

La diffraction pour les nuls... et pour les forts

par André BOUSSIE

78460 Chevreuse

andre.boussie@uife.edu.eg

RÉSUMÉ

La diffraction est présentée à partir des situations les plus simples, diffraction par un réseau et diffraction à l'infini. On en déduit ensuite le principe de Huygens-Fresnel. Un exemple d'application dans l'enseignement est exposé en conclusion.

1. INTRODUCTION

1.1 Inconvénients de la présentation traditionnelle de la diffraction

La présentation historique de la diffraction aux étudiants à partir du principe de Huygens-Fresnel leur offre une bonne technique de calcul des figures de diffraction dans son domaine de validité, la diffraction sous de faibles angles. On peut cependant lui reprocher certains inconvénients théoriques, pratiques et pédagogiques.

- *Inconvénients théoriques* : l'utilisation actuelle du principe *ad hoc* introduit par Fresnel peut laisser croire à l'étudiant qu'il n'y a eu que des progrès mineurs en optique depuis cette époque, d'autant plus que la question de la cohérence de ce principe avec les lois de l'électromagnétisme n'est pas habituellement signalée.
- *Inconvénients pratiques* : les calculs des figures de diffraction dans la zone de Fresnel étant compliqués, l'intégrale de Huygens-Fresnel n'est généralement introduite que pour la simplifier aussitôt après en ne considérant que la diffraction à l'infini et sans l'appliquer sous sa forme de principe.
- *Inconvénients pédagogiques* : à notre époque, il est recommandé d'habituer les étudiants à effectuer des raisonnements qualitatifs, gages d'une compréhension physique plus profonde que la simple application de formules mathématiques. Dans le cas de la diffraction, il paraît difficile de raisonner physiquement sur l'intégrale double de Huygens-Fresnel. Par ailleurs, cette intégrale techniquement efficace est un outil de calcul des figures de diffraction mais maintient par là même dans l'ombre le sens physique de la diffraction en tant que phénomène caractéristique de la propagation des ondes.

Pour essayer de remédier à ces inconvénients, nous allons voir qu'il est possible d'introduire la diffraction de manière plus physique, à partir des cas simples de la diffraction par un réseau et de la diffraction à l'infini, sans intégrale de Huygens-Fresnel.

Cette méthode est basée sur les idées exposées dans les références [1 - 6].

1.2 Outil théorique et expérimental : l'onde plane progressive sinusoïdale (OPPS)

Cette présentation de la diffraction nécessite la notion d'OPPS et sa représentation complexe. Ces prérequis sont connus des étudiants scientifiques en deuxième année d'études supérieures, niveau où l'on introduit habituellement la diffraction.

1.2.1 Modèle théorique de l'OPPS

On suppose donc connues l'existence et l'expression d'une OPPS homogène dans un milieu linéaire, permanent, homogène et non absorbant, son modèle scalaire dans un milieu isotrope ainsi que la notation complexe des fonctions sinusoïdales. Dans ces conditions, l'OPPS est représentée par la fonction scalaire complexe :

$$u(t, \vec{r}) = A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} = A e^{j2\pi(\vec{\sigma} \cdot \vec{r} - \nu t)}.$$

Le vecteur d'onde $\vec{\sigma}$ est plus commode à utiliser que le vecteur de propagation \vec{k} . Sa norme est le nombre d'onde, inverse de la longueur d'onde : $\sigma = 1/\lambda$. À la fréquence ν , il est fixé par la relation $\nu = \sigma c_\nu$ où c_ν est la vitesse de phase à cette fréquence. L'amplitude complexe A est constante.

L'expression mathématique de l'OPPS correspond à une onde éternelle remplissant tout l'espace. Elle ne peut donc être réalisée expérimentalement que de façon approchée.

1.2.2 Réalisations expérimentales des OPPS

Deux moyens très différents sont utilisés pour obtenir des ondes que l'on peut considérer, avec plus ou moins de précision, comme des OPPS et faire ainsi le lien entre théorie et expérience.

1. *Le laser* : Un faisceau laser est très peu divergent et ses surfaces d'ondes sont quasi planes. Cependant son amplitude n'est pas constante dans un plan d'onde et sa section est faible. Si c'est nécessaire pour une meilleure approximation de l'OPPS, on peut augmenter la section à l'aide d'un élargisseur de faisceau.
2. *Le collimateur* : En éclairant une petite pupille circulaire placée au foyer d'une lentille, on obtient en sortie un faisceau quasi cylindrique. Pour une bonne approximation de l'OPPS, il faut prendre la pupille la plus petite possible mais alors on manque de puissance. Quand on opère avec des réseaux, on utilise un collimateur classique où la pupille est une fente parallèle aux traits du réseau.

1.2.3 Suppression de l'effet de limitation de l'onde

Dans la présentation ci-dessous « pour les nuls », on supposera que l'onde incidente sur l'objet diffractant est une OPPS et que celui-ci est d'extension infinie. L'intérêt pédagogique de ce choix consiste à éviter à ce niveau tout effet de bord, qu'il soit dû à la largeur finie du faisceau incident ou à celle de l'objet diffractant ; ces effets de limitation du faisceau seront pris en compte par la suite, dans les parties « pour les forts ».

2. POUR LES NULS : DIFFRACTION PAR UN RESEAU SINUSOÏDAL ET PRESENTATION DE LA DECOMPOSITION EN ONDES PLANES

Bien entendu, les « nuls » dont il est question ici sont ceux qui veulent comprendre la diffraction sans le media d'une intégrale.

2.1 Exemple introductif : diffraction par un réseau sinusoïdal

2.1.1 Réseau sinusoïdal

Un réseau sinusoïdal multiplie l'amplitude de l'onde incidente par le facteur de transmission :

$$\tau(x) = \tau_0 + \tau_1 \cos(2\pi x/a) = \tau_0 + \tau_1 \cos(2\pi \xi x)$$

L'axe x est dans le plan du réseau ; a est le pas du réseau et son inverse $\xi = 1/a$ sa linéarité ; τ est compris entre 0 et 1.

Comme indiqué ci-dessus, on se place uniquement dans le cas où la longueur du réseau selon Ox est infinie et n'intervient donc pas dans la diffraction. On ne tient pas compte du facteur de phase dû à l'épaisseur et à l'indice uniformes du négatif.

Des renseignements sur l'obtention d'un réseau sinusoïdal sont donnés en annexe.

2.1.2 Expérience de cours

Un réseau sinusoïdal est éclairé sous incidence normale par un faisceau laser. On observe trois faisceaux diffractés en sortie. L'un est dans le prolongement du faisceau incident, les deux autres, symétriques, sont inclinés respectivement des angles α et $-\alpha$ par rapport au premier (fig. 1).

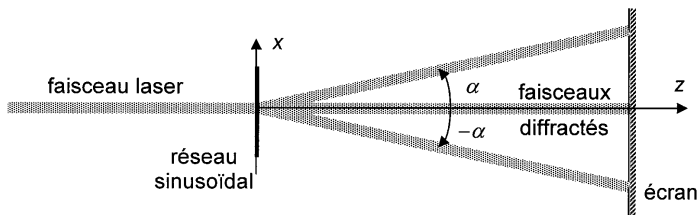


Fig. 1. Diffraction d'un faisceau laser par un réseau sinusoïdal

2.1.3 Interprétation

Dans le plan de sortie du réseau, $z = 0$, la vibration lumineuse est égale à la vibration de l'OPPS incidente, d'amplitude A , multipliée par $\tau(x)$:

$$u(t, x, z = 0) = A\tau_0 e^{-j\omega t} + A\tau_1 \cos(2\pi \xi x) e^{-j\omega t}.$$

En décomposant le cosinus en exponentielles complexes, on obtient :

$$u(t, x, z = 0) = A\tau_0 e^{-j\omega t} + \frac{1}{2} A\tau_1 e^{j2\pi(\xi x - vt)} + \frac{1}{2} A\tau_1 e^{j2\pi(-\xi x - vt)}.$$

On constate que $u(t, x, z = 0)$ est la restriction, pour $z = 0$, de la somme des trois ondes planes :

$$u_0(t, x, z) = A\tau_0 e^{j2\pi(\vec{\sigma}_0 \cdot \vec{r} - vt)} = A\tau_0 e^{j2\pi(\sigma z - vt)}$$

$$u_1(t, x, z) = \frac{1}{2} A\tau_1 e^{j2\pi(\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{r} - vt)} = \frac{1}{2} A\tau_1 e^{j2\pi(\xi x + \zeta z - vt)}$$

$$u_{-1}(t, x, z) = \frac{1}{2} A\tau_1 e^{j2\pi(\vec{\sigma}_{-1} \cdot \vec{r} - vt)} = \frac{1}{2} A\tau_1 e^{j2\pi(-\xi x + \zeta z - vt)}.$$

On retrouve bien les trois ondes observées expérimentalement. L'onde u_0 se propage dans la direction de l'onde incidente ; la direction de $\vec{\sigma}_1$ (vecteur d'onde de l'onde u_1) fait avec Oz l'angle α tel que $\sin \alpha = \xi/\sigma = \lambda/a$, et celle de $\vec{\sigma}_{-1}$ (vecteur d'onde de u_{-1}) l'angle $-\alpha$. On vérifie que l'angle α calculé concorde avec l'angle α mesuré.

2.2 Origine de la diffraction

2.2.1 La diffraction s'explique par les propriétés générales des ondes

Nous avons utilisé les propriétés suivantes des ondes :

1. l'existence du mode de propagation par onde plane ;
2. les conditions aux limites imposées à la vibration fixent la structure de l'onde qui se propage à partir de cet état initial.

La diffraction nous apparaît alors comme un phénomène qui n'a rien de mystérieux : elle découle naturellement de propriétés générales bien connues des ondes et n'a nul besoin d'un principe spécifique pour être comprise.

2.2.2 La diffraction a pour origine une modification de la distribution d'amplitude d'une onde

Un dispositif quelconque, placé sur le trajet d'une onde, modifie la distribution spatiale de son amplitude, transformant ainsi l'onde incidente en onde diffractée. On détermine la nouvelle stéréostructure en décomposant la distribution d'amplitude à la sortie du dispositif en distributions d'amplitude plus simples dont chacune engendre une onde connue.

2.3 Décomposition en ondes planes

Dans la méthode proposée ici, on choisit la décomposition en exponentielles complexes dans le plan de sortie. Chaque exponentielle correspond à l'état initial d'une OPPS, type d'onde dont l'existence est une propriété générale d'un milieu linéaire homogène.

2.3.1 Exposé de la méthode

Les raisonnements effectués sur l'exemple du réseau sinusoïdal se généralisent ainsi :

1. Un dispositif optique modifie une onde incidente et fournit dans un plan de sortie Oxy une distribution d'amplitude connue.
2. La nouvelle distribution est décomposée en exponentielles complexes dont les exposants sont de la forme $j2\pi\sigma_x x$ quand la distribution ne dépend que de la coordonnée x .
3. Le coefficient σ_x est la composante sur l'axe x du vecteur d'onde $\vec{\sigma}$ d'une onde plane dont l'exposant complexe est $j2\pi(\sigma_x x + \sigma_z z)$. Sa composante σ_z sur l'axe Oz orthogonal au plan de sortie est liée à σ_x par le nombre d'onde : $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_z^2$.
4. Si $|\sigma_x| < \sigma$, la valeur de σ_z est réelle et prise positive en orientant l'axe Oz dans le sens de propagation (condition d'onde sortante). Le vecteur d'onde $\vec{\sigma}$ fait avec l'axe Oz l'angle $\alpha = \text{Arcsin}(\sigma_x/\sigma)$. C'est la direction de propagation de l'onde plane, que l'on peut vérifier expérimentalement.
5. Si $|\sigma_x| > \sigma$, la valeur de σ_z est imaginaire. Ce cas est étudié au § 3.4.2.

2.3.2 Valeur générale et limites pratiques de la méthode des ondes planes

La méthode proposée permet une interprétation qualitative de l'onde diffractée et une vérification expérimentale des résultats. Elle est simple dans son principe et d'application gé-

nérale. Mais des difficultés pourront provenir de la complexité ou de l'impossibilité des calculs pour déterminer soit les conditions aux limites soit la superposition d'ondes planes dans l'onde diffractée.

En pratique d'autres méthodes lui seront préférées si leurs calculs sont plus accessibles. C'est le cas par exemple de la détermination de la structure de l'onde diffractée par une fente dans la zone de Fresnel, où l'on utilise directement le principe de Huygens-Fresnel. Un autre exemple est la théorie géométrique de la diffraction, élaborée pour traiter des cas complexes de dispositifs diffractants.

Nous allons appliquer maintenant la décomposition en ondes planes à un réseau quelconque (à une dimension).

3. POUR LES MOINS NULS : DIFFRACTION PAR UN RESEAU A UNE DIMENSION, SPECTRE SPATIAL ET SPECTRE D'ONDES PLANES

3.1 Diffraction par un réseau quelconque à une dimension

3.1.1 Facteur de transmission et amplitude de sortie

Le facteur de transmission $\tau(x)$ d'un réseau quelconque (à une dimension) est une fonction périodique de la coordonnée x dont l'axe est dans le plan du réseau. Son module est compris entre 0 et 1. On désigne par a le pas du réseau (période spatiale) et par $\xi = 1/a$ sa linéature.

Le réseau reçoit une onde plane sous incidence normale. Dans le plan de sortie, en $z = 0$, la vibration lumineuse est égale à la vibration incidente, d'amplitude A constante, multipliée par $\tau(x)$:

$$u(t, x, z = 0) = A \tau(x) e^{j2\pi vt}.$$

La distribution d'amplitude dans le plan de sortie est donc $A_0(x) = A \tau(x)$.

3.1.2 Décomposition de l'amplitude

La fonction $A_0(x)$ étant périodique, sa décomposition en exponentielles complexes correspond au calcul mathématique d'une série de Fourier (enseigné habituellement aux étudiants en deuxième année d'études supérieures scientifiques), qui permet de l'écrire sous la forme :

$$A_0(x) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p e^{j2\pi p \xi x},$$

où les amplitudes A_p des composantes dépendent de la fonction $A_0(x)$ et sont calculées par la formule suivante établie en mathématique :

$$A_p = \xi \int_{pas} A_0(x) e^{-j2\pi p \xi x} dx.$$

La vibration lumineuse dans le plan de sortie se décompose ainsi :

$$u(t, x, z = 0) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p e^{j2\pi(p \xi x - vt)}.$$

3.1.3 Décomposition en ondes planes

De la décomposition initiale on déduit les ondes planes composant l'onde diffractée :

$$u(t, x, z) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} A_p e^{j2\pi(p\xi x + \sigma_z z - vt)}.$$

Le nombre entier p est l'ordre de l'onde plane. Son vecteur d'onde $\vec{\sigma}_p$, de composantes $\sigma_x = p\xi$ et σ_z , fait avec l'axe Oz l'angle $\alpha_p = \text{Arcsin}(p\xi/\sigma) = \text{Arcsin}(p\lambda/a)$, en ne considérant que le cas où $|p|\lambda < a$ (l'autre cas étant étudié au § 3.4.2).

3.2 Exemple : réseau à fentes

On peut se procurer couramment dans le commerce ce type de réseau sous forme de négatif photographique formé de l'alternance de traits transparents de largeur b et de traits opaques de largeur $a-b$.

3.2.1 Calcul

On prend l'origine des abscisses au milieu d'une fente. Dans les mêmes conditions que pour le réseau sinusoïdal (§ 2.1.1), la valeur de $\tau(x)$ sur un pas est :

$$\tau(x) = 1 \text{ pour } -b/2 < x < b/2$$

$$\tau(x) = 0 \text{ pour } -a/2 < x < -b/2 \text{ ou } b/2 < x < a/2.$$

Le calcul du coefficient A_p de la série de Fourier donne :

$$A_p = \xi \int_{\text{pas}} A_0(x) e^{-j2\pi p\xi x} dx = A\xi \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-j2\pi p\xi x} dx = A\xi \frac{e^{-j\pi p\xi b} - e^{+j\pi p\xi b}}{-j2\pi p\xi}$$

$$A_p = A \frac{b}{a} \text{sinc}\left(\pi p \frac{b}{a}\right).$$

3.2.2 Expérience

En éclairant le réseau par un faisceau laser, on observe bien la décomposition en différents faisceaux diffractés correspondant chacun à une onde plane (fig. 2).

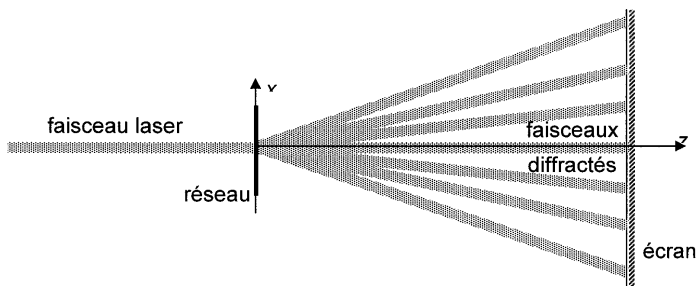


Fig. 2. Diffraction d'un faisceau laser par un réseau à fentes

Il est aisé de vérifier que les déviations de ces faisceaux suivent la loi $\sin \alpha_p = p\lambda/a$.

3.3 Spectre spatial et spectre d'ondes planes

3.3.1 Définitions

Les calculs précédents sont identiques à ceux du spectre en fréquence d'un signal périodique fonction du temps t (en électronique par exemple) où l'ordre 0 est la composante continue, les ordres 1 et -1 forment le fondamental et les autres ordres les harmoniques.

Il en est de même ici en remplaçant la variable t par la variable x : l'ensemble des couples $(\sigma_x = p\xi, A_p = A\tau_p)$ constitue le spectre spatial de l'amplitude $A_0(x)$ à la limite $z = 0_+$. Le nombre d'ondes σ_x du fondamental est égal à la linéature ξ du réseau.

Comme chacune de ces composantes spectrales correspond à une onde plane de fréquence ν et de vecteur d'onde $\vec{\sigma}_p$ (σ_x, σ_z), les couples (σ_x, A_p) représentent également le spectre d'ondes planes de l'onde diffractée (ou spectre angulaire). L'onde d'ordre 0 est dans le prolongement de l'onde plane incidente.

Ces spectres sont des spectres discrets où chaque composante est numérotée par son ordre p .

Afin d'éviter toute confusion entre spectre en fréquence et spectre spatial ou angulaire, nous dénommerons ce dernier stéréospectre.

3.3.2 Stéréospectre et spectre en fréquence fournis par un réseau

La direction de l'onde plane d'ordre p [$\alpha_p = \text{Arcsin}(p\lambda/a)$] dépendant de la longueur d'onde (sauf pour $p = 0$), un réseau éclairé en lumière polychromatique produit un stéréospectre différent pour chaque fréquence ν ou, ce qui revient au même, un spectre coloré pour chaque ordre (différent de 0) du stéréospectre. Cette propriété est utilisée en spectroscopie.

3.4 Application : microscopes à champ lointain et microscopes à champ proche

3.4.1 Limite de résolution des microscopes à champ lointain

Si le réseau a un pas a inférieur à la longueur d'onde λ , il ne laisse passer en incidence normale que l'onde non déviée d'ordre 0. L'onde diffractée ne contient alors aucune autre composante propagative (i.e. aucune autre onde plane *homogène* progressive), ce qui entraîne que l'information sur la structure périodique de pas $a < \lambda$ ne peut être transmise à grande distance ni donc apparaître dans l'image éloignée qu'en fournit un microscope.

La limite de résolution d'un microscope à champ lointain est donc égale à la longueur d'onde de la lumière utilisée.

On peut augmenter légèrement la résolution en éclairant l'objet obliquement, sinon il faut diminuer la longueur d'onde, ce qui conduit à utiliser les rayons X (produits maintenant par synchrotron) ou des faisceaux de particules (microscope électronique). Une méthode plus récente consiste à étudier le champ de rayonnement évanescent au voisinage de la structure à l'aide d'une pointe à fibre optique.

3.4.2 Stéréostructure du champ proche et microscope à pointe optique

Les ordres p supérieurs à la limite a/λ figurent dans le développement de l'amplitude et sont bien présents à la sortie du réseau, bien qu'ils ne correspondent pas à des composantes propagatives. Pour établir leur structure, il convient de remarquer que l'existence, dans un milieu linéaire homogène, d'une onde formellement plane en

$\exp[j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y + \sigma_z z - vt)]$ n'est pas liée à la nature réelle ou complexe des composantes de $\vec{\sigma}$. Dans le cas où $\sigma_x = p\xi$ a une valeur absolue supérieure à σ , la composante σ_z sur Oz est imaginaire :

$$\sigma_z = \pm j\sqrt{(p\xi)^2 - \sigma^2} = \pm j\zeta_p, \text{ avec } \zeta_p > 0.$$

L'onde est alors de la forme : $u_p(t, x, z) = A_p e^{-2\pi\zeta_p z} e^{j2\pi(p\xi x - vt)}$,
en choisissant le signe de l'exposant réel qui évite la divergence pour z infini.

Cette onde est progressive selon Ox et évanescente selon Oz. Bien qu'ayant disparu dans le champ lointain, sa présence dans le champ proche donne la possibilité à un microscope à pointe d'établir l'image d'une structure dont le pas est inférieur à la longueur d'onde.

4. POUR LES FORTS : DIFFRACTION A L'INFINI, ANALYSEUR D'ONDES PLANES, FILTRAGE OPTIQUE

Nous considérons maintenant le cas plus général où l'amplitude de la vibration dans le plan de sortie Oxy du dispositif diffractant est une fonction quelconque $A_0(x, y)$: la vibration lumineuse est de la forme $u(t, x, y, z = 0) = A_0(x, y) e^{-j2\pi vt}$.

À la place de la décomposition en série de Fourier, on applique la théorie mathématique de la transformation de Fourier, qui n'est généralement pas enseignée dans le premier cycle scientifique de l'enseignement supérieur français. Avant d'en rappeler certaines propriétés mathématiques, nous allons l'introduire physiquement, en deux étapes : à une puis à deux dimensions.

4.1 Transformations de Fourier à une dimension

Nous considérons tout d'abord le cas où l'amplitude de la vibration dans le plan de sortie est une fonction quelconque $A_0(x)$ de la seule coordonnée x .

4.1.1 Stéréospectre à une dimension

Pour adapter les expressions de la décomposition d'une fonction $A_0(x)$ périodique au cas d'une fonction $A_0(x)$ quelconque, on fait tendre le pas a vers l'infini et la linéature $\xi = 1/a$ vers 0. Les nombres d'ondes $\sigma_x = p\xi$ du spectre se rapprochent indéfiniment et conduisent à la variable continue σ_x . Les coefficients A_p tendent vers 0 avec ξ et il faut utiliser le rapport A_p/ξ , fonction de la variable σ_x , pour caractériser le spectre. L'expression intégrale du coefficient A_p , divisée par ξ , conduit alors à la fonction :

$$S(\sigma_x) = \left(\frac{A_p}{\xi} \right)_{\xi \rightarrow 0} = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(x) e^{-j2\pi\sigma_x x} dx.$$

C'est l'intégrale de Fourier à une dimension, expression de la correspondance $A_0(x) \rightarrow S(\sigma_x)$ appelée transformation de Fourier.

La fonction $S(\sigma_x)$ est le spectre de la distribution d'amplitude $A_0(x)$ et de l'onde diffractée. C'est un stéréospectre continu alors que celui d'un réseau, obtenu par série de Fourier, est discret.

$S(\sigma_x)$ n'a pas la dimension de l'amplitude A_0 mais d'une amplitude par unité de nombre d'onde.

4.1.2 Décompositions spectrales de l'amplitude et de l'onde diffractée

Pour ce stéréospectre continu, une onde plane composante a une amplitude élémentaire $dA = S(\sigma_x)d\sigma_x$, associée à l'intervalle $(\sigma_x, \sigma_x + d\sigma_x)$. La superposition de ces ondes dans le plan $z = 0$ conduit à remplacer la somme de la série de Fourier par l'intégrale :

$$A_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x) e^{j2\pi\sigma_x x} d\sigma_x.$$

Cette intégrale ne diffère de la précédente que par le signe de l'exposant. Elle exprime la correspondance $S(\sigma_x) \rightarrow A_0(x)$: c'est la transformation inverse de Fourier.

À partir de l'expression intégrale de $A_0(x)$, on obtient la décomposition en ondes planes en ajoutant dans l'exposant le terme en z :

$$u(t, x, z) = e^{-j2\pi\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x) e^{j2\pi(\sigma_x x + \sigma_z z)} d\sigma_x.$$

Chaque onde plane de la décomposition a un vecteur d'onde $\vec{\sigma}$ de composantes σ_x sur Ox et $\sigma_z = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_x^2}$ sur Oz . Si l'on ne s'intéresse qu'au champ lointain, il suffit d'intégrer σ_x entre $-\sigma$ et $+\sigma$ puisque, en dehors de cet intervalle, les composantes sont des ondes évanescentes qui décroissent très vite en fonction de z .

4.1.3 Résultats mathématiques

Sous réserve que les intégrales soient calculables ou aient un sens mathématique (ce que l'on supposera toujours dans cette étude), on définit la transformée de Fourier $S(\sigma_x)$ de la fonction $A_0(x)$ par l'intégrale de Fourier

$$S(\sigma_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(x) e^{-j2\pi\sigma_x x} dx$$

et on démontre que la transformation inverse s'exprime par l'intégrale

$$A_0(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x) e^{j2\pi\sigma_x x} d\sigma_x.$$

4.2 Transformations de Fourier à deux dimensions

4.2.1 Stéréospectre à deux dimensions

L'amplitude de la vibration dans le plan de sortie $A_0(x, y)$ étant maintenant fonction de x et de y , le spectre continu de l'onde diffractée est formé d'ondes planes dont les vecteurs d'onde $\vec{\sigma}$ peuvent avoir toutes les directions dans un demi espace et sont donc caractérisés par les deux composantes (σ_x, σ_y) , la troisième, σ_z , toujours positive (ou à partie imaginaire positive pour les composantes évanescentes), s'en déduisant par l'expression du nombre d'onde : $\sigma^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2$. Le stéréospectre $S(\sigma_x, \sigma_y)$ est ici un spectre continu à deux dimensions.

L'amplitude élémentaire d'une onde plane est alors de la forme $dA = S(\sigma_x, \sigma_y) d\sigma_x d\sigma_y$ et se trouve associée à un élément du plan (σ_x, σ_y) de côtés $d\sigma_x$ et $d\sigma_y$. $S(\sigma_x, \sigma_y)$ a donc la dimension d'une amplitude par unité de nombre d'onde au carré.

4.2.2 Décompositions spectrales

La superposition des ondes planes d'amplitudes dA dans le plan $z = 0_+$ conduit à l'intégrale double :

$$A_0(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x, \sigma_y) e^{j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y)} d\sigma_x d\sigma_y.$$

C'est une transformation inverse de Fourier à deux dimensions.

En ajoutant le terme en z dans l'exposant, on obtient la décomposition en ondes planes de l'onde diffractée :

$$u(t, x, y, z) = e^{-j2\pi vt} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x, \sigma_y) e^{j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y + \sigma_z z)} d\sigma_x d\sigma_y.$$

Comme pour les stéréospectres à une dimension, la composante $\vec{\sigma}_{xy}$ du vecteur d'onde $\vec{\sigma}$ dans le plan Oxy doit avoir une norme inférieure au nombre d'onde σ pour donner une onde plane *homogène* progressive. On peut donc en pratique limiter l'intégration au domaine $|\vec{\sigma}_{xy}|^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 < \sigma^2$ si l'on ne s'intéresse qu'au champ lointain.

4.2.3 Résultats mathématiques

On définit la transformation de Fourier à deux dimensions $A_0(x, y) \rightarrow S(\sigma_x, \sigma_y)$ par l'intégrale

$$S(\sigma_x, \sigma_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(x, y) e^{-j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y)} dx dy$$

et on démontre que la transformation inverse $S(\sigma_x, \sigma_y) \rightarrow A_0(x, y)$ s'exprime par l'intégrale :

$$A_0(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x, \sigma_y) e^{j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y)} d\sigma_x d\sigma_y.$$

Bien entendu ces résultats sont valables sous réserve que les intégrales aient un sens mathématique.

4.2.4 Conséquence expérimentale de la continuité du stéréospectre

Contrairement au cas du réseau, la notion d'ordre n'intervient pas dans la fonction $S(\sigma_x, \sigma_y)$ et la superposition des différentes ondes planes ne permet plus d'observer le stéréospectre sur un écran placé après l'objet diffractant (sauf si cet écran est très éloigné, comme nous le verrons au § 5.1.3). L'étude expérimentale de ses composantes nécessite l'utilisation d'un analyseur d'ondes planes.

4.3 Un analyseur d'ondes planes : la lentille convergente

4.3.1 Correspondance entre les ondes planes et le plan focal

Une lentille mince convergente, de focale $f = QF$, recevant une onde plane dans les conditions de Gauss, la transforme en onde convergeant en un point P du plan focal (fig. 3).

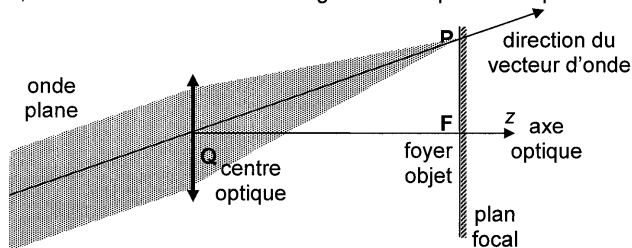


Fig. 3. Focalisation d'une onde plane par une lentille convergente

À chaque onde plane correspond donc un point éclairé. En pratique ce « point » est une petite surface dont la taille dépend de la qualité de l'approximation de l'onde plane et de la qualité de la lentille. L'ouverture de la lentille n'intervient quasiment pas si elle n'arrête qu'une partie négligeable de l'approximation d'onde plane reçue ; c'est usuellement le cas avec les faisceaux des lasers ordinaires. L'amplitude $A_F(x, y)$ en ce point est proportionnelle à celle de l'onde plane. On suppose bien entendu que la lentille a une ouverture suffisamment grande pour ne pas modifier le faisceau en le limitant.

Les propriétés de la lentille imposent à la droite QP, passant par le centre optique Q de la lentille, d'être parallèle au vecteur d'onde $\vec{\sigma}$ de l'onde plane incidente, ce qui s'écrit :

$$\vec{\sigma} / \sigma = \overline{QP} / QP \approx \overline{QP} / f ;$$

soit, en projection dans le plan Fxy :

$$\vec{\sigma}_{xy} / \sigma = \overline{FP} / QP \approx \overline{FP} / f.$$

Les rayons vecteurs \overline{FP} des points du plan focal sont donc proportionnels aux composantes $\vec{\sigma}_{xy}$ des vecteurs d'onde $\vec{\sigma}$ dans ce plan.

Pour visualiser les composantes dont le vecteur d'onde $\vec{\sigma}$ est trop incliné pour vérifier les conditions de Gauss, on fait tourner la lentille pour rapprocher son axe optique de la direction de $\vec{\sigma}$.

4.3.2 Plan de Fourier et diffraction à l'infini

D'après les résultats précédents, l'amplitude de la vibration $A_F(x, y)$ dans le plan focal est une représentation physique du stéréospectre $S(\sigma_x, \sigma_y)$, à un facteur de phase sphérique près. C'est pourquoi le plan focal ainsi utilisé est appelé « plan de Fourier ».

Cependant les observations et les mesures ne peuvent porter que sur l'éclairement dans ce plan $E(x, y) = K |A_F(x, y)|^2$. Pour simplifier l'écriture, on définit l'amplitude complexe de sorte que $K = 1$. Avec cette convention, l'éclairement s'exprime, quel que soit le facteur de

phase, par :

$$E(x, y) = |A_F(x, y)|^2 = K_E \left| S \left(\sigma \frac{x}{f}, \sigma \frac{y}{f} \right) \right|^2.$$

On verra plus loin (§ 5.1.4) comment évaluer le coefficient K_E .

Comme par ailleurs les images dans une lentille des points à l'infini se trouvent dans son plan focal image, la distribution de l'éclairement dans le plan de Fourier est appelée « figure de diffraction à l'infini ».

Le stéréospectre d'une onde diffractée est représenté dans le plan de Fourier par la figure de diffraction à l'infini.

4.4 Récapitulatif de la méthode des ondes planes

Récapitulons les raisonnements et calculs effectués pour étudier la diffraction par la méthode des ondes planes :

1. On détermine l'amplitude $A_0(x, y)$ de l'onde monochromatique, de fréquence ν et de nombre d'onde σ , dans le plan de sortie en $z = 0$, du dispositif diffractant.
2. On calcule par transformation de Fourier le stéréospectre $S(\sigma_x, \sigma_y)$ de $A_0(x, y)$:

$$S(\sigma_x, \sigma_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(x, y) e^{-j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y)} dx dy$$

3. Chaque composante spectrale correspond à une onde plane de vecteur d'onde

$$\vec{\sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}],$$

où σ_z est à partie imaginaire positive s'il n'est pas réel.

L'onde diffractée est la somme de ces ondes planes :

$$u(t, x, y, z) = e^{-j2\pi\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x, \sigma_y) e^{j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y + \sigma_z z)} d\sigma_x d\sigma_y.$$

Si $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 > \sigma^2$, l'onde est évanescente et disparaît dans le champ lointain.

Si le stéréospectre est discret, les sommes sont des séries de Fourier.

4. Expérimentalement le stéréospectre est représenté, à un facteur de phase sphérique près, par la distribution d'amplitude dans le plan de Fourier d'une lentille convergente et mesurable en puissance par l'éclairement dans ce plan.

4.5 Exemple : diffraction à l'infini par un rectangle

4.5.1 Dispositif expérimental

Un faisceau laser arrive sous incidence normale sur un diaphragme plan percé d'une pupille rectangulaire de largeur a selon l'axe Ox et b selon Oy . La lentille d'analyse peut être placée contre la pupille ; le stéréospectre est observé dans son plan de Fourier (fig. 4).

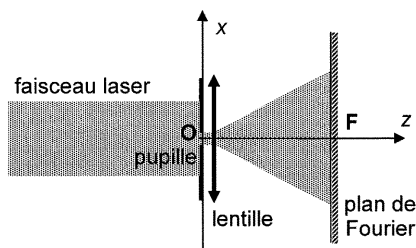


Fig. 4. Focalisation d'une onde plane par une lentille convergente

4.5.2 Calcul théorique

Dans le plan de sortie en $z = 0+$, la distribution d'amplitude est le produit de deux fonctions rectangle :

$$A_0(x, y) = A \operatorname{rec}(x/a) \cdot \operatorname{rec}(y/b),$$

où $\operatorname{rec}(u) = 1$ pour $|u| < 1/2$ et 0 pour $|u| > 1/2$.

Le spectre est calculé par l'intégrale de Fourier :

$$S(\sigma_x, \sigma_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(x, y) e^{-j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y)} dx dy = A \int_{-a/2}^{+a/2} e^{-j2\pi\sigma_x x} dx \cdot \int_{-b/2}^{+b/2} e^{-j2\pi\sigma_y y} dy$$

$$S(\sigma_x, \sigma_y) = Aab \operatorname{sinc}(\pi a \sigma_x) \operatorname{sinc}(\pi b \sigma_y).$$

On en déduit la distribution de l'éclairement dans le plan de Fourier :

$$E(x) = K_E |A|^2 a^2 b^2 \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{a}{\lambda} \frac{x}{f}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\pi \frac{b}{\lambda} \frac{y}{f}\right).$$

C'est l'expression classique de la figure de diffraction à l'infini par une pupille rectangulaire.

4.5.3 Cas de la pupille en fente

Si la longueur b de la pupille rectangulaire est plus grande que le diamètre du faisceau laser, le dispositif ne provoque plus de diffraction selon l'axe Oy . En appliquant la méthode des ondes planes à une dimension (§ 4.1), on obtient : $S(\sigma_x) = Aa \operatorname{sinc}(\pi a \sigma_x)$, avec $\sigma_y = 0$. Dans le plan de Fourier le faisceau est concentré sur l'axe Fx , sur une faible épaisseur fonction des qualités du faisceau laser et de la lentille.

On peut retrouver formellement ce résultat à partir de $S(\sigma_x, \sigma_y)$. Quand la *longueur éclairée* b devient très grande, le terme $\operatorname{sinc}(\pi b \sigma_y)$ est nul sauf pour σ_y voisin de 0. En intégrant $S(\sigma_x, \sigma_y) d\sigma_y$, on obtient $S(\sigma_x)$.

4.6 Application : filtrage optique

La représentation concrète du spectre dans le plan de Fourier permet d'agir sur ce spectre de façon comparable à l'action d'un filtre électronique sur le spectre d'un signal fonction du temps.

4.6.1 Dispositif expérimental

Un objet mince est éclairé par un faisceau laser élargi. Une lentille convergente en donne une image sur un écran éloigné (fig. 5).

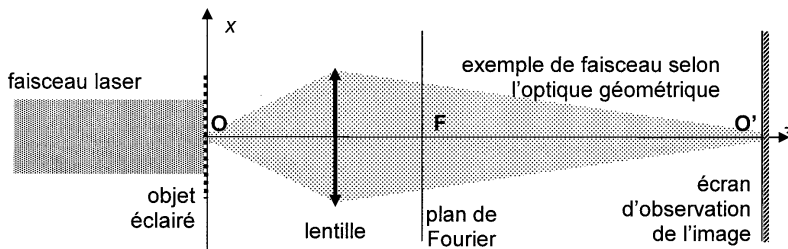


Fig. 5. Montage de filtrage optique

En modifiant la distribution d'amplitude complexe dans le plan de Fourier, on modifie le stéréospectre de l'onde diffractée et donc l'image de l'objet.

4.6.2 Expériences

Dans l'expérience la plus simple, on utilise comme objet un grillage de faible pas a sur Ox et Oy et on supprime, au moyen de petits écrans dans le plan de Fourier, certaines composantes du stéréospectre.

En considérant le grillage comme un réseau à deux dimensions, les composantes du spectre sont centrées sur les points du plan de Fourier de coordonnées $x_p = pf\lambda/a$ et $y_q = qf\lambda/a$, où les ordres p et q sont des entiers.

Voici quelques exemples de manipulations et leurs résultats :

1. On ne conserve que la composante centrale ($p = 0, q = 0$). Le spectre est celui d'une onde plane dans la direction de l'axe ; l'écran est éclairé quasi uniformément dans la zone couverte par le faisceau mais l'image du grillage a disparu.
2. On ne conserve que les composantes $p = 0$. Les fils du grillage orthogonaux à Ox disparaissent de l'image qui ne montre qu'une grille de fils orthogonaux à Oy .
3. On ne conserve que les composantes d'une diagonale ($y = \pm x$). L'image est une grille de fils orthogonaux à cette diagonale dont le pas est divisé par $\sqrt{2}$.
4. On ne conserve que les ordres 0 et 1 en x et 0 en y . Ce cas correspond à un réseau sinusoïdal orthogonal à Ox et l'image est celle d'une mire sinusoïdale parallèle à Oy .
5. On ne conserve que les ordres ± 1 en x et 0 en y . L'image est celle d'une mire sinusoïdale parallèle à Oy dont le pas est divisé par 2.

4.6.3 Intérêt du filtrage optique

Bien d'autres cas peuvent être ainsi étudiés. Il est possible également d'atténuer certaines composantes sans les supprimer complètement ou de les déphaser en utilisant des lames calibrées à la place des caches. Le filtrage optique est à la base de méthodes de traitement des images comme le détramage, la strioscopie, le contraste de phase...

5. POUR LES TRES FORTS : DIFFRACTION A DISTANCE QUELCONQUE ET « PRINCIPE » DE HUYGENS-FRESNEL

Nous avons jusqu'à présent caractérisé une onde diffractée par son stéréospectre ou sa représentation par la figure de diffraction à l'infini dans le plan de Fourier. Nous allons maintenant considérer les figures de diffraction situées dans des plans à distance quelconque.

5.1 Diffraction à distance quelconque

5.1.1 Expression générale

L'onde diffractée est la somme des ondes planes du stéréospectre

$$u(t, x, y, z) = e^{-j2\pi\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x, \sigma_y) e^{j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y + \sigma_z z)} d\sigma_x d\sigma_y,$$

d'amplitude :

$$A(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x, \sigma_y) e^{j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y + z\sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2})} d\sigma_x d\sigma_y.$$

Rappelons que, pour z assez grand, on peut limiter l'intégration au domaine $\sigma_x^2 + \sigma_y^2 < \sigma^2$.

Le calcul de cette intégrale n'est simple qu'à grande distance.

5.1.2 Approximation de la diffraction à grande distance (ou de Fraunhofer)

Pour simplifier cette intégrale à grande distance, écrivons le rayon vecteur \vec{r} et le vecteur d'onde $\vec{\sigma}$ sous les formes : $\vec{r} = r \vec{u}_r$ et $\vec{\sigma} = \sigma \vec{u}_\sigma$.

L'intégrale s'écrit :

$$A(r \vec{u}_r) = \iint_{\mathbb{R}^2} S(\sigma \vec{u}_\sigma) e^{j2\pi\sigma r \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\sigma} d^2\vec{\sigma}_{xy}.$$

Pour r suffisamment grand, l'exposant varie de 2π et l'exponentielle d'une période pour des intervalles de variation de \vec{u}_σ très faibles, sur lesquels on peut considérer que le stéréospectre $S(\sigma \vec{u}_\sigma)$ est pratiquement constant, ce qui rend l'intégrale nulle sur ces intervalles (raisonnement analogue à celui des zones de Fresnel).

L'exposant étant maximal pour $\vec{u}_\sigma = \vec{u}_r$, c'est au voisinage (V) de cette direction que l'intégrale pourra donner une valeur non nulle. Dans ce voisinage le stéréospectre garde une valeur quasi constante $S(\sigma \vec{u}_r)$ et l'intégrale devient :

$$A(r \vec{u}_r) \cong S(\sigma \vec{u}_r) \iint_{(V)} e^{j2\pi\sigma r \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\sigma} d^2\vec{\sigma}_{xy}.$$

Cette approximation est d'autant meilleure que le facteur $\sigma r = r/\lambda$ est grand.

5.1.3 Structure de l'onde diffractée dans le domaine de Fraunhofer

La fonction à intégrer étant symétrique autour de la direction de \vec{u}_r , il est préférable de repérer $\vec{\sigma}$ dans le plan orthogonal à \vec{u}_r , dans lequel sa composante a pour norme $\sigma \sin \gamma$, où γ est l'angle entre les vecteurs \vec{u}_σ et \vec{u}_r . La symétrie permet de prendre comme élé-

ment de ce plan la couronne d'aire $d(\pi\sigma^2\sin^2\gamma)$. Comme ce plan fait l'angle θ (angle de \vec{u}_r par rapport à Oz) avec le plan Oxy de $d^2\vec{\sigma}_{xy}$, il faut multiplier cette aire par $\cos\theta$:

$$A(r \vec{u}_r) \cong S(\sigma \vec{u}_r) \cos\theta \int_{\gamma} e^{j2\pi\sigma r \cos\gamma} d(\pi\sigma^2 \sin^2\gamma).$$

Dans le voisinage de γ autour de 0, on utilise les développements limités $\cos\gamma \cong 1 - \gamma^2/2$ et $\sin\gamma \cong \gamma$:

$$\begin{aligned} A(r \vec{u}_r) &\cong S(\sigma \vec{u}_r) \cos\theta \pi\sigma^2 e^{j2\pi\sigma r} \int_{\gamma} e^{-j\pi\sigma r \gamma^2} d(\gamma^2) = S(\sigma \vec{u}_r) \cos\theta \sigma \frac{e^{j2\pi\sigma r}}{-jr} \left[e^{-j\pi\sigma r \gamma^2} \right]_0^{\gamma_M} \\ &= S(\sigma \vec{u}_r) \cos\theta \sigma \frac{e^{j2\pi\sigma r}}{-jr} \left\{ \left[\cos(\pi\sigma r \gamma^2) \right]_0^{\gamma_M} - j \left[\sin(\pi\sigma r \gamma^2) \right]_0^{\gamma_M} \right\}. \end{aligned}$$

Dans chacun de ces derniers termes, on prend pour la borne supérieure γ_M la première valeur qui annule la fonction entre crochets puisque, au-delà, la contribution à l'intégrale s'annule par zones. D'où finalement :

$$A(r \vec{u}_r) \cong S(\sigma \vec{u}_r) \cos\theta \frac{1}{j\lambda} \frac{e^{j2\pi\sigma r}}{r}.$$

À grande distance le faisceau diffracté a la structure d'une onde sphérique (terme en $e^{j2\pi\sigma r}/r$). L'amplitude de cette onde dépend de la direction \vec{u}_r et est distribuée selon la fonction $S(\sigma \vec{u}_r) \cos\theta$.

Remarque

La démonstration « physique » précédente permet de se rendre compte des phénomènes à l'origine du résultat. Un calcul purement mathématique est présenté dans [7].

5.1.4 Figure de diffraction dans un plan « à l'infini »

Pour visualiser le stéréospectre et effectuer des mesures, on reçoit l'onde diffractée sur un écran parallèle au plan de sortie et placé à distance z suffisamment grande. En se limitant au voisinage de l'axe Oz ($\cos\theta \approx 1$ et $r \approx z$), la distribution de l'éclairement dans le plan est (avec la convention du § 4.3.2) :

$$E(x, y) = |A(r \vec{u}_r)|^2 = \frac{1}{\lambda^2 z^2} \left| S\left(\sigma \frac{x}{z}, \sigma \frac{y}{z}\right) \right|^2.$$

Ce plan joue donc le même rôle que le plan de Fourier d'une lentille. Il y a homothétie de rapport f/z entre le plan d'observation à grande distance et le plan de Fourier.

Dans le cas où la lentille modifie peu la puissance transportée par le faisceau (pertes négligeables, et ouverture suffisante afin que les faisceaux diffractés – par la partie éclairée de l'objet – pour le spectre spatial observé passent complètement dans la lentille), on en déduit le coefficient de l'éclairement dans le plan de Fourier (§ 4.3.2) :

$$K_E \cong \frac{1}{\lambda^2 f^2}.$$

Le domaine de validité de ces résultats est dénommé « domaine de Fraunhofer ».

5.1.5 Domaine de Fraunhofer

La simplification à grande distance de l'intégrale de l'amplitude suppose que les variations du stéréospectre $S(\sigma\vec{u}_\sigma)$ sont faibles sur une période de l'exponentielle d'exposant $\pi\sigma r\gamma^2$, correspondant à une variation γ_p de γ telle que $\gamma_p^2 = 2/(\sigma r) = 2\lambda/r$.

En appelant a une distance caractéristique de l'objet diffractant, l'angle caractéristique des variations de $S(\sigma\vec{u}_\sigma)$ est de l'ordre de $\Delta\gamma \approx 1/\sigma a = \lambda/a$.

La condition $(\Delta\gamma)^2 \gg \gamma_p^2$ donne : $r \gg 2 \frac{a^2}{\lambda}$.

Le domaine de Fraunhofer est situé au-delà de la distance $2a^2/\lambda$.

5.2 Décomposition de Huygens-Fresnel en ondes sphériques

On sait que le principe de Huygens-Fresnel décompose l'onde diffractée en ondes sphériques issues des différents points de l'objet diffractant. Sa démonstration se ramène donc au passage d'une décomposition à une autre.

5.2.1 Expression convolutive de l'onde diffractée

Le changement de décomposition s'appuie sur le théorème de convolution des transformées de Fourier. Remarquons pour cela que la décomposition en ondes planes de l'amplitude de l'onde diffractée

$$A(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} S(\sigma_x, \sigma_y) e^{j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y + z\sqrt{\sigma^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2})} d\sigma_x d\sigma_y,$$

est la transformée de Fourier inverse du produit des deux fonctions :

$$S(\sigma_x, \sigma_y) \times e^{j2\pi z\sqrt{\sigma^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}}.$$

D'après le théorème de convolution, $A(x, y, z)$ est égale à l'intégrale de convolution entre les transformées de Fourier inverses d'une part de $S(\sigma_x, \sigma_y)$, soit $A_0(x, y)$, et d'autre part de $e^{j2\pi z\sqrt{\sigma^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}}$, désignée par $h(x, y, z)$. Cette intégrale de convolution a pour expression :

$$A(x_M, y_M, z_M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(x_P, y_P) h(x_M - x_P, y_M - y_P, z_M) dx_P dy_P.$$

En appelant M le point de coordonnées $[x_M, y_M, z_M]$ et P le point de coordonnées $[x_P, y_P, 0]$, l'intégrale s'écrit :

$$A(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A_0(P) h(\overline{PM}) d^2\vec{P}.$$

C'est une intégrale de superposition, comme l'intégrale de Fresnel, où chaque élément d'aire $d^2\vec{P}$ situé au point P du plan de sortie du dispositif diffractant produit l'onde $A_0(P) h(\overline{PM}) d^2\vec{P}$.

L'onde $h(\overline{PM})$, émise par un point lumineux tel que $A_0(P) d^2\vec{P} = 1$, est la réponse impulsionnelle en tout point M de l'impulsion unité située en P.

5.2.2 Réponse impulsionnelle de Rayleigh-Sommerfeld

On a vu que l'onde $h(\overline{OM})$ est la transformée de Fourier inverse de $e^{j2\pi z \sqrt{\sigma^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2}}$:

$$h(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi(\sigma_x x + \sigma_y y + z \sqrt{\sigma^2 - \sigma_x^2 - \sigma_y^2})} d\sigma_x d\sigma_y,$$

En utilisant les vecteurs $\vec{r} = r \vec{u}_r$ et $\vec{\sigma} = \sigma \vec{u}_\sigma$, l'intégrale devient :

$$h(r \vec{u}_r) = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{j2\pi \sigma \vec{u}_r \cdot \vec{u}_\sigma} d^2 \vec{\sigma}_{xy}.$$

Le calcul approché de cette intégrale pour r grand a été effectué ci-dessus (§ 5.1.3). En fonction des coordonnées sphériques r et θ (angle de \vec{u}_r par rapport à Oz), elle s'écrit :

$$h(r, \theta) \cong \frac{1}{j\lambda} \frac{e^{j2\pi \sigma r}}{r} \cos \theta.$$

C'est une onde sphérique, dont l'amplitude dépend de la direction par le facteur d'obliquité $\cos \theta$. On retrouve la *formule de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld* à distance $r \gg \lambda$.

Remarque

Pour r quelconque, la formule de Rayleigh-Sommerfeld comporte le facteur supplémentaire [1,3] : $1 - \frac{1}{j2\pi \sigma r}$.

5.2.3 Propriétés associées au coefficient de l'onde sphérique

La réponse impulsionnelle $h(r, \theta)$ comporte un préfacteur dimensionné, qui figure également

dans l'amplitude de diffraction à distance finie, et qui vaut $\frac{1}{j\lambda} = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{\lambda}$.

Son module $1/\lambda$ se justifie aisément pour des raisons d'homogénéité. On peut le retrouver également par la conservation de la puissance dans l'onde diffractée.

Son argument $-\pi/2$ correspond à une avance de phase d'une quadrature, qui s'ajoute algébriquement au retard de phase $2\pi \sigma r$ dû au trajet parcouru par l'onde sphérique entre son origine P et le point M.

Ce dernier résultat est à rapprocher de la variation de phase bien connue de π , qui s'ajoute à celle due à la propagation quand une onde convergente passe par un foyer et devient divergente. Dans la décomposition de Huygens-Fresnel de l'onde diffractée en ondes sphériques, à la divergence de chaque onde sphérique à partir d'un élément de surface du plan de sortie correspond l'avance de phase de $\pi/2$. Dans le cas de l'onde convergente-divergente, la situation est identique pour la partie divergente. La partie convergente entraîne elle aussi une avance de phase de $\pi/2$ (conformément à la symétrie du faisceau), de sorte qu'au total l'onde subit une avance de phase de π .

Bien entendu les expériences d'interférences classiques, comme celle des demi-lentilles de Meslin, ne peuvent donner le sens de la variation de phase de π . Il serait intéressant d'imaginer puis de réaliser une expérience d'interférences entre onde incidente et onde diffractée pour mettre en évidence l'avance de phase de $\pi/2$.

5.2.4 Remarques sur la démonstration du « principe » de Huygens-Fresnel par la méthode des ondes planes

Avec l'expression de la réponse impulsionnelle, nous avons démontré le « principe » de Huygens-Fresnel sous sa forme de Rayleigh-Sommerfeld à distance grande devant λ , qui est plus précise que la forme traditionnelle sans facteur d'obliquité (en restant dans le cadre du modèle scalaire de la vibration lumineuse). Son exposé fait habituellement appel à des développements mathématiques assez complexes [1].

Par la méthode des ondes planes, nous n'avons plus besoin de principe *ad hoc* et les mathématiques utilisées se limitent aux notions de transformées de Fourier et à quelques unes de leurs propriétés. Ces notions sont nécessaires à l'étude des systèmes linéaires et incontournables pour les étudiants. Grâce à elles, l'étude des phénomènes de diffraction devient plus physique et accessible à une compréhension qualitative.

6. CONCLUSION : ENSEIGNEMENT DE LA DIFFRACTION PAR LA METHODE DES ONDES PLANES

6.1 Exemple de mise en œuvre

L'objectif pédagogique recherché est de faire comprendre simplement la diffraction et de n'aborder qu'ensuite les calculs plus complexes et en particulier les intégrales. Un enseignement sur la diffraction, conçu pour cet objectif, a été dispensé aux étudiants de deuxième année de la Faculté d'ingénierie de l'Université française d'Égypte [8].

Cet enseignement s'est déroulé selon les étapes suivantes :

- Cours : Présentation des ondes planes (cf. § 1.2) ; diffraction par un réseau sinusoïdal avec expérience de cours et méthode des ondes planes (cf. § 2).
- Travaux dirigés : Diffraction par un réseau, calcul (les étudiants connaissant les séries de Fourier) et expérience de cours (cf. § 3). Résolution en champ lointain.
- Cours : Passage de la série à la transformation de Fourier à une dimension, application à une fente, passage à deux dimensions, application au rectangle (cf. § 4). Cas de la pupille circulaire. Filtrage optique.
- Cours : Parachutage du principe de Huygens-Fresnel (pour répondre à l'objectif recherché, il était hors de question d'effectuer à ce niveau des calculs comme ceux du § 5) ; calcul de la diffraction à l'infini et constatation que l'on retrouve la transformée de Fourier. Application à la diffraction de Fraunhofer et à la diffraction par une bifente.
- Exercices.
- Travaux pratiques : Dans une série de TP tournants, une manipulation porte sur la vérification du spectre angulaire d'un réseau, dans les mêmes conditions que l'expérience de cours et sur les figures de diffraction d'une fente et d'une bifente à grande distance.

6.2 Appréciation des résultats

Les étudiants ont suivi sans peine l'étude des réseaux et aucune difficulté ne s'est manifestée au cours de la première séance de travaux dirigés. Comme c'était prévisible, les exercices utilisant les intégrales de Fourier se sont révélés plus difficiles.

Les notions physiques de résolution en champ lointain et de filtrage optique ont pu être présentées assez tôt dans le cours et ont été qualitativement comprises.

Comme la méthode des ondes planes et le principe de Huygens-Fresnel ont été introduits indépendamment, nous avons demandé aux étudiants laquelle leur paraissait la plus simple. La plupart préféraient la méthode des ondes planes, ce qui est compréhensible puisqu'elle bénéficiait de la priorité chronologique et de la simplicité des calculs. Un seul cependant a nettement préféré le principe de Huygens-Fresnel en faisant valoir qu'il se présentait comme une formule claire qu'il suffisait d'appliquer. Il n'est pas anodin de savoir que cet étudiant est considéré comme le meilleur de la promotion en mathématiques.

Cet enseignement de la diffraction s'est révélé un peu plus coûteux en temps que l'enseignement traditionnel. Bien qu'il paraisse possible de diminuer ce coût en affinant la méthode, au final il appartient à l'enseignant d'apprécier si les bénéfices attendus valent la peine d'y consacrer un peu plus de temps.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GOODMAN Joseph W. *Introduction à l'optique de Fourier et à l'holographie*. Traduction française de DUROU C. et PEREZ J.-P. Paris : Masson, 1972.
- [2] LUCKE R. L. Rayleigh-Sommerfeld diffraction and Poisson's spot , *Eur. J. Phys.* 27, 193-204 (2006).
- [3] SMITH G. S. Comment on "Rayleigh-Sommerfeld diffraction and Poisson's spot", *Eur. J. Phys.* 27, L 21-23 (2006).
- [4] SMITH G. S. *An introduction to Classical Electromagnetic Radiation*, Cambridge : Cambridge University Press, 1997.
- [5] Énoncé de l'épreuve C de l'agrégation externe de physique 1998, *Bull. Un. Phys.* 93, 35-50 (cahier n°2, mars 1999).
- [6] DETTWILLER L. Solution de l'épreuve C de l'agrégation externe de physique 1998, *Bull. Un. Phys.* 93, 33-56 (cahier n°3, mars 1999).
- [7] LUCKE R. L. Rayleigh-Sommerfeld diffraction and Poisson's spot , *Eur. J. Phys.* 27, Appendix B, 202-204 (2006).
- [8] UNIVERSITE FRANÇAISE D'ÉGYPTÉ : <http://www.ufe.edu.eg/>.

ANNEXE : RÉALISATION D'UN RÉSEAU SINUSOÏDAL

Un réseau à transmission sinusoïdale est habituellement réalisé par holographie. Dans une expérience d'interférence à deux ondes avec un faisceau laser élargi, on superpose deux ondes planes faisant un angle très faible et l'on impressionne un morceau de pellicule photographique placé dans la zone d'interférence. La pellicule doit avoir une résolution élevée pour enregistrer des franges de faible interfrange (non visibles à l'œil nu). Les temps de pose et de développement doivent être choisis avec soin pour ne pas sortir du domaine de linéarité de l'émulsion. Le critère final est d'observer uniquement les ordres 0 et 1. La présence d'ordres supérieurs indique que les limites du domaine de linéarité ont été dépassées et que le facteur de transmission est écrêté par les saturations à 0 ou à 1.

S'il n'est pas possible de se procurer un réseau sinusoïdal, on peut opérer avec un réseau dont le pas est très faible de sorte que les ordres 0 et 1 soient seuls visibles. On constate que c'est souvent le cas avec les réseaux commerciaux de linéature 600 mm^{-1} . Dans ce cas la composante sinusoïdale fondamentale du facteur de transmission intervient seule dans le spectre d'ondes planes, mais l'expérience peut paraître alors moins probante.