# Théorème de l'énergie cinétique

Rappel pour un point matériel : si A est soumis à un ensemble de forces de résultante **f** alors, dans un *référentiel galiléen*, la variation élémentaire de l'énergie cinétique $E_c = 1/2\ mv^2$ entre deux instants est égale au travail de la force **f** dans le déplacement élémentaire d**r** :

$$dE_c = \delta W = \mathbf{f}.d\mathbf{r} \quad \Leftrightarrow \quad dE_c/dt = P = \mathbf{f}.d\mathbf{v}$$

Démonstration facile à partir du PFD.

Généralisation sans peine pour un système de points matériels, mais le théorème de l'énergie cinétique reste valable pour un système continu et déformable décrit par un nombre fini de paramètres voire même pour des fluides incompressibles…

On distingue en général, le travail des forces d'origine intérieure au système (qui n'est pas nul en général) du travail des forces d'origine extérieures.
Si le référentiel n'est pas galiléen, il convient de rajouter les forces d'inertie dans le bilan des actions mécaniques.

On retient donc l'une ou l'autre des formulations pour le théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen :

$$\boxed{\begin{array}{ll} dE_c = \delta W_{int} + \delta W_{données} + \delta W_{liaisons} \\ \Delta Ec = W_{int} + W_{données} + W_{liaisons} \end{array}}$$

$dE_c = \delta W_{int} + \delta W_{données} + \delta W_{liaisons}$ pour une variation élémentaire

$\Delta Ec = W_{int} + W_{données} + W_{liaisons}$ pour un intervalle de temps fini

$dE_c/dt = P_{int} + P_{données} + P_{liaisons}$ (th. de la puissance cinétique)

Rappel : pour un système matériel quelconque, l'énergie cinétique est donnée par le **théorème de Koenig** :

$$\boxed{E_c = E_c^* + (1/2)\ M\ v_G^2}$$

# Travail des forces appliquées à un solide

Dans le cas d'un solide, le calcul des travaux se simplfie si on modélise les actions mécaniques par une répartition volumique de densité **f**(A) et de moment nul.

- La puissance s'écrit alors :

  $dP = \mathbf{f}(A) \,.\, \mathbf{v}_A \, d\tau$ pour chaque volume élémentaire du solide

  - soit $dP = \mathbf{f}(A) \,.\, \mathbf{v}_O \, d\tau + \mathbf{f}(A) \,.\, [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA}] \, d\tau$ avec O un point quelconque du solide

  - En intégrant sur tout le solide il vient $P = \mathbf{R} \,.\, \mathbf{v}_O + \mathbf{M}_O \,.\, \boldsymbol{\omega}$

Si le solide est soumis au torseur d'action mécanique $[\mathbf{R}, \mathbf{M}_O]$, le travail élémentaire de ce torseur pendant dt s'écrit

$$\boxed{\delta W = \mathbf{R} .\, \mathbf{v}_O \, dt + \mathbf{M}_O \,.\, \boldsymbol{\omega} \, dt = \mathbf{R} .\, d\mathbf{r}_O + \mathbf{M}_O \,.\, d\boldsymbol{\theta}}$$

- <u>**Conséquences**</u> :

  - Si le torseur est nul comme c'est le cas pour les **actions intérieures à un solide**, alors le travail (ou la puissance) est nul.

    Ainsi, on a toujours pour un **solide** : $W_{int} = 0$

  - Si le torseur se réduit à une force unique appliquée en O, on retrouve la formule classique de la mécanique du point

    Exemple : pesanteur $\delta W_{poids} = m\mathbf{g} \,.\, d\mathbf{r}_G = - mg\, dz_G$ (z ascendant)

    - Si le torseur se réduit à un couple de moment **Γ** aligné selon un axe Δ alors

      $\delta W = \Gamma_\Delta \, d\theta$

# Travail des actions de contact entre solides

Soient deux solides $S_1$ et $S_2$ en contact ponctuel en I, le torseur des actions de contact de $S_2$ sur $S_1$ est modélisé par une résultante $\mathbf{R}_{21} = \mathbf{T}_{21} + \mathbf{N}_{21}$ et un moment négligeable par rapport au point de contact I.

Par le théorème des actions réciproques, le solide $S_1$ exerce sur le solide $S_2$ la résultante $\mathbf{R}_{12} = - \mathbf{R}_{21}$.

Du point de vue de la puissance, on doit distinguer le point de contact $I_1$ du solide $S_1$ et le point $I_2$ du solide $S_2$, la puissance des actions de contact s'écrivant pour le système $\{S_1 + S_2\}$

$$\boxed{P_{\text{contact}} = \mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{v}_{I1} + \mathbf{R}_{12} \cdot \mathbf{v}_{I2} = \mathbf{R}_{21} \cdot (\mathbf{v}_{I1} - \mathbf{v}_{I2}) = \mathbf{R}_{21} \cdot \mathbf{v}_{g} = \mathbf{T}_{21} \cdot \mathbf{v}_{g}}$$

Les actions de contact sont vues comme des forces intérieures au système déformable constitué par les deux solides.

D'après la loi de Coulomb sur le frottement solide, la réaction tangentielle s'oppose toujours à la vitesse de glissement lorsque celle-ci n'est pas nulle, on a donc toujours

$$P_{contact} < 0$$

Les frottements contribuent donc toujours à diminuer l'énergie cinétique du système global $\{S_1 + S_2\}$.
Par contre, il existe des situations où les frottements sont moteurs pour un des solides en contact.

Condition pour avoir $P_{\text{contact}} = 0$

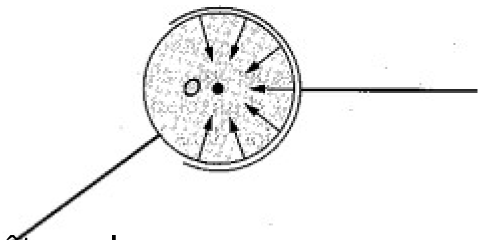
Ou bien $\mathbf{T}_{21} = 0$ : la réaction $\mathbf{R}$ est normale au plan tangent de contact (pas de frottement)

Ou bien $\mathbf{v}_g = 0$ : pas de glissement entre les solides

Cela conduit à préciser ce qu'on appelle liaison parfaite

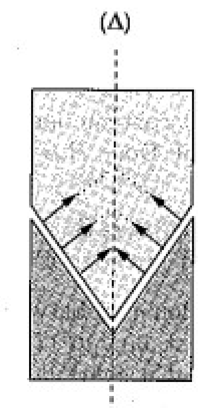
# Liaisons parfaites entre solides

Dans le cas d'un solide, le calcul des travaux se simplfie si on modélise les actions mécaniques par une répartition volumique de densité **f**(A) et de moment nul.




- **Liaison rotule** :
  - Permet au solide de tourner autour d'un point fixe O
  - Trois degrés de liberté de rotation sont possibles
  - Schématiquement représentée par deux sphères concentriques

  - Si la liaison est parfaite, le moment en O des actions de contact doit être nul.

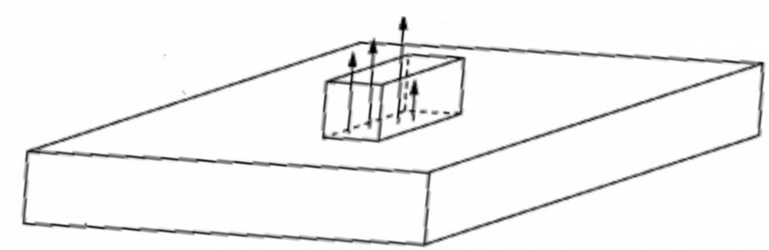



- **Liaison pivot** :

  - Permet au solide de tourner autour d'un axe fixe Δ
  - Un seul degré de liberté (θ) subsiste

  - Si la liaison est parfaite, la composante axiale du moment des actions de contact doit être nulle :
    - $P_{contact} = M_{\Delta}\ \omega = 0$

**Liaison appui-plan** :



Permet au solide de se déplacer sur un plan : deux degrés de liberté de translation sont autorisés.

Si la liaison est parfaite, la résultante des actions de contact est normale à la surface de contact : **R** = **N**.

# Energie potentielle

Cas d'un point matériel : si le travail d'une force **f** agissant sur un point A ne dépend pas du trajet suivi par A mais uniquement de la position de départ et d'arrivée alors on dit que f dérive d'une énergie potentielle $E_p(x,y,z)$ fonction uniquement des coordonnées spatiales de A et telle que

$$\delta W = \mathbf{f} \,.\, d\mathbf{r} = -dE_p \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{f} = -\,\mathbf{grad}\, E_p$$

Généralisation pour un système quelconque dont la position dans un référentiel donné est caractérisée par le jeu de paramètres $q = (q_1, q_2, \ldots, q_N)$.

Si, lors d'une variation élémentaire de l'un ou plus de ces paramètres, le travail des actions mécaniques **intérieures** au système peut s'écrire

$\delta W_{int} = -dE_p$ où $E_p$ est une fonction de q uniquement

alors le système possède l'énergie potentielle $E_p$.

**Interprétation thermodynamique** : un opérateur extérieur déforme très lentement le système de façon à ce que la vitesse de chaque point soit quasi nulle (transformation quasi-statique) alors le th. de l'$E_C$ impose que $\delta W_{int} + \delta W_{op} + \delta W_{liaison} = 0$.

Si, de plus, le système possède une énergie potentielle $E_p$ alors $\delta W_{op} = dE_p - \delta W_{liaison}$.

Dans le cas où les liaisons sont parfaites, le travail de l'opérateur extérieur s'identifie à une différentielle totale et est totalement récupérable dans la transformation inverse. D'où le nom d'énergie « potentielle », i.e. emmagasinée dans le système pour servir ultérieurement.

Dans le cas où les liaisons sont non parfaites alors $\delta W_{liaison} < 0$, l'opérateur doit fournir un travail supérieur pour atteindre le même état final. A l'inverse, le travail « récupérable » est inférieur à la diminution de l'énergie potentielle.

En thermodynamique, l'énergie potentielle mécanique s'identifie à l'énergie libre. Le travail des liaisons est converti en chaleur et contribue à augmenter l'énergie interne.

# Exemples d'énergie potentielle

1) Energie potentielle élastique : un opérateur agit de façon réversible sur l'extrémité d'un ressort de raideur k, il doit exercer une force à tout instant opposée à la force de rappel élastique (loi de Hooke).
Le travail de l'opérateur lors de l'allongement élementaire $d\ell$ du ressort s'écrit

$$\delta W_{op} = k\,(\ell - \ell_0)\,d\ell = dE_p$$

donc $\boxed{E_p = (1/2)\,k\,(\ell-\ell_0)^2}$

2) Energie potentielle de pesanteur : la pesanteur n'est pas une force intérieure en général sauf à inclure dans le système, la Terre, le Soleil et toutes les étoiles de l'univers… ce qui n'est pas très réaliste !

Il n'empêche que le travail du poids s'exerçant sur un système matériel ne dépend pas du chemin suivi par le centre de masse puisque $\delta W_{poids} = -Mg\,dz_G$ (z ascendant) et

$$W_{poids}(A \rightarrow B) = Mg\,(z_A - z_B) = -\,[E_p(B) - E_p(A)]$$

On définit donc l'énergie potentielle de pesanteur comme $\boxed{E_p = Mg\,z_G + \text{cste.}}$

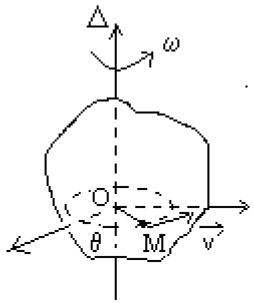
Il s'agit d'une extension de la notion d'énergie potentielle définie pour les actions intérieures à un système. Là, on parle plutôt d'*énergie potentielle du système dans un champ de force donné*.

3) Energie potentielle centrifuge : les forces d'inertie d'entraînement dans un référentiel tournant ne sont pas non plus des forces intérieures

Chaque élément de volume est soumis à la force $d\mathbf{f} = \omega^2\,\mathbf{HA}\,dm$
et le travail élémentaire de cette force dans un déplacement de A vaut

$$d^2W = d\mathbf{f} \cdot d\mathbf{HA} = \omega^2\,HA\,d(HA)\,dm = d((1/2)\,\omega^2\,HA^2\,dm)$$

Il s'identifie à une différentielle totale et on définit l'énergie potentielle centrifuge comme $dEp = -(1/2)\,\omega^2\,HA^2\,dm$.




Pour l'ensemble du système : $\boxed{E_p = -(1/2)\,J_\Delta\,\omega^2}$

# Conservation de l'énergie mécanique

Pour un système possédant une énergie potentielle (au sens strict) indépendante du temps, on a

$$dE_c = \delta W_{int} + \delta W_{ext} + \delta W_{liaisons} = -dE_p + \delta W_{ext} + \delta W_{liaisons}$$

On définit l'énergie mécanique comme : $\boxed{E_m = E_c + E_p.}$

**Théorème de l'énergie mécanique** : la variation d'énergie mécanique est égale au travail des forces extérieures agissant sur le système et au travail des forces de liaisons :

$$dE_m = \delta W_{ext} + \delta W_{liaisons}$$

Dans le cas d'un **système isolé** et des **liaisons parfaites**, l'énergie mécanique demeure constante au cours du temps.
C'est un cas particulier du principe général de conservation de l'énergie (1er principe de la thermo) appliqué à la mécanique.

$E_m$ est l'énergie macroscopique du système, exprimée en fonction de ses degrés de liberté. Il existe aussi une énergie « interne » dépendant des paramètres microscopiques du système.

Dans le cas où il y a des **frottements** : $\delta W_{liaisons} < 0$ et $E_m$ diminue au cours du temps.
Une partie de l'énergie mécanique macroscopique est convertie en chaleur et « récupérée » sous forme d'énergie interne. Le bilan énergétique est donc plus complexe à faire.
On parle de **systèmes non conservatifs**.

Remarques :

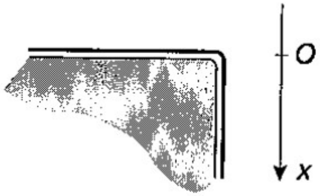
1) le résultat se généralise avec la notion d'énergie potentielle dans un champ de force donné : si les liaisons sont parfaites et que U désigne cette énergie potentielle alors $E_c + U = \text{cste}$.
On parle de **systèmes conservatifs**.
Mais en toute rigueur, $E_c + U$ n'est pas l'énergie mécanique du système puisqu'elle englobe aussi un champ de force extérieur.

2) si l'énergie potentielle dépend du temps, il n'y a plus conservation de l'énergie mécanique : exemple de la balançoire (oscillateur paramétrique)

# Application de la conservation de l'énergie mécanique

Une corde de longueur L et de masse m est étendue sur un coin de table horizontale, de façon à laisser pendre une portion de longueur initiale x0. On lâche la corde sans vitesse initiale et on suppose négligeable le frottement entre la corde et la table.

Etudier le mouvement ultérieur.




La corde dans le champ de pesanteur terrestre constitue un *système conservatif* donc son « énergie mécanique » Ec + Ep,pesant est constante.

Toute la corde est animée d'un mouvement de translation de vitesse v = dx/dt donc son énergie cinétique est

Ec = 1/2 mv²

Le centre de masse de la corde n'est plus au milieu (corde cassée en 2). Son abscisse est donnée par

$$m\,x_G = \int_{corde\,horizontale} 0\,dm + \int_0^x \frac{m}{L}\,x'\,dx' = \frac{mx^2}{2L}$$

donc l'énergie potentielle de pesanteur de la corde s'écrit (attention : x est descendant)

Ep,pesant = - m g xG = - mgx²/(2L)

La conservation de l'énergie mécanique conduit à l'équation différentielle : d² x / dt² = (g/L) x , ce qui s'intègre, compte tenu des conditions initiales, en

$$x(t) = x_0 \cosh\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t\right)$$