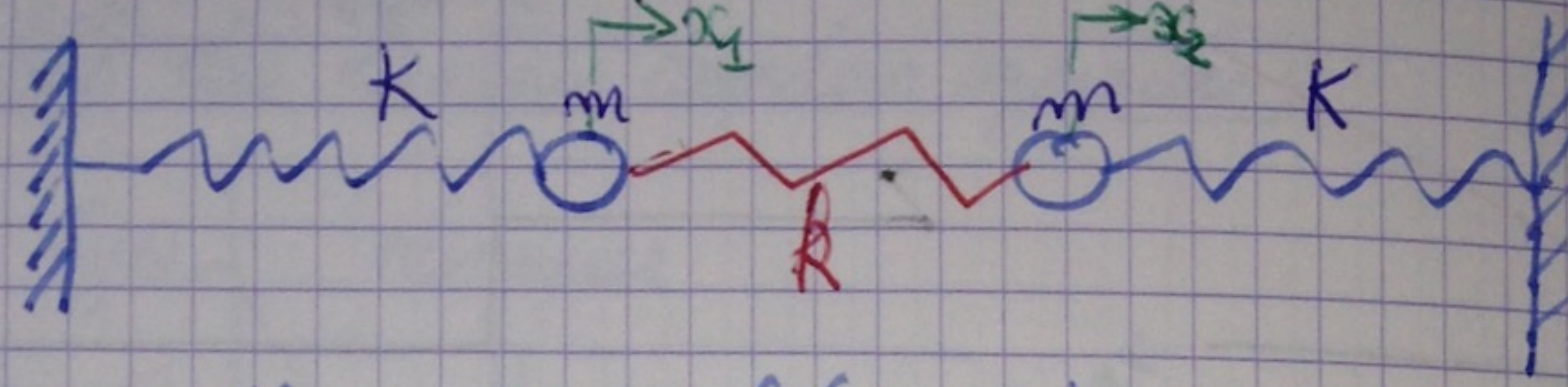


$$m\ddot{x}_1 = -Kx_1 - k(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -Kx_2 - k(x_2 - x_1)$$

$k = \varepsilon K$

$$X = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} \qquad m\ddot{X} = -\begin{pmatrix} K+k & -k \\ -k & K+k \end{pmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}$$

$$\omega_0^2 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

$$\ddot{X} + \omega_0^2 \underline{M} X = 0 \quad (1) \qquad \underline{M} = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1+\varepsilon \end{pmatrix}$$

$\underline{M}$ est symétrique réelle → diagonalisé.

$\exists R$

$R(1)$ $\qquad \underline{R}\ddot{X} + \omega_0^2 \underline{R}\underline{M}\overset{R^{-1}R}{}X = 0$

R : de base directe à base diagonale

$Y = \underline{R}X$: $\qquad \ddot{Y} + \omega_0^2 \underline{R}\,\underline{N}\, Y = 0$

$$\underline{N} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

<u>Sens</u> : $\qquad \ddot{y}_{1/2} + \lambda_{1/2}\,\omega_0^2\, y_{1/2} = 0$

y_1 et y_2 sont 2 oscillateurs découplés.

Les condit° initiales permettent de calculer $y_1(t)$ et $y_2(t)$

d'où $\begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix} = R^{-1} \begin{vmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{vmatrix}$ ⟹ le mvt du système est résolu.

Le pb est la détermination de (λ_1, y_1) et (λ_2, y_2)

Méthode : $\det(M-\lambda I_d)=0$

$$\begin{vmatrix} 1+\varepsilon-\lambda & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 1+\varepsilon-\lambda \end{vmatrix} = (1+\varepsilon-\lambda)^2-\varepsilon^2 = (1+\varepsilon-\lambda-\varepsilon)(1+\varepsilon-\lambda+\varepsilon)$$
$$= (1-\lambda)(1-\lambda+2\varepsilon)$$

$$\left\{ 2\ \text{Vp} : \begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 1+2\varepsilon \end{aligned} \right.$$

* détermination de y_1, le Vep à la Vap λ_1 :

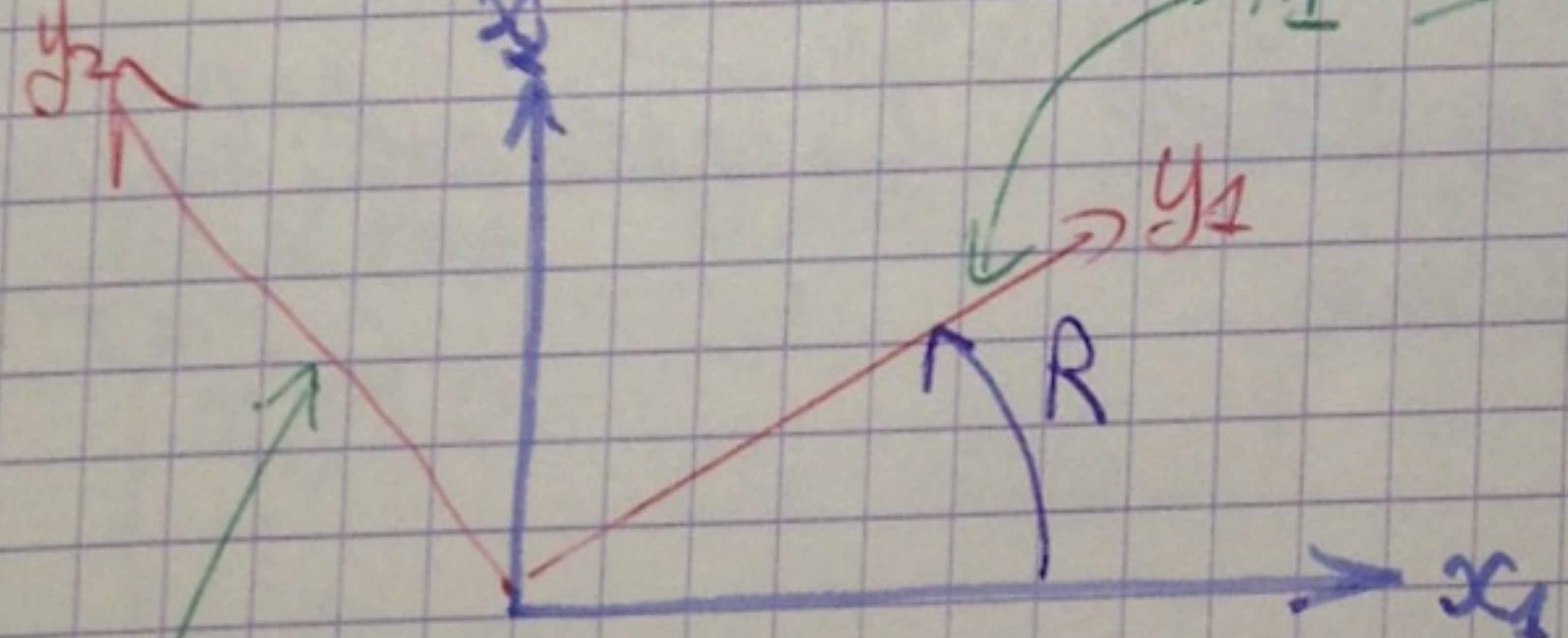
$$M\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$$

$$\begin{cases}(1+\varepsilon)\alpha-\varepsilon\beta=\alpha\\ -\varepsilon\alpha+(1+\varepsilon)\beta=\beta\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varepsilon\alpha-\varepsilon\beta=0\\ -\varepsilon\alpha+\varepsilon\beta=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varepsilon\alpha=\varepsilon\beta\\ \alpha=\beta\end{cases}$$

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

De même $y_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

$\lambda_1 \Rightarrow \omega_1=\sqrt{\lambda_1}\ \omega_0=\omega_0$



$\lambda_2 \Rightarrow \omega_2=\sqrt{1+2\varepsilon}$

$$y_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1+x_2)$$

astuce : comment visualiser y_2 ?

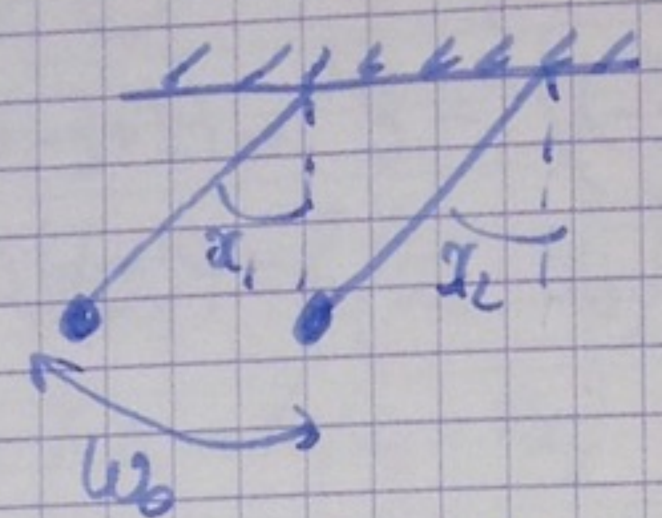
On choisit C.I tq $\cancel{y_2(0)}=0$, $\cancel{\dot{y}_2(0)}=0$

$\rightarrow \begin{cases} y_2(0)=0\\ \dot{y}_2(0)=0\end{cases} \Rightarrow y_2(t)=0$

$y_2(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_2(0)-x_1(0))$

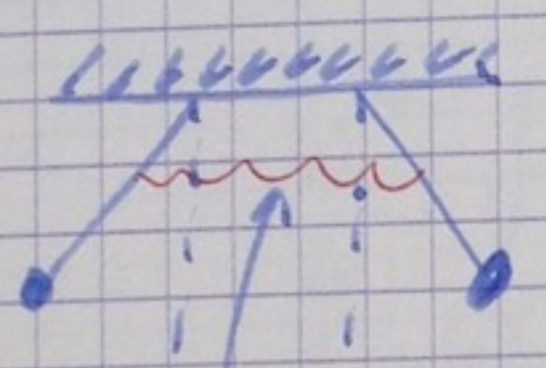
$\dot{y}_2(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\dot{x}_1(0)+\dot{x}_2(0))$

Par exemple : $\begin{cases} x_1(0) = x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \end{cases}$



mode sym

inversement si $\begin{cases} x_1(0) = -x_2(0) \\ \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) \end{cases}$ $y_1(t) = 0$



$\omega_2 = \omega_0\sqrt{1+2\varepsilon}$ mode antisym

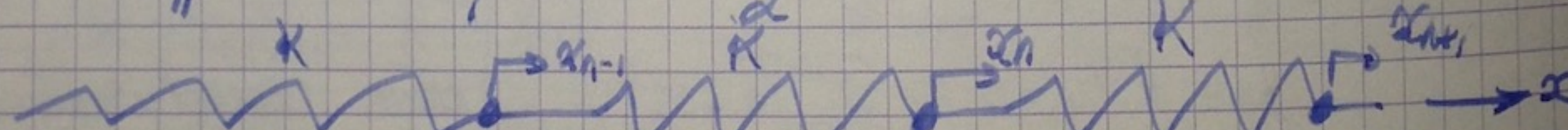
Mode propre ≅ vecteur propre.

* tous les éléments du système oscillent à la même fréquence (= vap)
* les éléments du système ont des amplitudes et phases déterminé pour chaque mode.

↳ mode sym : $\begin{cases} \text{même amplitude} \\ \text{même phase} \end{cases}$ ↳ mode anti : $\begin{cases} \text{même amplit} \\ \varphi = \pi \end{cases}$

3-) Système infini discret

Approx harmonique : $\rightarrow \frac{1}{2} k x^2$



$\varepsilon = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On cherche un mode propre.

$\rightarrow \omega_i$

$\left.\begin{array}{l} \rightarrow A_n = A_i \ \forall n \\ \rightarrow \varphi_n - \varphi_{n-1} = cst \end{array}\right\}$ via / translat

On pose ... A déterminer ...

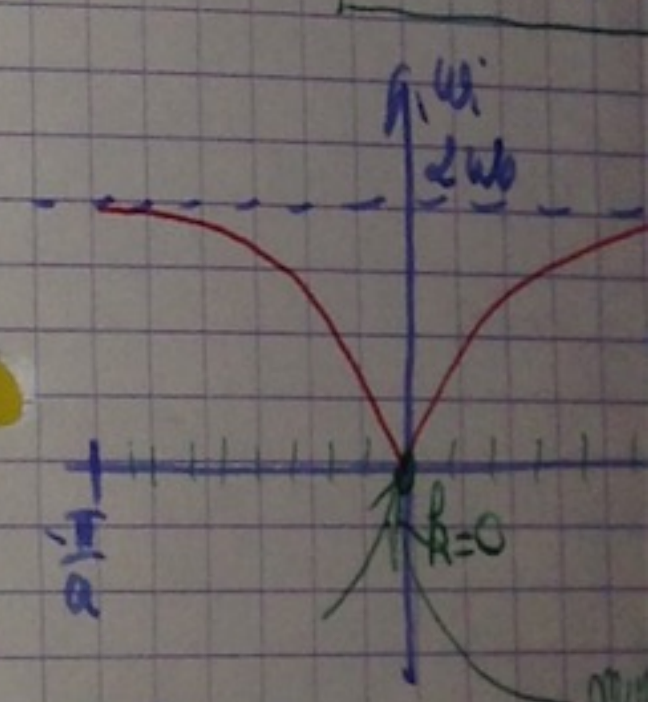
On cherche donc $x_n(t)$ = ... qui vérifie $m\ddot{x}_n =$ ...

$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$.

$-\omega_i^2 A_i \exp$ ...

$\omega_i^2 = 2\omega_0$ ...

$\omega_i^2 = 4\omega_0$ ...



Soit N atomes N/...

$\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ \vdots \\ x_N(t) = 0 \end{cases}$ C.L. ...

$x_1(t) = x_N(t)$ C.L. ...

$\Rightarrow e^{ik_iNa} = 1$

$k_i Na = i2\pi$

$k_i = i\frac{2\pi}{Na}$

On pose $\delta\varphi_i(\omega_i) = k_i a$ — Pour faire joli

A déterminer
- les ω_i permises = spectre
- les $k_i(\omega_i)$: relation de dispersion
  $\hookrightarrow \varphi_i$

On cherche donc $x_n(t) = A_i \exp j(\omega_i t - k_i n a)$ — car l'EDL est linéaire.

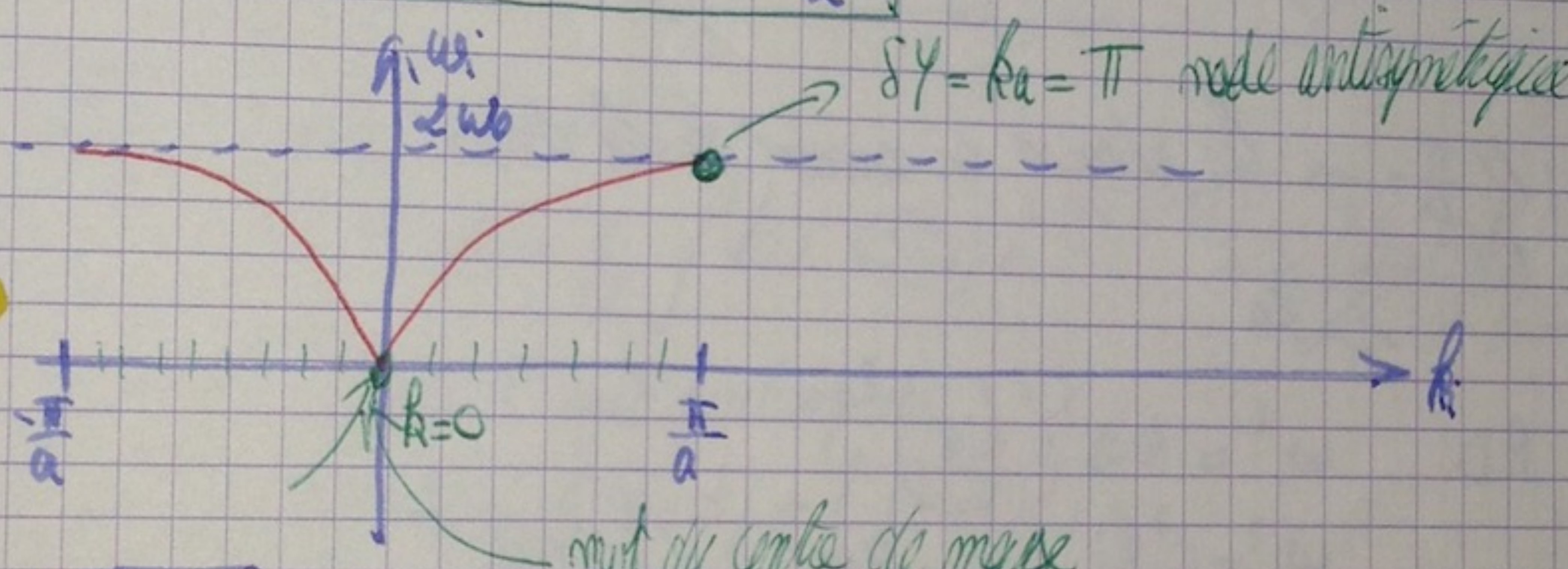
qui vérifie $m\ddot{x}_n = -K(x_n - x_{n-1}) - K(x_n - x_{n+1})$

$\omega_0^2 = \frac{K}{m}$.

$$-\omega_i^2 A_i \exp(\dots) = -\omega_0^2\Big(2 - \underbrace{e^{jk_i a} - e^{-jk_i a}}_{-2\cos(k_i a)}\Big) A_i \exp(\dots)$$

$$\omega_i^2 = 2\omega_0^2\big(1 - \cos(k_i a)\big)$$

$$\boxed{\omega_i^2 = 4\omega_0^2 \sin^2 \frac{k_i a}{2}}$$



Soit N atomes $N < \infty$

$$\begin{cases} x_1(t) = 0 \\ \vdots \\ x_N(t) = 0 \end{cases} \quad \text{C.L. strictes}$$

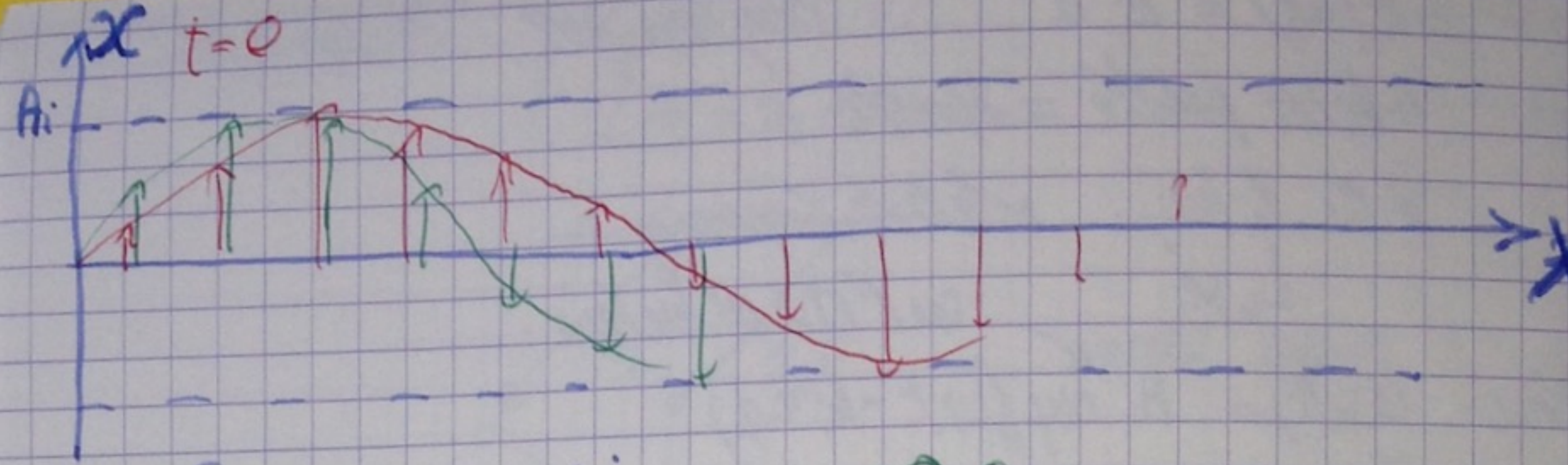
$$\begin{cases} x_1(t) = x_N(t) \end{cases} \quad \text{C.L. périodiques}$$

On a démontrer qu'il est valable même condition que limites strictes.

$\Rightarrow e^{ik_i Na} = 1$

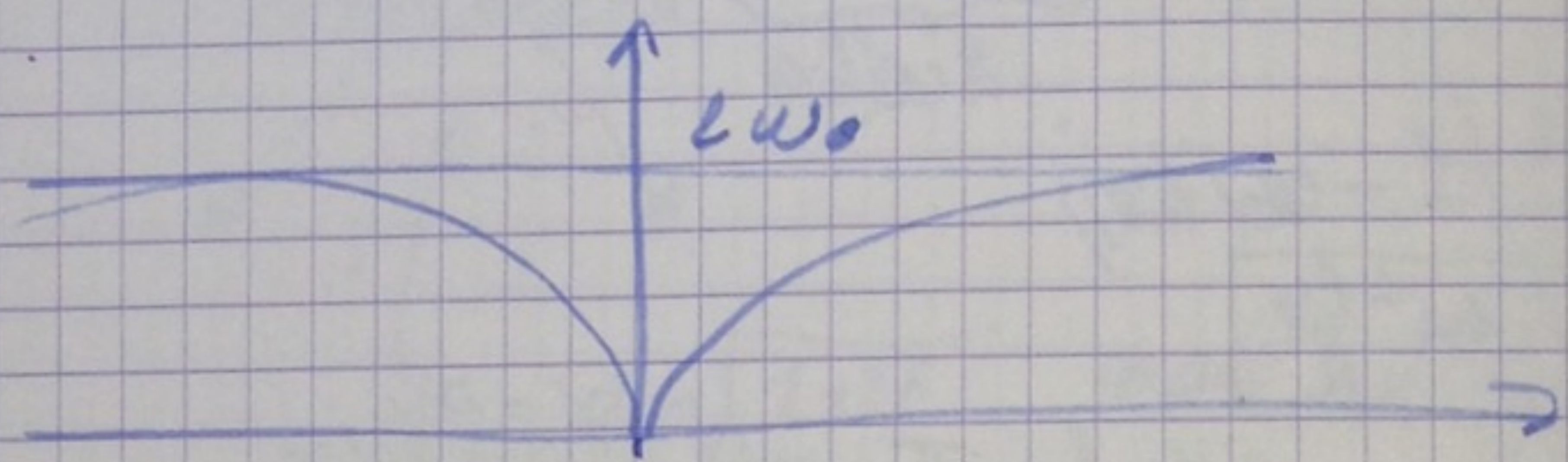
$k_i Na = i\,2\pi$

$k_i = i\frac{2\pi}{Na} \longrightarrow$ quantifié



4.-) Passage au continu. ← EDO

Les solut° $\left\{ x_m^i(t) \right\}_{m\in\{1\ldots N\},\ i\in\{1,\ldots N\}}$



si $|k_i| \ll \frac{\pi}{a}$ → les atomes se suivent à la trace.

$$\frac{2\pi}{k_i} = \lambda_i \gg 2a$$

RD: $\omega_i^2 \simeq 4\omega_0^2\left(\frac{k_i a}{2}\right)^2$

$\omega_i^2 = c^2 k_i^2$ avec $c^2 = (a\omega_0)^2$

$\Psi_i(x,t)$ f° qui interpole l'ensemble des mouvements de toutes les particules pour i donné. $\left\{ x_n^i(t) \right\}_{n\in\{1,N\}}$ pour i donné.

$$\Psi_i(x_n = na, t) = x_n^i(t)$$

↳ Regulière et dérivable.

$$\boxed{\Psi \text{ est une fonct° d'interpolat°} \iff \lambda \gg a}$$

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial}\, x$$

$$\ddot{x}_n + 2\omega_0^2 x_n - \omega_0^2(x_{n+1} + x_{n-1}) = 0$$

$$\ddot{x}_n + \omega_0^2\left((x_n - x_{n-1}) + (x_n - x_{n+1})\right) = 0$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2\left(a\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left((n-\tfrac{1}{2})a,t\right) - a\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left((n+\tfrac{1}{2})a,t\right)\right) = 0$$

$$\ddot{x} - (\omega_0^2 a^2)\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} = 0 \qquad c^2 = (\omega_0 a)^2$$