

LP 24 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Nicolas Chastrette

Avril 2020

Pour nous

Rapport du jury

- **2010** : L'analyse du seul circuit RLC est très insuffisante pour cette leçon. Le phénomène de résonance ne se limite pas aux oscillateurs à un degré de liberté.
- **2009**: L'analyse du seul circuit RLC est très insuffisante pour cette leçon.
- **2008, 2007**: Le jury regrette que les cavités résonnantes soient rarement présentées.
- **2006**: L'aspect énergétique de la résonance est ignoré la plupart du temps. Trop souvent, la notion même de résonance n'est liée qu'à l'existence d'un maximum d'amplitude. Les applications dans le domaine microscopique sont rarement abordées.
- **2003**: La leçon porte sur l'étude de phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique. Le candidat ne doit pas se limiter à l'électricité et à la mécanique. Il doit prendre soin de dégager les propriétés communes aux différents exemples présentés. Quel lien y a-t-il entre le circuit RLC et la résonance du sodium ?
- *Jusqu'en 2001, le titre était : Phénomènes de résonance dans les systèmes linéaires. Exemples*
- **1998**: Il est bien entendu nécessaire d'insister sur la généralité du phénomène de résonance en physique et de ne pas cantonner l'exposé à un domaine unique (mécanique ou électricité). Les relations entre le comportement des systèmes forcés et les propriétés des mêmes systèmes, libres, doivent être soulignées, de même que les aspects énergétiques des phénomènes de résonance

biblio

- PCSI tout en un
- cours de mathevet (il est scanné)

0.1 prérequis

- electrocinétique
- meca

Introduction

Le terme de résonance est un terme fréquemment utilisé dans tous les domaines de la physique. Il est souvent associé à des images de la culture populaire : le pont de Tacoma rentré en résonance forcée par le vent, la Castafiore cassant un verre par sa voix, la balançoire oscillant de plus en plus haut.

Dans cette leçon nous allons étudier le phénomène de résonance d'un oscillateur simple par l'exemple d'un circuit RLC puis d'un ensemble d'oscillateur couplé et pour finir étudier une cavité acoustique.

1 Oscillateur à un seul degré de liberté

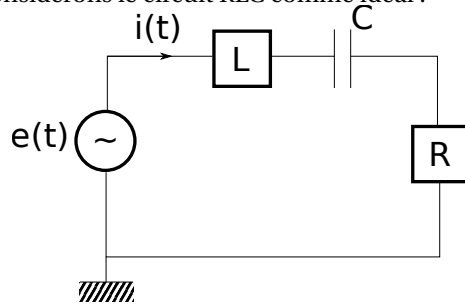
1.1 Mise en évidence expérimentale d'un phénomène de résonance

Circuit RLC prévoir GBF avec sortie $4\ \Omega$. Prendre L pas trop grand car R supplémentaire. Fixer C tel que f_c soit vers 1 kHz. Oscillo regressi.

Tracer $i = f(\omega)$ et $\Delta\phi = f(\omega)$. Mesurer Q et ω_0 avec incertitudes.

1.2 Oscillateur forcé : mise en équation

Considérons le circuit RLC comme idéal :



$$e(t) = L \frac{di}{dt} + \frac{q(t)}{C} + Ri(t)$$

d'où

$$\frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i \quad (1)$$

C'est une équation du second ordre car dérivé seconde de i $\tau = L/R$. C'est le terme d'amortissement, il est d'autant plus faible que la dissipation est importante. et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ fréquence propre du système.

Le système est linéaire donc si **dire e = entré et s = sortie du système linéaire** $\mathcal{R}e(\underline{e}) \rightarrow \mathcal{R}e(\underline{s})$ Alors $\underline{e} \rightarrow \underline{s}$. C'est à dire que si l'excitation est $e(t) = e_m \cos(\omega t + \phi_e) + j e_m \sin(\omega t + \phi_e) = e_m e^{j(\omega t + \phi_e)}$, alors la réponse du système sera $\underline{i} = i_m \cos(\omega t + \phi_s) + j i_m \sin(\omega t + \phi_s) = i_m e^{j(\omega t + \phi_s)}$ ce qui autorise l'analyse en complexe pour résoudre l'équation 1. On trouve donc une solution qui s'écrit comme

$$\underline{s} \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} \right) = \underline{e} \frac{j\omega}{L}$$

. On peut réécrire cette équation comme

$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{e}}{\underline{i}} = R + j \left(L\omega + \frac{1}{C\omega} \right) \quad (2)$$

qui est l'impédance du système, soit la somme des impédances des 3 éléments composant le système, on peut aussi réécrire cette équation comme

$$\underline{Z}_e = L \frac{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{\tau}$$

. Où $Q = \omega_0 \tau = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \propto 1/R$ facteur de qualité de la résonance. Plus R est faible (donc la dissipation est faible) plus la résonance est marquée. d'où

$$\underline{Z}_e = R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \exp \left[j \text{Arctan} \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \right]$$

d'où

$$i_m = \frac{e_m}{|\underline{Z}_e|} = \frac{e_m}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \quad (3)$$

D'où quelque soit Q , i_m passe par un maximum et $\phi_m = \phi_e - \phi_i$ passe par zéro quand $\omega = \omega_0$: à la résonance la réponse et l'excitation sont en phase.

1.3 Aspect énergétique

Puissance fournie par le générateur $\mathcal{P}_f = e_m i_m \cos(\omega t + \phi_e) \cos(\omega t + \phi_i)$. Donc la

puissance efficace : $\tilde{\mathcal{P}}_f = \langle \cos(\omega t + \phi_e) \cos(\omega t + \phi_i) \rangle \frac{e_m^2}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{e_m^2}{2R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \cos(\phi_m) \cos(\phi_m)$

avec $\cos(\phi_m) = \frac{\text{Re}(\underline{Z}_e)}{|\underline{Z}_e|} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$.

La puissance dissipée par la résistance vaut $\tilde{\mathcal{P}}_d = R \frac{i_m^2}{2} = \frac{e_m^2}{2R} \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \tilde{\mathcal{P}}_f$

Donc la puissance fournie par le générateur est intégralement dissipée par la résistance du circuit. La puissance fournie est maximale en $\omega = \omega_0$ et minimale quand $\omega \rightarrow 0$ ou ∞ .

La résonance est obtenue lorsqu'on excite un système à sa fréquence propre. Dans ce cas sa réponse est maximale et la réponse du système est en phase avec l'excitation, ce qui permet un échange d'énergie maximum vers le système.

1.4 oscillateur mécanique

Nous avons ici étudié une résonance à travers le cas particulier d'un circuit RLC, système linéaire du second ordre. Si la dissipation devient nulle alors ce système peut être modélisé par un oscillateur harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Ce concept d'oscillateur harmonique est primordial en physique car pour tout système oscillant, on peut approximer le potentiel, proche de la position d'équilibre, par un oscillateur harmonique. Étudions rapidement le cas d'un système masse ressort.

On peut écrire le potentiel $V(r) = V(r_{eq}) + \frac{1}{2} \frac{d^2V}{dr^2} \Big|_{r_{eq}} (r - r_{eq})^2 = V(r_{eq}) + \frac{1}{2} k(r - r_{eq})^2$ au premier ordre non nul. Le Lagrangien du système s'écrit donc $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} k(r - r_{eq})^2$, d'où l'équation du mouvement s'écrit $\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = 0 \right)$,

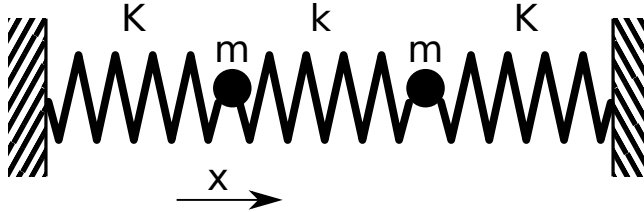
$$\ddot{r} - \omega_0^2 r = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. On a bien une équation d'oscillateur harmonique à un seul degré de liberté.

Que se passe-t-il si on couple deux oscillateurs harmoniques et ainsi rajoute des degrés de liberté ?

2 Oscillateur à N degrés de liberté

2.1 Système à deux degrés de liberté



En notant $x_{0,i}$ la position d'équilibre de chacune des masses et $\eta_i = x_i - x_{0,i}$ le déplacement par rapport à l'équilibre de chaque masse,

$$\ddot{\eta}_1 = -K\eta_1 + k(\eta_2 - \eta_1) \quad (4)$$

$$\ddot{\eta}_2 = -K\eta_2 + k(\eta_1 - \eta_2) \quad (5)$$

En posant $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ et $\epsilon = k/K$, on peut réécrire les équations comme

$$\ddot{\vec{\eta}} = \frac{K}{m} \begin{pmatrix} -(1+\epsilon) & \epsilon \\ \epsilon & -(1+\epsilon) \end{pmatrix} \vec{\eta}$$

Il faut donc résoudre l'équation

$$\ddot{\vec{\eta}} = \omega_0^2 M \vec{\eta} = \vec{0} \quad (6)$$

avec $M = \begin{pmatrix} -(1+\epsilon) & \epsilon \\ \epsilon & -(1+\epsilon) \end{pmatrix}$. Diagonalisons cette matrice :
 $\det(M - \lambda \mathbb{I}) = 0$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1 + 2\epsilon$$

, d'où les fréquences propres du système sont $\omega_1^2 = \omega_0^2$ et $\omega_2^2 = \omega_0^2(1 + 2k/K)$. Il nous

reste à trouver les valeurs propres de cette matrice. On trouve alors $\vec{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ et

$\vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ -\eta_2 \end{pmatrix}$. On peut alors réécrire les équations 4 et 5 comme étant

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_0^2 \left(1 + 2\frac{k}{K}\right) y_2 &= 0 \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{1,0} \cos(\omega_0 t + \phi_1) \\ y_2 &= y_{2,0} \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 + 2\frac{k}{K}} t + \phi_2\right) \end{aligned}$$

* Les coordonnées y_i sont appelées coordonnées normales. Les équations du mouvement dans le système des coordonnées normales sont deux oscillateurs harmoniques indépendants.

- $y_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ les deux masses bougent en phase avec la même amplitude. On parle de mode symétrique.
- $y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$ les deux masses bougent en opposition de phase avec la même amplitude. On parle de mode antisymétrique.

Si on excite le système à une de ces fréquences propres, il rentre alors en résonance.

2.2 Vers le continu

Considérons un système de N degré de liberté. On peut alors faire le même type de raisonnement que précédemment, diagonaliser la matrice de transition, trouver les valeurs et vecteur propres, soit le spectre du système et la phase entre chaque élément pour chaque mode. Considérons par exemple un cristal unidimensionnel : par invariance par translation pour un mode i fixé, tous les atomes ont la même amplitude A_i et la différence de phase entre deux atomes successifs $\phi_{n+1}(\omega_i) - \phi_n(\omega_i) = \phi_i^0 = k_i(\omega_i)a$. La phase du $n^{\text{ième}}$ atome est donc $\phi_n(\omega_i) = nk_i(\omega_i)a$. Le système est linéaire donc on cherche les solutions sous la forme $x_n^i = A_i \exp(j(\omega_i t - k_i n a))$, solution de

$$m\ddot{x}_n = -K(x_{n+1} - x_n) - K(x_n - x_{n-1})$$

, d'où

$$\omega_i^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{k_i a}{2}\right)$$

c'est la relation de dispersion. Si $|k_i| \ll \pi/a$ on peut linéariser la relation de dispersion : $\omega_i = \underbrace{(a\omega_0)}_{c^2} k_i^2$. On peut alors introduire une fonction $\underline{\Psi}_i(x, t)$ continue

dérivable qui interpole les $x_n^i(t)$ pour chaque mode. On impose donc que $\underline{\Psi}_i(X = na, t) = x_n^i(t)$. L'équation du mouvement devient donc

$$\frac{\partial^2 \underline{\Psi}_i}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\Psi}_i}{\partial x^2} = 0$$

. C'est une équation de D'Alembert. Par linéarité on trouve donc comme relation de dispersion $\omega^2 = c^2 k^2$. On a donc un continuum de modes acoustiques : il y a résonance pour toutes les fréquences. Cette modélisation est valable si $\underline{\Psi}$ échantillonne correctement le système, c'est à dire si $\lambda \gg a$

On vient d'étudier la relation de dispersion à travers une équation de d'Alembert. On peut maintenant se demander ce qui se passe si on impose des conditions aux limites à une onde.

3 résonance et conditions aux limites

3.1 goutte sphérique et une onde acoustique

L'interface eau/air de la goutte présente un contraste d'impédance si important ($Z_{\text{air}}/Z \simeq 2.10^{-4}$) que la surpression acoustique dans l'eau est nulle le long de cette interface. En effet, une onde incidente i (de surpression p_i) se réfléchissant sur une interface donne une onde réfléchie r (de surpression acoustique p_r) et une onde transmise t (de surpression acoustique p_t). Le coefficient de réflexion en pression vaut alors $r = \frac{p_r}{p_i} = (Z_{\text{air}} - Z)/(Z_{\text{air}} + Z) = -0,98$. La surpression acoustique dans l'eau au niveau de l'interface eau/air vaut alors $p = p_i + p_r = p_i(1 + r) = 0,02p_i \ll p_i$.

Pour déterminer les modes propres de la goutte hémisphérique, on peut déterminer les modes propres acoustiques d'une goutte sphérique tels que la surface de la goutte

est un nœud de pression. La surpression acoustique p dans l'eau vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \quad (7)$$

En se restreignant à des solutions harmoniques de pulsation et en notant $p = \underline{p} e^{i\omega t}$, \underline{p} vérifie l'équation de Helmholtz:

$$\Delta \underline{p} + k^2 \underline{p} = 0$$

où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

En coordonnées sphériques (définies sur la figure

$$\Delta \underline{p} = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{\frac{1}{r^2} \Delta_r} \underline{p} + \underbrace{\left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]}_{\frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\phi}} \underline{p}$$

En cherchant \underline{p} sous une forme à variables séparées : $p = R(r)Y(\theta, \phi)$ puis en divisant par RY et en multipliant par r^2 , on peut séparer les variables :

$$\frac{1}{R} \Delta_r R + k^2 = -\frac{1}{Y} \Delta_{\theta\phi} Y = \ell(\ell + 1) \quad (8)$$

avec ℓ entier naturel.

Donc R vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) R = 0$$

Qui se réécrit en posant $x = kr$:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2} \right) R = 0$$

Les solutions de cette équation sont les familles de fonctions de Bessel sphériques j_ℓ et y_ℓ . Les zéros de j_ℓ et y_ℓ sont les mêmes que ceux des fonctions de Bessel $J_{\ell+\frac{1}{2}}$ et $N_{\ell+\frac{1}{2}}$. D'autre part, la pression s'annule à la surface de la goutte. $R = j_\ell$ vérifie

$$j_\ell \left(\frac{kD}{2} \right) = 0$$

Soit

$$\frac{kD}{2} = z_{\ell,q}, \quad q \in \mathbb{N}$$

où $z_{\ell,q}$ est le $q^{\text{ème}}$ zéro positif par ordre croissant de la fonction j_ℓ , ce qui est équivalent à :

$$f_{\ell,q} = \frac{c z_{\ell,q}}{\pi D} \quad (9)$$

où $f_{\ell,q}$ sont les fréquences propres de la goutte sphérique. Pour la valeur de D mesurée expérimentalement $D = 3,36 \text{ mm}$ et $c = 1500 \text{ ms}^{-1}$, les premières fréquences propres sont $f_{0,1} = 446 \text{ kHz}$, $f_{1,1} = 639 \text{ kHz}$, $f_{2,1} = 817 \text{ kHz}$ et $f_{0,2} = 893 \text{ kHz}$.

Ici comme dans la corde de Melde, en introduisant des conditions aux limites, on impose des conditions de discrétisation de k . On peut comprendre cette périodicité en disant qu'il faut que l'onde soit en phase avec elle-même quand elle revient au niveau de l'interface. On peut alors caractériser ces modes propres à l'aide d'une vibration autour de chaque fréquence de résonance. (Pour info le facteur de qualité est de 100 pour une goutte hémisphérique).

Conclusion

Dans cette leçon nous avons vu qu'il y a résonance lorsque l'excitation et la réponse du système sont en phase. Nous avons montré que pour les systèmes discrets il y a une fréquence propre de réponse par degré de liberté, le transfert d'énergie vers le système est maximal à résonance. Nous avons vu que pour les systèmes continus, que les conditions aux limites imposent une discrétisation du spectre.

Le couplage de deux résonateurs est encore beaucoup étudié en particulier ceux qui couplent une résonance de volume liée à une cavité et une résonance de surface qui peut conduire à une instabilité d'oscillation observée à travers la physique comme dans les oscillations des miroirs des détecteurs d'onde gravitationnels, de tiges d'AFM ou des oscillations de la surface de gouttes d'eau, sous le fait d'un forçage retardé (dus à une variation de la longueur de la cavité) faisant apparaître une dissipation effective négative au delà d'un seuil en énergie.