

Devoir d'électromagnétisme

Préparation à l'agrégation de physique

Durée : 5h

Brahim Lamine

brahim.lamine@irap.omp.eu

28 novembre 2019

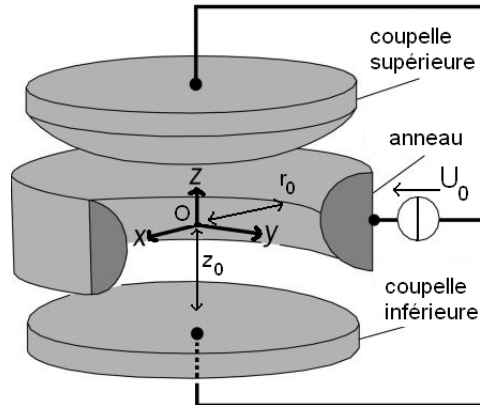


Le sujet est composé de quatre parties complètement indépendantes. Soyez concis mais suffisamment clair et rigoureux.

Partie I : Piège de Penning

Cette partie s'intéresse à l'étude du piège de Penning, qui valut en 1989 le prix Nobel à Hans Dehmelt.

Dans un tel piège, les particules sont confinées dans le volume délimité par trois électrodes conductrices : un anneau et deux coupelles (voir ci-dessous). Les coupelles sont maintenues au même potentiel, tandis qu'une différence de potentiel U_0 est appliquée avec l'anneau.



On souhaite que le potentiel électrostatique (noté Φ) créé par les électrodes ait la forme suivante (potentiel quadripolaire) :

$$\Phi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 - 2z^2)$$

1. Tracer les lignes équipotentielles de Φ dans le plan (xOz) .

Rq : attention à bien distinguer deux cas, selon que le potentiel soit positif ou négatif.

2. En déduire la forme des surfaces équipotentielles de Φ dans tout l'espace.

Quelle doit être la forme des électrodes pour créer un tel potentiel ? (N.B. : la forme des électrodes sur le schéma ci-dessus n'est qu'indicative...) En déduire l'expression de A en fonction de z_0 , r_0 et U_0 .

On considère une particule de charge q et de masse m dans le piège. On va utiliser le potentiel électrostatique Φ pour la piéger dans la direction z .

3. Montrer qu'il existe une position d'équilibre et donner le signe de A pour lequel cette position d'équilibre est stable dans la direction z . Est-elle stable dans les autres directions ? Conclure à l'impossibilité de piéger simultanément des particules de charge opposée dans un piège de Penning.

La particule est donc piégée dans la direction z , mais pas dans le plan (Oxy) . Pour circonvenir à ce problème, on fait baigner le piège dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

4. Trouver les équations du mouvement couplées sur $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de la particule, en fonction de A et B .
5. En déduire que, dans la direction z , la particule décrit une oscillation sinusoïdale à la fréquence angulaire $\omega_z = \sqrt{4|qA|/m}$.

6. On s'intéresse maintenant au mouvement de la particule dans le plan (Oxy). On considère les fonctions suivantes :

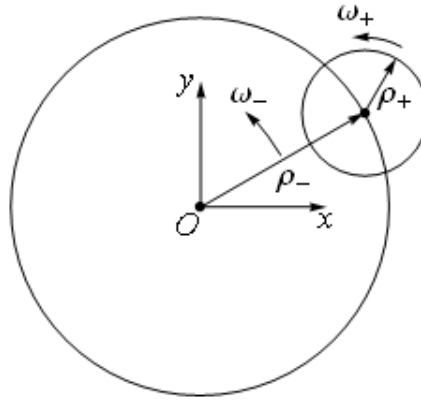
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\omega t + \phi) \\ \rho \sin(\omega t + \phi) \end{pmatrix},$$

où ω , ρ et ϕ sont des constantes. Montrer qu'elles sont solutions des équations du mouvement pour deux valeurs bien précises de ω , qu'on notera ω_+ et ω_- et qu'on exprimera en fonction de ω_z et la fréquence cyclotron $\omega_c = -qB/m$.

On vient de déterminer deux solutions particulières des équations du mouvement dans le plan (Oxy) : la trajectoire correspondant à la solution ω_+ (ω_-) est un cercle de rayon ρ_+ (ρ_-) parcouru à la vitesse angulaire ω_+ (ω_-). La solution générale, quant à elle, est une superposition linéaire de ces deux solutions ω_+ et ω_- :

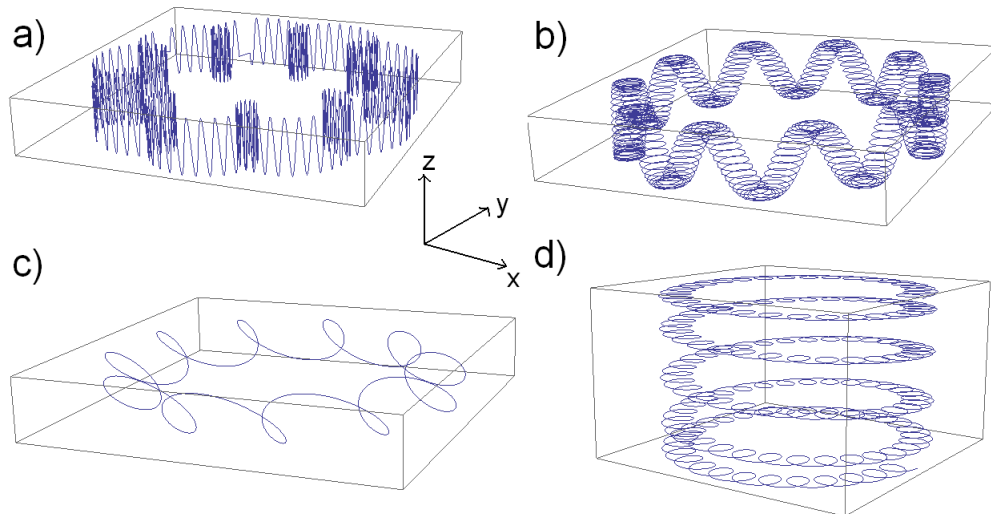
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_+ \cos(\omega_+ t + \phi_+) + \rho_- \cos(\omega_- t + \phi_-) \\ \rho_+ \sin(\omega_+ t + \phi_+) + \rho_- \sin(\omega_- t + \phi_-) \end{pmatrix}.$$

Dans la pratique, on a $\omega_+ \gg \omega_-$ et $\rho_+ \ll \rho_-$. Dans ce cas, comme illustré ci-dessous, la particule se déplace (rapidement) à la vitesse angulaire ω_+ sur un cercle de rayon ρ_+ dont le centre lui-même se déplace (lentement) à la vitesse angulaire ω_- sur un cercle de rayon ρ_- .



À ce mouvement dans le plan (Oxy) se superpose l'oscillation dans la direction z à la fréquence ω_z , qui est telle que $\omega_+ \gg \omega_z \gg \omega_-$.

7. Compte-tenu de ces informations, identifier le mouvement de la particule dans le piège de Penning parmi les quatre propositions suivantes :



8. APPLICATION. Les pièges de Penning permettent de réaliser des mesures extrêmement précises - métrologiques - de la masse de particules chargées. Par exemple, en refroidissant un piège à la température de l'hélium liquide (4,2 Kelvin) et en y piégeant un unique ion, des métrologues ont pu mesurer la masse de l'électron avec une erreur relative de $7,3 \times 10^{-10}$!¹

- Montrer en effet que si on connaît les fréquences cyclotron de deux particules de masses différentes, alors on connaît le rapport de leur masse.
- Le but est donc d'extraire ω_c . Pour cela, il faut mesurer ω_+ , ω_- et ω_z . Pour y arriver, on observe que de très faibles courants alternatifs, qui sont liés à la particule piégée, circulent dans les électrodes. Expliquer leur origine et dire en quoi ils permettent de mesurer ω_+ , ω_- et ω_z .
- De ces mesures on déduit ω_c à l'aide de l'égalité suivante (qu'on ne demande pas de démontrer) :

$$\omega_c^2 = \omega_+^2 + \omega_z^2 + \omega_-^2.$$

Cette égalité a en effet l'avantage de rester valable même si les champs présentent de petites imperfections. Proposer plusieurs causes possibles à ces imperfections.

1. Beier, Phys Rev Lett, **88**, 011603 (2002) - *New Determination of the Electron's Mass*
 Werth, Int J Mass Spectrometry, **251**, 152 (2006) - *Highly charged ions, QED and the electron mass*
 Werth, Eur Phys J D, **22**, 163 (2003) - *Double Penning trap technique*

Partie II : aurores boréales

Le champ magnétique terrestre peut être assimilé au premier ordre à un champ créé par un dipôle magnétique \mathcal{M} placé au centre. On rappelle les expressions du potentiel vecteur \mathbf{A} et du champ magnétique \mathbf{B} créé par un dipôle.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathcal{M} \wedge \mathbf{r}}{r^3} \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[\frac{3(\mathcal{M} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r}}{r^2} - \mathcal{M} \right]$$

On travaille en coordonnées sphériques contruites selon l'axe $(O, -\mathcal{M})$. Le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé Galiléen.

1. Quel est l'ordre de grandeur du moment magnétique terrestre \mathcal{M} ?
2. Un électron se déplace à la périphérie de la Terre. Retrouver l'expression de l'accélération selon \vec{e}_φ :

$$a_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d(\dot{\varphi} r^2 \sin^2 \theta)}{dt}$$

3. Montrer que

$$\dot{\varphi} r^2 \sin^2 \theta + \frac{\mu_0 \mathcal{M} e \sin^2 \theta}{4\pi m r} = K$$

avec K une constante.

4. Montrer que l'on peut définir un potentiel effectif $V(r, \theta)$ tel que

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + V(r, \theta) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

où v_0 est la vitesse initiale de la particule.

5. Tracer $V(r, \theta)$ pour un angle θ donné.
6. Après avoir retrouvé l'équation des lignes de champ du dipôle magnétique, vérifier qualitativement que le piégeage a lieu autour de ces lignes de champ. Ce sont les ceintures de Van Allen.
7. Donner une condition sur K pour qu'il y ait piégeage pour toute valeur de θ , à v_0 donné. Justifier qu'il est plus facile de piéger à l'aplomb des pôles magnétiques qu'à l'équateur. Ceci explique pourquoi les aurores boréales ont préférentiellement lieu au delà des cercles polaires.
8. Cependant, des aurores boréales ont déjà été vues à Bombay et à Rome dans l'Antiquité lors de très violents orages magnétiques solaires pendant lesquels le plasma qui constitue le vent solaire est beaucoup plus dense et énergétique. On peut le comprendre à l'aide de ce modèle à partir d'arguments qualitatifs : en reprenant la condition de piégeage à tous angles, dans quelle limite pour K a-t-on piégeage de particules très énergétiques ? Quelles sont alors les ceintures mises en jeu dans le piégeage ? Vérifier qu'elles interceptent la surface du globe à des latitudes d'autant plus faibles que la particule piégée est énergétique.

Partie III : Guide d'onde parfait

1 Généralités

On considère une onde se propageant le long de l'axe (Oz) dans un guide d'onde infini d'axe (Oz) (tel que représenté par exemple sur la figure 1). Les parois du guide sont supposées être des conducteurs parfaits. Le guide est par ailleurs rempli d'air, que l'on assimilera au vide. On cherchera des solutions aux équations de Maxwell sous la forme

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z, t) &= \vec{E}_0(x, y) \exp(-i(\omega t - k_g z)) \\ \vec{B}(x, y, z, t) &= \vec{B}_0(x, y) \exp(-i(\omega t - k_g z))\end{aligned}$$

avec $\vec{E}_0 = E_{0x}\vec{e}_x + E_{0y}\vec{e}_y + E_{0z}\vec{e}_z$ et $\vec{B}_0 = B_{0x}\vec{e}_x + B_{0y}\vec{e}_y + B_{0z}\vec{e}_z$.

Le nombre d'onde k_g peut être différent du nombre d'onde dans le vide que l'on notera $k = \omega/c$.

1. Justifier rapidement la forme choisie pour \vec{E} et \vec{B} .
2. Montrer que les composantes E_{0x} , E_{0y} , B_{0x} et B_{0y} peuvent s'exprimer en fonction des composantes parallèles E_{0z} et B_{0z} .
3. Établir les équations différentielles vérifiées par E_{0z} et B_{0z} .

On considère les ondes transverses électriques (dites TE) pour lesquelles $E_{0z} = 0$, ou transverses magnétiques (dites TM), pour lesquelles $B_{0z} = 0$.

4. Montrer qu'en tout point du guide les champs \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires (on supposera $k \neq k_g$).

Propagation d'une onde TEM

On s'intéresse dans cette partie à la possibilité de propager des ondes TEM, c'est-à-dire à la fois transverse électrique et magnétique

5. À quelle condition est-il possible d'avoir une onde TEM? Quelle est la vitesse de phase de l'onde dans ce cas?
6. Montrer que dans le cas d'une onde TEM le potentiel vecteur \vec{A} est nécessairement parallèle à (Oz).

On écrit le potentiel scalaire V sous la forme

$$V(x, y, z, t) = V_0(x, y) \exp(-i(\omega t - k_g z))$$

7. Toujours dans le cas d'une onde TEM, donner l'expression du champ électrique et montrer que les conditions aux limites imposent $V_0(x, y) = \text{constante}$. Que peut-on en conclure sur la possibilité de propagation d'une onde TEM?

2 Guide d'onde rectangulaire

On considère le guide d'onde de la figure 1, avec $b > a$.

8. Chercher la solution générale à l'équation vérifiée par B_{0z} et établie dans la question 3, sous la forme $B_{0z} = f(x)g(y)$. On montrera que seule une solution oscillante convient.

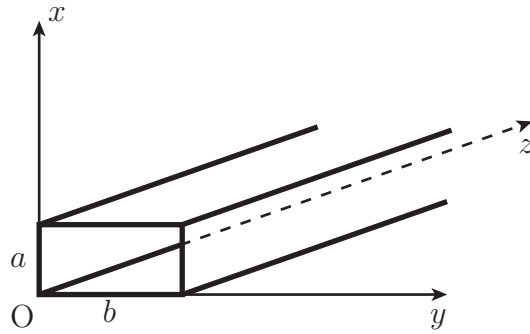


FIGURE 1 – Guide d'onde rectangulaire.

9. Montrer que les conditions aux limites imposent à B_{0z} de dépendre de deux nombres entiers m et n tels que

$$k^2 - k_g^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)$$

Le mode TE se propageant est alors appelé mode TE_{mn} .

10. Montrer qu'une onde TE_{mn} ne peut se propager dans le guide que si sa fréquence est supérieure à une fréquence de coupure ω_c que l'on calculera. Quelle est la plus petite fréquence de coupure pour le guide ?
11. On considère une onde se propageant sur le mode TE_{01} . Calculer les différentes composantes de \vec{E} et \vec{B} . Les tracer en fonction de y .
12. Pour le mode TE_{0n} , calculer la longueur d'onde dans le guide λ_0 , la vitesse de phase v_φ et la vitesse de groupe v_g .
13. Calculer la valeur moyenne du vecteur de Poynting pour le mode TE_{0n} et la puissance moyenne transmise à travers le guide, en fonction de E_0 .
14. Comparer avec l'énergie électromagnétique moyenne par unité de longueur du guide et en déduire la vitesse de transmission de l'énergie.

Partie IV : faisceaux gaussiens

Le faisceau délivré par un laser n'est pas une onde plane, car il a une extension transverse finie et possède donc une divergence naturelle due au phénomène de diffraction. Les faisceaux gaussiens fournissent une description d'un tel champ électromagnétique.

1. Redémontrer rapidement l'équation de propagation du champ électrique $\vec{E}(x, y, z, t)$ dans le vide.

Dans la situation étudiée ici, la solution n'est pas triviale car la répartition du champ dans le plan transverse (x, y) n'est pas constante, contrairement à l'onde plane. Dans la suite, on cherchera \vec{E} sous la forme du produit d'une enveloppe $\mathcal{E}(x, y, z)$ et d'un terme de propagation dans la direction z , c'est-à-dire

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \mathcal{E}(x, y, z) \exp(-i(\omega t - kz)) \vec{u}$$

avec $\omega = ck$ et \vec{u} un vecteur unitaire représentant la polarisation.

2. Justifiez que dans l'approximation de Gauss (*approximation paraxiale*), l'équation de propagation pour l'enveloppe s'écrit

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + 2ik \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} = 0$$

On reste jusqu'à la fin de ce sujet dans le cadre de l'approximation paraxiale et on cherchera les solutions de l'équation précédente sous la forme

$$\mathcal{E}(x, y, z) = f(z) \exp\left(\frac{ikr^2}{2q(z)}\right), \quad r^2 = x^2 + y^2$$

avec $f(z)$ et $q(z)$ des fonctions à valeurs complexes (à priori) que l'on cherche maintenant à déterminer.

3. Préciser la dimension de $q(z)$.
4. En remplaçant $\mathcal{E}(x, y, z)$ dans l'équation de propagation paraxiale, en déduire deux équations différentielles couplées satisfaites par $f(z)$ et $q(z)$.
5. En déduire que

$$q(z) = z + \tilde{z}_0 \quad \text{et} \quad f(z) = \frac{\tilde{f}_0 \tilde{z}_0}{z + \tilde{z}_0}$$

où \tilde{z}_0 et q_0 sont deux constantes (à priori complexes).

6. Justifier que, sans perte de généralité, on peut choisir \tilde{z}_0 comme un nombre purement imaginaire.

On posera dans la suite $\tilde{z}_0 = -iz_R$ avec z_R un nombre réel appelé longueur de Rayleigh. Puisque $q(z)$ est une fonction complexe, on peut la décomposer en sa partie réelle et imaginaire de la façon suivante

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} + i \frac{\lambda}{\pi w^2(z)}$$

avec $R(z)$ et $w(z)$ des fonctions réelles et $\lambda = 2\pi/k$ la longueur d'onde.

7. Exprimer $R(z)$ et $w(z)$ en fonction de z_R et tracer leur allure. On notera w_0 (appelé col, ou « waist » en anglais) la valeur minimale de $w(z)$.

8. Pour donner un sens physique à $R(z)$, considérons un instant une onde sphérique d'enveloppe $\mathcal{E}_s = \mathcal{E}_{s0} e^{ikOM}$ vue en un point $M(x, y, R)$ tel que $R \gg x, y$. Ainsi, R est le rayon de courbure de l'onde au point M . Montrer que dans cette approximation, on a

$$\mathcal{E}_s \simeq \mathcal{E}_{s0} \exp(ikR) \exp\left(ik \frac{x^2 + y^2}{2R}\right)$$

Donner ainsi un sens physique à la quantité $R(z)$.

9. Montrer que l'amplitude $f(z)$ peut s'écrire

$$f(z) = \mathcal{E}_0 \left(\frac{w_0}{w(z)} \right) e^{i\varphi_G(z)}$$

où vous donnerez l'expression de $\tan \varphi_G(z)$ en fonction de z et z_R . Tracer l'allure de la phase de Gouy $\varphi_G(z)$.

10. En considérant l'intensité $I(r, z)$ du faisceau, donner une interprétation physique à $w(z)$ et en particulier à w_0 .
11. Tracer sur un même graphique le profil de l'intensité du faisceau en fonction de z (pour des valeurs positives et négatives de z), ainsi que les fronts d'onde. Faire figurer dans cette figure la longueur de Rayleigh z_R .
12. Préciser pour quelles valeurs de z on peut considérer que le faisceau est quasiment une onde plane et faire figurer cette zone sur la figure précédente.
13. Montrer que le faisceau gaussien a une divergence naturelle qui s'exprime par

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

Commenter ce résultat.