

LP 4 : Lois de conservation en mécanique

Caroline Breton - Mai 2020

Bibliographie :

- « Physique PCSI » Compétences Prépas – David Augier et David More
- « Physique MPSI-PCSI-PTSI » - Programme 2013 - Bellanger, Ducros - PEARSON
- « Mécanique - Fondements et applications » - Pérez - DUNOD
- https://www.prepamag.fr/concours/pdf/corriges.pdf.extraits/2015/MP_PHYSIQUE_MINES_1_2015.extrait.pdf

Niveau : 1^{er} cycle universitaire

Prérequis :

- Cinématique
- Lois de Newton
- Equilibre d'un système conservatif unidimensionnel
- Mouvement à force centrale
- Problème à deux corps

PLAN

I – Exemple d'une loi de conservation

- 1 – Conservation de la quantité de mouvement
- 2 – Expérience de collision élastique
- 3 – Propulsion d'une fusée au décollage

II – Un satellite météorologique : Métop-C

- 1 – Orbite du satellite
- 2 – Altitude du satellite
- 3 – Aspect énergétique

I – Exemple d’une loi de conservation

Dans cette leçon, nous allons considérer des systèmes matériels et non un point. Nous les assimilerons à leur centre de masse C affecté de la masse totale M du système.

En effet, on peut écrire : $\vec{p} = \sum m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_c$

où m_i et \vec{v}_i sont associés aux points matériels A_i du système tandis que \vec{v}_c est la vitesse du centre de masse.

1 – Conservation de la quantité de mouvement

Partons du principe d’inertie énoncé par Galilée (1632) et formalisé par les deux premières lois de Newton.

Pour un système fermé, la 2^{ème} loi de Newton nous donne : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$

Si le système est isolé ou pseudo-isolé alors $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ce qui conduit à $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$

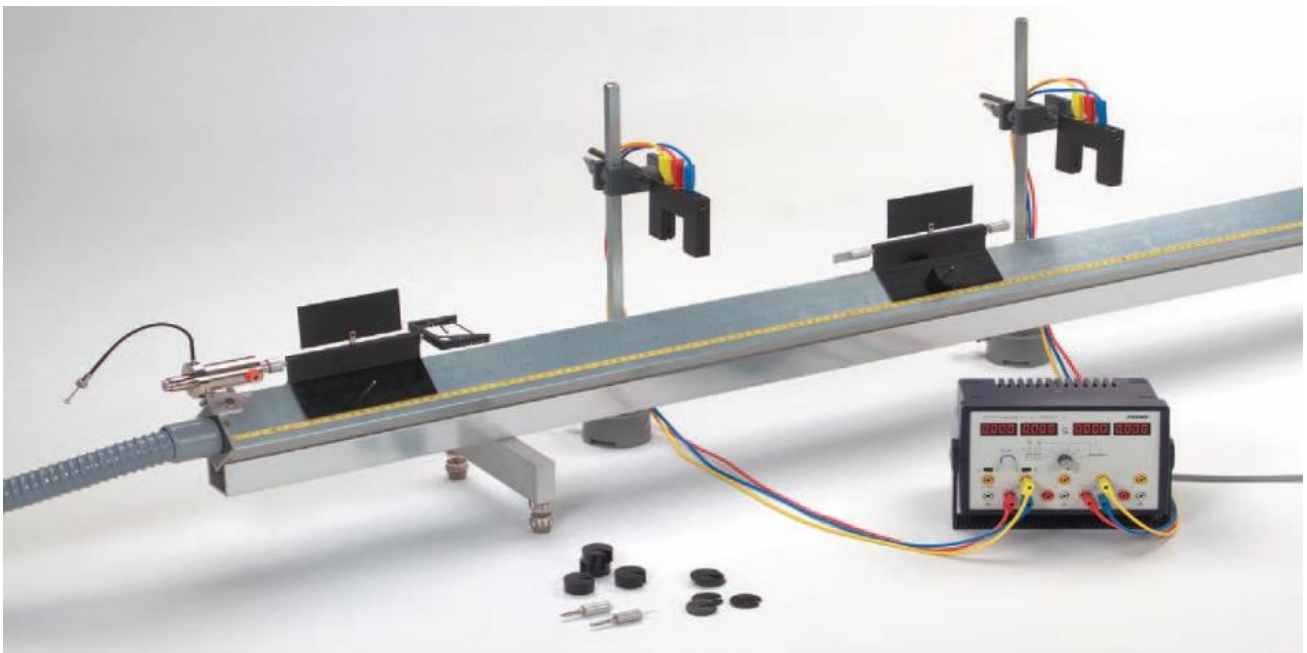
Ainsi l’annulation du 2^{ème} terme de la loi de Newton conduit à la conservation de la quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v} = cte$ égalité vectorielle (norme, direction et sens)

Remarque : c’est bien le produit masse par vecteur vitesse qui est constant et non le vecteur vitesse comme peut le laisser le croire l’écriture que l’on rencontre souvent dans le secondaire :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$$

Voyons une petite expérience pour le vérifier.

2 – Expérience de collision unidimensionnelle :



Dispositif expérimental avec banc à air

Description :

- Soufflerie : envoi de l'air comprimé dans un rail creux.
- Rail creux dont les surfaces sont percées de petits trous calibrés

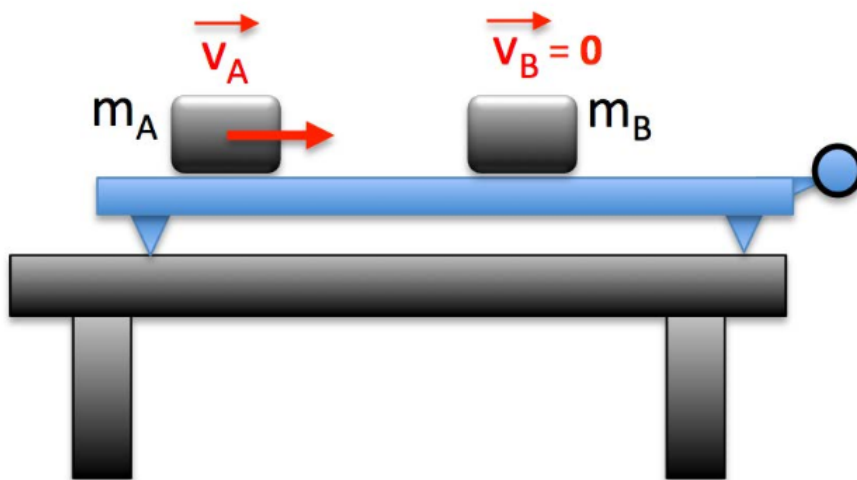
L'ensemble permet de créer un « coussin d'air » sur lequel va reposer un mobile posé sur le banc. L'objectif est de réduire au maximum les frottements lors du déplacement du mobile et de permettre une étude de mouvement en négligeant les frottements.

- 2 mobiles munis d'un écran rectangulaire provoquant l'occultation des cellules photoélectriques.
- 2 cellules photoélectriques à IR reliées à un chronomètre.

Chaque cellule comporte deux diodes : l'une émettrice d'un rayon IR, l'autre réceptrice. Quand le faisceau I.R. est interrompu la diode réceptrice envoie un signal vers un compteur digital ce qui déclenche la mesure du temps. Une fois le faisceau I.R rétabli le comptage du temps s'arrête et la durée est affichée.

Mise en place : le choc doit avoir lieu entre les deux cellules (on peut les espacer d'au moins 50 cm).

- Un lanceur qui permet de donner une vitesse initiale à un mobile.
- Un chronomètre qui peut fonctionner suivant deux modes :
un mode permettant de mesurer le temps écoulé entre l'instant initial $t=0$ (lancement du mobile) et l'instant où le mobile occulte une cellule photoélectrique ; un mode permettant de mesurer la durée d'occultation d'une cellule photoélectrique.



Schématisation de l'expérience avant impact

On se place dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Système étudié : ensemble des deux mobiles

Le système est soumis à son poids et à la réaction du support. Ces deux forces se compensant, le système est pseudo-isolé et la quantité de mouvement devrait se conserver. Vérifions-le expérimentalement.

*Masses identiques :

<https://www.youtube.com/watch?v=GGDZVVSH3yA> 2min23s

Le mobile A arrivant à une vitesse de $1,09 \text{ m.s}^{-1}$ s'arrête tandis que le B, au repos est mis en mouvement avec une vitesse de $1,03 \text{ m.s}^{-1}$ (différence due aux frottements).

On a conservation de la quantité de mouvement. Le mobile A transfère intégralement sa quantité de mouvement au mobile B. Les vecteurs vitesses \vec{v}_A et \vec{v}_B ont même sens (et même direction car mvt unidimensionnel). $\vec{v}_A = \vec{v}_B'$

Pour bien montrer que c'est bien la quantité $m\vec{v}$ qui se conserve, faisons la même expérience avec $m_B = 2 m_A$.

*Masses différentes : <https://www.youtube.com/watch?v=GGDZVVSH3yA> 5min20s

A partir des mesures, on obtient

$$\|\vec{v}_A\| = 0,75 \text{ m.s}^{-1} \quad \|\vec{v}_A'\| = 0,22 \text{ m.s}^{-1} \quad \|\vec{v}_B'\| = 0,48 \text{ m.s}^{-1}$$

Expérimentalement, on constate : $\|\vec{v}_A\| + \|\vec{v}_A'\| \approx 2 \|\vec{v}_B'\|$

$$\text{Théorie : } m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B'$$

$$\text{Soit } m_A \vec{v}_A = m_A \vec{v}_A' + m_B \vec{v}_B'$$

$$\text{En projection sur l'axe horizontal : } m_A \|\vec{v}_A\| = -m_A \|\vec{v}_A'\| + 2m_A \|\vec{v}_B'\|$$

$$\|\vec{v}_A\| + \|\vec{v}_A'\| = 2 \|\vec{v}_B'\|$$

Les mesures sont cohérentes avec la prédiction théorique. (Il faudrait faire une série de mesure en faisant varier la masse ...).

Nous venons de voir une 1^{ère} loi de conservation. Pour la suite de la leçon et dans un souci de contextualisation, nous allons nous intéresser au satellite météorologique Métop-C lancé le 7 novembre 2018. Pour finir cette partie, nous allons donc voir quelles informations nous pouvons tirer de la loi de conservation de la quantité de mouvement pour le décollage de la fusée contenant le satellite.

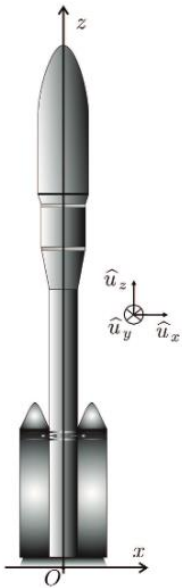
3 – Décollage de la fusée : Pérez p350

La fusée est un système matériel qui perd de la masse au cours du temps. Cet échange de matière avec l'extérieur montre que c'est un système ouvert.

Problème : on vient de voir que la quantité de mouvement se conserve pour un système fermé.

Si l'on veut pouvoir utiliser la loi de conservation, il est essentiel de bien définir le système étudié.

Nous allons donc considérer le système (fusée + gaz éjectés) c'est -à-dire un système caractérisé par sa masse $m(t)$ à un instant t .



A l'instant $t=0$, une fusée de masse totale initiale $m_0 = 7,3 \cdot 10^5$ kg décolle verticalement dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Soit $m(t)$ la masse de la fusée à un instant $t > 0$.

On note

- $Dm = \frac{dm}{dt}$ le débit massique des gaz brûlés
- $\vec{u} = -u \vec{u}_z$, la vitesse d'éjection des gaz par rapport à la fusée ($u > 0$)
- $\vec{v} = v \vec{u}_z$, la vitesse de la fusée

On supposera que Dm et u sont constants et que le champ de pesanteur \vec{g} reste localement uniforme pendant le lancement.

- Par conservation de la masse : $m(t+dt) = m(t) - Dm \cdot dt$
- Exprimons la quantité de mouvement à l'instant t : $\vec{p}(t) = m(t) \cdot \vec{v}(t)$
- A l'instant $t+dt$: $\vec{p}(t+dt) = m(t+dt) \cdot \vec{v}(t+dt) + Dm \cdot dt [\vec{v}(t+dt) + \vec{u}]$
- $d\vec{p} = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) = ([m(t+dt) + Dm \cdot dt] \cdot \vec{v}(t+dt) + Dm \cdot dt \vec{u}) - m(t) \cdot \vec{v}(t)$
- $d\vec{p} = m(t) \cdot [\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)] + Dm \cdot dt \vec{u}$
- $d\vec{p} = m(t) \cdot d\vec{v} + Dm \cdot dt \vec{u}$
- $\frac{d\vec{p}}{dt} = m(t) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + Dm \vec{u}$

Si on considère que le système est soumis à son poids et la résistance de l'air, la deuxième loi de Newton nous permet d'écrire :

- $m(t)\vec{g} + \vec{R} = m(t) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + Dm \vec{u}$ soit $m(t) \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m(t)\vec{g} + \vec{R} - Dm \vec{u}$
- \vec{g} et \vec{R} sont orientés suivant $-\vec{u}_z$ alors que le terme $-Dm \vec{u}$ est suivant \vec{u}_z donc dans le sens du mouvement.

Ici tout se passe comme si on avait un système fermé avec une force supplémentaire $-Dm \vec{u}$ qui va servir à propulser la fusée.

Application numérique : négligeons la résistance de l'air pour donner un ordre de grandeur de la force de poussée pour que la fusée décolle.

La condition de décollage est $Dm \cdot u > m_0 g$ soit $Dm \cdot u > 7,2 \cdot 10^6$ N

II – Un satellite météorologique : Métop-C

1 – Orbite du satellite :

- Cadre d'étude :

Système : satellite

Référentiel : géocentrique supposé galiléen

Basse altitude : frottements avec l'atmosphère négligés

Le satellite S n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par la Terre (de centre T):

$$\overrightarrow{F_{T/S}} = - \frac{G M_T m_s}{(R_T+h)^2} \frac{\overrightarrow{TS}}{TS}$$

On est dans le cas d'un objet soumis à une force centrale conservative.

- Le satellite étant en rotation, appliquons le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_T}}{dt} = \overrightarrow{M_T}(\vec{F}) \quad \frac{d\overrightarrow{\sigma_T}}{dt} = \overrightarrow{TS} \wedge \left(- \frac{G M_T m_s}{(R_T+h)^2} \frac{\overrightarrow{TS}}{TS} \right)$$

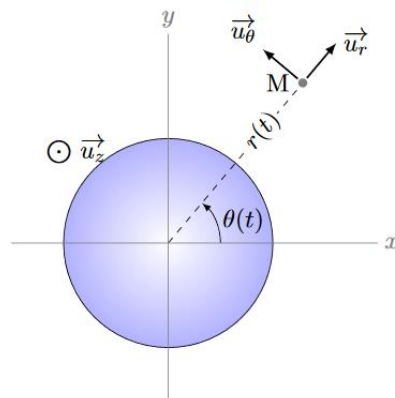
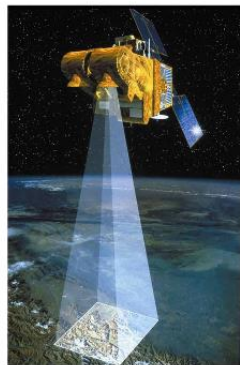
$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_T}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{\sigma_T} = \text{cste} \quad \text{Il y a conservation du moment cinétique.}$$

→ Conséquence 1 : $\overrightarrow{\sigma_T} = \overrightarrow{TS} \wedge \vec{p}$

Le mouvement du satellite est contenu dans le plan défini par $(\overrightarrow{TS} ; \vec{v})$.

Pour Métop-C, le mouvement est contenu dans le plan passant par l'axe des pôles

→ Conséquence 2 : le mouvement étant plan nous utiliserons les coordonnées polaires



Satellite de détection et sa modélisation

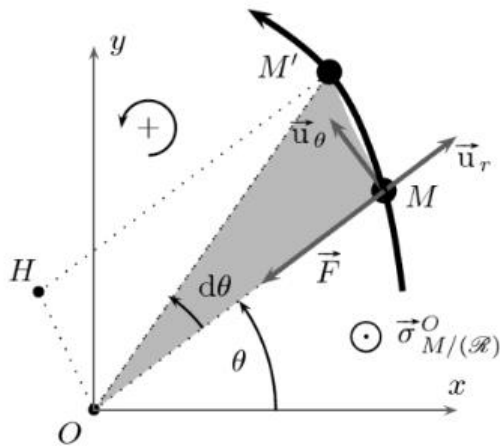
$\overrightarrow{TS} = r \overrightarrow{e_r}$ d'où la vitesse $\overrightarrow{v(S)} = r \dot{\theta} \overrightarrow{e_\theta}$ avec $r = (R_T + h)$ considéré constant

Le moment cinétique a alors pour expression : $\overrightarrow{\sigma_T} = m r^2 \dot{\theta} \overrightarrow{e_z} = m C \overrightarrow{e_z}$

avec $C = r^2 \dot{\theta}$: constante des aires

On a un mouvement circulaire et uniforme qui vérifie la loi des aires.

La conservation du moment cinétique nous conduit à l'expression de l'aire balayée par le vecteur position \overrightarrow{TS} par unité de temps :



L'aire balayée dA en gris correspond à la moitié de l'aire du quadrilatère $OMM'H$:

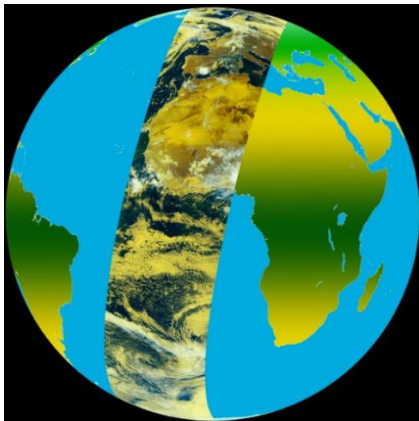
$$dA = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\theta$$

$$\text{soit } \frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

Constante des aires dans un mouvement à force centrale

Cette conséquence directe de la conservation du moment cinétique va nous permettre d'évaluer l'altitude à laquelle doit être placé le satellite.

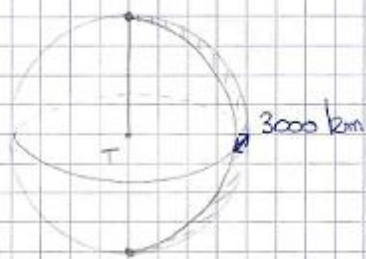
3 – Altitude du satellite :



Lors de sa rotation, les capteurs du satellite "observent" une certaine partie de la surface de la Terre. Cette surface porte le nom de fauchée. Le satellite se déplace selon une trajectoire nord-sud. Ce mouvement couplé à la rotation de la Terre permet une couverture complète de la surface de la planète en 24h.

Une fauchée du satellite européen MetOp, de près de 3000 km de largeur

Calculons à quelle altitude doit se trouver le satellite afin de remplir sa mission.



$$R_T = 6400 \text{ km}$$

A chaque cycle, les bandes observées se recouvrent de moitié pour la continuité des informations.
Fauscree utile: 1500 m

La Terre effectue un tour sur elle-même en 24 h donc le satellite doit avoir séparé toute la surface de la Terre en 24 h.

$$\bullet \text{ Nombre de tours du satellite en 1 jour} = \frac{2\pi R_T}{2 \times 1500}$$

$$N_{\text{tour}} \approx 13,4$$

Donnée Météo-C: 14 tours/jour

• Raisonnons sur une $\frac{1}{2}$ planète balayée :

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\pi (R_T + R)^2}{2 \times \frac{T_s}{2}}$$

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\pi (R_T + R)^2}{T_s}$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 14 \text{ tours en } 24 \text{ h} \\ 28 \frac{1}{2} \text{ tours en } 24 \text{ h} \end{array} \right. \\ & \rightarrow \frac{T_{\text{satellite}}}{2} = \frac{24}{28} \end{aligned}$$

$$\text{2e plus } C = (R_T + R) \cdot \Omega_{\text{satellite}}$$

$$\Omega_s = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + R}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{C}{2} \Rightarrow \frac{(R_T + R) \sqrt{GM_T}}{2 \sqrt{R_T + R}} = \frac{\pi (R_T + R)^2}{T_s}$$

$$\text{On obtient: } (R_T + R)^{3/2} = \frac{T_s}{2\pi} \sqrt{GM_T}$$

Remarque: on retrouve la troisième loi de Kepler

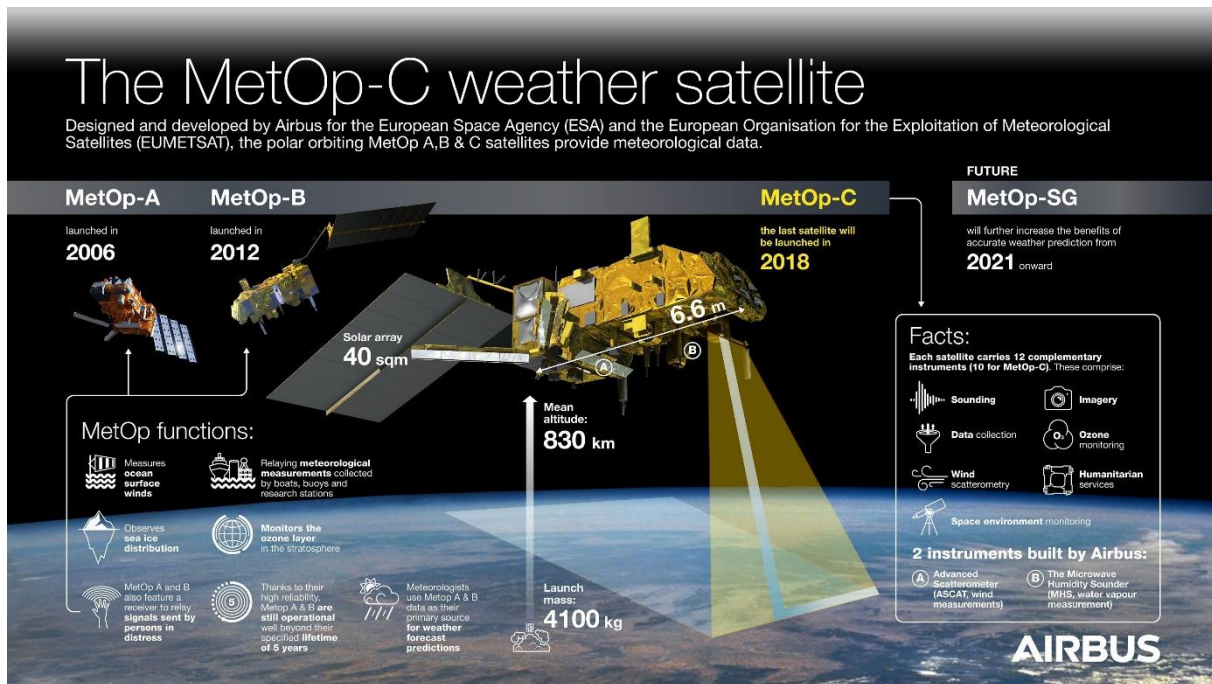
$$\frac{T_s^2}{(R_T + R)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$$

$$\text{On obtient: } R = \left(\frac{T_s}{2\pi} \right)^{2/3} \times (GM_T)^{1/3} - R_T$$

$$\text{A.N.: } R \approx 882 \text{ km}$$

$$\text{Donnée satellite: } R = 830 \text{ km}$$

Ordre de grandeur cohérent avec les données fournies



Les données indiquent une altitude moyenne ce qui indique que $r = (R_T + h)$ n'est pas constante.

Regardons l'incidence que cela peut avoir d'un point de vue énergétique.

3 – Aspect énergétique :

- Le satellite est soumis à une force centrale conservative.

Cette force dérive donc d'une énergie potentielle qui ne dépend que de r : $E_p(r)$.

Cette énergie potentielle est définie à une constante près.

Pour la suite, on choisit cette constante telle que : $\lim_{r \rightarrow \infty} E_p(r) = 0$

- De plus $\vec{TS} = r \vec{e}_r$ ce qui conduit à $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

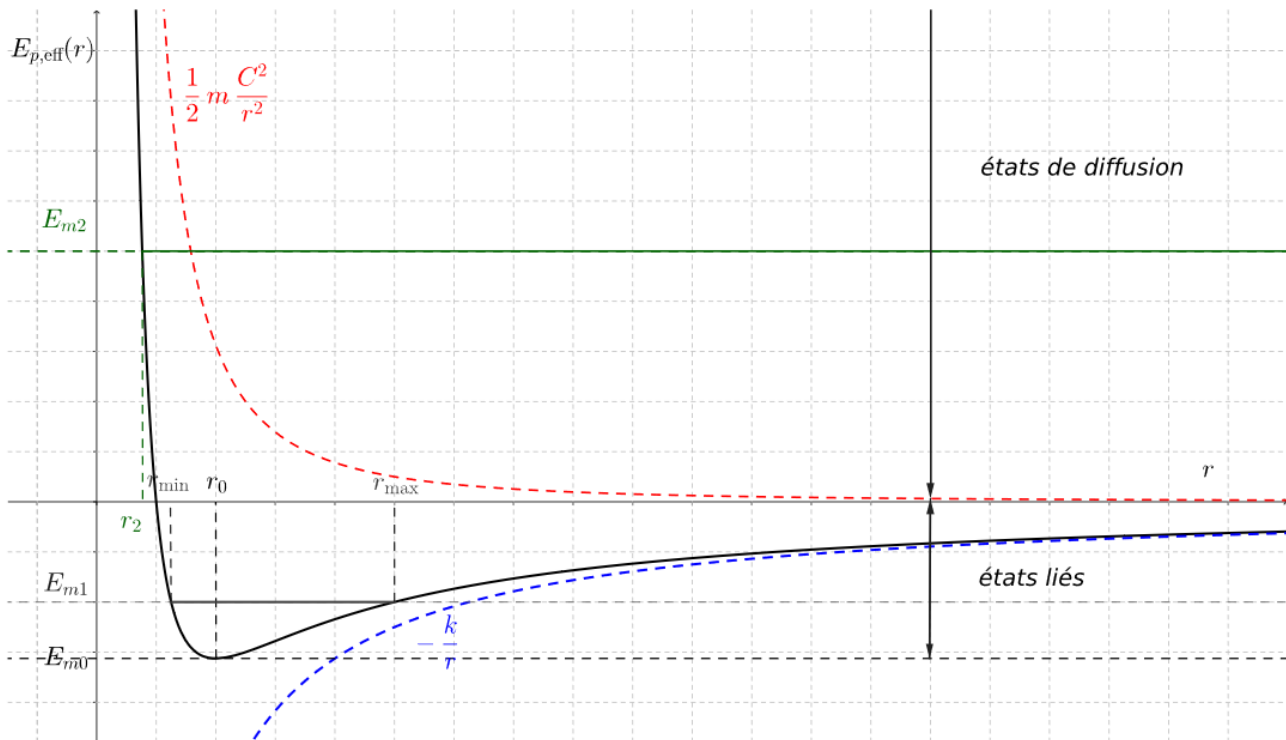
- Energie cinétique : $E_c = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2)$ $E_c = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{C^2}{r^2}$

(on introduit la constante des aires afin d'éliminer la dépendance angulaire et ne se retrouver qu'avec une seule variable : r)

- Conservation de l'énergie mécanique : $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r) \quad \text{En notant } E_{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p(r)$$

On se retrouve dans un cas similaire déjà étudié à un mouvement unidimensionnel conservatif d'un système mobile repéré par sa coordonnée r ce qui va nous permettre de discuter sur la nature des trajectoires possibles pour le satellite en prenant en compte le critère : $E_{p,eff} \leq E_m$



Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

Cas	Exploitation de la courbe	Nature de la trajectoire
$E_m = E_{m0}$ $E_{m0} = E_{p,eff}(r_0)$ E_{m0} correspond au minimum de $E_{p,eff}$	$r = r_0 = \text{Cte}$ $C = r^2 \dot{\theta} = r_0^2 \dot{\theta} = \text{Cte}$ $\Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$ Le mouvement est circulaire et uniforme.	cercle
$E_m = E_{m1}$ avec $E_{m0} < E_{m1} < 0$	$r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$ la trajectoire est inscrite entre deux cercles et le système ne peut jamais s'éloigner indéfiniment du centre attracteur. On parle d'état lié.	ellipse
$E_m = E_{m2}$ avec $E_{m2} > 0$	$r \geq r_2$ r peut tendre vers l'infini et le système peut s'éloigner indéfiniment. On parle de mouvement libre ou d'état de diffusion.	Parabole ($E_m = 0$) ou hyperbole ($E_m > 0$)

Conclusion :

- Ce qu'il faut retenir de la leçon ...
- Parmi les trois grandeurs étudiées, seules la quantité de mouvement et le moment cinétique sont des grandeurs conservatives car dans les bilans, il n'y a pas de terme de création contrairement à l'énergie mécanique dans le cas de forces non conservatives. Cela a conduit à l'énoncé du premier principe et à la notion d'énergie interne qui seront abordés par la suite en thermodynamique.
- Enfin notons que l'origine de la conservation du moment cinétique est liée à l'isotropie de l'espace c'est-à-dire que toutes les directions de l'espace sont équivalentes. De même l'origine de la conservation de la quantité de mouvement est liée à l'homogénéité de l'espace tandis que celle de l'énergie à une invariance dans le temps. Toutes ces lois de conservation peuvent ainsi être retrouvées dans un cadre plus général grâce au théorème énoncé en 1918 par la mathématicienne Emmy Noether qui relie les invariances (ou symétries continues) d'un système et les lois de conservation qui s'appliquent.