

# Microscopies

## 1. Étude géométrique du microscope optique

### 1.1. Grossissement et puissance d'un microscope

- 1) Une lentille est utilisée dans les conditions de Gauss lorsque les rayons lumineux issus de l'objet et traversant la lentille sont paraxiaux, c'est-à-dire peu inclinés par rapport à l'axe optique (angles inférieurs à une dizaine de degrés) et de points d'impact sur les dioptries de la lentille peu éloignés de l'axe optique (distances faibles devant les rayons de courbure des dioptries).

En général, il suffit de diaphragmer suffisamment les différents éléments centrés du système optique afin d'en limiter l'ouverture.

Il en résulte que la lentille réalise le stigmatisme approché pour tout point A de l'axe optique et l'aplanétisme approché (extension du stigmatisme approché dans les plans frontaux perpendiculaires à l'axe optique) pour tout objet AB perpendiculaire à l'axe optique ; on obtient ainsi une image A'B' nette et perpendiculaire à l'axe optique.

- 2) La formule avec origine au sommet est la formule de Descartes, et celle avec origines aux foyers la formule de Newton.

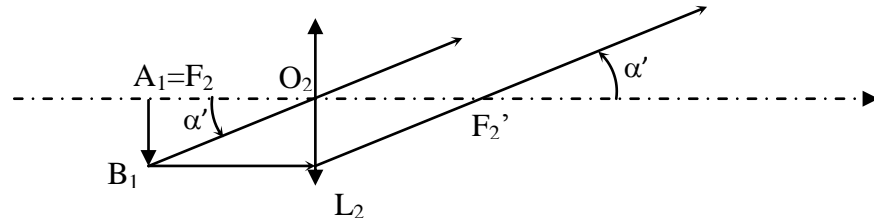
#### *Constructions géométriques d'images et de rayons*

- 3) « Régler un instrument à l'infini » consiste à produire une image finale virtuelle et rejetée à l'infini. Ainsi, l'œil n'a pas à accommoder pour observer l'image de l'objet à travers l'instrument. Il fatigue moins vite et l'observateur peut observer plus longtemps.
- 4) Cf. document réponse n°1 (tracés rouges)
- 5) Cf. document réponse n°1 (tracés verts)

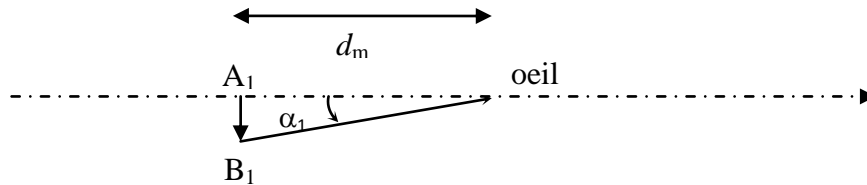
#### *Grossissement d'un microscope*

- 6) Afin d'observer l'objet à l'infini à travers l'oculaire, il est nécessaire de placer  $A_1B_1$  dans le plan focal objet de  $L_2$ . L'objet est alors vu sous l'angle

$$\alpha' = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{A_1O_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}.$$



Dans le cas d'une observation à l'œil nu au punctum proximum :



L'objet est alors vu sous l'angle

$$\alpha_1 = \frac{\overline{A_1 B_1}}{d_m}.$$

Ainsi

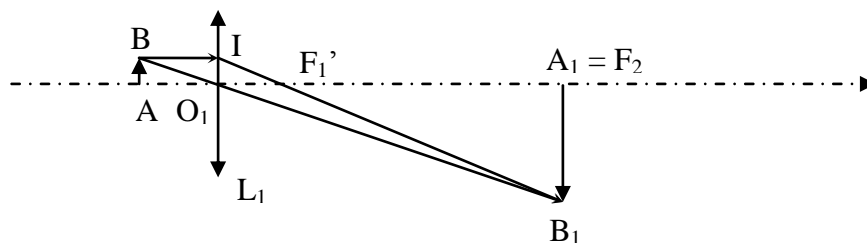
$$G_{c,oc} = \frac{\alpha'}{\alpha_1} = \frac{\frac{\overline{A_1 B_1}}{f_2'}}{\frac{\overline{A_1 B_1}}{d_m}} = \frac{d_m}{f_2'}.$$

$$\text{d'où : } \boxed{f_2' = d_m / G_{c,oc}}.$$

$$\text{Application numérique : } \boxed{f_2' = d_m / G_{c,oc} = 25 / 10 = 2,5 \text{ cm}}$$

7) En s'appuyant sur la construction géométrique suivante, on montre

$$\gamma_{ob} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_1 I}} = \frac{\overline{F_1' A_1}}{\overline{F_1' O_1}} = \frac{+\Delta}{-f_1'}.$$



$$\text{d'où : } \boxed{f_1' = -\Delta / \gamma_{ob} = \Delta / |\gamma_{ob}|}.$$

$$\text{Application numérique : } \boxed{f_1' = 160 / 20 = 8,0 \text{ mm}}$$

8) En raisonnant comme à la question 6 :

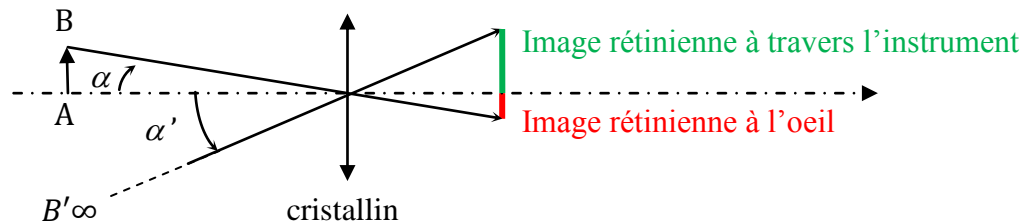
$$G_c = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = \left| \frac{\left( \frac{\overline{A_1 B_1}}{F_2' O_2} \right)}{\left( \frac{\overline{AB}}{d_m} \right)} \right| = \left| \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{AB}} \frac{d_m}{f_2'} \right| = |\gamma_{ob} G_{c,oc}| = -\gamma_{ob} G_{c,oc},$$

$$\boxed{G_c = -\gamma_{ob} G_{c,oc} = |\gamma_{ob}| G_{c,oc}.$$

Application numérique :  $\boxed{G_c = -(-20) \cdot 10 = 2,0 \times 10^2}$

9) Lorsque l'œil accommode, la distance entre le centre optique du cristallin et la rétine reste quasiment fixe.

Dans la limite des petits angles, la dimension de l'image rétinienne est proportionnelle à l'angle d'entrée dans l'œil du rayon passant par le centre optique du cristallin. Le grossissement est donc proportionnel aux rapports des dimensions des images rétinienne.



### *Puissance d'un microscope*

10)

$$\boxed{P_m = \left| \frac{\alpha'}{\alpha} \right| = \left| \frac{\alpha' \overline{A_1 B_1}}{\overline{A_1 B_1} \overline{AB}} \right| = \frac{1}{-f_2'} \gamma_{ob} = \frac{|\gamma_{ob}|}{f_2'} = \frac{\Delta}{f_1' f_2'}}$$

Application numérique :  $\boxed{P_m = 20/0,025 = 8,0 \times 10^2 \delta}$

## 1.2. Champ visuel d'un microscope

### *Latitude de mise au point (ou profondeur de champ en microscopie visuelle)*

11)  $A_1$  coïncide avec  $F_2$ , donc  $\overline{F_1' A_1} = \overline{F_1' F_2} = \Delta$ . Ainsi, d'après la formule de conjugaison de Newton,

$$\boxed{\overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{\overline{F_1' A_1}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}}$$

Application numérique :  $\overline{F_1 A} = -0,40 \text{ mm}$ .  $|\overline{F_1 A}| \ll f'_1 = 8 \text{ mm}$ ,  $A$  est pratiquement confondu avec le foyer objet de  $L_1$ .

- 12) L'œil voit nettement tout objet situé à une distance supérieure à  $d_m$ . Le point  $A_\infty$  correspond à la position calculée précédemment.  $A_m$  correspond à la situation où l'image  $A'_m$  à travers l'instrument vérifie  $\overline{A'_m F'_2} = d_m$ . On note  $A_m \xrightarrow{L_1} A_{m1} \xrightarrow{L_2} A'_m$ .

$$\overline{F_1 A_m} = -\frac{f_1'^2}{F'_1 A_{m1}} = -\frac{f_1'^2}{F'_1 F'_2 + F'_2 A_{m1}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta - \frac{f_2'^2}{-d_m}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{d_m}},$$

$$\boxed{\overline{A_\infty A_m} = \overline{A_\infty F_1} + \overline{F_1 A_m} = \frac{f_1'^2}{\Delta} - \frac{f_1'^2}{\Delta + \frac{f_2'^2}{d_m}} = \frac{f_1'^2 \cdot f_2'^2}{\Delta(\Delta d_m + f_2'^2)}}.$$

Application numérique :  $\overline{A_\infty A_m} = 6,2 \mu\text{m}$ . La latitude de mise au point est très faible et diminue rapidement avec la puissance du microscope. En effet, d'après la question 7, on sait que  $\gamma_{ob} = -\Delta/f'_1$  et d'après la question 10, on sait que  $P_m = -\gamma_{ob}/f'_2$ , ainsi  $P_m = \Delta/f'_1 f'_2$  et  $\overline{A_\infty A_m} = \Delta/P_m^2 (\Delta d_m + f_2'^2)$ . En pratique, la mise au point débute sur l'objectif de plus faible grandissement (microscope de plus faible puissance), la tourelle porte-objectif permet ensuite de changer d'objectif et d'affiner la mise au point.

### *Les diaphragmes d'un microscope*

- 13) La construction des rayons marginaux (cf. document réponse n°1) fait apparaître clairement que tout rayon issu, par exemple, du point  $A$  et traversant le diaphragme d'ouverture sortira du microscope. C'est donc le diaphragme d'ouverture qui contrôle le flux lumineux arrivant au point image.

- 14) On note  $C_1 = F'_1$  le centre du  $D_0$  et  $C$  son image par  $L_2$ . Alors

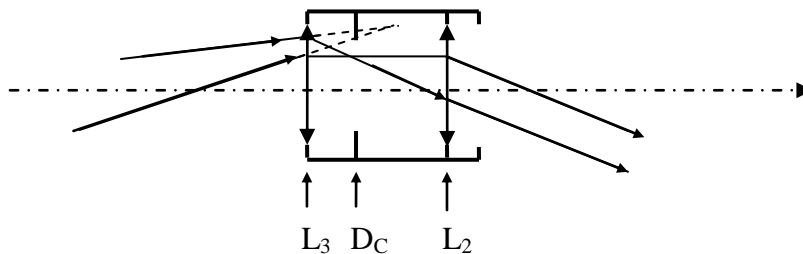
$$\boxed{\overline{F'_2 C} = -\frac{f_2'^2}{F'_2 C_1} = \frac{f_2'^2}{\Delta}}.$$

Une erreur dans l'énoncé, il était demandé  $\overline{F'_2 C'}$  avec point  $C'$  non défini au préalable. C'est la distance  $\overline{F'_2 C}$  qui est recherchée. Application numérique :  $\overline{F'_2 C} = 3,9 \text{ mm}$ . Comme  $\overline{F'_2 C} \ll f'_2 = 25 \text{ mm}$ , le cercle oculaire est proche du foyer image de  $L_2$ . Tous les rayons traversant le microscope ont été diaphragmés par  $D_0$ . Donc le cercle oculaire est le plus petit cercle (avec stigmatisme) à travers

lequel passent tous les rayons sortant du microscope ; on placera son œil en ce lieu afin de recevoir le maximum de lumière sortant du microscope.

- 15) Les rayons (en bleu sur le document réponse n°1) passant par  $O_1$  et atteignant les bords du  $D_c$  définissent les points limites du champ objet observable. Tous les rayons issus de points objets plus éloignés de l'axe optique que ces points limites seront bloqués par le diaphragme de champ. On note  $M$  un des points limites et  $M_1$  son image par  $L_1$ .  $AM = A_1 M_1 / |\gamma_{ob}| = R_{DC} / |\gamma_{ob}|$ . Application numérique :  $AM = 0,40 \text{ mm}$ . Ce qui donne un champ d'une largeur totale  $2R_{DC} / |\gamma_{ob}|$  de  $0,80 \text{ mm}$ .

16)



La lentille  $L_3$  rabat les rayons vers l'axe optique, permettant ainsi à des points qui seraient hors champ sans  $L_3$  de s'y retrouver avec  $L_3$ .

### 1.3. Au-delà de l'optique paraxiale : étude d'un objectif

#### *L'ouverture numérique des objectifs de microscope*

- 17) Ouverture numérique de  $0,25$  (de grossissement  $\times 10$ ) :  $u = 14^\circ$ .  
Ouverture numérique de  $0,85$  (de grossissement  $\times 60$ ) :  $u = 58^\circ$ . Il s'agit dans les deux cas d'angles dépassant les angles usuels de l'optique paraxiale.
- 18) Aberrations principales géométriques ; sphérique (liée à l'ouverture du faisceau et responsable de la perte de stigmatisme), coma (liée à la largeur du champ et responsable de la perte d'aplanétisme), distorsion, astigmatisme...

#### *Un exemple d'objectif corrigé des aberrations : l'objectif d'Amici-Lister*

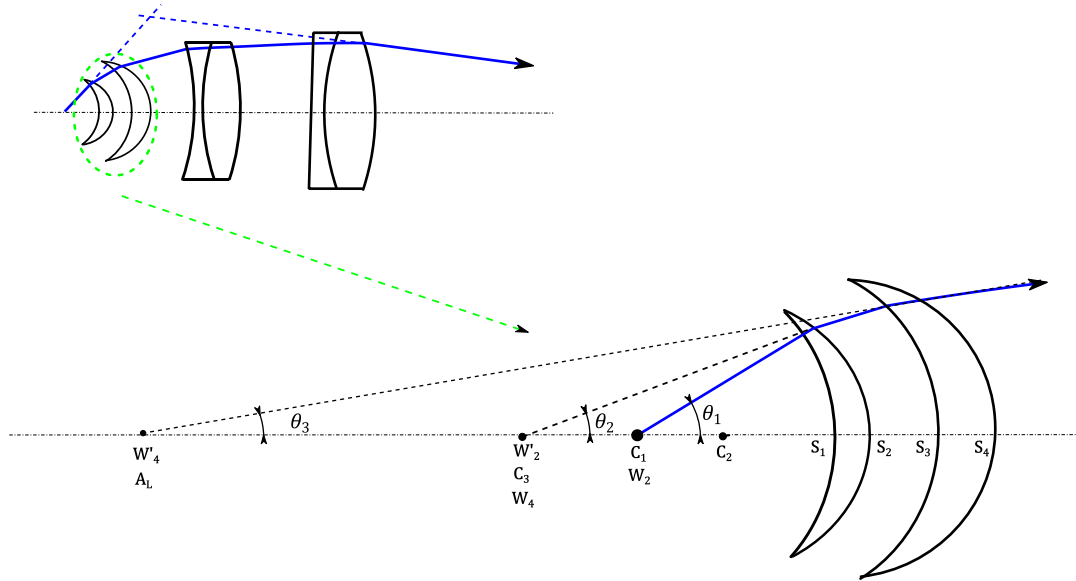
- 19) Une lentille mince constituée d'un verre dispersif (indice optique fonction de la longueur d'onde) possède une distance focale elle-même fonction de la longueur d'onde. Il en résulte que la mise au point ne peut pas être effectuée simultanément pour toutes les longueurs d'onde du spectre incident ; c'est le phénomène d'aberration chromatique générant une image floue aux contours irisés. Chaque doublet doit associer deux lentilles de vergences différentes (une

lentille convergente et une divergente) taillées dans des verres de propriétés dispersives opposées (une lentille convergente en verre peu dispersif de type crown, associée à une lentille divergente en verre plus dispersif de type flint).

20) L'objectif est rigoureusement stigmatique pour le couple de points conjugués  $A_L$  et  $A_{L1}$  si tous les rayons passant par  $A_L$  passent par  $A_{L1}$  après avoir traversé l'instrument.

21) On place l'objet en  $C_1$  car  $C_1 \xrightarrow{\text{dioptre 1}} C_1 \xrightarrow{\text{dioptre 2}} W'_2$ .  $C_1$  et  $W'_2$  sont ainsi conjugués rigoureusement à travers le ménisque.

22) Le premier ménisque établit  $n_0 \sin(\theta_1) = n_v \sin(\theta_2)$  et le second  $n_0 \sin(\theta_2) = n_v \sin(\theta_3)$  donc  $\sin(\theta_1) = \frac{n_v}{n_0} \left( \frac{n_v \sin(\theta_3)}{n_0} \right)$ . En notant  $\theta_3$  l'angle maximal d'entrée dans le premier doublet de Lister, l'ouverture numérique de l'objectif de Lister est  $\omega_{0, \text{Lister}} = n_0 \sin(\theta_3)$  et celle de l'objectif sec de Lister-Amici est  $\omega_0 = n_0 \sin(\theta_1)$ . Ainsi on obtient  $\omega_0 = n_0 \left( \frac{n_v}{n_0} \right)^2 \sin(\theta_3) = \omega_{0, \text{Lister}} \left( \frac{n_v}{n_0} \right)^2 \approx 0,56$ , qui est bien supérieure à 0,50.



23) Le point  $A_L$  des doublets de Lister doit correspondre au point de Weierstrass  $W'_4$  du dioptre de sortie du dernier ménisque d'Amici. Au final, l'objet ponctuel placé au centre  $C_1$  du premier dioptre du premier ménisque et le point  $A_{L1}$  sont rigoureusement conjugués par le microscope.

$$\underbrace{A}_{\text{placé en } C_1=W_2} \xrightarrow{\text{premier ménisque}} \underbrace{W'_2}_{\text{placé en } C_3=W_4} \xrightarrow{\text{second ménisque}} \underbrace{W'_4}_{\text{placé en } A_L}$$

**La condition d'aplanétisme des objectifs : relation d'Abbe**

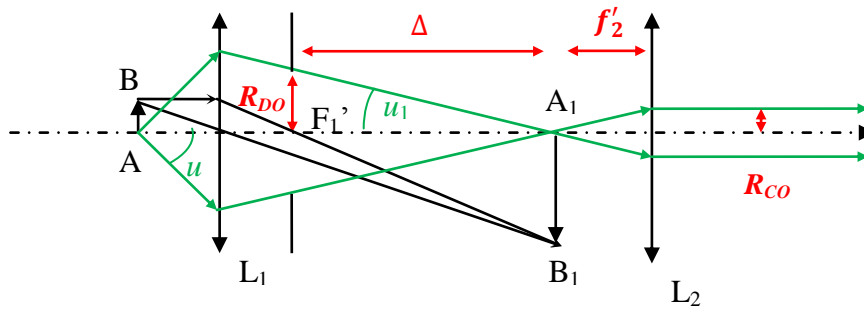
24) L'objectif vérifie la relation d'Abbe  $n\overline{AB}\sin\theta = n_1\overline{A_1B_1}\sin\theta_1$  donc

$$n_1\sin\theta_1 = \frac{n\overline{AB}\sin\theta}{\overline{A_1B_1}} = \frac{n\sin\theta}{\gamma_{ob}},$$

$$\boxed{\omega_{0,oc} = n_1\sin u_1 = \frac{n\sin u}{|\gamma_{ob}|} = \frac{\omega_0}{|\gamma_{ob}|}}$$

Comme  $\omega_0 \sim 1$  et  $|\gamma_{ob}| \gg 1$ , on en déduit que  $\omega_{0,oc} \ll 1$ . Numériquement, pour un objectif sec x20 d'ouverture numérique 0,40, on obtient une ouverture numérique  $\boxed{\omega_{0,oc} = 2,0 \times 10^{-2}}$  et un angle  $\boxed{u_1 = 1,1^\circ}$ . L'oculaire est utilisé dans les conditions de Gauss, il reste donc seulement à le corriger d'éventuelles aberrations chromatiques.

25)



$u_1$  est l'inclinaison du rayon marginal entre  $L_1$  et  $L_2$ .  $u_1$  étant faible ;

$$\tan(u_1) = \frac{R_{DO}}{\Delta} \sim \sin(u_1),$$

$$R_{DO} \sim \Delta \sin(u_1) = \Delta \frac{nAB\sin u}{n_1 A_1 B_1} = \Delta \frac{n\sin u}{n_1 |\gamma_{ob}|} = \Delta \frac{n\sin u}{n_1 \frac{\Delta}{f_1'}} = \frac{f_1' \omega_0}{n_1} = f_1' \omega_0$$

car  $n_1 = 1,00$ .

26) Le cercle oculaire étant l'image du diaphragme d'ouverture, on a  $R_{CO}/R_{DO} = |\gamma_2| = f_2'/\Delta$ , donc  $R_{CO} = R_{DO} f_2'/\Delta \sim f_1' \omega_0 f_2'/\Delta$ . Or on a vu en question 10 que  $P_m = \Delta/f_1' f_2'$ , d'où  $\boxed{R_{CO} \sim \frac{\omega_0}{P_m}}$ .

27) Numériquement, on obtient  $\boxed{R_{CO} = 0,4/800 = 0,50 \text{ mm}}$  inférieur au rayon de la pupille, ce qui permet à l'œil, placé au niveau de ce cercle oculaire, de récupérer toute la lumière sortant du microscope.

## 2. Pouvoir séparateur du microscope optique

### 2.1. Diffraction à l'infini d'une onde plane lumineuse

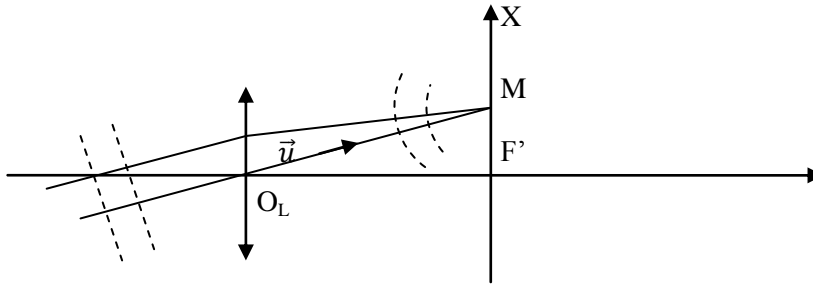
28) On intègre sur l'ouverture rectangulaire :

$$\begin{aligned}\underline{s}(\vec{u}, \vec{u}_0) &= \underline{Ks}_0 \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} dy e^{i\frac{2\pi n}{\lambda}((\alpha-\alpha_0)x + (\beta-\beta_0)y)}, \\ \underline{s}(\vec{u}, \vec{u}_0) &= \underline{Ks}_0 \left( \frac{\lambda}{2i\pi n(\alpha-\alpha_0)} 2i \sin\left(\frac{2\pi n(\alpha-\alpha_0)a}{\lambda} \frac{a}{2}\right) \right) \left( \frac{\lambda}{2i\pi n(\beta-\beta_0)} 2i \sin\left(\frac{2\pi n(\beta-\beta_0)b}{\lambda} \frac{b}{2}\right) \right), \\ \underline{s}(\vec{u}, \vec{u}_0) &= \underline{K}ab\underline{s}_0 \left( \text{sinc}\left(\frac{\pi n(\alpha-\alpha_0)a}{\lambda}\right) \right) \left( \text{sinc}\left(\frac{\pi n(\beta-\beta_0)b}{\lambda}\right) \right).\end{aligned}$$

L'intensité est proportionnelle au module au carré de l'amplitude, on note  $I_0$  l'intensité maximale ;

$$I(\vec{u}, \vec{u}_0) = I_0 \left( \text{sinc}^2\left(\frac{\pi n(\alpha-\alpha_0)a}{\lambda}\right) \right) \left( \text{sinc}^2\left(\frac{\pi n(\beta-\beta_0)b}{\lambda}\right) \right).$$

29)



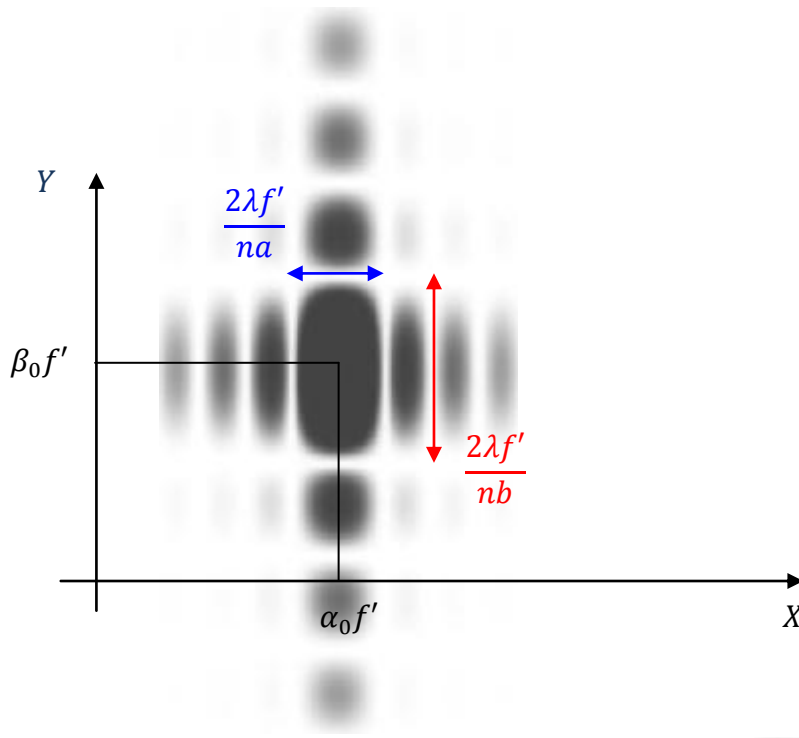
D'après le schéma précédent, en se plaçant dans l'approximation de Gauss, les rayons (chemin de phase) arrivant en M sont tous parallèles à l'entrée de la lentille, dirigés par le vecteur  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}/\|\overrightarrow{OM}\|$ . Ainsi l'éclairement  $E(X, Y)$  est proportionnel à  $I(\vec{u}, \vec{u}_0)$  avec :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z \sim \tan\alpha \vec{e}_x + \tan\beta \vec{e}_y + \vec{e}_z = \frac{X}{f'} \vec{e}_x + \frac{Y}{f'} \vec{e}_y + \vec{e}_z$$

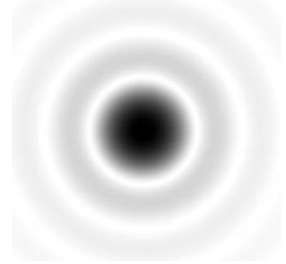
$$E(X; Y) = E_0 \left( \text{sinc}^2\left(\frac{\pi na}{\lambda} \left(\frac{X}{f'} - \alpha_0\right)\right) \right) \left( \text{sinc}^2\left(\frac{\pi nb}{\lambda} \left(\frac{Y}{f'} - \beta_0\right)\right) \right).$$

Cette figure est centrée en  $X_c = \alpha_0 f'$  et  $Y_c = \beta_0 f'$ , coordonnées du point de convergence géométrique du faisceau incident parallèle d'inclinaison  $\vec{u}_0$ . On observe à l'écran la figure suivante





- 30) À l'instar de la pupille diffractante, la figure de diffraction est à symétrie de révolution autour de l'axe  $Oz$ . On observe la figure de diffraction dite d'Airy constituée d'une tache centrale circulaire entourée d'anneaux concentriques



- 31) Le premier zéro de la fonction  $\frac{J_1(\xi)}{\xi}$  est obtenu pour  $\xi_1 \approx 3,83$ . Ceci implique

$$\frac{2\pi n R \sin(\varphi_1)}{\lambda} = 3,83$$

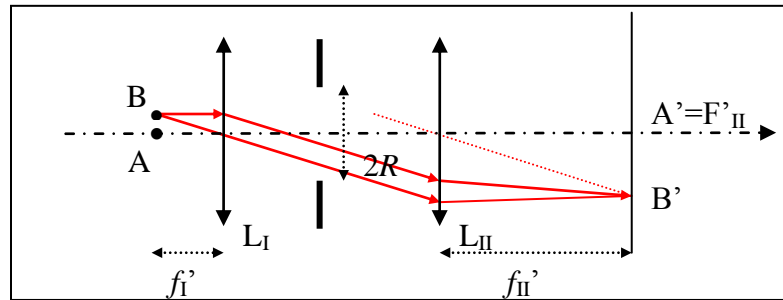
Dans l'approximation paraxiale, la demi-largeur angulaire de la tache centrale de diffraction vaut :

$$\frac{2\pi n R \sin(\varphi_1)}{\lambda} \approx \frac{2\pi n R \varphi_1}{\lambda} \approx 3,83 \Rightarrow \varphi_1 \approx 0,61 \frac{\lambda}{nR}$$

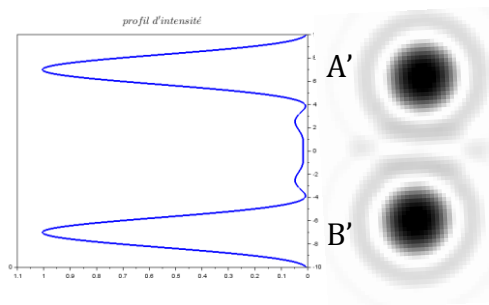
## 2.2. Diffraction, formation des images et pouvoir séparateur en éclairage incohérent

### *Lentille et diffraction à l'infini*

- 32) Position des images géométriques  $A'$  et  $B'$  des objets ponctuels  $A$  et  $B$  à travers les deux lentilles :  $A \xrightarrow{L1} \infty \xrightarrow{L2} A' = F_{II'}$ , tandis  $B \xrightarrow{L1} \infty \xrightarrow{L2} B'$  appartenant au plan focal image. On obtient  $\frac{\overline{AB}}{f_{I'}} = -\frac{\overline{A'B'}}{f_{II'}} \Rightarrow \overline{A'B'} = -\frac{f_{II'}}{f_{I'}} \overline{AB}$ .



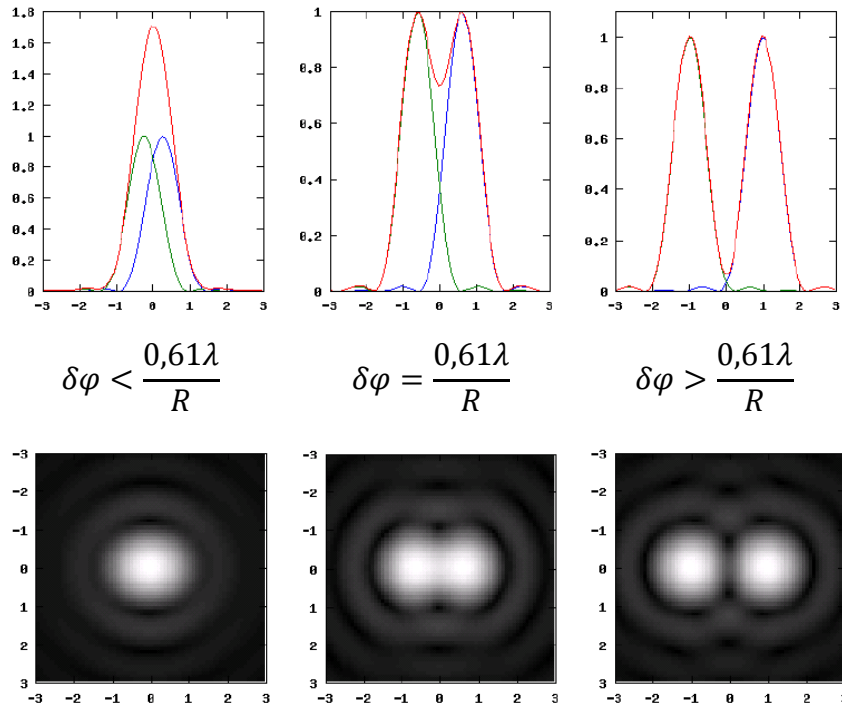
- 33) Deux ondes sont incohérentes si elles n'interfèrent pas là où elles se superposent : on observe alors une intensité résultante égale à la somme des intensités individuelles (fonction de corrélation des deux ondes nulle sur le temps de réponse des détecteurs). L'origine de l'incohérence des sources se trouve dans le processus d'émission de la lumière (modèle de l'émission sous forme de trains d'ondes décorrélés entre eux). Ici, on observe donc la superposition de l'éclairement associé aux deux taches d'Airy entourant A' et B'.



- 34) La distance entre les deux lentilles ne joue aucun rôle sur la répartition de l'intensité à l'écran. En accolant les deux lentilles et le diaphragme, on obtient le système optique à une seule lentille, diaphragmé par la monture de la lentille elle-même. La correspondance des dimensions est simplement :  $d = f_I'$  et  $d' = f_{II}'$ . La diffraction à l'infini intervient inévitablement dans la formation des images par des systèmes dioptriques.

### ***Pouvoir séparateur du microscope en éclairage incohérent : critère de Rayleigh***

- 35) Le critère de Rayleigh indique que deux points A et B d'un objet sont résolus (« vus séparément ») si les taches d'Airy entourant les points images A' et B' ne se recouvrent pas à plus de leur demi largeur (le centre de leur tache coïncide avec le pied de la tache voisine)



D'après la question 31,  $\varphi_1 = 0,61 \lambda/nR$  est la demi-largeur angulaire de chaque tache. À la limite de Rayleigh, on a un écart angulaire  $\delta\varphi_{min} = r'_{min}/d'$  entre les deux images A' et B'. On note  $u_3$  le rayon angulaire du diaphragme vu depuis A' et comme  $\tan u_3 = R/d'$ ,

$$0,61 \frac{\lambda}{nR} = \frac{r'_{min}}{d'} \Rightarrow r'_{min} = 0,61 \frac{\lambda d'}{nR} = 0,61 \frac{\lambda}{n \tan u_3}.$$

Compte tenu des conditions de Gauss,  $\tan u_3 \sim \sin u_3$ , donc

$$r'_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{n \sin u_3}.$$

36) D'après la relation d'Abbe,  $nr_{min} \sin u = nr'_{min} \sin u_3$ ,

$$r_{min} = \frac{nr'_{min} \sin u_3}{n \sin u} = \frac{0,61 \lambda}{n \sin u},$$

$$r_{min} = \frac{0,61 \lambda}{\omega_0}.$$

37) Afin d'améliorer le pouvoir de résolution, il faut diminuer  $r_{min}$ . Avec des ondes électromagnétiques, on peut chercher à diminuer la longueur d'onde du rayonnement utilisé ; travail à faible longueur d'onde du visible, passage aux UV

ou aux rayons X mais ces dernières microscopies nécessitent des optiques adaptées à ces gammes de longueurs d'onde (on peut changer de corpuscule et utiliser par exemple des électrons, cela est traité en partie 4). À longueur d'onde donnée, on peut également chercher à augmenter l'ouverture numérique en augmentant  $u$  (objectif de grande ouverture) et/ou en augmentant  $n$  (objectif à immersion utilisant des huiles d'indice proche de celui des verres de l'objectif, soit environ 1,5). Actuellement, on atteint des ouvertures numériques maximales de l'ordre de 1,45 (x60 pour des objectifs à immersion dans l'huile).

Pour un objectif sec,  $n = 1$  et l'ouverture numérique est nécessairement inférieure à 1. La meilleure résolution que l'on peut espérer est alors obtenue avec des radiations violettes de longueur d'onde  $\lambda \sim 380 \text{ nm}$ , ce qui donne une limite de résolution des microscopes optiques à objectif sec de l'ordre de  $0,61\lambda_{\text{bleu}} \sim 0,23 \mu\text{m}$ .

- 38) Le pouvoir de résolution de ce microscope vaut  $r_{\min} = 0,61\lambda/\omega_0 = 0,84 \mu\text{m}$ . Par définition de la puissance et avec les notations de la question 9,  $P_m = \alpha'/AB = \alpha'/r$ , donc à la limite de résolution de l'œil  $\alpha' = \varepsilon = 1'$  et  $r_{\min, \text{œil}} = \frac{\varepsilon}{P_m} = 0,4 \mu\text{m}$ . Ce n'est donc pas l'œil qui limite la résolution du microscope visuel, mais l'objectif qui diaphragme l'ouverture.

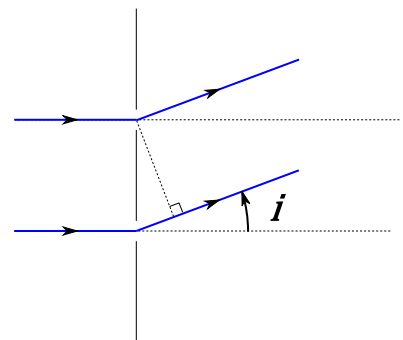
## 2.3. Diffraction, formation des images et pouvoir séparateur en éclairage cohérent

- 39) On observe l'image géométrique du réseau formée par l'objectif.

### Les réseaux à transmission

- 40) Deux rayons (chemin de phase) consécutifs diffractés dans la direction  $i$  sont déphasés de  $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}nasini$ . Les directions principales de diffraction sont celles pour lesquelles les rayons sont tous en phase, soit :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}nasini_p = 2\pi p, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\sin i_p = p \frac{\lambda}{na}}$$



- 41) Si on repère un ordre 1 par son angle  $i_1$ , on peut en déduire le pas  $a$  du réseau à partir de la formule précédente  $a = \frac{\lambda}{n\sin i_1}$ ; mais l'observation de cet ordre impose que l'ouverture maximale  $u$  de l'objectif soit supérieure à cet angle  $i_1$ ,

$$u > i_1 \Rightarrow n \sin u > n \sin i_1 \Rightarrow \boxed{n \sin u > \frac{\lambda}{a}}$$

**Pouvoir de résolution en éclairage cohérent et filtrage spatial**

- 42) La condition précédente impose que  $a > a_{\min} = \frac{\lambda}{n \sin u} = \frac{\lambda}{\omega_0}$ . Cette valeur est du même ordre de grandeur que celle déduite de l'application du critère de Rayleigh.

- 43) Avec  $\vec{u} = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM} = \alpha \vec{e}_x + \beta \vec{e}_y + \gamma \vec{e}_z$  et  $\vec{u}' = \vec{e}_z$  en incidence normale, on obtient  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{OP} = \alpha x + \beta y$  et  $\vec{u}' \cdot \overrightarrow{OP} = 0$ .

$$\underline{s}(\vec{u}, \vec{e}_z) = \underline{K} \underline{s}_0 \iint_{\Sigma} \underline{t}(P) e^{i \frac{2\pi n}{\lambda} (\vec{u} - \vec{e}_z) \cdot \overrightarrow{OP}} d\Sigma = \underline{K} \underline{s}_0 \iint_{\Sigma} \underline{t}(x, y) e^{i 2\pi n \left( \frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y \right)} dx dy.$$

- 44) En écrivant  $\underline{s}(\vec{u}, \vec{e}_z) = \underline{K} \underline{s}_0 \iint_{\Sigma} \underline{t}(x, y) e^{i 2\pi (f_x x + f_y y)} dx dy$ , on définit les fréquences spatiales  $\boxed{f_x = \frac{n\alpha}{\lambda}}$  et  $\boxed{f_y = \frac{n\beta}{\lambda}}$ .

- 45) Un réseau de pas  $a$  possède une fonction de transmission invariante selon l'axe  $y$  et ne possède donc pas de fréquences spatiales  $f_y$  non nulles. Par contre, il y a diffraction selon la direction des  $x$ , essentiellement aux angles  $i_p$  tels que  $\alpha_p = \sin i_p = p \frac{\lambda}{na}$  (avec  $p$  entier relatif), qui correspondent aux fréquences spatiales  $\boxed{f_x = \frac{p}{a}}$ . La fréquence fondamentale du spectre est  $1/a$  et les harmoniques sont les fréquences  $p/a$ . On peut remarquer que l'on retrouve ici la formule des réseaux plans.

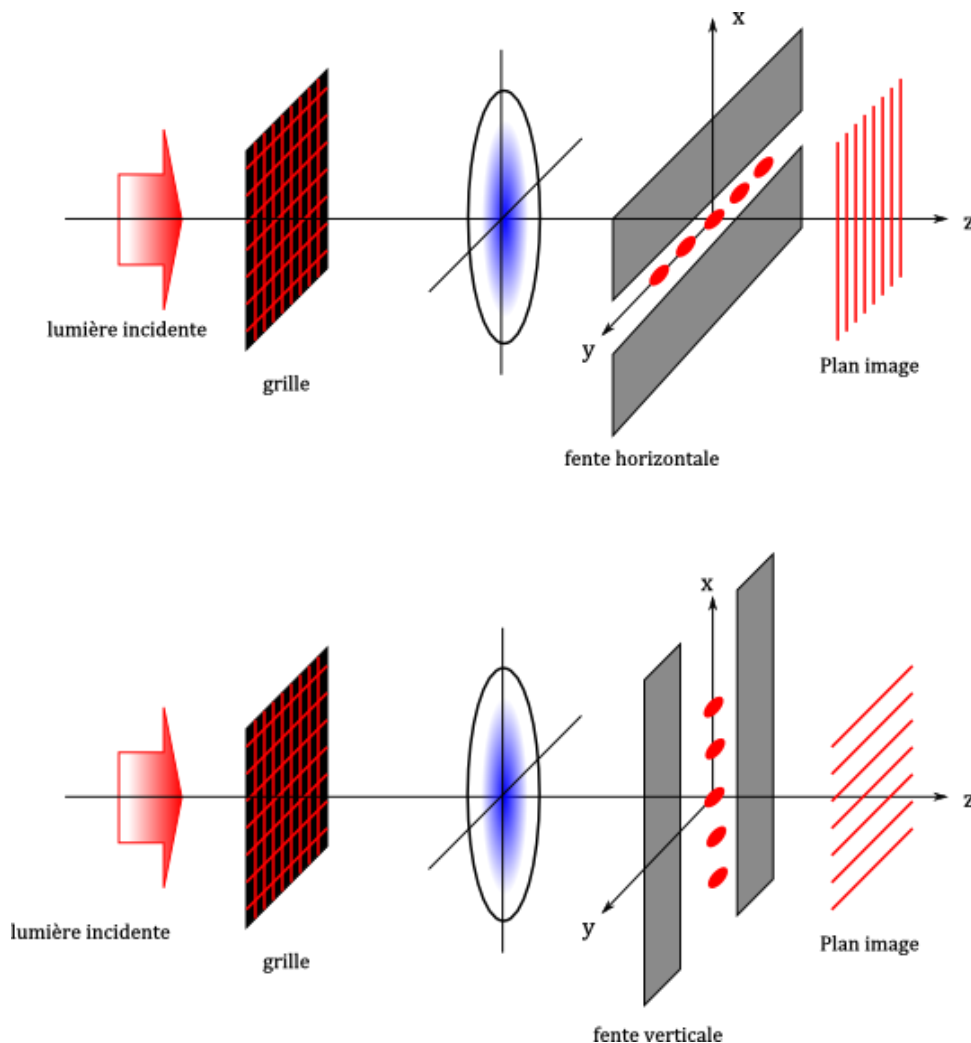
- 46) Cf. document réponse n°2. On observe dans le plan du diaphragme de champ  $D_C$  l'image du réseau par l'objectif.

- 47) En enlevant l'oculaire, on observe dans le plan focal de l'objectif, des points lumineux  $S_0, S_1, S_2, \dots$  correspondant aux ordres de diffraction, c'est-à-dire aux fréquences spatiales du spectre de l'objet. Le point  $S_p$  correspondant à l'ordre  $p$  est d'abscisse  $x_p = p \lambda f'_1 / na$ . Il s'agit de la visualisation (en niveau d'intensité) de la transformée de Fourier spatiale de l'objet (ici le réseau), d'où le nom de plan de Fourier donné au plan focal de la lentille. À remarquer que les faisceaux lumineux divergent au-delà de ces points lumineux cohérents et qu'ils forment par la suite l'image du réseau dans le plan conjugué (par l'objectif) du plan objet.

- 48) Le diaphragme d'ouverture, placé dans le plan de Fourier, contrôle les ordres de diffraction (les fréquences spatiales) qui peuvent traverser l'objectif. Les ordres de diffraction élevés, situés dans le plan de Fourier à une distance de

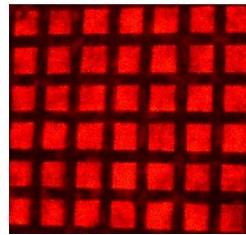
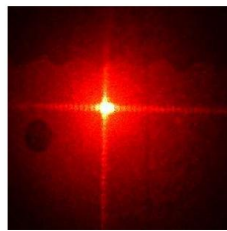
l'axe optique supérieure au rayon  $R_{DO}$  sont bloqués par ce diaphragme et ne contribuent donc plus à la construction de l'image de l'objet dans le plan image. Le diaphragme d'ouverture est donc un filtre passe-bas du signal diffracté par le réseau.

- 49) La grille carrée peut être vue comme un double réseau et possède un spectre composé des fréquences spatiales  $f_x = \frac{p}{a}$  et  $f_y = \frac{p'}{a}$ . Compte tenu qu'une fréquence spatiale  $f_x = \frac{p}{a}$  donne un point lumineux d'abscisse  $x_p = p \lambda f'_1 / na$  dans le plan de Fourier, la fente fine horizontale coupe toutes les fréquences spatiales  $f_x$ , on observe donc dans le plan du diaphragme de champ  $D_c$  des lignes verticales, la périodicité selon  $x'x$  a été perdue. C'est la périodicité selon  $y'y$  qui est perdue dans le cas de la fente fine verticale. Quant au trou circulaire, il réalise un filtrage passe-bas supprimant toutes les fréquences spatiales sauf la fréquence nulle ; on n'observe qu'un fond lumineux uniforme (seule la « composante continue » du signal diffracté par l'objet a été conservée). Il s'agit de techniques de déramage d'image.

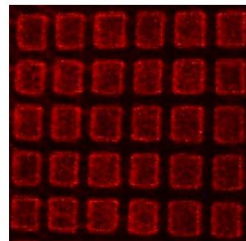
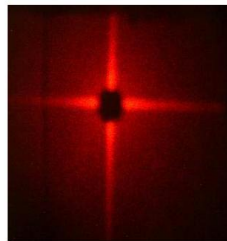


- 50) Pour un filtrage passe-haut du signal diffracté par la grille, il faut au contraire supprimer les basses fréquences. On peut placer un écran opaque centré sur  $F_1'$ . On observera une atténuation du fond lumineux et une accentuation dans l'image des zones contrastées de l'objet, ce qui aura pour effet de rendre les bords de la grille, comparativement au reste de l'image, plus lumineux (alors qu'en l'absence de filtrage, on observe une image de grille sombre sur fond lumineux). On peut citer la strioscopie ou la microscopie à contraste de phase (où, en plus de déphaser le fond continu de  $\pi/2$ , on l'atténue partiellement par filtrage spatial passe-haut).

Sans filtrage



Avec filtrage passe-haut



Plan de Fourier

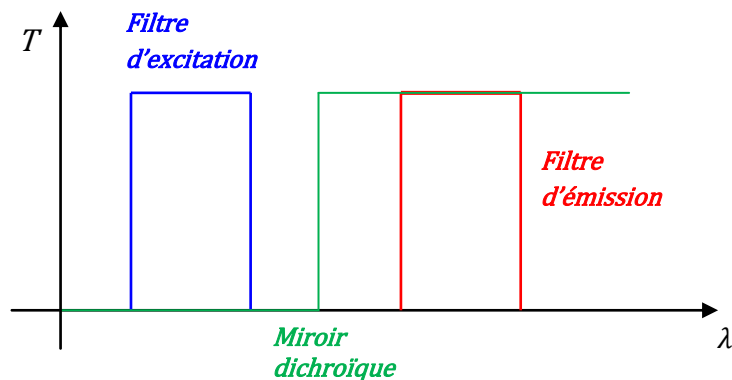
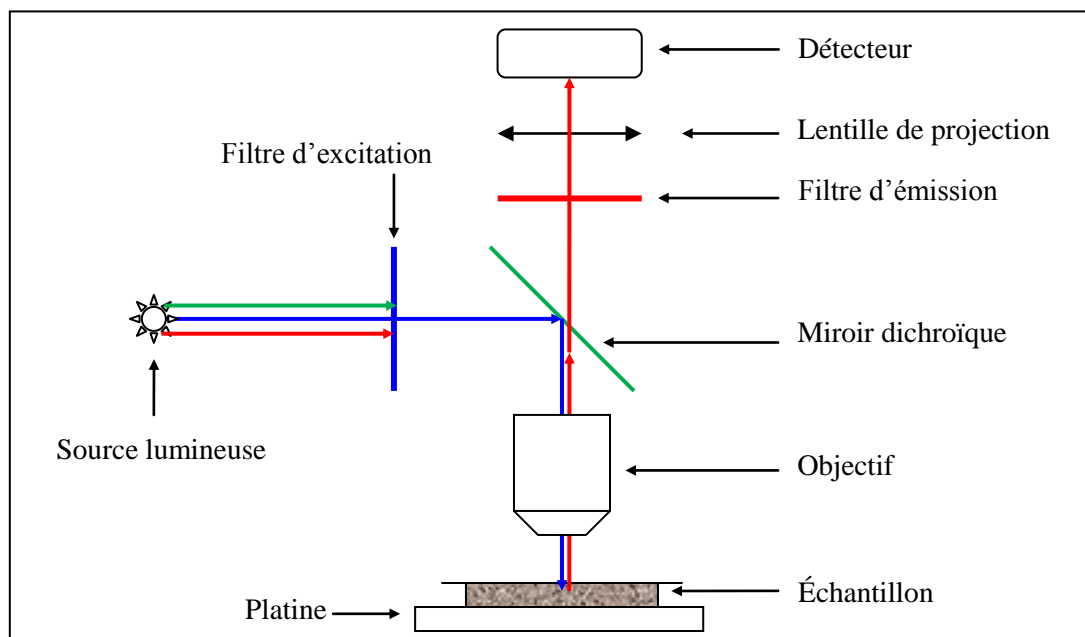
Plan image

### 3. Microscopie optique de fluorescence

#### 3.1. Une microscopie optique de fluorescence

51) La fluorescence est l'émission de lumière par une molécule immédiatement après son excitation lumineuse, en général à une longueur d'onde plus grande. Les photons émis lors de l'émission de fluorescence n'ont pas de direction privilégiée. Il s'agit donc de choisir un objectif de grande ouverture numérique.

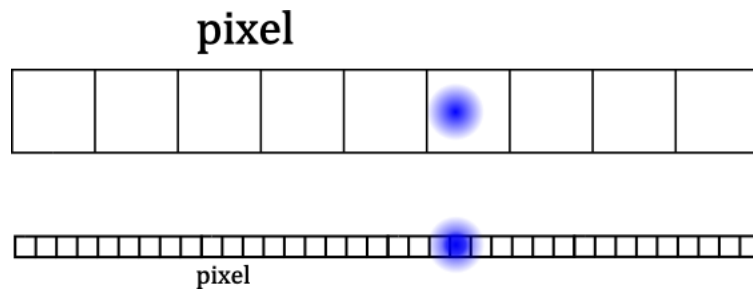
52) Le filtre d'excitation sélectionne la longueur d'onde excitatrice des fluorophores de l'échantillon, le filtre d'émission sélectionne la longueur d'onde de la lumière de fluorescence produite par l'échantillon et le miroir dichroïque filtrant réfléchit très bien les radiations excitatrices (et très mal les radiations d'émission) tandis qu'elle transmet très bien les radiations d'émission (et très mal les radiations d'excitation).





### 3.2. Imagerie microscopique et localisation d'objets ponctuels

- 53) On observe une tache d'Airy (réponse impulsionnelle du microscope). Selon que la taille de l'image de l'objet ponctuel est supérieure ou inférieure à la taille d'un pixel, on observe les configurations ci-dessous. Dans le cas du bas, le centre de la tache lumineuse pourra être déterminé avec plus de précision que dans le cas du haut.



- 54) On ajuste l'intensité observée par la fonction d'Airy (opération de déconvolution par la fonction de réponse impulsionnelle du microscope) et on en déduit le centre de cette figure qui nous permet d'estimer la position du centre de cette tache.
- 55) L'ordre de grandeur de la dimension  $r' = gr_{min} = 0,61 \frac{\lambda}{\omega_0} g \sim 400 \mu m$ , on en déduit la précision de pointé de son centre à  $\Delta x = \sqrt{\frac{r'^2 + a^2/12}{N}} \sim \frac{r'}{\sqrt{N}} = \frac{r'}{100}$ , soit environ  $4 \mu m$  sur l'image et donc environ  $4 \text{ nm}$  sur l'objet.
- 56) Le critère de Rayleigh date de 1880. À l'époque, les seuls capteurs étaient l'œil et la photographie argentique. On n'estimait pas la précision du centre d'une tache de diffraction mais la distance limite séparable entre deux taches. La précision obtenue était alors au mieux le rayon de la tache, soit environ 100 fois moins que ce que fournit la méthode précédente.

### 3.3. Applications à la mesure d'un coefficient de diffusion

- 57) La loi de Fick de la diffusion de la matière est une loi issue de la théorie de la réponse linéaire qui exprime que dans le cas de gradients de concentration suffisamment faibles, dans un milieu homogène et isotrope, le vecteur densité volumique de flux de particules s'exprime en fonction de la concentration selon  $\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}}(c)$ . C'est également une loi phénoménologique. Un bilan de matière local sur un volume élémentaire  $d\tau$  donne  $\frac{\partial c}{\partial t} d\tau dt = -\text{div} \vec{j} d\tau dt$  et par application de la loi de Fick, on obtient l'équation de la diffusion :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\text{div} \vec{j} = -\text{div} \left( -D \overrightarrow{\text{grad}}(c) \right) \Rightarrow \frac{\partial c}{\partial t} = D \Delta c$$

58) On se place à une dimension de diffusion (l'axe  $Oy$ ), l'équation de la diffusion donne dans l'espace de Fourier spatial :

$$\frac{\partial C(\vec{k}, t)}{\partial t} = D(+i\vec{k})^2 C = -Dk^2 C(\vec{k}, t)$$

La solution est de la forme

$$C(k, t) = C(k, 0)e^{-Dk^2 t},$$

avec la fonction de Fourier initiale :

$$C(k, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(y, t=0) e^{-iky} dy = c_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y) e^{-iky} dy = c_0,$$

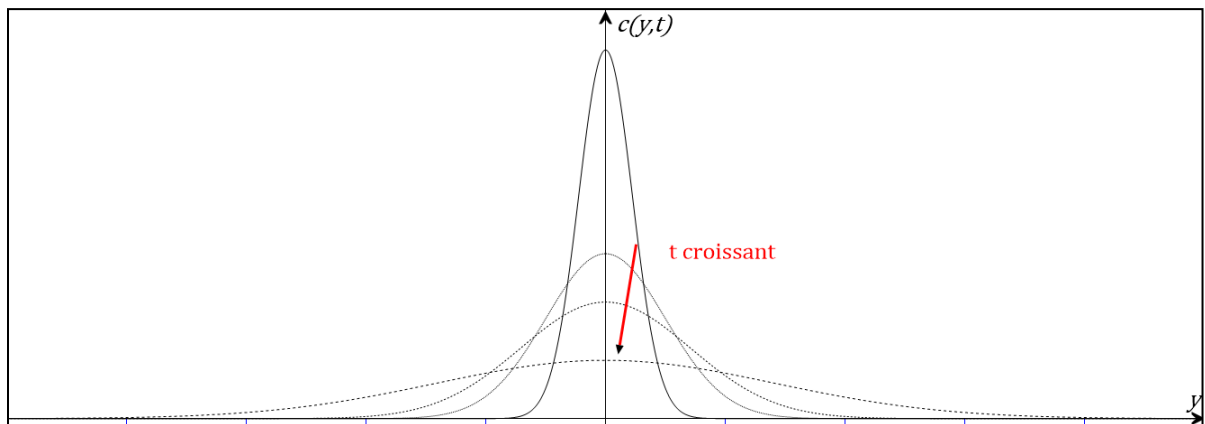
$$C(k, t) = c_0 e^{-Dk^2 t}.$$

Par transformation de Fourier inverse ;

$$c(y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} c_0 e^{-Dk^2 t} e^{+iky} dk,$$

$$c(y, t) = \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{y^2}{4Dt}}.$$

A différents instants, on obtient les courbes suivantes qui font apparaître l'étalement diffusif au cours du temps sur une distance caractéristique évoluant en  $\sqrt{t}$ .



- 59) En notant que  $c(y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(y', 0) \delta(y' - y) dy' = \int_{-\infty}^0 c_0 \delta(y' - y) dy'$   
D'après la question 58, la concentration initiale  $c_0 \delta(y' - y)$  évolue selon

$$\frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{(y'-y)^2}{4Dt}}$$

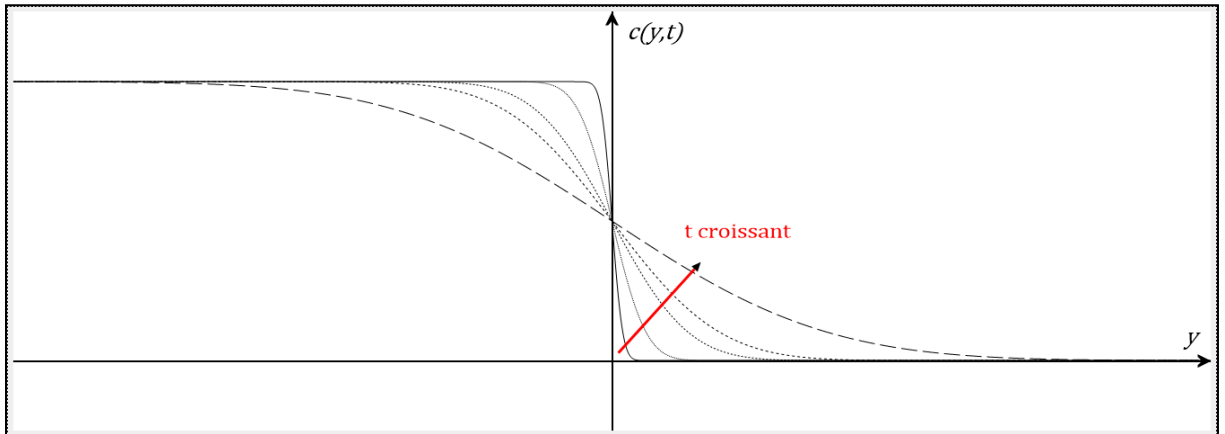
On en déduit

$$c(y, t) = \int_{-\infty}^0 \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-\frac{(y'-y)^2}{4Dt}} dy'$$

On change de variable en posant  $z = \frac{y'-y}{\sqrt{4Dt}}$

$$\begin{aligned} c(y, t) &= \int_{-\infty}^{\frac{-y}{\sqrt{4Dt}}} \frac{c_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{Dt}} e^{-z^2} \sqrt{4Dt} dz = \int_{-\infty}^{\frac{-y}{\sqrt{4Dt}}} \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz + \int_0^{\frac{-y}{\sqrt{4Dt}}} \frac{c_0}{\sqrt{\pi}} e^{-z^2} dz \\ &= c_0 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-z^2} dz - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{+y}{\sqrt{4Dt}}} e^{-z^2} dz \right), \\ c(y, t) &= c_0 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{+y}{\sqrt{4Dt}} \right) \right), \\ c(y, t) &= \frac{c_0}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right). \end{aligned}$$

À différents instants, on obtient les courbes suivantes qui montrent l'étalement latéral des molécules fluorescentes, sur une distance caractéristique proportionnelle à  $\sqrt{t}$ .



- 60) L'intensité émise par fluorescence est proportionnelle à la concentration locale en molécules fluorescentes. On mesure l'intensité de fluorescence et on ajuste le profil spatial de celle-ci avec l'une des fonctions précédentes selon que

l'on a une distribution initiale ponctuelle ou indicielle. La direction de diffusion ne doit pas être celle de l'axe optique du microscope.

- 61) Le temps caractéristique sur la hauteur  $H$  est de l'ordre de  $H^2/D$ , soit numériquement 0,10 s et  $w^2/D$  sur la largeur, soit numériquement 10 s. On peut en conclure que la concentration s'uniformise rapidement sur la hauteur du canal et que l'on peut suivre en temps réel la diffusion selon la largeur du canal.
- 62)  $Re = \frac{\rho UL}{\eta}$ . En prenant  $L = H$ ,  $U = 20 \mu\text{m.s}^{-1}$  et les caractéristiques de l'eau, on calcule  $Re \sim 2 \cdot 10^{-4} \ll 1$ , l'écoulement est laminaire et les lignes de courant épousent le profil des canaux.
- 63) Dans le cas où on néglige la diffusion des molécules fluorescentes de la solution A vers la solution B, on observe une partie supérieure du canal ( $y > 0$ ) non fluorescente et une partie inférieure du canal fluorescente. Dans le cas réel, on observe un élargissement de la zone fluorescente au fur et à mesure que l'on avance dans le tube.
- 64) Le front avant du fluide est situé en  $x = vt$ . Or pour un fluide immobile  $c(y, t) = \frac{c_0}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{Dt}} \right) \right)$ , donc l'entraînement du fluide donne, en régime permanent, la concentration  $c(x, y) = \frac{c_0}{2} \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{D \frac{x}{v}}} \right) \right)$  qui produit une intensité  $I(x, y)$  évoluant proportionnellement à  $I_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{D \frac{x}{v}}} \right) \right)$ .
- 65) On ajuste l'intensité à la fonction précédente. L'intérêt de cette méthode est que l'on a à ajuster une seule image qui recouvre toute l'évolution temporelle (car l'évolution temporelle en  $t$  est « transformée » en évolution spatiale selon  $x$ ).

## 4. Microscopie électronique

### 4.1. Caractère ondulatoire des électrons

- 66) Sachant que la vitesse initiale des électrons est nulle, la conservation de l'énergie mécanique de l'électron au cours de l'accélération impose

$$E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + (-e)(+U) = \frac{1}{2}mv_{initiale}^2 + (-e)(0) = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$$

$$\text{d'où } \lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2emU}}$$

- 67) L'expérience de Rutherford permet de mettre en évidence la présence d'un noyau au cœur des atomes (structure lacunaire de la matière) via l'analyse de la diffusion élastique de particules alpha par de minces feuilles d'or. De manière analogue, Davisson cherchait alors à sonder la matière en étudiant la section efficace de diffusion des électrons sur les atomes.
- 68) L'échantillon polycristallin de départ avait certainement été fortement oxydé par sa mise en contact, à la suite de l'explosion, avec le dioxygène de l'air. Le traitement à chaud sous atmosphère de dihydrogène avait pour fonction de réduire la couche d'oxyde formée sur l'échantillon mais ce traitement à chaud eut également pour résultat de recristalliser le nickel qui présentait alors des grains monocristallins, responsables de ces pics de diffraction.
- 69) Dans les années 1920, il s'agissait de la diffraction des rayons X mises au point depuis les années 1910 notamment par Von Laue et Bragg (père et fils).
- 70) Dans la maille cubique à faces centrées, la distance  $d$  recherchée est la demi-hauteur d'un triangle équilatéral de côté  $a\sqrt{2}$ , soit  $d = \frac{1}{2}a\sqrt{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = 0,216 \text{ nm}$ . Si on considère qu'il s'agit de l'ordre 1 de diffraction, la différence de marche entre deux ondes diffractées par deux lignes adjacentes vaut  $d\sin(\theta) = \lambda$ . On obtient numériquement  $\lambda = 216 \cdot \sin(50^\circ) = 0,17 \text{ nm}$ . Par ailleurs, sous 54 V, on obtient  $v = 4,4 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et une longueur d'onde de de Broglie  $\lambda = h/mv = 0,17 \text{ nm}$ . On trouve un très bon accord entre les valeurs des longueurs d'onde.
- 71) Les réseaux sous-jacents sont parallèles à celui de la surface et diffractent donc à l'infini sous des directions identiques, ne modifiant pas la position angulaire des ordres principaux de diffraction. Par contre, suivant la distance

entre ces plans, il peut y avoir des effets d'interférences supplémentaires modifiant alors la répartition des intensités relatives dans les différents ordres.

## 4.2. Pouvoir de résolution d'un microscope électronique

- 72) La conservation de l'énergie mécanique de l'électron au cours de l'accélération impose, sachant que la vitesse initiale des électrons est nulle :

$$E_c + E_p = (\gamma - 1)mc^2 + (-e)(+U) = (\gamma_{initial} - 1)mc^2 = 0$$

On en déduit  $\gamma = 1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 + \frac{eU}{mc^2}$ , soit  $v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{mc^2}\right)^2}}$ .

- 73) On en déduit  $v = c \sqrt{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{eU}{mc^2}\right)^2}} = 1,64 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Dans le cadre classique,

on trouve  $v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = 1,87 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , soit une erreur de 12%. Il est nécessaire de se placer dans le cadre relativiste. Quant à la longueur d'onde,  $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\gamma mv}$ . On trouve numériquement  $\lambda = 3,7 \times 10^{-12} \text{ m}$ .

- 74) La résolution vaut  $0,61\lambda/\omega_0 = 1,2 \times 10^{-10} \text{ m}$ , à comparer à la limite du pouvoir de résolution  $0,61\lambda_{violet}/\omega_0 = 0,23 \text{ } \mu\text{m}$  d'un objectif sec sous lumière violette à 350 nm pour une ouverture numérique unité.  $0,23/0,00012 \sim 2 \times 10^3$ , la résolution est améliorée d'environ trois ordres de grandeur.

## 5. Microscopie à effet tunnel

### 5.1. Effet tunnel

75) La fonction d'onde doit vérifier l'équation de Schrödinger :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} e^{-iEt/\hbar} + V(z)\psi(z)e^{-iEt/\hbar} = i\hbar \left(-i\frac{E}{\hbar}\right) \psi(z)e^{-iEt/\hbar}$$

La fonction  $\psi(z)$  vérifie donc l'équation de Schrödinger indépendante du temps, ou équation aux valeurs propres,

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + V(z)\psi(z) = E\psi(z).}$$

76) Pour  $z \geq a$ , la fonction  $\beta e^{ikz}$  doit vérifier l'équation précédente avec  $V(z) = 0$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \beta (ik)^2 e^{ikz} = E\beta e^{ikz}$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E \Rightarrow k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}.}$$

Pour  $a \geq z \geq 0$ , la fonction  $\delta e^{k'z}$  et  $\gamma e^{-k'z}$  vérifient séparément l'équation précédente avec  $V(z) = V$  :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \delta (k')^2 e^{k'z} + V\delta e^{k'z} = E\delta e^{k'z}$$

$$\boxed{\Rightarrow -\frac{\hbar^2 k'^2}{2m} = E - V \Rightarrow k' = \sqrt{\frac{2m(V - E)}{\hbar^2}}.}$$

Les termes  $e^{ikz}$  et  $\beta e^{ikz}$  sont associés à la propagation libre des électrons dans la direction  $+\vec{e}_z$  avant et après la traversée de la barrière. Le terme en  $\alpha e^{-ikz}$  est associé à la propagation libre des électrons dans la direction  $-\vec{e}_z$  après réflexion sur la barrière. Les termes en  $\gamma e^{-k'z}$  et  $\delta e^{+k'z}$  sont associés à l'onde évanescence électronique dans la barrière de potentiel. Il n'y a pas de terme en  $e^{-ikz}$  pour  $z \geq a$  car cela supposerait une source d'électrons en  $z = +\infty$ .

77) Par définition,

$$T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|}$$

On calcule les vecteurs densité de courant associés aux fonctions d'onde incidente et transmise

$$\vec{J}_i(z, t) = \left[ \frac{\hbar}{2im} ((e^{ikz})^* \overrightarrow{grad} e^{ikz} - e^{ikz} \overrightarrow{grad} (e^{ikz})^*) \right] = \frac{\hbar}{2im} (ik\vec{e}_z - (-ik)\vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow \vec{J}_i(z, t) = \frac{\hbar k \vec{e}_z}{m}.$$

$$\vec{J}_t(z, t) = \left[ \frac{\hbar}{2im} ((\beta e^{ikz})^* \overrightarrow{grad} \beta e^{ikz} - \beta e^{ikz} \overrightarrow{grad} (\beta e^{ikz})^*) \right] = \frac{\hbar |\beta|^2}{2im} (ik\vec{e}_z + ik\vec{e}_z)$$

$$\Rightarrow \vec{J}_t(z, t) = |\beta|^2 \frac{\hbar k \vec{e}_z}{m}.$$

On en déduit le coefficient de transmission

$$T = \frac{\|\vec{J}_t\|}{\|\vec{J}_i\|} = |\beta|^2.$$

$T$  correspond à la probabilité de franchissement de la barrière par l'électron, ou encore au rapport du flux d'électrons transmis sur le flux d'électrons incidents.

78) On réécrit le coefficient de transmission sous la forme :

$$T(k) = \frac{1}{1 + \frac{(k^2 + k'^2)^2}{4k^2 k'^2} sh^2(k'a)}.$$

Dans le cas  $k'a \gg 1$ ,  $sh(k'a) \sim \frac{1}{2} e^{k'a}$ , alors

$$T(k) \sim \frac{1}{1 + \frac{(k^2 + k'^2)^2}{4k^2 k'^2} \left(\frac{1}{2} e^{k'a}\right)^2} \sim \frac{16k^2 k'^2}{(k^2 + k'^2)^2} e^{-2k'a};$$

$$\text{or } \frac{16k^2 k'^2}{(k^2 + k'^2)^2} = 16 \frac{2mE \cdot 2m(V-E)}{(2mE + 2m(V-E))^2} = \frac{16E(V-E)}{V^2},$$

donc

$$T(E) \approx \frac{16E(V-E)}{V^2} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} a}.$$



- 79) Le coefficient  $T(E)$  tend vers zéro dans les trois cas limites suivants ;
- barrière très haute  $(V - E) \rightarrow \infty$ ,
  - barrière très large  $a \rightarrow \infty$ ,
  - limite classique  $\hbar \rightarrow 0$  (ou  $m \rightarrow \infty$ ), impossibilité pour une particule classique de traverser une barrière énergétique plus haute que sa propre énergie.

## 5.2. Application aux électrons libres métalliques à 0 K

### *Gaz d'électrons libres dans un métal*

- 80) Les conditions aux limites périodiques permettent de privilégier l'effet de propagation à l'effet de stationnarité imposée par les bords. Il en résulte

$$\psi(x + L_1, y, z, t) = \psi(x, y, z, t)$$

$$\Rightarrow k_x L_1 = 0[2\pi]$$

$$\Rightarrow k_x = n_x \frac{2\pi}{L_1}, n_x \in \mathbb{Z}$$

De même pour les autres dimensions  $k_y = n_y \frac{2\pi}{L_2}, n_y \in \mathbb{Z}$  et  $k_z = n_z \frac{2\pi}{L_3}, n_z \in \mathbb{Z}$

- 81) Chaque valeur autorisée de vecteur  $\vec{k}$  est séparé, dans l'espace des vecteurs d'onde, d'une autre valeur autorisée d'un multiple de  $\frac{2\pi}{L_i}$  dans chaque direction et occupe donc un volume élémentaire  $\frac{2\pi}{L_1} \frac{2\pi}{L_2} \frac{2\pi}{L_3} = \frac{(2\pi)^3}{\Omega}$  dans cet espace. Le nombre de valeurs autorisées par unité de volume est  $\frac{\Omega}{(2\pi)^3}$ . Chaque état électronique est caractérisé par un vecteur d'onde et une valeur de spin, il y a donc  $g(\vec{k}) = 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3}$  états électroniques (spin compris) par unité d'espace des vecteurs d'onde  $\vec{k}$ . Les électrons sont des fermions, le principe de Pauli impose alors qu'il y ait au plus un électron par état électronique accessible.

- 82) À 0 K, les  $N$  électrons occupent les  $N$  états électroniques accessibles de plus basses énergies donc de plus faibles valeurs de  $k$ , ainsi :

$$N = \iiint_{\|\vec{k}\| < k_F} g(k) d^3k = \int_0^{k_F} 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} 4\pi k^2 dk = 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \frac{4}{3} \pi k_F^3$$

$$k_F = \sqrt[3]{\frac{3\pi^2 N}{\Omega}}$$

- 83) La densité volumique d'électrons libres du cuivre  $\frac{N}{\Omega} = \frac{\frac{m}{M} N_A}{\Omega} = \rho \frac{N_A}{M} = 8,49 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . On en déduit le module du vecteur d'onde de Fermi  $k_F = 1,36 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$  et l'énergie de Fermi  $E_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = 1,12 \times 10^{-18} \text{ J} = 7,00 \text{ eV}$ .

**Description de la jonction tunnel - Courant tunnel à 0K**

- 84) Les électrons candidats à l'effet tunnel doivent pouvoir accéder à un niveau vide de l'autre métal, d'après le principe de Pauli. Ici, ce n'est possible que pour des électrons d'énergie comprise entre  $E_F - eU$  et  $E_F$  du métal de gauche et qui accèdent, par effet tunnel (à énergie constante) à des niveaux électroniques inoccupés du métal de droite. Ils se déplacent donc dans la direction  $+\vec{e}_z$  donc  $k_z > 0$ .
- 85) En coordonnées sphériques, le volume d'espace des phases occupé par les électrons vérifiant les conditions précédentes et dont le vecteur d'onde fait un angle compris entre  $\theta$  et  $\theta + d\theta$  avec l'axe  $z$  est

$$d^2\tau_k = \int_0^{2\pi} d\phi k \sin(\theta) k d\theta dk = 2\pi \sin(\theta) k^2 d\theta dk$$

L'énergie  $\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$  des électrons vaut  $E_F$  à  $eU$  près donc  $eU = d\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right) = \frac{2\hbar^2 k dk}{2m} = \frac{\hbar^2 k_F dk}{m}$ , soit  $dk = meU/\hbar^2 k_F$ , d'où

$$d\tau_k = 2\pi \sin(\theta) k_F^2 d\theta dk = 2\pi \sin(\theta) k_F d\theta \frac{meU}{\hbar^2} = \frac{2\pi meU}{\hbar^2} \sin(\theta) k_F d\theta.$$

- 86) Ce volume élémentaire d'espace de phase contient  $g(\vec{k}) d\tau_k$  électrons,

$$dN = 2 \frac{\Omega}{(2\pi)^3} \frac{2\pi meU}{\hbar^2} \sin(\theta) k_F d\theta = \Omega \frac{meU}{2\pi^2 \hbar^2} k_F \sin(\theta) d\theta.$$

- 87) D'après la formule de la partie 5.1.,

$$T(E) \approx \frac{16E(V-E)}{V^2} e^{-2\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}}a}.$$

Par analogie, la hauteur de la barrière est  $V = E_F + W$ , l'énergie des électrons vaut  $E \sim E_F$  et  $\sqrt{\frac{2m(V-E)}{\hbar^2}} \sim \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$ . Le coefficient de transmission vaut alors ;

$$T(E = E_F) \approx \frac{16E_F W}{(E_F + W)^2} e^{-2\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}a}.$$

$$88) \quad dN' = T(E_F).dN = \frac{16E_F W}{(E_F + W)^2} \Omega \frac{meU}{2\pi^2 \hbar^2} k_F \sin(\theta) d\theta e^{-2\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}a}.$$

89)  $dj_{ez} = \frac{dN'}{\Omega} (-e)v_z$  avec  $v_z = \frac{p_z}{m} = \frac{\hbar k_z}{m} \sim \frac{\hbar k_F \cos(\theta)}{m}$ . On intègre ensuite sur l'angle  $\theta$ .

$$\begin{aligned} j_{ez} &= \int_0^{\pi/2} dj_{ez} \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\Omega} \frac{16E_F W}{(E_F + W)^2} \Omega \frac{meU}{2\pi^2 \hbar^2} k_F \sin(\theta) d\theta e^{-2\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}a} (-e) \frac{\hbar k_F \cos(\theta)}{m} \\ j_{ez} &= -\frac{16E_F W}{(E_F + W)^2} \frac{me^2 U}{2\pi^2 \hbar^2} \frac{\hbar k_F^2}{m} e^{-2\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}a} \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \cos(\theta) d\theta \\ j_{ez} &= -\frac{16E_F W}{(E_F + W)^2} \frac{me^2 U}{2\pi^2 \hbar^2} \frac{\hbar k_F^2}{m} e^{-2\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}a} \frac{1}{2} \\ j_{ez} &= -CU e^{-2\sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}a}. \end{aligned}$$

$\vec{j}_e$  n'a pas de composantes selon les directions  $x$  et  $y$  par symétrie. On a donc la forme proposée avec  $C = \frac{8E_F^2 W}{(E_F + W)^2} \frac{me^2}{\pi^2 \hbar^3}$ .

### 5.3. Résolutions du microscope à effet tunnel

90) Invention et mise au point par Binnig et Röhrer durant les années 1980-1985 (prix Nobel en 1986, partagé avec Ernst Ruska pour l'invention du premier microscope électronique à transmission 55 ans plus tôt!). Dans le mode de fonctionnement à courant constant, la pointe balaye la surface selon les axes  $x$  et  $y$  et un asservissement permet de maintenir le courant constant en déplaçant verticalement la pointe. L'enregistrement de ce déplacement permet d'obtenir la topographie de la surface.

#### Résolution transversale

91) Géométriquement, on trouve que  $r = \sqrt{a^2 + x^2} \sim a \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)$ . On obtient

$$e^{-2k'r} \sim e^{-2k'a \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{a}\right)^2\right)} = e^{-2k'a} e^{-\frac{k'x^2}{a}}$$

Le terme  $e^{-2k'r}$  décroît latéralement sur une demi-largeur à mi-hauteur  $\Delta x$  vérifiant :

$$e^{-2k'a} e^{-k' \frac{\Delta x^2}{a}} = \frac{1}{2} e^{-2k'a},$$

$$\boxed{-k' \frac{\Delta x^2}{a} = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \Delta x = \sqrt{\frac{a \ln(2)}{k'}}}$$

- 92) Par analogie avec le critère de Rayleigh, afin de sonder un domaine différent de l'échantillon, il faut au moins déplacer la pointe de  $\Delta x$ , qui constitue un bon ordre de grandeur de la limite de résolution.  $k' = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}} = 1,1 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$  et  $\boxed{\Delta x \sim \sqrt{a/k'} = 0,2 \text{ nm}}.$

### *Résolution longitudinale (topographique)*

- 93) On cherche la variation  $\delta a$  de  $a$  produisant une variation de  $I$  de 2%.  $I(a)$  est proportionnelle à  $\frac{1}{a} e^{-2k'a}$  avec  $k' = \sqrt{\frac{2mW}{\hbar^2}}$ . On rappelle que l'on se place dans des conditions où  $2k'a \gg 1$ .

$$\frac{\delta I}{I} \sim \frac{1}{I} \frac{\partial I}{\partial a} \delta a = -\frac{a}{e^{-2k'a}} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{2k'}{a} \right) e^{-2k'a} \delta a,$$

$$\boxed{\text{d'où } \frac{\delta I}{I} \sim -2k' \delta a.}$$

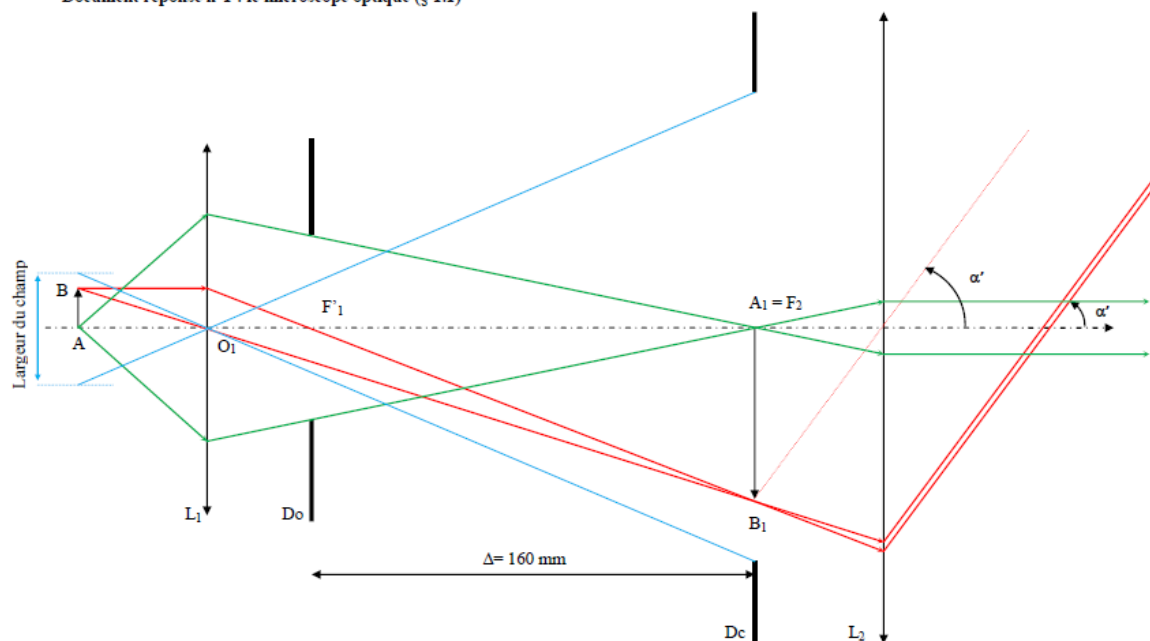
On constate bien que la dépendance exponentielle de  $I$  en  $a$  est la dépendance principale du courant en  $a$ .

On obtient numériquement  $\boxed{\Delta a = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mW}} \frac{\Delta I}{I} = 0,9 \text{ pm}}.$

La résolution longitudinale est de l'ordre du pm, bien inférieure à la résolution latérale.

- 94) On utilise des actionneurs piézoélectriques, dont la précision de déplacement peut être inférieure au picomètre.

Document réponse n°1 : le microscope optique (§ 1.1)



Document réponse n°2 : l'expérience d'Abbe (§ 2.3)

