

# LP 6,7- Relativité Restreinte

## Préambule sur les contraintes que je me suis imposées :

- La leçon s'intitule « Relativité-Restreinte ». Ce n'est pas un titre des années précédentes.
- Je pars du principe que je dois traiter la cinématique *et* la dynamique. Je ne peux pas faire faire soit l'un, soit l'autre (?).
- Difficulté : pouvoir exposer à la fois, la théorie et des exemples à la fois en dynamique et en cinématique en 40 min.
- **Choix effectué** : Je considère que les élèves ont déjà eu une petite introduction sur l'expérience fondatrice de Michelson-Morley (1881-1887) et sur les postulats de la relativité restreinte (1905). Cela me permet de commencer tout de suite par les conséquences qu'impliquent les deux postulats cinématiquement, puis de passer à la dynamique.
- **Pour la première partie (cinématique)** : Dans ma leçon, cette partie est très dense, je veux essayer d'inclure le lien entre cône de lumière et causalité pour aboutir à la notion de vitesse maximale. Cela me semble un point tellement central que je ne peux m'en passer.
- **Pour la seconde partie (dynamique)**, il faudra traiter la théorie (conservation du quadrivecteur-impulsion) en très peu de temps pour pouvoir discuter des premières conséquences sur les collisions. Je doute que cela puisse nous permettre de traiter des exemples « longs » comme l'effet Compton. Cette seconde partie aura donc le défaut d'être peut-être un peu plus « légère » que la première. Cette partie a pour ambition de donner un petit aperçu de ce qui se passe dans les accélérateurs de particules.

## Références

- **Taylor : Mécanique Classique (chapitre 15)** Les pages sont données dans l'édition de la traduction française et non pas celle accessible sur internet (en pdf !)
- **Relativité Restreinte (Michel et Nicole Hulin)**

## Prérequis

- Mécanique Newtonienne
- Expérience de Franck et Hertz
- Notion de Référentiel inertiel
- Expérience de Michelson et Morley (1887)
- 2 Postulats de la relativité
- Notion d'évènement (x,y,z,t)
- Mouvement de particules chargées dans un champ électromagnétique en mécanique classique (pour le dernier paragraphe sur l'accélérateur de particule).

## Introduction

- **L'expérience de Michelson et Morley (1887)** (que Lord Kelvin considérait en 1900 comme un petit nuage d'incompréhension qui obscurcissait le ciel clair radieux de la physique) a remis en question l'hypothèse de référentiel lié à l'éther dans lequel la lumière on pensait que la lumière se propageait. Grâce **aux 2<sup>e</sup> postulat** de la relativité formulé par Einstein en 1905, le résultat de l'expérience de Michelson et Morley trouve une explication théorique. En effet, on rappelle qu'en 1905, Einstein postule que la vitesse de la lumière est

indépendante du référentiel inertiel et sera donc toujours égale à  $3.00 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  indépendamment de l'observateur. On rappelle aussi au passage le **1<sup>er</sup> postulat** qui stipule que l'ensemble des référentiels inertiel sont équivalents et donc que les lois de la physique sont covariantes d'un référentiel inertiel à l'autre.

- La **pertinence de ces deux postulats** n'est justifiable que par la vérification expérimentale des conséquences qui en découlent. Dans le cas de l'expérience de Michelson et Morley, il n'y a pas de remise en cause de ces postulats. En fait, ces postulats n'ont aujourd'hui jamais été mis en défaut contrairement aux postulats de Newton. Ces derniers sont robustes tant que l'on travaille avec des objets dont la vitesse est faible par rapport à  $c$ . Nous allons donc devoir pour comprendre le monde qui nous entoure **remettre en question notre vision Newtonienne (1687)**, par exemple l'idée que le **temps est un concept absolu**, indépendant du référentiel dans lequel on se place.
- **Annnonce du plan** : 1- Les conséquences des deux postulats vont bousculer notre vision de l'espace-temps. Les longueurs, les durées vont désormais dépendre du référentiel inertiel dans lequel on se place. 2- Une nouvelle théorie dynamique devra se construire et trouvera un intérêt majeur dans la découverte de nouvelles particules créées par collisions dans les accélérateurs de particules.

## I- Une nouvelle vision de l'espace-temps

### A- Dilatation des durées

- **L'horloge à photons (p676 §15.4 Taylor)**: Il s'agit ici d'une **expérience de pensée** qui va nous permettre de comprendre que le temps ne s'écoule pas de la même façon entre 2 référentiels.
- **Description de l'expérience** :

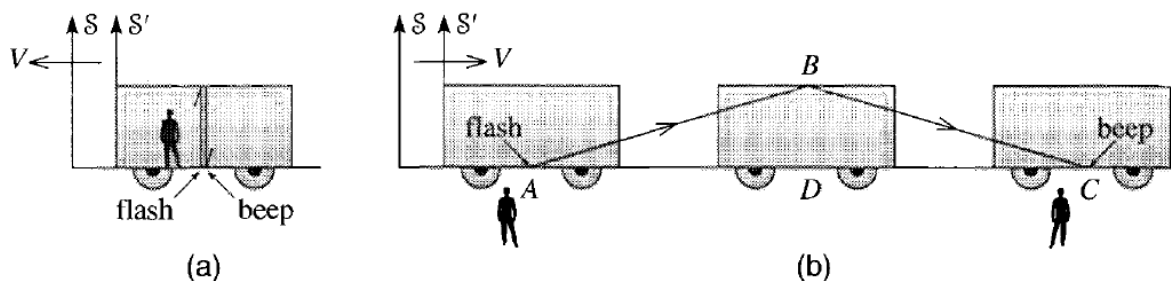


Figure 15.3 (a) The thought experiment as seen in frame  $S'$ . The light travels straight up and down again, and the flash and beep occur at the same place. (b) As seen in  $S$ , the flash and beep are separated by a distance  $V \Delta t$ . Notice that in  $S$  two observers are needed to time the two events, since they occur in different places.

- **Calcul du temps d'un aller-retour** : Pour l'observateur dans le wagon :  $\Delta t_p = \frac{2h}{c}$ . Pour l'observateur à l'extérieur (ie dans le référentiel  $S$ ), le référentiel  $S'$  lié au train a une vitesse  $V$  dans la direction  $Ox$ . Le temps que met la lumière pour faire un « aller-retour » est plus long étant donné que la lumière doit parcourir un chemin plus long. On utilise qu'on utilise le 2<sup>nd</sup> postulat pour calculer le temps

$$\Delta t' = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - V^2}} = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{2h}{c} \gamma = \gamma \Delta t_p.$$

- Cette formule exprime bien que la durée entre 2 évènements ayant lieu au même endroit (ie dans le référentiel du train) est plus courte que dans n'importe quel référentiel dans lequel ces évènements ne sont pas statiques. *Introduction de la notion de référentiel propre et de temps propre  $\Delta t_p$ .*
- **Conséquence sur la vitesse relative entre 2 référentiel inertiel** : supposons par l'absurde que le train va plus vite que la lumière  $V > c$ . La conséquence est que l'on trouve un temps  $\Delta t'$  imaginaire pur. Ce résultat suggère que  $V$  doit rester inférieur à  $c$ . *La vitesse relative de deux référentiels inertiels ne peut donc atteindre ou dépasser  $c$ .*
- **Vérification expérimentale :**  
Rossi et Hall (1941), Frisch et Smith (1963). Par une mesure de flux de muons, on a mesuré le temps caractéristique de désintégration de ces particules dans 2 référentiels différents. Le référentiel propre dans lequel les muons sont au repos et le référentiel terrestre.
- **La dilatation du temps implique la contraction des longueurs.**  
Le muon, dans son référentiel propre, met un temps  $\Delta t_p$  pour parcourir les 1907m (Mont Washington) qui le sépare du sommet de la montagne, du niveau de la mer. Dans le référentiel terrestre, ce temps est dilaté  $\Delta t' = \Delta t_p \gamma$ . En admettant que la vitesse de la terre par rapport au muon est l'opposé de la vitesse du muon par rapport à la terre, cela implique que la hauteur de la montagne paraît plus petite dans le référentiel du muon que dans le référentiel terrestre d'un facteur  $\gamma$ . Ce phénomène est une manifestation de ce qu'on appelle la **contraction des longueurs**.

## B- Contraction des longueurs et Transformation de Lorentz

- **Formule de la contraction des longueurs** : En partant de l'expérience de désintégration des muons, nous constatons que dans le référentiel où la montagne est au repos (ie référentiel terrestre ou référentiel propre), sa hauteur est plus grande que dans le référentiel du muon qui est mobile / à la montagne. Le rapport des deux longueurs est donné par le facteur  $\gamma$ :  $l = \frac{l_p}{\gamma}$ .
- **La contraction de l'espace ne se fait que dans la direction du vecteur vitesse et pas dans les directions orthogonales (§15.5 p683 Taylor)**. Expérience de pensée de deux personnes  $Q$  et  $Q'$  de même taille au repos.  $Q'$  monte dans un train se déplaçant à une vitesse relativiste et tient un couteau au niveau du sommet de sa tête.  $Q$  regarde passer le train. Comme  $Q'$  est en mouvement par rapport à  $Q$  sa longueur s'est contractée dans le référentiel de  $Q$ . Donc  $Q$  est blessé par le couteau. Mais dans le référentiel de  $Q'$ , c'est  $Q$  qui est contracté. Donc il n'est pas blessé. On aboutit à une contradiction. **Une contraction dans une direction perpendiculaire à la vitesse relative entre les 2 référentiels mène à une contradiction**. Un argument semblable exclut la possibilité d'une extension. Nous en concluons que les longueurs perpendiculaires à la vitesse relative sont inchangées.
- **Transformation de Lorentz** : Nous venons de voir que la transformation galiléenne de transformation d'un espace à l'autre est incompatible avec les postulats de la relativité restreinte. Nous admettrons la relation reliant un évènement dans un référentiel  $R'$  au même évènement dans  $R$ . On introduit la notion de *quadrivecteur*, et de *matrice de Lorentz*. Définition de quadrivecteur : vecteur dont les coordonnées dans deux référentiels sont reliées par la transformation de Lorentz.
- **Produit scalaire** : On définit le « produit scalaire ». On montre son invariance par transformation de Lorentz.

## C- Ordre des évènements et causalité

- **Perte de la simultanéité (Taylor p687)** : On effectue une autre expérience de pensée. On imagine un serpent de longueur propre 100cm qui rampe sur le sol à une vitesse  $v = 0.6c$ . Pour le taquiner, un étudiant de physique tient 2 fendoirs séparés de 100cm et les abaissent simultanément de tel sorte que le fendoir de gauche tombe juste derrière la queue du serpent. Dans le référentiel de l'étudiant, le serpent mesure  $l = \gamma l_p = 80cm$ . Donc le serpent n'est pas blessé. En revanche, dans le référentiel du serpent, la distance entre les fendoirs est aussi contractée à 80 cm. Donc par un raisonnement un peu rapide, on aboutit à une contradiction. Cette dernière se lève si l'on écrit les transformations de Lorentz pour les deux évènements décrivant l'abaissement du fendoir (cf. Taylor p687). On se rend compte alors que la simultanéité des évènements dans le référentiel de l'étudiant n'est pas conservée dans la transformation de Lorentz. Le serpent voit donc bien les fendoirs séparés d'une distance de 80cm mais la durée séparant leur abaissement n'est plus nulle ( $\Delta t' = 3.3ns$ ) Le fendoir de droite est abaissé 3.3ns avant le fendoir de gauche à une distance de 125 cm de la queue du serpent. Conclusion : **la simultanéité est une notion relative.**
- **Causalité et cône de lumière**
  - L'expérience de pensée précédente est très perturbante car on voit que **l'ordre dans lequel deux évènements se déroulent peut dépendre du référentiel dans lequel on les observe**. Or si un évènement  $A$  est la cause d'un évènement  $B$ , il doit nécessairement se produire avant quel que soit le référentiel dans lequel on l'observe (exemple d'une explosion ( $A$ ) qui cause l'effondrement d'un bâtiment éloigné ( $B$ )). En réalité, il n'est pas toujours possible d'inverser l'ordre de deux évènements par changement de référentiel. Nous allons démontrer que l'ordre des deux évènements est invariant, si l'évènement  $B$  est contenu dans le *cône de lumière* de l'évènement  $A$ .
  - Le **cône de lumière** : Dans l'espace-temps  $(x, y, ct)$  ramené à 3D (on ne considère que des mouvements plans pour faire des schémas), le cône de lumière de l'évènement  $O$  placé à l'origine du repère est définie par la surface  $x^2 + y^2 = (ct)^2$ . Physiquement, cette surface représente la position du front d'onde d'un flash lumineux produit en  $O$  pour la partie  $t > 0$ . Pour la partie  $t < 0$ , il s'agit de l'ensemble des points de l'espace temps  $x = (\vec{x}, ct)$  tels que la lumière émise en  $x$  peut atteindre l'origine  $O$  à l'instant  $t$ .
  - **Théorème 1 : Tout évènement situé dans le cône de lumière reste dans le cône de lumière par transformation de Lorentz et le signe de  $t$  reste constant.** Cela veut dire que tout évènement situé dans le futur  $t > 0$  et à une distance de l'origine  $O$  inférieure à la distance que parcourt la lumière restera postérieur à  $O$  dans tous les référentiels inertiels. Preuve (§15.10 p701-2 du Taylor) : la démonstration est directe grâce à la conservation du produit scalaire. On peut la présenter en 2 lignes sur transparent.
  - **Théorème 2 : Pour tout évènement  $A$  situé à l'extérieur du cône de lumière de l'origine  $O$ , il existe un référentiel dans lequel  $A$  est postérieur à  $O$ , il existe aussi un référentiel dans lequel  $A$  est antérieur à  $O$  et il existe un référentiel inertiel dans lequel  $A$  et  $O$  sont simultanés. On admet ce théorème. La démonstration (§15.10 p704 Taylor) ne représente pas non plus de difficulté mais on veut gagner du temps.**

- **Conséquence** : Si un évènement A est causé par un évènement O, alors l'évènement A est situé à l'intérieur du cône de lumière supérieur car il doit être postérieur à O dans tous les référentiels inertiels. Donc *Aucune influence causale ne peut se propager à une vitesse supérieure à la vitesse de la lumière.*
- **A fortiori, la vitesse de toutes particules est inférieure à la vitesse de la lumière dans tous les référentiels inertiels<sup>1</sup>.**

## II- Dynamique : collision et accélération de particules

### A- Conservation du quadrivecteur impulsion

#### - **Loi de conservation de l'impulsion, du classique au relativiste :**

La loi de conservation de l'impulsion classique pour les systèmes isolés n'est plus valable dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte. L'équivalent relativiste de cette loi classique nécessite la définition du vecteur impulsion pour les particules massives  $p = (\gamma m \vec{v}, \gamma mc)$ . Nous admettons que ce vecteur est un quadrivecteur<sup>2</sup> et qu'il est conservé pour les systèmes isolés. [Le fait que la conservation de la quantité de mouvement soit exprimé sous la forme quadri-vectorielle permet respecter le 1<sup>er</sup> postulat d'Einstein !] La partie spatiale correspond à la conservation de l'impulsion relativiste :  $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ . La partie temporelle correspond à la conservation de l'énergie.

- **Conservation de l'énergie** : En effet,  $p_4 c = \gamma mc^2 = E$ , a pour dimension une énergie. Pour s'en convaincre, développons  $E$  au premier ordre en  $\frac{v}{c}$ .

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

A une constante près, on retrouve l'expression de l'énergie cinétique. Pour des vitesses relativistes :  $E = mc^2 + (\gamma - 1)mc^2$ . On identifie l'énergie cinétique  $T = (\gamma - 1)mc^2$ . Et l'énergie de masse  $mc^2$

- **La masse n'est plus conservée (exemple dans l'expérience de Franck et Hertz)**: Le premier terme  $mc^2$  n'est pas juste une constante dont on pourrait s'affranchir comme en mécanique classique. On rappelle que l'expérience de Franck et Hertz est une collision entre un électron accéléré et un atome de mercure au repos. Envisageons une collision inélastique dans laquelle l'énergie cinétique de l'électron a servi à exciter l'atome de mercure  $\Delta T_{electron} = -4.9eV$ . Ecrivons la conservation de l'énergie du système :  $M_1 c^2 + T_1 = M_2 c^2 + T_2$  où  $T_i$  et  $M_i$  sont l'énergie et la masse totale du système (électron+ atome de mercure) avant/après la collision. En supposant que l'atome de mercure reste au repos (car beaucoup plus lourd que l'électron),  $T_2 - T_1 = \Delta T_{electron} = -4.9eV$ . Cela implique que la masse du système a augmenté de  $M_2 - M_1 = -\frac{\Delta T}{c^2} = 8.7 \cdot 10^{-36} kg$ . Comme l'électron émerge avec une masse inchangée<sup>3</sup>, on en déduit que la masse de l'atome de

---

<sup>1</sup> Pour la démonstration de cette dernière propriété fondamentale, J.Taylor utilise (p705) un argument que je trouve bancal. Il postule que le référentiel dans lequel la particule est au repos est un référentiel inertiel. Je trouve que ce postulat est bancal car je pourrais rétorquer que toutes les particules n'ont pas forcément de référentiel inertiel propre.

- <sup>2</sup> Il faut se souvenir que le quadrivecteur vitesse  $u = (\gamma v, \gamma c) = \frac{dx}{dt_p}$  est le rapport entre le quadrivecteur déplacement élémentaire et la variation élémentaire de temps propre  $dt_p$ . Or comme  $dt_p$  est indépendant du référentiel,  $u$  est bien un quadrivecteur.

- <sup>3</sup> J'ai du mal à comprendre cet argument.

mercure a augmentée  $\frac{\Delta m}{m} = \frac{8.7e-36}{3.3e-25} = 2.6 \cdot 10^{-11}$ . Une telle variation de masse est bien trop petite pour être détectée par une mesure directe de la masse. Pour la réaction de fission induite par des neutrons la variation relative de la masse est détectable  $\frac{\Delta m}{m} \sim 10^{-3}$ .

**La variation de l'énergie cinétique totale implique une variation de la masse totale du système.**

## B- Collisions

- La plupart des particules élémentaires qui ont été découvertes au cours du siècle dernier ont été observées comme produits de collisions d'autres particules.

Exemple : le premier antiproton observé a été produit dans une collision proton-proton.

$p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ . L'antiproton a même masse que le proton  $1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 938 \text{ MeV}/c^2$  mais une charge opposée.

**Energie de seuil** : Dans les accélérateurs de particules, les particules atteignent des vitesses proches des vitesses de la lumière et donc des énergies énormes ce qui permet de produire de nouvelles particules. Il est intéressant de se demander quelle est l'énergie minimale à fournir au système initial pour que la réaction ait lieu. C'est l'énergie de seuil. Un raisonnement rapide (et erroné), consisterait à dire que l'énergie minimale à fournir est l'énergie de masse des produits de la collision. Mais ce serait oublier la conservation de l'impulsion qui oblige le système final à avoir une impulsion et donc les particules finales ne peuvent être au repos dans le référentiel du laboratoire. Pour connaître l'énergie de seuil, il faut se placer dans un référentiel où l'impulsion du système est nulle, il s'agit par définition du **référentiel du centre de masse**.

- En effet, dans ce référentiel, l'ensemble des particules finales peut être au repos. Donc, pour que la réaction ait lieu, il faut que  $E_{CM} \geq \sum_f m_f c^2$ . Considérons le cas où l'une des particules initiales est au repos. En écrivant la conservation de la norme de la quadri-impulsion dans le référentiel du centre de masse et dans le référentiel du laboratoire, on trouve que l'énergie minimale du projectile  $a$  dans le référentiel du laboratoire est

$$E_a^{min} = \frac{(\sum m_{fin})^2 - m_a^2 - m_b^2}{2m_b} c^2$$

- **Application** : Pour l'expérience susmentionnée de découverte de l'antiproton,  $p + p \rightarrow p + p + p + \bar{p}$ , l'énergie minimale à fournir dans le référentiel du laboratoire est  $E_{min} = 7m_p c^2$ . L'énergie cinétique minimale du proton incident est  $6m_p c^2 \approx 5600 \text{ MeV}$ . L'expérience est réalisée à Berkeley dans l'accélérateur à particule *Bevatron* en 1955 et vaudra le prix Nobel de physique pour Emilio Gino Segrè et Owen Chamberlain en 1959.

## C- Accélérateur de particules : Le LHC

- **Intérêt et Principe de fonctionnement...** 😊

## Conclusion

A partir des deux postulats d'Einstein, nous avons développé toute une théorie cinématique qui remet en cause notre conception de l'espace-temps avec la contraction des longueurs, la dilatation des durées... D'autre part, le formalisme quadri-vectoriel a permis d'étendre la conservation de la quantité de mouvement pour des systèmes relativistes. Nous avons appliqué cette loi aux expériences de collision de particules... 😊

## Annexe :

### A- Expérience de Michelson et Morley (1881, 1887)

- **But de l'expérience** : On pense à l'époque que la lumière a besoin pour se déplacer d'un milieu matériel comme si c'était une onde mécanique. On appelle à l'époque ce référentiel l'éther. L'expérience de Michelson et Morley a pour but de retrouver à partir de la loi de composition des vitesses classiques une différence de temps de parcours entre deux chemins orthogonaux parcouru par la lumière dans un interféromètre de Michelson de plusieurs 10aine de mètres. Michelson suppose que à cause du mouvement de la terre par rapport à l'éther, la vitesse ne va pas avoir la même vitesse dans deux directions orthogonales.
- **Résultat Théorique** : Par un calcul simple on trouve qu'avec les hypothèses de l'existence de l'éther et d'un mouvement du référentiel du « labo » à  $V = 30\text{km/s}$  (vitesse de la terre autour du soleil) pour une longueur de bras de 10m qu'il devrait y avoir une différence de 0.2interfrance.  $\Delta\Phi = \frac{2\pi l}{\lambda} \beta^2$  (facteur 2 selon l'orientation de l'interféromètre Michelson)
- **Expérimentalement** : Il n'y a pas de différence de temps de parcours entre les 2 chemins !

### B- Expérience de désintégration des muons (Rossi et Hall 1941- Frisch et Smith 1963)

- **Source** : <http://culturesciencesphysique.ens-lyon.fr/ressource/validation-relativite-restreinte-3.xml#N10063>
- **Muons** = particules produites par collision de proton issu du rayonnement cosmiques sur la haute atmosphère.
- On est capable de mesurer la **loi de désintégration des muons** :  $N = N_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$ . La durée caractéristique de désintégration des muons dans le référentiel propre est  $\tau_p = 2.2 \cdot 10^{-6}\text{s}$ .
- **En physique classique**, on détermine théoriquement la distance caractéristique parcouru par un muon (vitesse  $V = 0.9952c$ )<sup>4</sup> comme  $V\tau_0 = 660\text{ m}$ . Cela signifie que tous les 660m le nombre de muons détectés est divisé par  $e = 2.71$ . (ie qu'en 1907m  $\frac{N_1}{N_0} = 18$ )
- **Expérimentalement**, la mesure du flux de muons entre 1907m et le niveau de la mer donne  $N_{1907} = 570$  et  $N_0 = 410$  muons par heure.  $\frac{N_0}{N_{1907}} = 0.72$ .
- **En prenant en compte la dilatation des temps** :  $\tau' = \tau_p \gamma = \tau_p \times 10.2 = 22.4\mu\text{s}$ . On trouve  $\frac{N_0}{N_{1907}} = \exp\left(-\frac{\frac{1907}{660}}{10.2}\right) = 0.75$ . Aux incertitudes de mesures, l'expérience est compatible avec la théorie relativiste.

---

<sup>4</sup> Le détecteur est placé sous une épaisseur de 76 cm de fer; ainsi, il n'est sensible qu'aux particules dont la vitesse est comprise entre 99,50 % et 99,54 % de celle de la lumière; il fonctionne sur le principe suivant : Un cristal scintille au passage du muons et lui fait perdre son énergie : le muon est alors stoppé ; le scintillement génère un signal électrique qui indique la présence du muon (signal 1) ; Le muon alors au repos se désintègre en émettant 3 particules dont l'une est chargée et détectable (signal 2).