

LP26 : Propagation avec dispersion

Niveau : CPGE, 2^{ème} année

Biblio : « Ondes » Hprépa ; Compte-rendu Aurélie Condomine 2013-2014 ;

Prérequis : Ondes planes, ondes progressives ; relation de dispersion ; vecteur d'onde ; équation d'Alembert ; modulation de signaux, cohérence spatiale et temporelle, modélisation du câble coaxial

RAPPORTS DU JURY :

ATTENTION le titre de la leçon a été simplifié pour la session 2014 : il était auparavant « **Propagation dans un milieu dispersif : vitesse de phase, vitesse de groupe. Paquets d'ondes planes, évolution. Exemples.** »

2013 : Les candidats doivent avoir réfléchi à la notion de vitesse de groupe et à son cadre d'utilisation.

2012 : Les notions de modes et de fréquence de coupure doivent être exposées. On peut envisager d'autres ondes que les ondes électromagnétiques.

2010-2009 : Il convient de ne pas consacrer trop de temps à présenter les circonstances (rares) où la vitesse de groupe ne s'interprète pas comme vitesse de transport de l'énergie.

2008-2007 : Les candidats ont à leur disposition une petite animation qui permet d'illustrer les notions délicates que sont la vitesse de phase et la vitesse de groupe.

2001 : La notion de paquet d'ondes ne se réduit pas à la superposition de deux ondes. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde beaucoup de candidats oublient que k et ω sont reliés par la relation de dispersion. Il faut bien sûr s'intéresser aux déformations du paquet d'onde.

2000 : Une superposition d'un nombre fini d'harmoniques ne permet en aucun cas de définir un paquet d'onde, puisque le phénomène reste périodique. Elle ne peut que constituer un intermédiaire avant le passage à la limite continue, qui doit être étudiée avec soin. Lorsqu'ils décrivent un paquet d'onde tridimensionnel, beaucoup de candidats oublient que k_x , k_y , k_z et ω sont reliés par la relation de dispersion.

1999 : Ne pas se limiter, pour la construction d'un paquet d'onde à la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de fréquences voisines. La déformation du paquet d'onde est rarement envisagée. Des exemples doivent être pris dans les ondes mécaniques et les ondes électromagnétiques par exemple dans la propagation d'information sur fibre optique.

Plan :

I. Propagation dans un milieu dispersif

- 1. Relation de dispersion et vitesse de phase**
- 2. Un milieu dispersif : le plasma**

II. Notion de paquet d'onde

- 1. Superposition de 2 ondes**
- 2. Superpositions de N ondes**
- 3. Déformation des paquets d'onde.**

III. Des milieux dispersifs

- 1. L'ionosphère**
- 2. Le câble coaxial**

Introduction :

Jusqu'à présent nous avons étudié la propagation d'onde dans une direction donnée, prenant la forme d'une onde plane progressive $\Psi(x,t)$ solution de l'équation d'Alembert :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0$$

La relation de dispersion d'une OPPM est alors $k = \frac{\omega}{c}$

Dans le cas des ondes électromagnétique nous nous sommes contentés de la propagation dans le vide. On peut donc se demander ce qui se passe dans des milieux matériels. Plusieurs phénomènes apparaissent alors, de l'atténuation et de la dispersion. C'est sur ce deuxième point que nous allons nous concentrer au cours de cette leçon, en laissant de côté l'aspect atténuation de l'onde, incluant la partie absorption. Pour cela nous allons étudier des milieux conducteurs que ce soit un métal ou un plasma ainsi qu'aborder certains modèles tel que les paquets d'onde afin de comprendre les conséquences du phénomène de dispersion.

I. Propagation dans un milieu dispersif

1. Relation de dispersion et vitesse de phase

Attention ici les termes φ , φ_1 , φ_2 , Ψ et k sont des nombres complexes et devraient donc être soulignés !

Une façon simple de comprendre le phénomène de dispersion est d'étudier un cas dans lequel est présente une dissipation d'énergie, par exemple le cas d'une corde sans raideur mais dans laquelle on prend en compte les frottements de l'air. Il faut donc corriger l'équation d'Alembert en rajoutant le terme de frottement : $\frac{1}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ l'équation devient alors :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = 0 \quad (1)$$

La linéarité de cette équation nous autorise à chercher des solutions harmoniques, en l'occurrence une solution de la forme $\Psi(x,t) = \varphi(x)e^{j\omega t}$, l'équation (1) devient alors :

$$c^2 \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + (-\omega^2 + \frac{j\omega}{\tau}) \varphi(x) = 0 \quad (2)$$

Les solutions sont de la forme $\varphi(x) = \varphi_1 e^{jk_1 x} + \varphi_2 e^{-jk_1 x}$

Le nombre d'onde k est ici un nombre d'onde complexe relié à la pulsation ω par la relation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{j\omega}{c^2 \tau}$. k s'écrit sous la forme $k = k_1 - jk_2$ avec $k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$ et $2k_1 k_2 = \frac{\omega}{c^2 \tau}$. La relation de dispersion n'est pas linéaire. Une onde d'amplitude complexe $\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{j(\omega t - kx)}$ sera alors solution de l'équation.

Si l'on étudie la solution particulière $\Psi(x,t) = \Psi_0 e^{j(\omega t - kx)}$ on peut la réécrire $\Psi_0 e^{-k_2 x} e^{j(\omega t - k_1 x)}$ ce qui en notation réelle donne $\Psi_0 e^{-k_2 x} \cos(\omega t - k_1 x)$. On peut alors poser le terme de phase $\phi = \omega t - k_1 x$, le point de phase nulle vérifie la relation $x = \frac{\omega t}{k_1}$. Ce point x se déplace à une vitesse appelée vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k_1}$. C'est la vitesse que devrait avoir un observateur pour voir une valeur constante de la phase. Lorsque l'on est dans un milieu non dispersif et sans dissipation d'énergie, et que l'on a $k_1 = k = \frac{\omega}{c}$ on a alors $v_\phi = c$ la vitesse ne dépend pas de la fréquence, mais ici on voit que ce n'est pas le cas, la vitesse de la phase varie avec la fréquence de l'onde, c'est le **phénomène de dispersion**.

Le terme en $e^{-k_2 x}$ sera lui un terme d'atténuation ayant pour conséquence une diminution exponentielle de l'amplitude de l'onde, on parle alors d'absorption. Nous ne nous épancherons pas plus sur ce phénomène qui n'est pas le sujet de notre leçon.

Nous avons étudié ici un cas où la dissipation d'énergie est à l'origine de la dispersion mais il existe également des milieux où la dispersion existe sans qu'il n'y ait de dissipation d'énergie, on parle alors de milieux dispersifs.

2. Un milieu dispersif : le plasma

Un plasma est un gaz ionisé constitué de 2 parties : des ions positifs (atomes dont des électrons ont été arrachés) et ces électrons se déplaçant librement. L'ensemble est globalement neutre, la **densité volumique de charge ρ est nulle**. On dit alors que le milieu est quasi-neutre, chargé localement mais neutre dans l'ensemble. Lorsqu'un gaz est suffisamment chauffé, les électrons des couches extérieures peuvent être arrachés lors des collisions entre particules, ce qui forme le plasma. On peut créer des plasmas notamment par décharge électrique comme c'est le cas dans les tubes à fluorescence, ou par des phénomènes photoélectriques comme c'est le cas dans la ionosphère que l'on traitera partie 3.

Pour étudier ce milieu nous négligerons toutes les interactions entre les ions, hypothèse raisonnable pour un plasma peu dense.

Le plasma considéré sera composé de n ions de masse M et de charge $+e$, ainsi que de n électrons de masse m et de charge $-e$. La vitesse des ions \vec{v} sera la vitesse mésoscopique afin de ne pas considérer l'agitation thermique (qui en moyenne donne une vitesse nulle).

On applique un champ électrique extérieur \vec{E} au plasma. On a $M \gg m$ donc on ne considérera que le mouvement des électrons bien plus légers. La densité volumique de courant \vec{j} est égale à celle des électrons soit $\vec{j} = -ne\vec{v}$.

Supposons qu'une OPPM se propage dans le plasma à laquelle est associé un champ électrique \vec{E} ainsi qu'un champ magnétique \vec{B} . Afin de trouver la relation de dispersion caractérisant la situation nous allons utiliser l'équation du mouvement d'un électron. Soit :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (3)$$

Aucun autre champ n'intervenant on peut supposer que nous aurons le rapport $\frac{|\vec{E}|}{|\vec{B}|} \approx c$ de la même manière que si nous étions dans le vide. Les électrons étant non relativistes on peut faire l'approximation $|\vec{v} \wedge \vec{B}| \ll |\vec{E}|$.

L'équation (3) devient :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} \quad (4)$$

A partir de l'équation (4) et de densité du courant \vec{j} on peut écrire :

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{ne^2}{m} \vec{E} \quad (5)$$

On rappelle que la densité volumique ρ de charge est nulle et on écrit les relations de Maxwell :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{E} &= 0 \\ \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

On rappelle que $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$

A partir des équations de Maxwell et en regardant la dérivé temporelle de l'équation de Maxwell-Ampère on trouve l'équation :

$$\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{ne^2}{\epsilon_0 m} \vec{E} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \right)$$

On retrouve encore une fois une équation d'Alembert à laquelle est ajouté un terme correctif.

On en déduit la relation de dispersion $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p^2 = \frac{ne^2}{\epsilon_0 m}$. On appelle ω_p la pulsation plasma.

La relation de dispersion nous dit alors qu'il faut distinguer 2 cas :

- Si $\omega > \omega_p$ alors le nombre d'onde k est réel, on peut écrire $k = k' = \sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$. Dans ce cas le champ électrique s'écrit $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - k'x)}$. Il y a propagation. On en déduit la vitesse de phase $v_\phi = \frac{\omega}{k'} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$. C'est la relation de Klein-Gordon. La vitesse de phase n'est pas constante et varie avec la pulsation ω , en l'occurrence les basses fréquences sont plus rapides que les hautes, on a là encore un phénomène de dispersion. Chose importante, on remarque que la vitesse de phase peut-être supérieure à la vitesse de la lumière ce qui n'est pas un problème car la vitesse de phase ne renseigne pas sur la vitesse de transport de l'énergie
- Si $\omega < \omega_p$ alors le nombre d'onde k est imaginaire pur, on a alors $k = jk''$. Le champ électrique prend la forme $\vec{E}_0 e^{-(k''x)} e^{j(\omega t)}$. Les dépendances spatiales et temporelles sont séparées, il n'y a pas de propagation possible.

Seules les ondes monochromatiques de pulsation $\omega > \omega_p$, dans le cas contraire les ondes sont stationnaires et évanescents. Cela signifie qu'il y a une réflexion des ondes de basses fréquences à l'interface avec le plasma.

Dans cette première partie, nous avons étudié la propagation d'OPPM. Si elles constituent un outil pratique pour aborder le phénomène de dispersion, elle n'en reste pas moins un cas non réel. Une OPPM ne possède pas de début ou de fin et suppose que l'onde est parfaitement monochromatique. Une onde infinie suppose une énergie infinie ce qui n'existe pas de même qu'une onde n'est jamais parfaitement monochromatique. Elle ne saurait décrire à elle seule un phénomène physique observable. Pour rendre compte de la réalité il nous faut utiliser un autre modèle.

II. Notion de paquets d'onde

Tout signal est émis pendant une durée finie, et la perturbation possède une extension spatiale elle aussi finie, due aux dimensions forcément limitées de la source.

Une onde peut être décrite comme la superposition d'OPPM de pulsation ω différentes. On peut donc décomposer l'onde en une somme de signaux périodiques, grâce à l'analyse de Fourier. Nous allons utiliser le modèle des paquets d'onde, où un paquet résulte de la superposition de plusieurs ondes. On aura alors une onde limitée dans le temps (Δt) et dans l'espace (Δx), transportant donc une quantité d'énergie finie. Afin d'étudier ce modèle il convient dans un premier temps de considérer le cas de la superposition de 2 ondes.

1. Superposition de 2 OPPM et vitesse de groupe

Considérons une superposition de 2 ondes monochromatiques de même amplitude en phase à $t=0$ et $x=0$, de pulsations ω_1 et ω_2 . L'onde peut s'écrire en notation réelle :

$$\Psi(x,t) = \Psi_0 \cos(\omega_1 t - k_1 x) + \Psi_0 \cos(\omega_2 t - k_2 x)$$

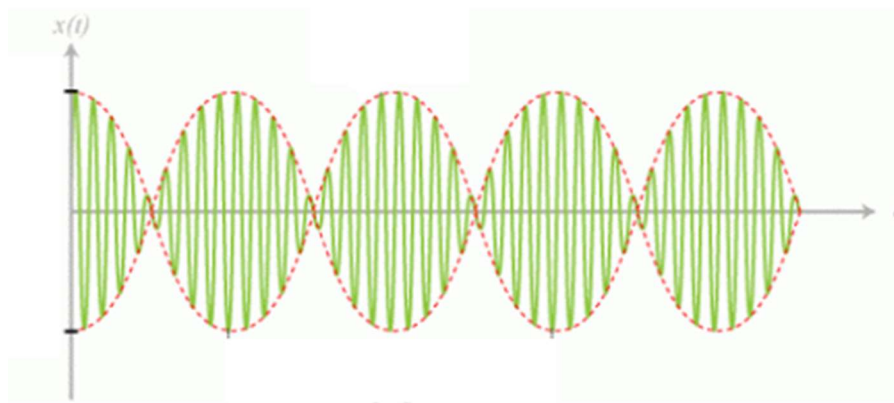
En posant :

$$\omega_m = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad ; \quad \delta\omega = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \quad ; \quad k_m = \frac{k_1 + k_2}{2} \quad ; \quad \delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

L'amplitude de l'onde peut s'écrire :

$$\Psi(x,t) = 2\Psi_0 \cos(\delta\omega t - \delta k x) \cdot \cos(\omega_m t - k_m x)$$

On retrouve une forme similaire à celle d'une onde modulée par une onde porteuse de fréquence plus élevée. Des paquets d'onde périodiques apparaissent



Superposition de 2 ondes monochromatique

Le signal rapide se propage à la vitesse $v_\phi = \frac{\omega_m}{k_m}$. L'enveloppe du signal se propage à une vitesse appelée vitesse de groupe $v_g = \frac{\delta\omega}{\delta k} = \frac{d\omega}{dk}$. La vitesse de groupe va indiquer la vitesse de déplacement des paquets d'onde formés, et donc la vitesse de déplacement de l'énergie transportée par l'onde.

Montrer animation « Wave.gif » dans les fichiers en annexes, afin de montrer la distinction entre vitesse de phase et vitesse de groupe.

Ce modèle à 2 ondes nous offre une première approche pour comprendre les notions de paquets d'onde et de vitesse de groupe, mais la réalité est plus complexe on a besoin d'avoir plus que 2 ondes de fréquences différentes pour avoir un modèle représentatif.

2. Modèle à N ondes

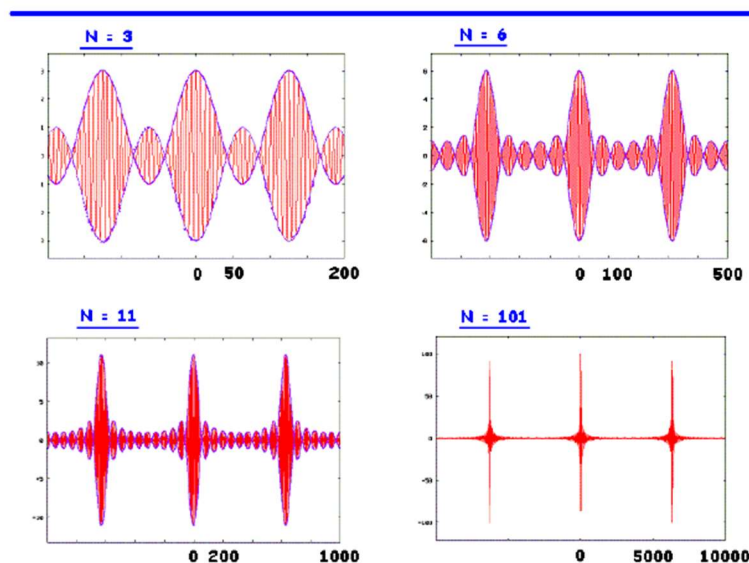
Nous allons superposer un nombre plus important d'OPPM. Envisageons un nombre entier n d'ondes superposées avec $-N \leq n \leq N$ soit $2N+1$ ondes superposées. Chacune des ondes possèdent une fréquence ω voisine de la fréquence moyenne ω_m et la largeur spectrale $\Delta\omega = 2N\delta\omega \ll \omega_m$. On peut écrire $\omega_n = \omega_m + n.\delta\omega$

L'amplitude totale de l'onde s'écrit ;

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=-N}^N \Psi_0 \cos(\omega_n t - k_n x) \text{ avec } k_n = k(\omega_n)$$

Si l'on se place du point de vue d'un observateur placé en $x = 0$ qui regarde défiler devant lui les paquets d'ondes. On garde toujours une structure de paquets périodiques mais à mesure que $\Delta\omega$ augmente la largeur des paquets diminue ce qui s'explique par une diminution de la cohérence temporelle de l'onde totale lorsque la largeur spectrale augmente.

Superpositions de N OPPH



On tend vers des paquets de plus en plus localisé mais périodique. Or une onde physique est localisée dans le temps est l'espace. Une solution serait de passer à un nombre infini d'ondes superposées dans une même largeur spectrale avec une variation en fréquence $\delta\omega \rightarrow 0$. On a alors une répartition d'OPPM continue en fréquence.

On étudie toujours une onde quasi-monochromatique, on réalise alors un développement limitée autour ω et on décompose le paquet d'onde par transformée de Fourier.

$$\omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

En notant $\omega(k_0) = \omega_0$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k) e^{j(\omega t - kx)} dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k) \exp \left[j \left(\omega_0 t + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t - kx \right) \right] dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k) \exp \left[j \left(\omega_0 t - x(k - k_0) - k_0 x + (k - k_0) \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t \right) \right] dk \\ &= e^{j(\omega_0 t - k_0 x)} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k) \exp \left[j(k - k_0) \left(\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t - x \right) \right] dk \end{aligned}$$

$$\text{On pose } \mathcal{E}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathcal{A}}(k) \exp \left[j(k - k_0) \left(\left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} t - x \right) \right] dk$$

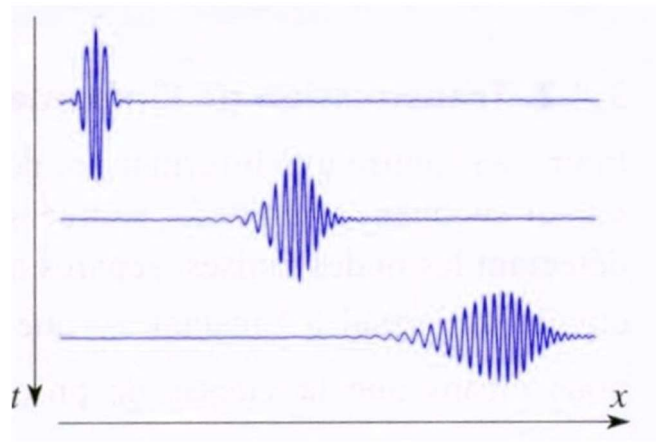
D'où l'expression finale :

$$\mathcal{A}(x, t) = \mathcal{E}(x, t) e^{j(\omega_0 t - k_0 x)}$$

$\mathcal{E}(x, t)$ représente la forme du paquet d'ondes dans le temps et dans l'espace, ce paquet d'onde se déplaçant bien à la vitesse $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

3. Dispersion du paquet d'onde

Un paquet d'onde est composé d'un ensemble d'OPPM de pulsations différentes, hors dans un milieu dispersif la vitesse de propagation d'une onde dépend de sa fréquence. Chaque composante du paquet d'onde n'aura pas la même vitesse de phase, entraînant une déformation du paquet d'onde ce qui concrètement se traduit par une déformation de l'information envoyée. Il est donc nécessaire de tenir compte de ces déformations à la réception. Ci-dessous la déformation d'une onde dont la vitesse augmente avec la fréquence.



Déformation d'un paquet d'onde

Nous avons jusque-là seulement regardé les conséquences des milieux dispersifs. Nous allons maintenant regarder quelques cas réels de ce type de milieu

III. Des milieux dispersifs

1. L'ionosphère

L'ionosphère d'une planète est une couche de son atmosphère caractérisée par une ionisation partielle des gaz. Dans le cas de la Terre elle se situe entre environ 60 et 1 000 km d'altitude. L'ionosphère est donc un plasma ce qui signifie que seules les ondes possédant une fréquence supérieure à la pulsation plasma sont susceptibles de traverser l'ionosphère.

A l'entrée de l'ionosphère il y a une concentration en électron autour $10^{10} \text{ e}^-/\text{m}^3$.

On en déduit donc que la fréquence plasma $f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{ne^2}{\epsilon_0 m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{10^{10}(1,6 \cdot 10^{-19})^2}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}}}$
 $\approx 9 \cdot 10^5 \text{ Hz}$.

- Pour des fréquences inférieures telles que les ondes radio, les ondes sont réfléchies, ce qui explique le fonctionnement de la première liaison radio transatlantique réalisé par Marconi en 1901.
- Pour $f > 10^8 \text{ Hz}$, on arrive à traverser l'intégralité de l'ionosphère qui est « transparente » à ces fréquences-là. Il faut monter à ces fréquences pour communiquer avec les satellites.

2. Le câble coaxial

Le modèle idéal de câble coaxial prend en compte uniquement les phénomènes capacitifs entre l'âme et la gaine, ainsi que l'inductance, des différents tronçons dx du câble. On néglige alors ici toute perte. Si on veut une représentation plus proche de la réalité il est nécessaire de tenir compte de la résistance de l'âme et de la gaine, des résistances que l'on peut rassembler en un seul terme de résistance linéique r . L'isolant entre l'âme et la gaine n'est pas parfait et présente une conductance linéique noté g . Le schéma électrique du câble coaxial avec perte doit tenir compte de ces nouveaux éléments.

Il peut éventuellement être intéressant de montrer la déformation du signal par un câble coaxial de 50 m avec un oscilloscope, que l'on ne peut expliquer avec le modèle initial

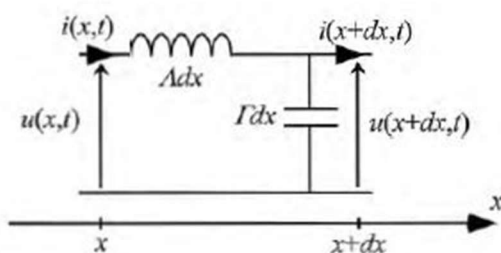


Schéma électrique d'un câble coaxiale sans perte

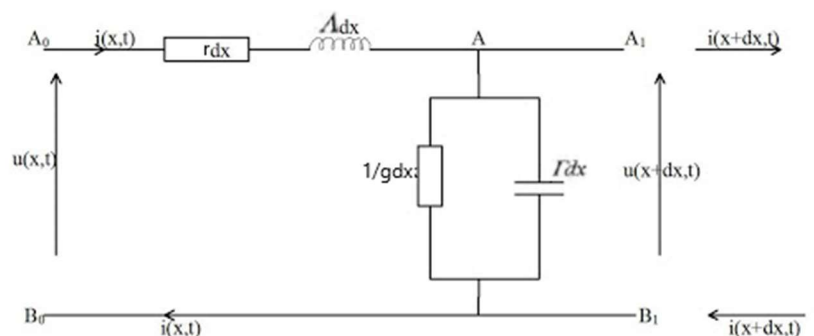


Schéma électrique d'un câble coaxiale avec perte

De même l'équation d'Alembert $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda\Gamma} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$ doit être modifiée. On applique les lois de Kirchhoff (de conservation de l'énergie et de la charge dans le circuit), la loi des mailles et la loi des nœuds afin d'arriver à une nouvelle équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{1}{\Lambda\Gamma} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = rgu + (r\Gamma + g\Lambda) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Voir démo p80 «H-prépa Ondes».

Un terme dissipatif a été rajouté. En posant $k = k_1 - jk_2$ on obtient par identification :

$$\begin{aligned} k_1^2 - k_2^2 &= \Lambda\Gamma\omega^2 - rg \\ 2k_1k_2 &= \omega(r\Gamma + g\Lambda) \end{aligned}$$

Nous avons la vitesse de phase dans le câble $v_\phi = \frac{\omega}{k_1}$ qui dépend de la fréquence puisque k_1 n'évolue pas linéairement avec ω .

Si le temps on peut rajouter une dernière partie sur la condition de Heaviside qui est la condition pour laquelle on n'a pas de dispersion dans le câble coaxial. Il faut que $r\Gamma = g\Lambda$. Dans ce cas très particulier on a la vitesse de phase $v_\phi = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ et k_1 évolue linéairement avec ω .

Démo p185 «H-prépa Ondes».

Conclusion :

Le phénomène de dispersion est provoqué par la non-linéarité de la partie réelle du nombre d'onde k en fonction de la fréquence de l'onde. Il en résulte des ondes dont la vitesse varie avec la fréquence. Cela provoque notamment la déformation dans le temps de l'onde représentée avec le modèle réaliste du paquet d'onde. Les milieux dispersifs tels que les métaux ou les plasmas (milieux conducteurs) causent une dispersion de l'onde.

Nous avons vu les cas de l'ionosphère et du câble coaxial mais d'autres milieux tels que le verre ou l'eau sont également des milieux dispersifs faisant intervenir d'autres phénomènes physiques.