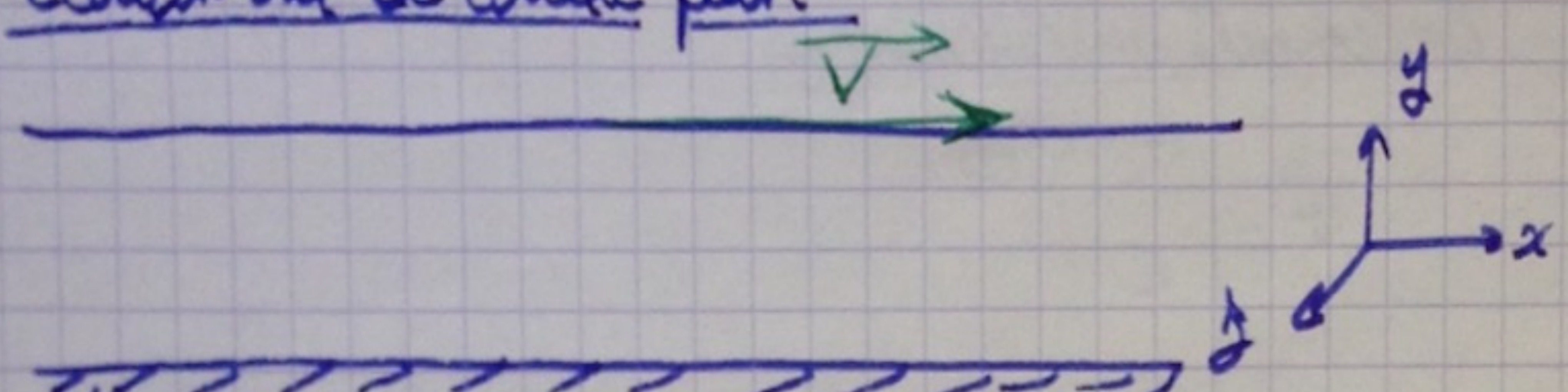
$$\boxed{\begin{aligned} P^*(x,t) &= G(t)x + H(t) \\ \rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \eta\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) &= -G(t) \end{aligned}}$$

Conséquence : écoulement unidirectionnel incompressible.

$$P^*(x,t) = G(t)x + H(t)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} - \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) = G(t)$$

* Ecoulement de couette plan



- stationnaire
- invariance $v_x(y)$

P^* ne dépend pas de x donc $G(t) = 0$

- $\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow v_x = Ay + B$

$$v_x = \frac{V_0}{a} y$$

- $P^* = H = P_0^*$: pression à l'altitude a

$P \quad = P_0 + \rho g a$

$$P = P_0 + \rho g (a - y)$$

* Ecoulement de Poiseuille (P : pompe)

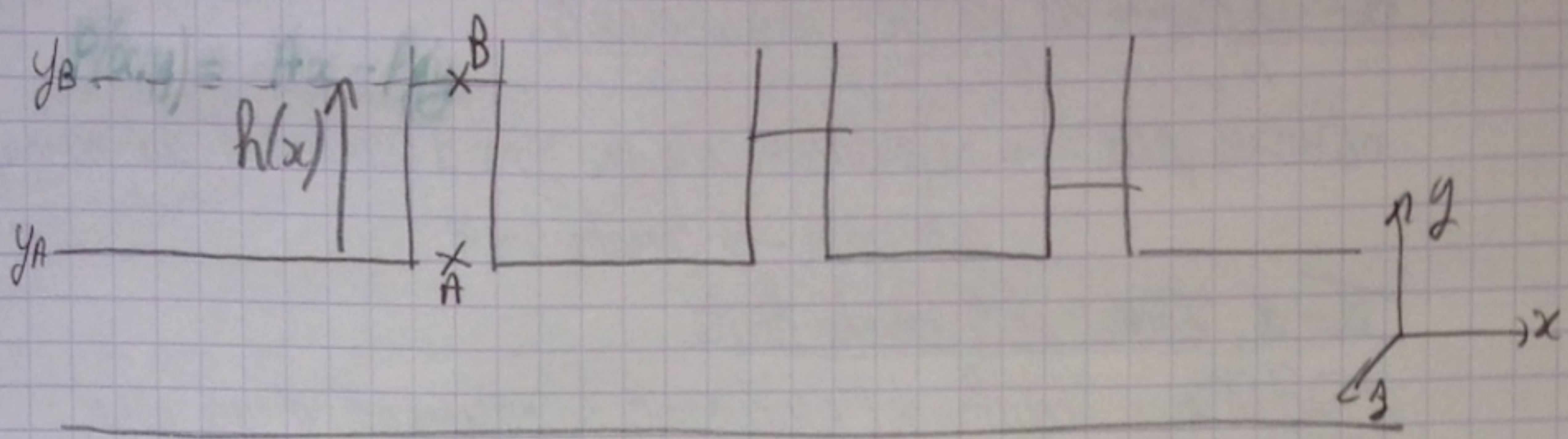
- Il y a un gradient de pression $P^* = Gx + H$
- invariance suivant z :

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{-G}{\eta}$$

$$v_x(y) = -\frac{G}{2\eta} y^2 + Cy + D$$

$$v_x(0) = v_x(a) = 0 \qquad D = +\frac{G}{2\eta} a$$

$$\boxed{v_x(y) = -\frac{G}{2\eta} y(y-a)}$$



• $P(x) = Gx + B - \rho g y$

• tube contient fluide immobile : $P_A = \underset{\overset{\|}{P_0}}{P_B} + \rho g h(x)$

$$P_A(x) = Gx + B'$$

$$h(x) = \frac{Gx + B' - P_0}{\rho g}$$

$G<0$ car le fluide va de la dte vers la gauche

• $\boxed{h(x) = \alpha\, P(x) + cst}$

Perte de charge dans un écoulement :

Charge : $P + \rho g z + \rho \frac{v^2}{2}$

↳ énergie cinétique volumique

↳ Epp vol

↳ composante de l'enthalpie : $\delta H = \delta U + P\delta V$, $h = u + \frac{P}{\rho}$

Mq charge diminue le long d'une ligne de courant dans un écoulement permanent dans un tuyau.

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} + \vec{grad}\,\frac{v^2}{2}$$

ρ uniforme

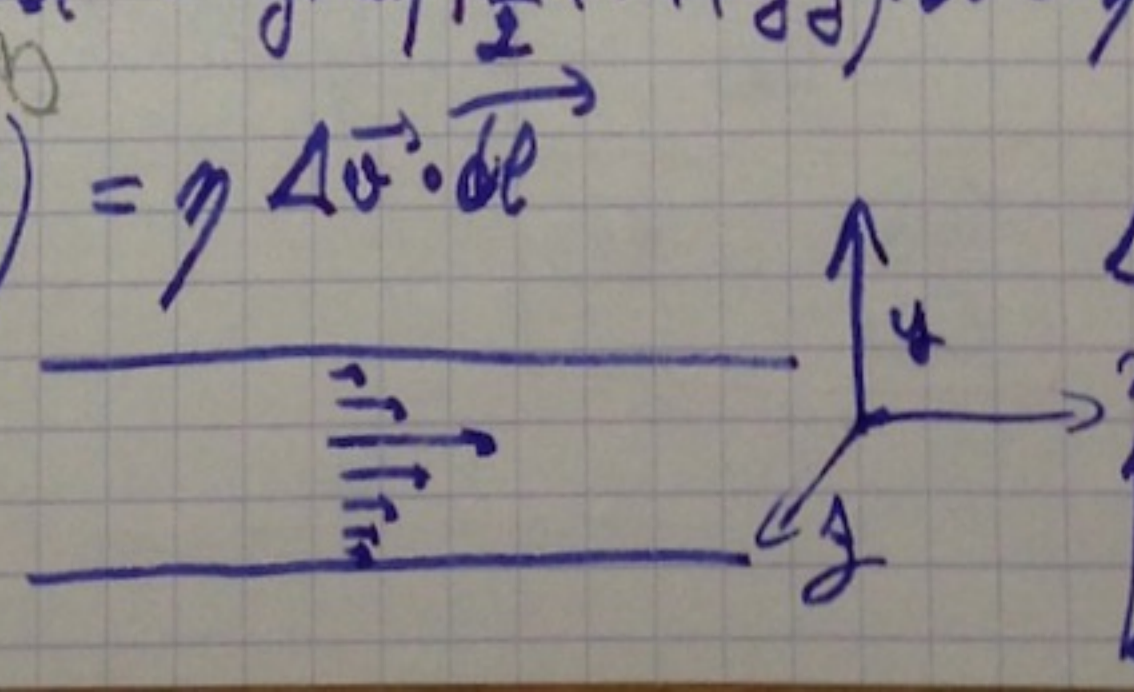
NS en Reg Perm : $\rho\, \vec{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} + \rho\, \vec{grad}\,\frac{v^2}{2} = -\vec{grad}(P + \rho g y) + \eta \Delta \vec{v}$

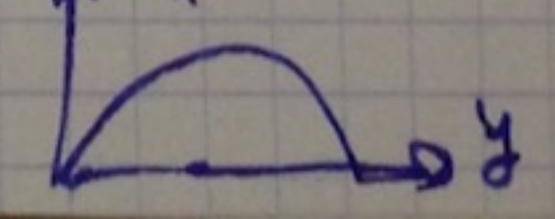
$$\underbrace{\rho\, \vec{rot}\,\vec{v} \wedge \vec{v} \cdot \vec{dl}}_{0} + \vec{grad}\left(\rho\frac{v^2}{2} + P + \rho g y\right)\cdot \vec{dl} = \eta \Delta \vec{v} \cdot \vec{dl}$$

$$d\left(\rho\frac{v^2}{2} + P + \rho g y\right) = \eta \Delta \vec{v} \cdot \vec{dl}$$

$$\Delta v_x = \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} < 0$$

Dans un tuyau





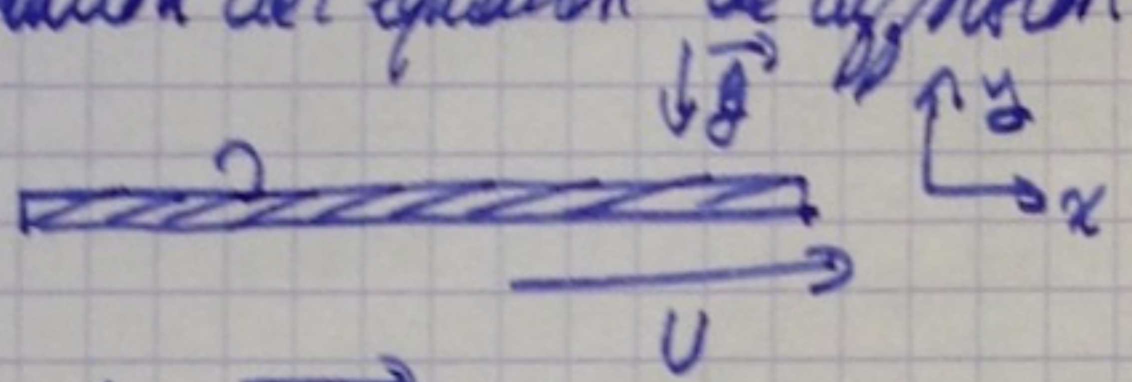
IV - Diffusion de qté de mouvement.

adhérence paroi → répercussion sur une zone d'écoulement au voisinage de la paroi → couche limite.

IV-1 Étude de la couche limite

· **Définition :** couche de l'écoulement au voisinage d'une paroi solide dans laquelle la présence de la paroi influe notablement sur l'écoulement par viscosité.

· Obtention de l'équation de diffusion :



(1) $\vec{v} = v_x(y,t)\,\vec{e_x}$

- $(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\,\vec{v} = 0$
- $-\overrightarrow{grad}\,P\cdot\vec{e_x} = 0$ car invariance
- $\rho \dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \longrightarrow \boxed{\dfrac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \dfrac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}}$

· Pas résoudre mais OG

$$\delta y \sim \sqrt{\nu \tau}$$

cinématique !

· Régime de Couette Plan :

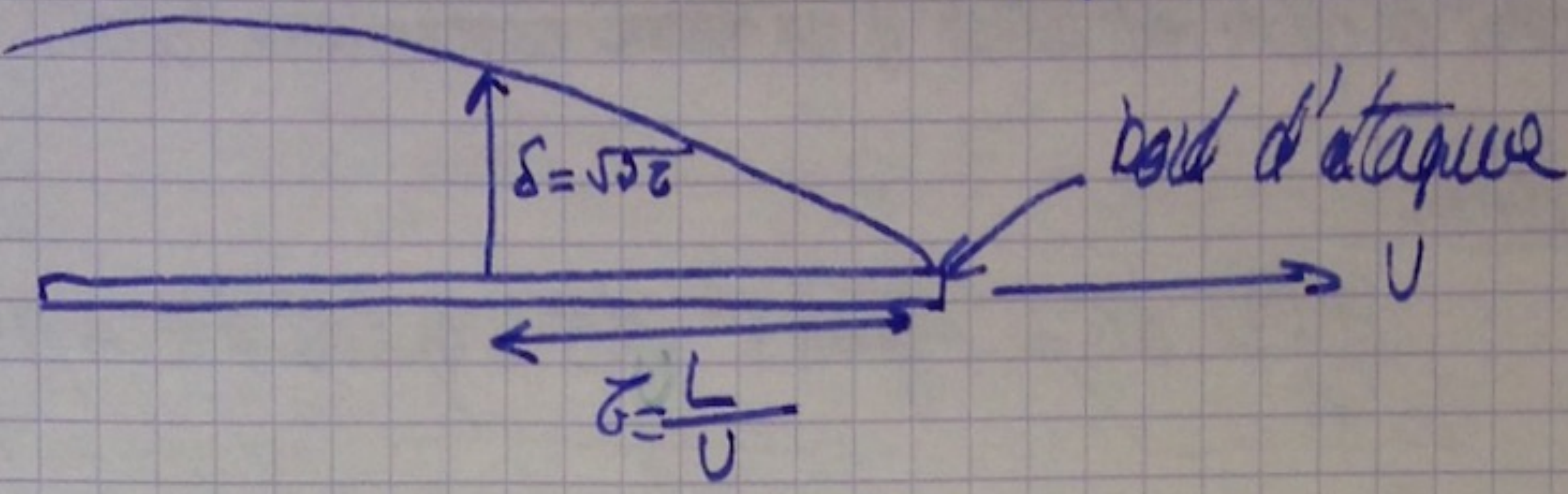
$$e \sim \sqrt{\nu\tau} \Longrightarrow \tau = \frac{e^2}{\nu}$$

$$\nu_{air} = \frac{\eta_{air}}{\rho_{air}} = \frac{1{,}8.10^{-5}\ Pa\cdot s}{1{,}3\ g\cdot L^{-1}} = 10^{-5}\ m^2 s^{-1}$$

$$\nu_{eau} = \frac{\eta_{eau}}{\rho_{eau}} = \frac{10^{-3}}{1000\ kg\cdot m^{-3}} = 10^{-6}\ m^2 s^{-1}$$

$$\boxed{\frac{\tau_{eau}}{\tau_{air}} = 10}$$

IV-2 Couche limite autour d'un objet profilé



$$\delta = \sqrt{\frac{\nu L}{U}}$$

→ Couche limite voiture : $v = 100\ km\cdot h^{-1} = 30\ m\cdot s^{-1}$
$L = 4\,m$

$\nu_{air} = \frac{10^{-5}}{1} = m\cdot s^{-2}$ $\quad \delta = \sqrt{\frac{10^{-5}\times 4}{30}} = 1.10^{-3}\,m = 1\,mm$

→ La voiture se salit poussière se dépose malgré la vitesse de la voiture.

V - Nb de Reynolds

V.1 Définition du Nb de Reynolds

* Interprétation de l'accélération advective $\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}$

Mq $\rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}\, d\tau$ est le débit de qté de mvt

- $\mathcal{V}$: volume fixe ds le réf
- raisonnons composante par composante

$$\Phi_{P_x} = \oiint_{S\in\mathcal{V}} \rho v_x\, \vec{v}\cdot\vec{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} \underbrace{div(\rho v_x \vec{v})\, d\tau}_{\text{débit de } P_x \text{ sortant de } d\tau}$$

$$div(\rho v_x \vec{v}) = \rho v_x\, div\,\vec{v} + \vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}(\rho v_x)$$

$$d\Phi_{P_x} = \vec{v}\cdot\overrightarrow{grad}(\rho v_x)\, d\tau$$

$$= \rho\left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right) v_x$$ ρ uniforme

$$d\Phi_{P_x} = \rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})v_x$$

$$\boxed{d\Phi_{\vec{P}} = \rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{grad})\vec{v}}$$

$$d\Phi_{\vec p} = \rho(\vec v \cdot \overrightarrow{grad})\,\vec v\, d\tau$$

↳ débit de qté de mvt sortant d'un volume élémentaire $d\tau$

<u>Navier-Stokes</u> :

$$\underbrace{\frac{\partial(\rho \vec v)}{\partial t}\, d\tau}_{} = \underbrace{-\overrightarrow{grad}\, P^*\, d\tau + \eta \Delta \vec v\, d\tau - \rho(\vec v \cdot \overrightarrow{grad})\vec v\, d\tau}_{}$$

↳ cause de la variation

→ act° des forces de pression + pesanteur

dérivée temporelle de la quantité de mvt dans un volume $d\tau$ <u>fixe</u> (dérivée partielle)

→ Transport advectif

↳ viscosité

- $\eta \Delta \vec v\, d\tau$: terme diffusif non associé à un transport macro
- $-\rho(\vec v \cdot \overrightarrow{grad})\vec v\, d\tau$: débit de qté de mouvement entrant dans $d\tau$, transporté par le flux de particule traversant $d\tau$

Transport Advectif.

$$Re = \frac{\|\rho(\vec v \cdot \overrightarrow{grad})\vec v\|}{\|\eta \Delta \vec v\|} = \frac{\rho U L}{\eta}$$

$Re \ll 1$: la viscosité joue un rôle prépondérant à l'échelle L

$Re \gg 1$: la viscosité joue un rôle négligeable à l'échelle L

Navier-Stokes adimensioné

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, P^* + \eta \Delta \vec{v}$$

$\vec{v} = U\vec{v_a}$

$\overrightarrow{\text{grad}} = \frac{1}{L}\overrightarrow{\text{grad}_a}$ $\qquad x_a = \frac{x}{L}$

$P \longrightarrow P_a = \frac{P}{\rho U^2}$

$t \longrightarrow t_a = \frac{U}{L} t$

$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial}{\partial t_a} = \frac{L}{U}\frac{\partial}{\partial t}$

$$\rho \frac{U^2}{L}\frac{\partial \vec{v_a}}{\partial t_a} + \rho\frac{U^2}{L}(\vec{v_a}\cdot\overrightarrow{\text{grad}_a})\vec{v_a} = \frac{-\rho U^2}{L}\overrightarrow{\text{grad}_a}\, P_a^* + \eta\frac{U}{L^2}\Delta_a \vec{v_a}$$

$Re = \frac{\rho U L}{\eta}$

$$\frac{\partial \vec{v_a}}{\partial t_a} + (\vec{v_a}\cdot\overrightarrow{\text{grad}_a})\vec{v_a} = -\overrightarrow{\text{grad}_a}\, P_a^* + \frac{\Delta_a \vec{v_a}}{Re}$$

L'équa° est invariante à nb de Reynolds cst.

<u>Ex: avion en soufflerie</u>

- maquette $1/10$ dans une soufflerie
- Reynolds cst $\longrightarrow \frac{\rho U L}{\eta} = \frac{\rho}{\eta} U_m L_m \Rightarrow \frac{U_m}{U} = \frac{L}{L_m} = 10$

  mais $U_m = 10U \rightarrow$ écoulement supersonique

  $\text{div}\,\vec{v} \neq 0 \longrightarrow$ onde de choc ! nature de l'écoulement modifiée

- $\frac{\rho U L}{\eta} = \frac{\rho_m U_m L_m}{\eta_m}$

  $\Longrightarrow \frac{U_m}{U} = \frac{\rho}{\rho_m}\frac{\eta_m}{\eta}\frac{L}{L_m} \sim 1$

⚠ négliger la viscosité $Re \gg 1$ ou mais on ne peut jamais négliger viscosité dans la couche limite.

$$\delta = \sqrt{\tau \nu} = \sqrt{\frac{\eta}{\rho}\frac{L}{V}} = L\sqrt{\frac{1}{Re}}$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$$

⚠ négliger la viscosité $Re \gg 1$ ou mais on ne peut jamais négliger viscosité dans la couche limite.

$$\delta = \sqrt{\tau \nu} = \sqrt{\frac{\cancel{\mu}}{\rho} \frac{L}{V}} = L\sqrt{\frac{1}{Re}}$$

$$\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}}$$