Ismaël MANGHI
manghi@irsamc.ups-tlse.fr
Bat 3R1 B4 IRSAMC
LPT 3^e et 326

Biblio : français
- * Guyon, Petit, Hulin, Hydro. (pas trop théorique)
- * Rieutord . Introduc° à la méca des fluides
- * Chaigneau
- * Landau
- * Batchelor.

I - Fondation de la mécanique des fluides

1) Modèle des milieux continus (hypothèse forte)

· On ne s'intéresse pas à l'échelle moléculaire

· On définit des grandeurs macrosc. $\rho(\vec{r},t)$ masse volumique

$T(\vec{r},t)$ température

$p(\vec{r},t)$ pression

$\vec{v}(\vec{r},t)$ vitesse des pcts qui passent par ce pt

Ces grandeurs sont moyennées sur un volume élémentaire représentatif.

$v : \sim 10^{-9}\,cm^3 \rightarrow 10^{10}$ molécules.

$\tilde{\rho}(\vec{r},t) = m\sum_{i=1}^{N} \delta(\vec{r}-\vec{r}_i(t))$ $\quad \vec{r}_i$ positio des molécules i à t

$$\int_v \tilde{\rho}(\vec{r},t)\, d^3\vec{r} = Nm = M$$

$$\rho(\vec{r},t) = \int_v \langle \tilde{\rho}(\vec{r},t) \rangle\, d^3\vec{r}$$

$\longrightarrow$ moyenne d'ensemble (¿ stat)

On sait d'un pt de vue th définir proprement ces choses là.

$\boxed{\text{Hypothèse :}}$ On suppose que ces grandeurs varient continuement et sont dérivables.

Régime hydrodynamique :

$$\Delta r = \left|\frac{\vec{\nabla} X}{X}\right|^{-1} \qquad \Delta t = \left|\frac{1}{X}\frac{\partial X}{\partial t}\right|^{-1}$$

Pour un gaz, $\Delta r \gg \ell$ libre parcours moyen

$\Delta t \gg \tau_c$ temps moyen entre 2 collisions

nb de Knudsen $K_n = \frac{\ell_c}{\ell} \ll 1$

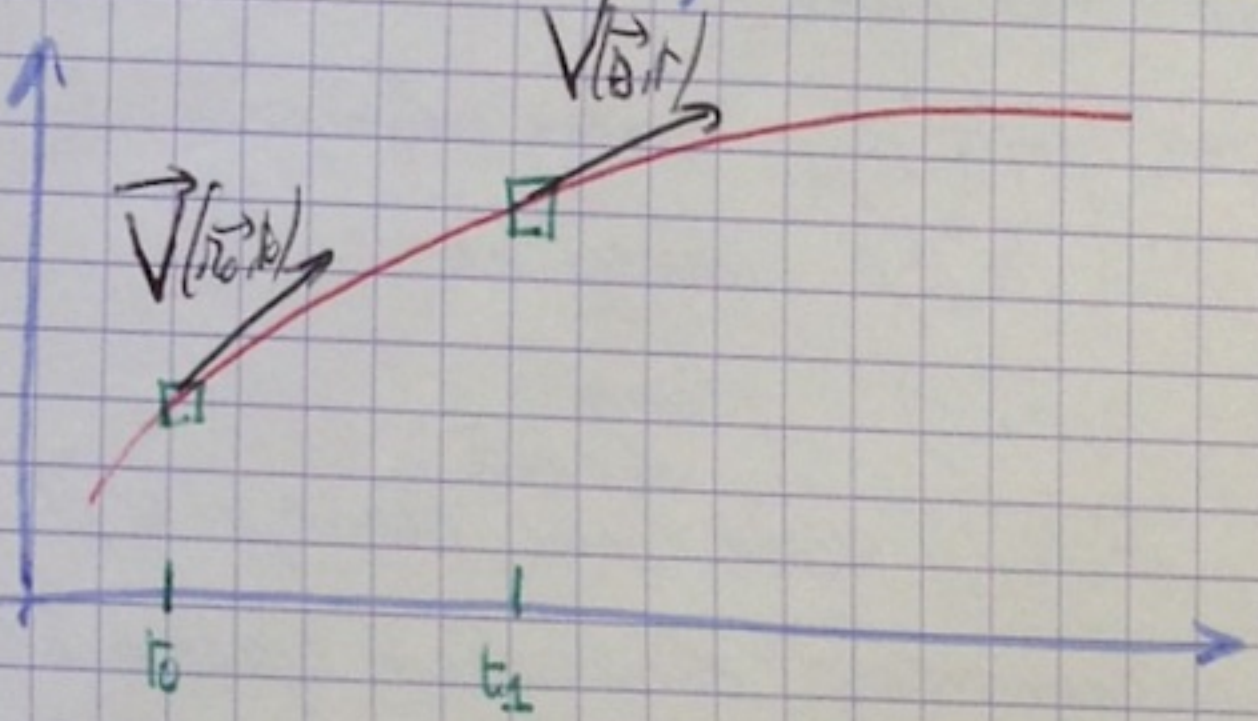
Pas vérifié si on très inhomogène.

Onde de choc $X(\vec{r}, t) \sim e^{i(q\vec{r} - \omega t)}$ $\Rightarrow q\ell_c \ll 1 \quad \omega \tau_c \ll 1$

2) Description lagrangienne et eulérienne

↳ méca du point ↳ vision électromag

(i) → Trajectoire d'une particule fluide suivie au cours du temps



Lieu de particule à t_0

$\vec{r} = \vec{r}(\vec{r}_0, t)$
↳ bijectif

$$\vec{V} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t}\bigg|_{\vec{r}_0} = \vec{V}(\vec{r}_0, t)$$

· Bateau sonde :

· Particule blanche pour suivre l'écoulement :

(ii) Eulérienne : défini en tout pt du fluide (pas de l'espace)

Champ de vitesse : $\vec{v}(\vec{r}, t)$: vitesse de la particule fluide qui coïncide qui coïncide au pt $\vec{r}$ à l'instant t.

(iii) Les 2 descriptions sont équivalentes.

L ⇒ E : $\vec{V}(\vec{r}, t) = V(\vec{r}_0(\vec{r}, t), t)$

E ⇒ L : on connaît $\vec{v}(\vec{r}, t)$ $\quad \vec{dr} = \vec{v}(\vec{r}, t)\, dt \quad$ 3 équa diff 1er ordre

$\vec{r}_0 = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{vmatrix}$ sont les 3 constantes d'intégration. $\Rightarrow \vec{r}(\vec{r}_0, t)$

Application 2

Distances moyennes entre molécules

Calculer la distance moyenne entre molécules pour :

- *l'eau à l'état liquide ;*
- *l'eau à l'état gaz à la température $T = 400$ K, sous une pression $P = 1$ bar. Ce gaz est supposé obéir à la loi des gaz parfaits.*

Données :
$\rho_{\text{liquide}} = 1{,}0 \,.\, 10^3\ \text{kg}\,.\,\text{m}^{-3}$; $N_A = 6 \,.\, 10^{23}\ \text{mol}^{-1}$;
$M = 18 \,.\, 10^{-3}\ \text{kg}\,.\,\text{mol}^{-1}$; $R = 8{,}31\ \text{J}\,.\,\text{K}^{-1}\,.\,\text{mol}^{-1}$.

• **Eau liquide :** sachant que $N = \dfrac{\rho}{M} N_A$ particules occupent un volume de 1 m^3, la distance moyenne entre deux particules vérifie : $d^3 = \dfrac{1}{N}$.

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{\rho N_A}} = \sqrt[3]{\frac{18.10^{-3}}{10^3 \times 6.10^{23}}} = \sqrt[3]{30.10^{-30}} \approx 3.10^{-10}\ \text{m}.$$

• **Eau vapeur :** le gaz étant considéré comme parfait, N_A molécules occupent le volume $V = \dfrac{RT}{P}$, donc la distance moyenne entre deux particules est égale à :

$$d = \sqrt[3]{\frac{RT}{PN_A}} = \sqrt[3]{\frac{8{,}31 \times 400}{10^5 \times 6.10^{23}}} = \sqrt[3]{55.10^{-27}} \approx 40.10^{-10}\ \text{m}.$$

1.2.3. Échelle mésoscopique

L'**échelle mésoscopique** est l'échelle intermédiaire entre le macroscopique et le microscopique, où le fluide est encore un milieu continu.

À cette échelle, le fluide est « découpé » en **cellules élémentaires** (ou infinitésimales) appelées **éléments de fluide**, ou *particules de fluide* (contenant un grand nombre de molécules). L'intérêt d'une description continue du fluide réside dans le fait que des grandeurs macroscopiques peuvent être associées à ces particules de fluide, qui ont une masse élémentaire constante lors de l'évolution du fluide.

La vitesse d'une particule de fluide, centrée au point M à la date t, est la vitesse d'ensemble (vitesse barycentrique) des molécules qu'elle contient. Nous obtenons ainsi une **valeur macroscopique locale** de la vitesse du fluide, c'est-à-dire définie en un point M à l'instant t. Cette vitesse est non nulle si le fluide est macroscopiquement en mouvement.

À partir de cette notion, il est possible d'étudier, par exemple, la répartition de température ou de pression dans le fluide. La validité de ce mode de description, sur lequel nous reviendrons, est liée à la valeur de a, taille de la particule de fluide. Cette taille doit être petite au niveau macroscopique, où les grandeurs sont continues, mais grande au niveau microscopique (la particule de fluide contenant alors un très grand nombre de molécules) pour pouvoir négliger les fluctuations associées, par exemple, à l'agitation thermique.

La description du fluide à partir du mouvement de ces particules de fluide nous permettra d'utiliser le calcul intégral. Essayons de préciser les dimensions de la particule de fluide, en l'imaginant cubique, d'arête a : cette longueur caractéristique définit alors l'échelle mésoscopique.

■ *Exemple*

Prenons le mouvement de l'eau liquide dans une conduite de 10 cm de diamètre :

- pour cet écoulement, nous avons $L \approx 10^{-1}$ m ;

• la masse volumique de l'eau est à $\rho = 10^3\ \mathrm{kg\,.\,m^{-3}}$. La masse molaire de l'eau étant $M = 18\,.\,10^{-3}\ \mathrm{kg\,.\,mol^{-1}}$, la distance moyenne entre deux molécules d'eau est de l'ordre de $\sqrt[3]{\dfrac{M}{N_{\mathrm{A}}\,\rho}} \approx 3\,.\,10^{-10}$ m, soit $l \approx 10^{-10}$ m avec $N_{\mathrm{A}} = 6\,.\,10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$;

• choisissons a telle que $l << a << L$, soit $10^{-10}\ \mathrm{m} << a << 10^{-1}$ m. Prenons $a \approx 10^{-6}\ \mathrm{m} = 1\ \mu\mathrm{m}$.

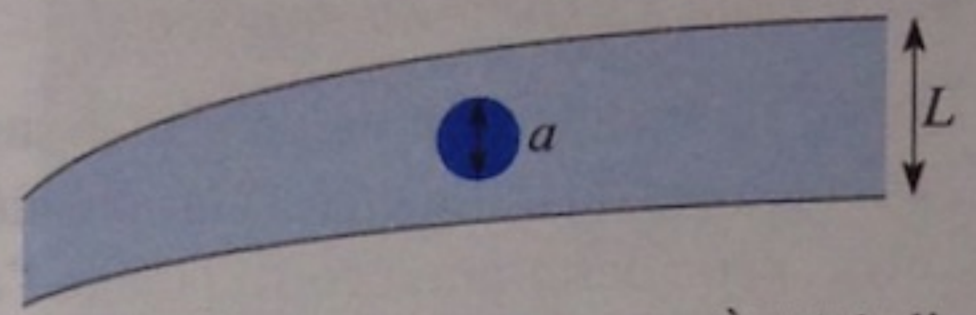
Un volume de 1 $\mu\mathrm{m}^3$ d'eau contient une masse $\mathrm{d}m = 10^{-15}$ kg d'eau, donc $\dfrac{\mathrm{d}m\,N_{\mathrm{A}}}{M}$ molécules d'eau, soit environ $\dfrac{10^{-15} \times 6.10^{23}}{18.10^{-3}} \approx 3\,.\,10^{10}$ molécules !

Ainsi la particule de fluide a une masse $\mathrm{d}m$ égale à 10^{-15} kg, occupe un volume $\mathrm{d}\tau = 10^{-18}\mathrm{m}^3$ (cube d'arête $a = 1\ \mu$m) et contient environ 10^{10} particules (*doc.* 5).

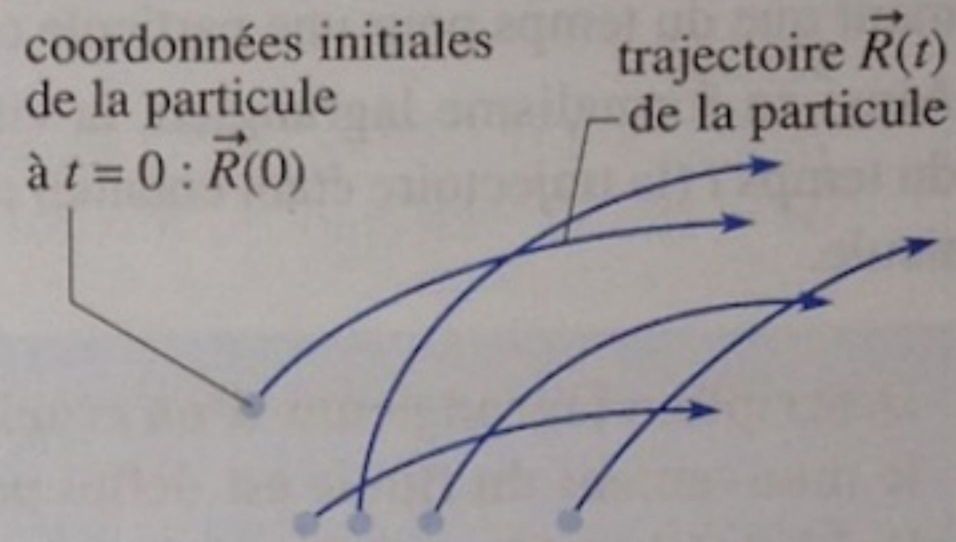
Un choix tout aussi valable pour la situation choisie consisterait à prendre une particule de fluide ayant une masse $\mathrm{d}m$ égale à 10^{-6} kg, occupant un volume $\mathrm{d}\tau = 10^{-9}\ \mathrm{m}^3$ (cube d'arête $a = 1$ mm) et contenant environ 10^{16} particules. Mais l'existence de forces de viscosités peut mettre ce choix (a relativement grande) en défaut au voisinage des obstacles (présence de couches limites, *cf. chapitre* 5).

À l'échelle mésoscopique, les dimensions caractéristiques de la particule de fluide doivent être petites devant L et grandes devant ℓ (distance moyenne entre deux molécules). Un très grand nombre de molécules (10^{10}) doivent constituer cette particule, afin d'avoir accès à des moyennes locales ayant un caractère macroscopique.

L'échelle de la particule de fluide, échelle mésoscopique, est intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Elle permet d'associer à cette particule des grandeurs macroscopiques qui décrivent le fluide comme un milieu continu.



Doc. 5. *Écoulement de fluide. À l'échelle mésoscopique, les dimensions de la particule de fluide sont petites devant L et grandes devant ℓ, la distance moyenne entre deux molécules.*

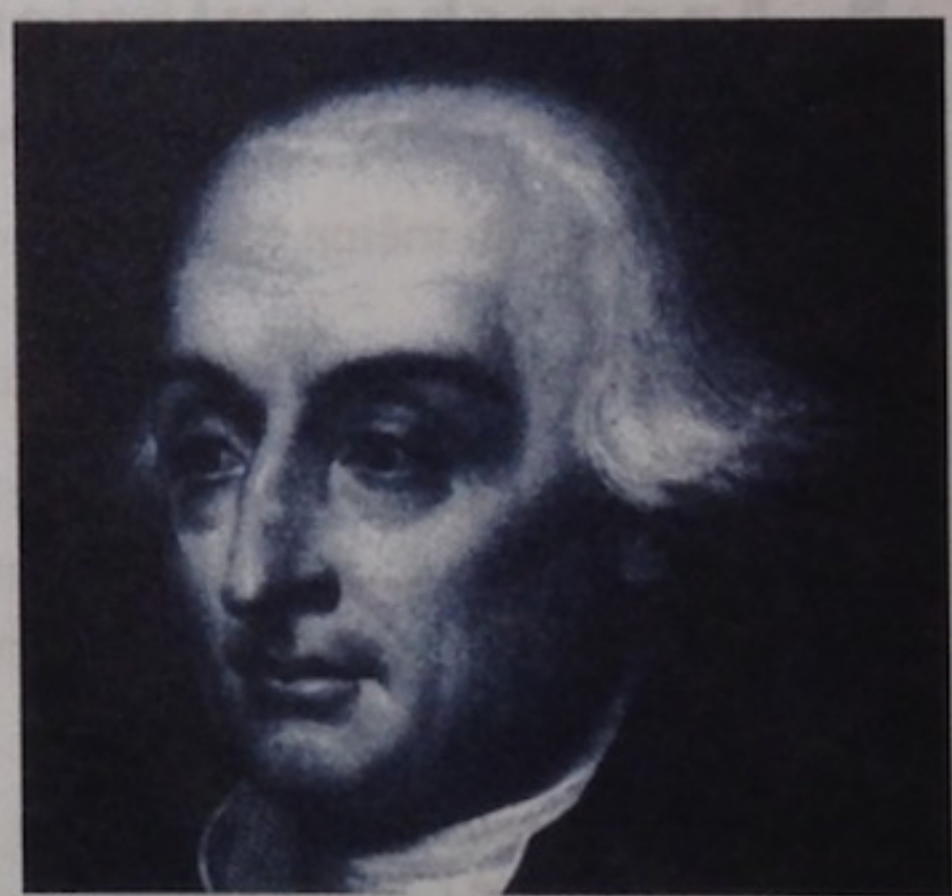


Doc. 6. *Description lagrangienne : le mouvement macroscopique du fluide est défini par la connaissance des trajectoires de chaque particule de fluide qui le composent.*

2 Approche lagrangienne

Intéressons-nous à un fluide (macroscopiquement) en mouvement dans le référentiel d'étude, mouvement souvent appelé **écoulement**.

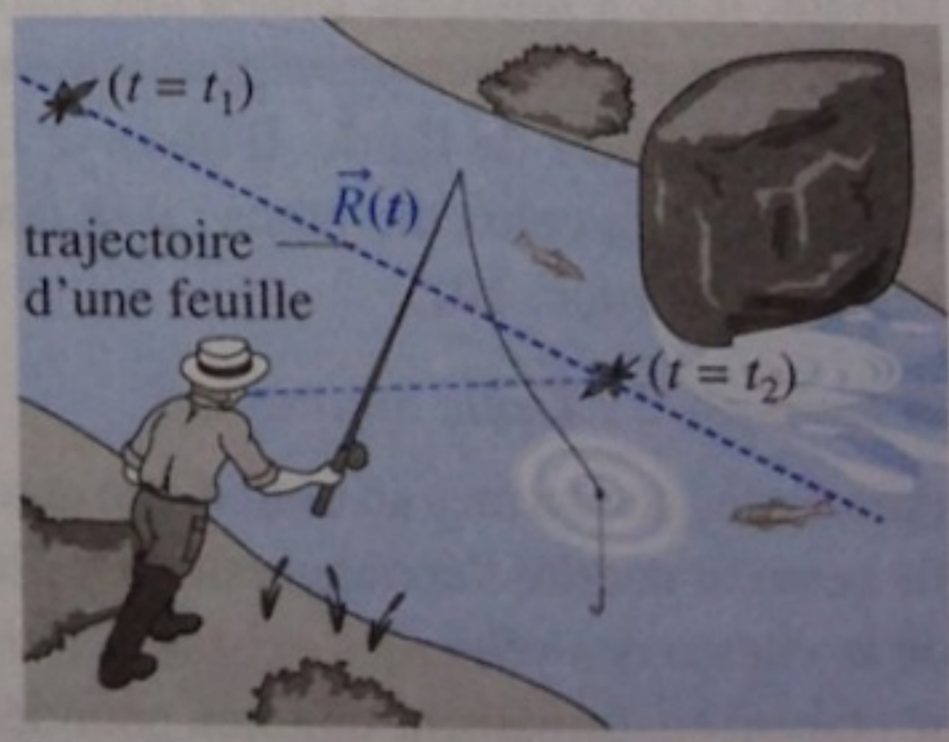
Étudier cet écoulement, c'est par exemple décrire le mouvement de chacune des particules de fluide (définies précédemment) qui le composent. Connaissant la trajectoire $\vec{R}_i(t)$ de chaque particule (placée en $\vec{R}_i(0)$ à $t = 0$) que l'on suit dans son mouvement, nous reconstituons le mouvement d'ensemble du fluide (*doc.* 6). Cette description correspond à l'**approche lagrangienne**, dérivée du nom du mathématicien Louis Lagrange (1736-1813) (*doc.* 7).



Doc. 7. *Louis Lagrange (1736-1813).*

■ *Exemple 1 : Le pêcheur*

Au bord d'une rivière, un pêcheur à la ligne regardant dériver au fil du courant des appâts (qu'il a jetés dans l'eau), ou des feuilles à la surface de l'eau, se place implicitement dans la conception lagrangienne, lorsqu'il suit des yeux le mouvement de ces particules entraînées avec l'eau de la rivière (*doc.* 8).



Doc. 8. *Le pêcheur suivant des yeux les feuilles se place en formalisme lagrangien.*