

# LP30 Rayonnement dipolaire électrique.

15/48

16/28

## Introduction

Jusqu'à présent, nous avons étudié la propagation des ondes EM dans un milieu homogène et isotrope. Nous allons maintenant étudier un rayonnement (= transmission d'énergie sous la forme d'onde électromagnétique).

→ utilité : antenne téléphone portable

→ rayonnement naturel : onde de la vie coronaire (pourquoi le ciel est bleu?)

→ due à l'accélération des particules chargées.

Sources : Cap Prépa Renvoisé PC (seulement)

→ Pour cette leçon le chapitre de ce livre est  
est un copié collé !

Prérequis :

→ équations de Maxwell, Loi de Faraday

→ stat source et potentiel

→ Définit du vecteur de Poynting énergie

→ Pour un truc  
+ propre

cf la leçon de  
Leticia Yannick  
dans le dossier.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

$$\vec{B} = \lambda_0(\vec{E} + \operatorname{grad} \psi)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \lambda_0 \vec{A}$$

$$\operatorname{rot} (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) = 0$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \operatorname{grad} \psi$$

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \operatorname{grad} (\psi + \frac{\partial \phi}{\partial t})$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \psi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\vec{A} = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi$$

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \psi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = r + \frac{\partial \phi}{\partial t} \\ \vec{A} = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi \end{array} \right.$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi$$

## LP. 30 Rayonnement dipolaire

- I- Echant rapporté par un système de charges en mouvement.  
cas le plus général

I.1 Équation aux potentiels retardés. [cf slide]

L'équation reliant les potentiels ( $V, \vec{A}$ ) aux sources ( $\rho, \vec{j}$ )  
 en se pliant dans la jauge de Lorentz :  $\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\nabla V = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Cas non relativiste} \quad V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\rho(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} dP$$

$$\nabla \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad \rightarrow \quad \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iint \frac{\vec{j}(P, t - \frac{PM}{c})}{PM} dP$$

$\times M$



On voit que la valeur du potentiel au point M, à l'instant t dépend  
 de la valeur des sources situées à la distance PM, à l'instant  $t - \frac{PM}{c}$ .

L'évolution du potentiel est en retard par rapport à celle des sources;  
 ce retard  $t_p = \frac{PM}{c}$  est la durée de propagation du signal de P à M

$$[V(M, t) = V(M, 0) - c \int_0^t \text{div} \vec{A} dt]$$

$$t - \cancel{\frac{PM}{c}} = t_p'$$

$$\begin{array}{ccc} \vec{A} & \longrightarrow & V(M, t) \\ \downarrow & \cdots \cdots \cdots & \downarrow \\ \vec{B} = \nabla \times \vec{A} & \longrightarrow & \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{array}$$

## I.-2 Début des potentiels ( $\vec{A}$ et $V$ ) à grande distance dans le cadre de l'ARQS des sources (fondus)

### 2 Hypothèses supplémentaires :

→ On ne s'intéresse qu'aux champs produits à grande distance (zone de rayonnement) :

a  $\ll \text{R}_M$  (faire schéma)

→ On suppose négligeable le retard dû à la taille du système.

$$\frac{a}{c} \ll T$$

$$t - \frac{PM}{c} \approx t - \frac{OM}{c} = t'$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_P \frac{q_P \vec{v}_P(t')}{PM}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi r} \sum_P \frac{q_P}{n} \frac{d\vec{OP}}{dt'}(t')$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi n r} \sum q_P \vec{OP}(t')$$

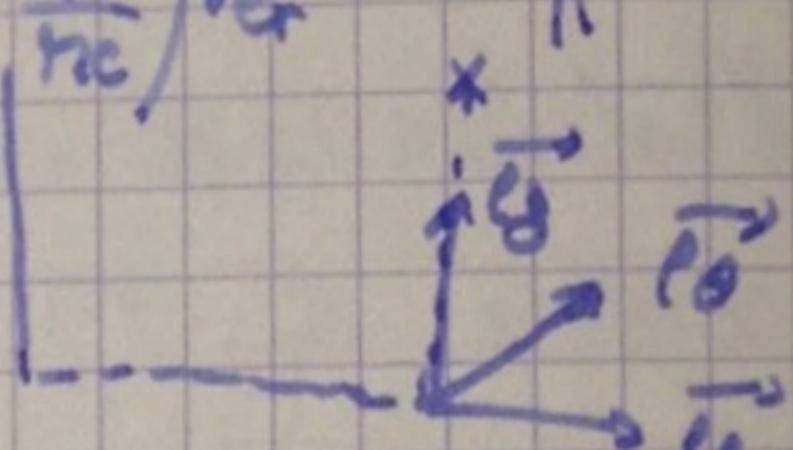
$$= \frac{\mu_0}{4\pi n r} \frac{d}{dt'} \vec{P}(t')$$

$$\boxed{\vec{A}(R, t) = \frac{\mu_0}{4\pi n r} \vec{P}(t')}$$

$$\begin{aligned} PM &= \sqrt{\|r_P - M\|^2} \\ &= n \sqrt{\|1 - \frac{r_P}{n}\|^2} \\ &= n \left(1 + \frac{r_P}{n^2}\right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} PM^2 &= |\vec{PO} + \vec{OR}|^2 \\ &= P_0^2 + OM^2 + 2\vec{PO} \cdot \vec{OR} \\ &= OA^2 \left(1 + \frac{OP^2}{OM^2} + \frac{2\vec{PO} \cdot \vec{OR}}{OP^2}\right) \end{aligned}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V(M, t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \text{div}(\vec{A}(M, t')) dt \\ V(R, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{1}{R^2} + \frac{1}{n^2} \right) \cdot \vec{e}_r \end{array} \right.$$



## I.-3 Champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}(M, t)$$

$$\vec{P} = P(R) \vec{e}_R \quad \text{Dirichlet constante}$$

~~$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} \vec{e}_R \text{rot} \left( \frac{\vec{P}}{R^2} \right)$$~~

$$n = \sqrt{P^2 + g^2}$$

~~$$\frac{\partial}{\partial P} \frac{1}{n} = \frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{1}{n} \right) \times \frac{\partial g}{\partial P} = -\frac{1}{n^2} \times \frac{1}{g} (P^2 + g^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2P$$~~

~~$$\frac{\partial}{\partial g} \left( \frac{1}{n} \right) = -\frac{P}{n^2 \sqrt{P^2 + g^2}} = -\frac{P}{n^3}$$~~

~~$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i}{R} \vec{P}(t) \frac{P}{R^3} \vec{e}_R$$~~

$$\text{rot} \vec{A} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{e}_R$$

$$\vec{B}(M, t) = \vec{\text{rot}}(\vec{A}(M, t)) \\ = \vec{\text{rot}}(\vec{A}(r) \hat{e}_\theta) \\ = -\frac{\partial A}{\partial \phi} \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi n} \vec{P}(t')$$

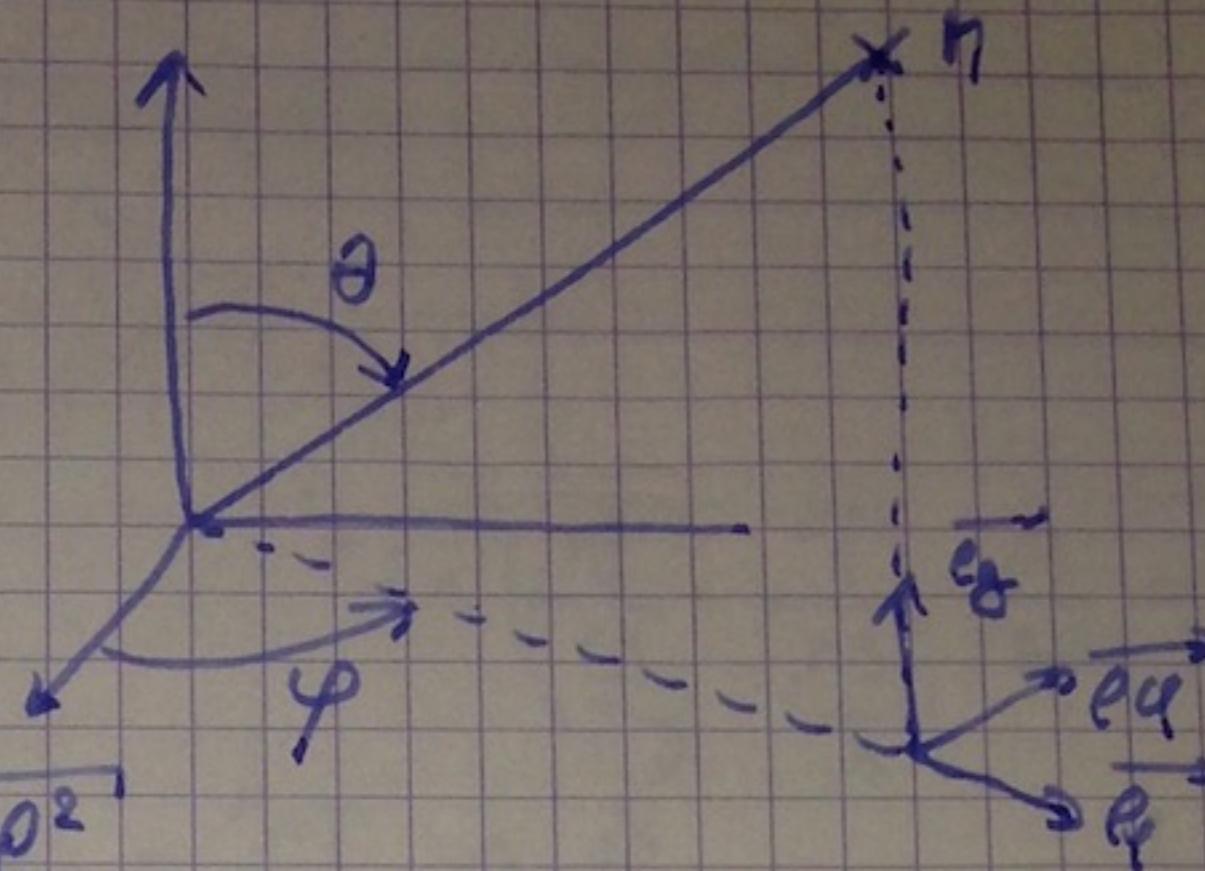
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi} = \frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial \phi} \times \frac{\partial t}{\partial \phi}; \quad n = \sqrt{g^2 + p^2} \\ = -\frac{1}{n^2} \times \frac{\vec{P}}{\vec{X}\sqrt{g^2 + p^2}} = -\frac{1}{n^2} \sin \theta$$

$$\frac{\partial \vec{P}(t')}{\partial \phi} = \frac{\partial \vec{P}(t - \frac{r}{c})}{\partial t'} \times \frac{\partial t'}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t'} = \vec{P} \times \frac{\partial \vec{v}}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial \phi} = \vec{P} \times \left(-\frac{1}{c}\right) \times \sin \theta$$

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial \phi} = -\frac{\vec{P}}{c} \sin \theta$$



$$\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0}{4\pi n} \left[ \frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi} \cdot \vec{P}(t') + \frac{\partial \vec{P}}{\partial \phi} \times \frac{1}{n} \right] \hat{e}_\varphi$$

$$= -\frac{\mu_0}{4\pi n} \left[ -\frac{1}{n^2} \sin \theta \vec{P} \times \left( -\frac{\vec{P}}{c} \sin \theta \right) \right] \hat{e}_\varphi$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi n} \left[ \frac{\vec{P}}{c} \sin \theta + \frac{\vec{P} \sin \theta}{n} \right] \hat{e}_\varphi$$

$$\boxed{\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi n} \left[ \frac{\vec{P}}{c} + \frac{\vec{P}}{n} \right] \wedge \hat{e}_\varphi}$$

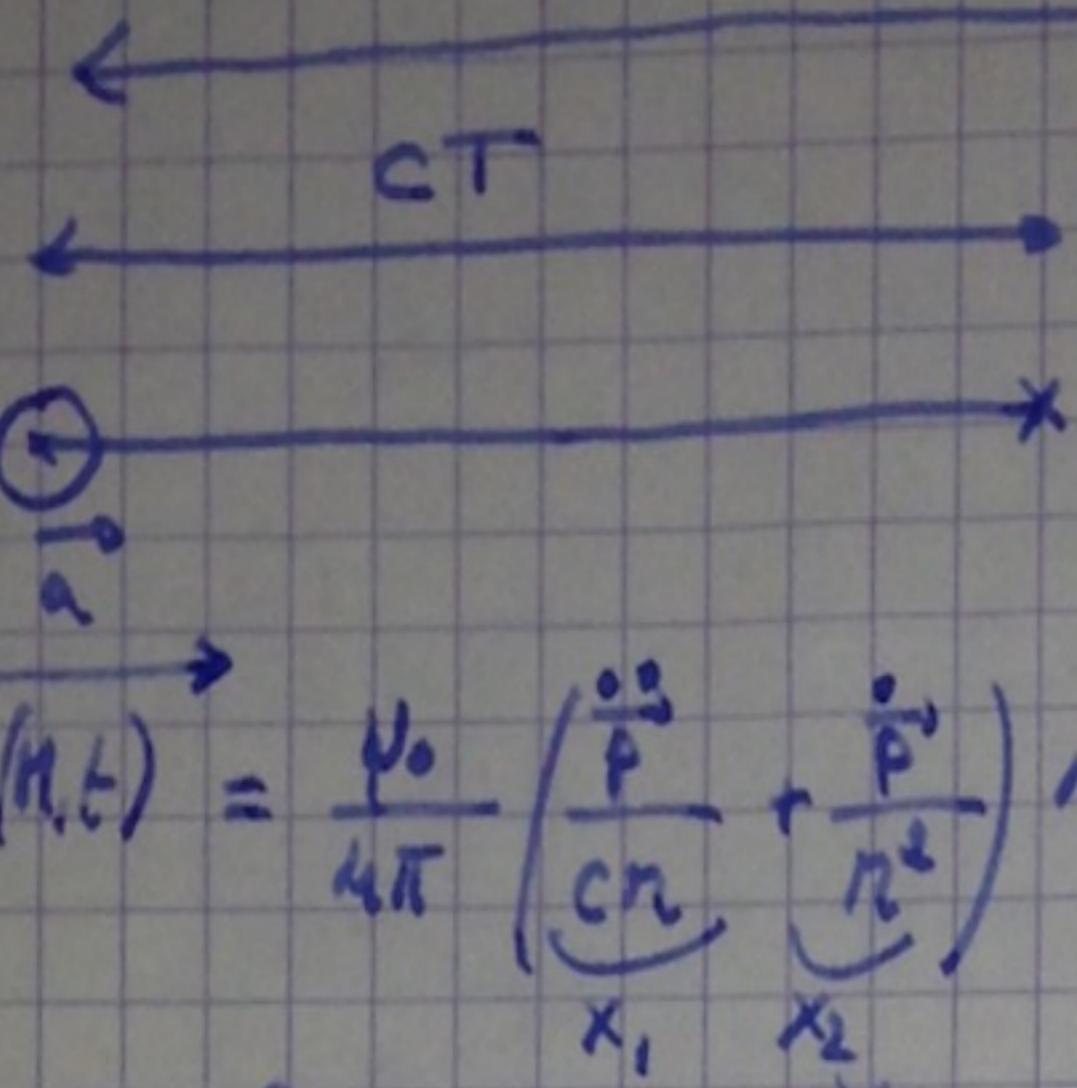
$$\vec{E} = \frac{3(\vec{P} \cdot \hat{e}_r) \hat{e}_r - \vec{P}}{4\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$V = \frac{\vec{P} \cdot \hat{e}_r}{4\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$\hat{e}_\theta \wedge \hat{e}_r = \sin \theta \hat{e}_\varphi$$

$$\vec{E}(M, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[ 2 \cos \theta \left( \frac{\vec{P}}{n^2} + \frac{\vec{P}}{n^2 c} \right) + \frac{\partial \vec{P}}{\partial r} \right] \hat{e}_r + \frac{\sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \left[ \frac{\vec{P}}{n^2} + \frac{\vec{P}}{n^2 c} + \frac{\vec{P}}{n^2 c^2} \right] \hat{e}_\theta$$

M  
X



$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\ddot{\vec{P}}}{cn} + \frac{\dot{\vec{P}}}{n^2} \right) \wedge \vec{e}_r$$

$$X_1 = \frac{\ddot{\vec{P}}}{cn} \sim \frac{\vec{P}}{cT^2 n}$$

$$X_2 = \frac{\dot{\vec{P}}}{n^2} \sim \frac{\vec{P}}{T^2 n^2}$$

Zone de champ proche ( $a \ll n \ll cT$ )

$$X_1 \ll X_2$$

~~$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{\vec{P}}(t)}{n^2} \right) \wedge \vec{e}_r$$~~

~~$$\vec{E}(M,t) = \frac{3(\vec{P}(t) \cdot \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_r - \vec{P}(t)}{4\pi\epsilon_0 n^3} + \frac{Q(t)}{4\pi\epsilon_0 n^2} \vec{e}_r$$~~

ARQS étendue au récepteur · plus de retard

Zone de rayonnement : ( $a \ll cT \ll n$ )

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\vec{P}(t)}{cn} \right) \wedge \vec{e}_r = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{\vec{P}}}{cn} \sin\theta \vec{e}_y$$

$$\vec{E}(M,t) \sim \frac{\ddot{\vec{P}}(t) \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 c^2 n} \vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} X_1 &\sim \frac{\vec{P}}{n^3} \\ X_2 &\sim \frac{\ddot{\vec{P}}}{n^2 c} \\ X_3 &\sim \frac{\ddot{\vec{P}}}{nc^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{X_2}{X_1} &\sim \frac{X_2 \times X_3}{X_1 \times X_2} \sim \frac{n}{TC} \\ X_2 &\gg X_1 \\ \frac{X_2}{X_3} &\sim \frac{TC}{n} \\ \frac{X_2}{X_1} &\sim \frac{n}{TC} \\ X_2 &\gg X_1 \end{aligned}$$

R ·  $\vec{B}$  et  $\vec{E} \propto \frac{1}{n}$  variation lente.  $t' = t - \frac{n}{c}$

· anisotropes :  $\theta = 0 \Rightarrow B = E = 0$

·  $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$  et  $\vec{E} \cdot \vec{n} = \vec{B} \cdot \vec{e}_r = 0 \Rightarrow$  mode plane longitudinale

$$\vec{P} = \sum q_i \vec{R}_i \quad \dot{\vec{P}} = \sum q_i \vec{v}_i \quad \ddot{\vec{P}} = \sum q_i \vec{a}_i$$

⇒ charge accélérées ⇒ champ rayonné

### I.3 Aspect énergétique du rayonnement.

$$\vec{\Pi}(M,t) = \frac{\vec{E}(M,t) \times \vec{B}(M,t)}{\mu_0} = \frac{\ddot{P}(t') \sin^2 \theta}{-16\pi^2 \epsilon_0 c^3 n^2} \hat{e}_r$$

$\theta > 0$

→ anisotrope

→ rien suivant l'axe  $\hat{e}_z$

→ radial suivant  $\hat{e}_r$

$$P_{\text{ray}}(M,t) = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \vec{\Pi}(M,t) \cdot d\vec{S}$$

$$P_{\text{ray}} = \int \int d\Omega \sin \theta \sin \phi \hat{e}_r \cdot \vec{\Pi}(M,t) \hat{e}_r$$

$$P_{\text{ray}} = \frac{\ddot{P}^2(t')}{8\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta$$

$$P_{\text{ray}} = \frac{\ddot{P}^2(t')}{8\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$\sin^3 \theta = \frac{1}{2} (\sin \theta + \sin 3\theta)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin \theta - \sin \theta \cos 2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} (\sin \theta - \frac{1}{2} \sin (2\theta) + \frac{1}{2} \sin (3\theta))$$

$$= \frac{3}{4} \sin \theta - \frac{1}{4} \sin (3\theta)$$

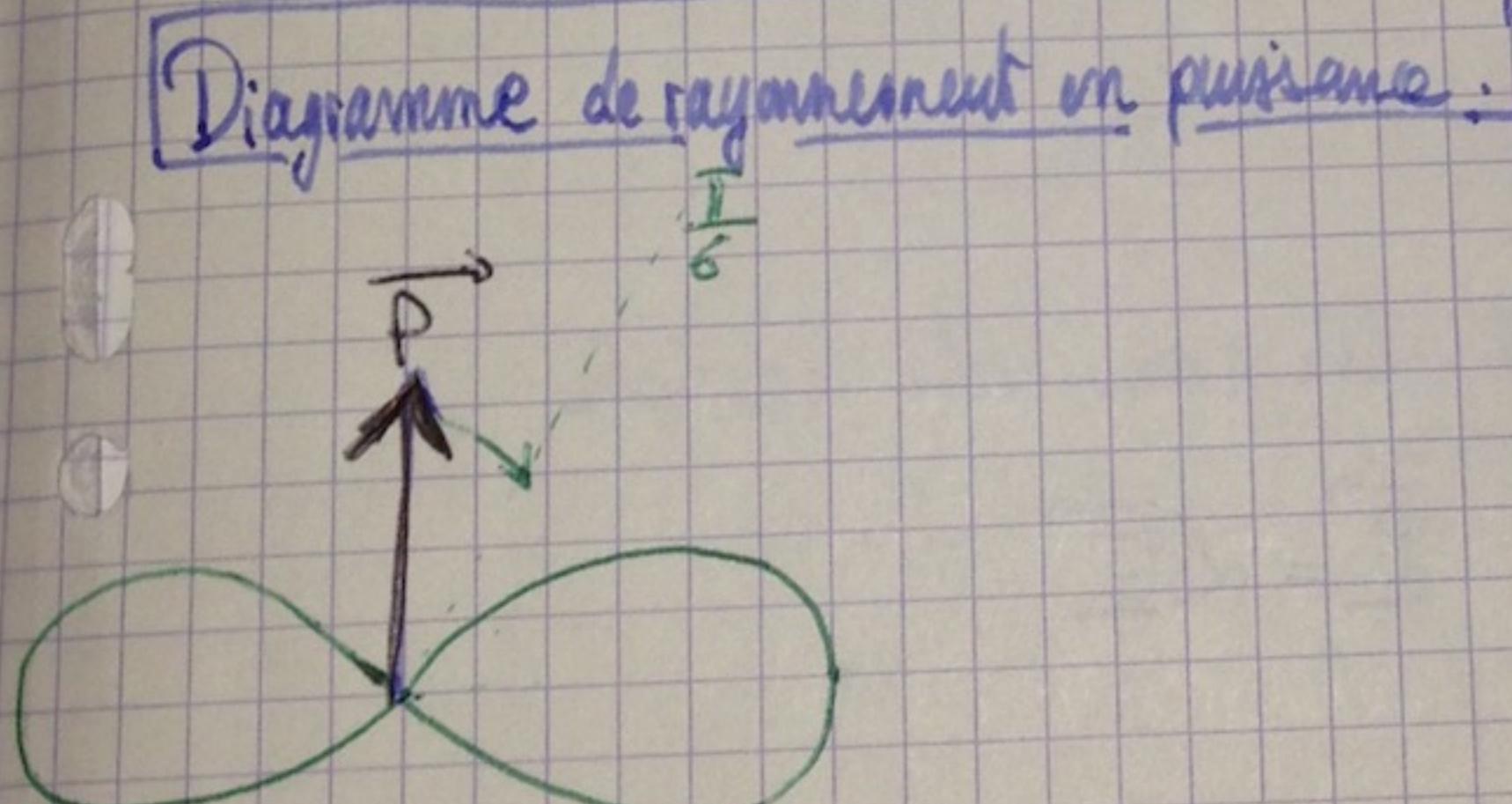
$$\int_0^{\pi/2} \sin \theta = -[\cos \theta]_0^{\pi/2} = 2$$

~~$$= \frac{3}{4} \times 2 - \frac{1}{4} \times 2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$~~

$$\int_0^{\pi/2} \sin 3\theta d\theta = \frac{1}{3} [\cos 3\theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{3} (-2) = -\frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{4} \times 2 - \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{9}{6} - \frac{1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$



Exemple: Dipôle de Hertz -

$$\vec{P} = q \vec{N} \vec{P} = q a \cos(\omega t') \hat{e}_z$$

mine relativiste :  $\frac{q a}{T} \ll c$

$$\langle P_{\text{ray}} \rangle = \frac{q^2 a^2 \omega^4}{16\pi \epsilon_0 c^3}$$

→ plus émission est rapide ( $\propto$  puissance ARQS et relativiste)  
plus l'énergie est gd.

## II Rayonnement dipolaire et matériau

Jusqu'à présent supposé de manière très théorique un milieu avec des charges en mouvement  $\rightarrow \vec{P} \rightarrow \vec{\rho} \rightarrow$  rayonnement.

~~Si on a des charges en mouvement~~

Il est possible de créer un moment dipolaire dans un matériau en envoyant une onde électromagnétique sur le matériau.  $F$  de Lorentz  $\rightarrow$  mouvement des charges oscillant  $\rightarrow$  rayonnement.

Faisons une expérience : expérience du lait cf Cap prépa

### II.1 Expérience introductive

Qualitativement :

Déplacement  $\rightarrow$  Rayonnement

$\Rightarrow$  modélisation de la matière pour aller + loin dans notre approche.

$$\langle P_{\text{ray}}^{(w)} \rangle = \frac{P_0^2 w^4}{16\pi c^3}$$

$$\vec{P}_0 = \alpha \delta \vec{E}$$

## II.2 Modélisation : Modèle de l'oscillateur électronique à résonance

- Modélisation champ électromagnétique d'atomes.

Atom : → moyen  
→ marge d'approximation

Bilans de forces :  $\vec{F}_{\text{ext}} = -Ze(\vec{E} + \vec{\omega} \times \vec{B}) = -Ze\vec{E}$

$$\vec{F}_i = -K\vec{r}$$

$$\vec{F}_d = -\frac{m}{2}\vec{v}$$

$$\text{PFD: } m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -K\vec{r} - \frac{m}{2} \frac{dv}{dt} - Ze\vec{E}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{m}{2} \frac{d\vec{r}}{dt} + K\vec{r} = -\frac{2e}{m} \vec{E}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{d\vec{r}}{dt} + w_0^2 \vec{r} = -\frac{2e}{m} \vec{E}$$

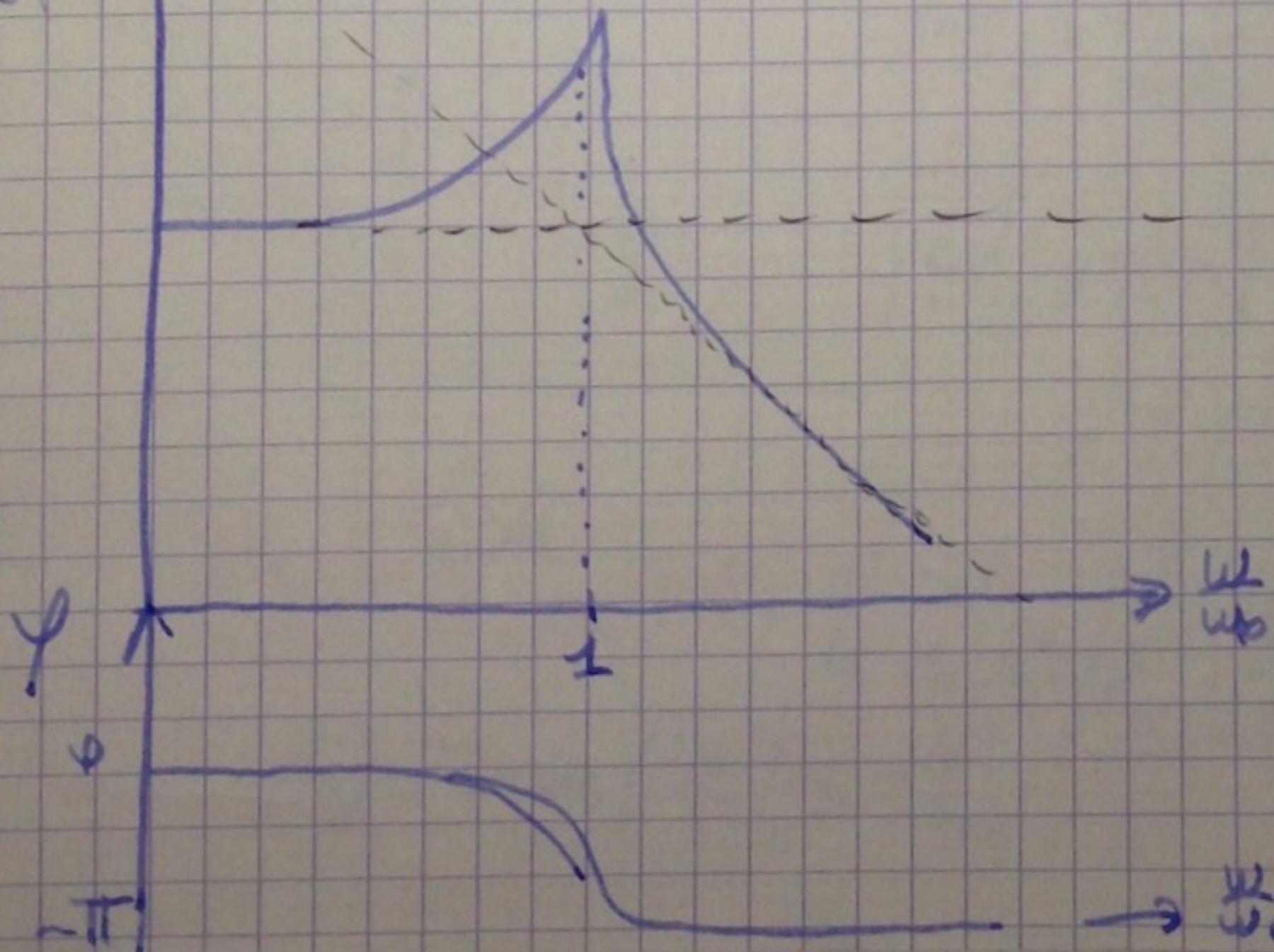
$$\frac{d^2\vec{p}}{dt^2} + \frac{w_0}{Q} \frac{d\vec{p}}{dt} + w_0^2 \vec{p} = \frac{2e^2}{m} \vec{E}$$

$$\vec{p}_\omega = \frac{2e^2}{mw_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{w_0}\right)^2 + i\frac{\omega}{Qw_0}} = E \underline{\alpha}(\omega) \vec{E}_{w_0}$$

$$\underline{\alpha}(\omega) = \frac{\omega_0}{1 - \left(\frac{\omega}{w_0}\right)^2 + i\frac{\omega}{Qw_0}}$$

$$\omega_0 = \frac{2e^2}{mw_0^2 E}$$

$$g(\underline{\alpha}(\omega))$$



## II. 3 Retour sur l'expérience

$$\langle P_{\text{ray}}^{(w)} \rangle = \frac{\omega^4 |P_w|^2}{12\pi c^3} = \frac{\omega^4 |E_w|^2}{12\pi c^3} |K(\omega)|^2$$

$\omega \approx 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$  (P)

$$K(0) = \frac{15^2 \times (4,6 \cdot 10^{13})^2}{\pi \times 88 \cdot 10^{-12} \times (10^{-10})^2} = 6 \cdot 10^6$$

$$m_0 = 10^{-30} \times 16$$

$$K = \frac{Z^2 e^2}{4\pi \epsilon_0 c^3}$$

$$P_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{W}{\mu m}$$

Régime de Rayleigh :  $\omega \ll \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

- Les composantes en  $w$  sont plus rayonnées que les autres
- $\langle P_{\text{ray}} \rangle_{\text{blu}} = 16 \langle P_{\text{ray}} \rangle_{\text{rouge}}$
- Les composantes bleue rayonnée, rouge transmises.

Conclusion : *ouvrir sur les antennes*