

LP : Les symétries en physiques

Rapport du jury

- 2010 : Cette leçon doit mettre en évidence les conséquences des symétries en physique. Elle ne doit pas se borner à des calculs de champs électromagnétiques. Le jury jugera en partie la leçon sur la pertinence et la variété des exemples proposés par le candidat.
- 2011-2012 : Les invariances peuvent être abordées dans cette leçon.

Références :

- *Mécanique Analytique*, Rossen Dandoloff (photocopie dans le dossier)
- *Mécanique Analytique*, Amiot et Marleau
- *Cours de Feynmann* (disponible sur le site : https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_52.html)
- Cours de Jean-Bernard Zuber (cf. dans le dossier)

Prérequis

- Mécanique analytique : Principe de Maupertuis, théorème d'Euler-Lagrange. Hamiltonien
- Loi de l'électrostatique et magnétostatique
- Transition Paramagnétisme-Ferromagnétisme

Introduction

La symétrie évoque dans la culture populaire l'invariance de figure géométrique par une transformation spatiale. Exemple : Un cercle est invariant par une rotation bien choisie. Dans cette leçon, nous allons traiter des exemples précis dans lesquels nous allons constater l'importance du concept de symétrie en Physique.

Le concept de symétrie se rapporte à des situations **différentes** en physique. Nous avons déjà traité des exercices où la **géométrie de l'espace** avait un certain degré de symétrie Exemple : **en électro et magnétostatique** nous avons abordé des systèmes idéaux un **fil infini** uniformément chargé, **solénoïde infini** pour lesquels nous avons pu déterminer respectivement les champs électriques magnétiques. Nous allons retraiter ces problèmes dans cette leçon à la lumière d'un **principe** (Principe de Curie) qui établit **une relation entre la géométrie des causes et des effets**.

Nous allons aussi parler **des symétries** non plus de l'espace mais des **lois de la physique** : Si je fais une expérience à un endroit X, elle se reproduira de manière identique à un autre endroit Y (pourvu que les conditions expérimentales soient identiques). Nous constatons donc que lois de la physique sont invariantes par la translation spatiale. Nous allons montrer que ces invariances sont reliés à des lois de conservation.

Enfin, dans une dernière partie, nous mettrons en évidence certaines rupture de la symétrie dans l'exemple de la transition paramagnétique-ferromagnétique.

I- Principe de Curie (relation entre les causes et les conséquences)

- Source : <https://studylibfr.com/doc/3160076/principe-de-curie-par-jean-sivardi%C3%A8re>

A- Enoncé du principe de Curie

- **Enoncé du principe de Curie :**
« Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits.
Contraposée : Lorsque certains effets révèlent une certaine dissymétrie, cette dissymétrie doit se retrouver dans les causes qui lui ont donné naissance. »
- **Attention** la réciproque n'est pas vraie : Si les effets présentent une certaine symétrie, alors cela ne permet pas de conclure sur les symétries des causes. Le groupe de symétrie des causes est un sur-groupe du groupe de symétrie des effets. Les effets peuvent être plus symétrique que les causes du système¹.

B- Intérêt du principe de Curie

- **Exemple en électrostatique du fil infini uniformément chargé- simplification de l'expression du champ avec les symétries – Obtention de l'expression avec le théorème de Gauss :** On se place en coordonnées cylindriques. Les invariances des sources par translations d'axe z, rotations d'angle theta se retrouvent dans le champ E. On montre les symétries par rapport à des plans bien choisis ce qui contraint le champ E à être uniquement selon \vec{u}_r : $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$. C'est uniquement après avoir considéré les symétries du problème que nous sommes en mesure d'appliquer le théorème de Gauss qui mène à $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi r\epsilon_0}\vec{u}_r$.
- **Ici, la notion de symétrie est liée à la modélisation du problème :** La prise en compte des symétries repose sur une **modélisation du problème** : Un fil infini n'existe pas. Jamais dans la vraie vie on aura une véritable invariance de translation à cause des effets de bord. Nous remarquons donc que **l'utilisation des symétries repose sur une modélisation (idéalisée) du problème**. Dans notre exemple, l'idéalisation est justifiée si (i) le champ E est calculé suffisamment proche du fil ($r \ll L$) pour pouvoir le modéliser comme étant d'extension infinie et (ii) suffisamment loin des sources ($r \gg R$) pour pouvoir modéliser la distribution de charge comme étant linéique.

- _____

- ¹Si le jury demande un exemple de situation où les symétries des effets sont supérieures à celles des causes : L'exemple le plus simple est donné dans l'article du BUP Sivardière (système de 3 ressorts page 5). Si on me pose la question, je l'adapterais à un système à 4 ressorts disposés orthogonalement pour simplifier les calculs. Le système est invariant par rotation d'angle $\pi/2$. Alors que la pulsation est isotrope.

- **Exemple du solénoïde infini - explication de l'antisymétrie du champ B - notion de pseudovecteur** : On connaît le résultat et on a dans un premier temps l'impression d'une contradiction avec le principe de Curie. En effet, les plans de symétries des courant ne

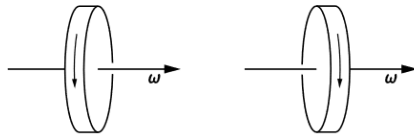


Fig. 52-3. A rotating wheel and its mirror image. Note that the angular velocity "vector" is not reversed in direction.

sont pas des plans de symétries du champ B mais des plans d'antisymétrie. En fait, cela n'est pas en contradiction avec le principe de Curie car le champ B contrairement au champ E n'est pas un vrai vecteur. Il s'agit d'un vecteur axial dont le signe dépend des conventions d'orientation. Pour mieux comprendre la subtilité, on prend l'exemple d'une roue qui tourne selon son axe de rotation. On a décidé par convention d'orienter le vecteur rotation selon la règle de la main droite. Ainsi, si je considère le symétrique de la roue par une réflexion plane, on constate que le vecteur rotation est toujours selon la même direction et est donc antisymétrique par la réflexion. Ainsi, les pseudos-vecteurs réagissent de manière antisymétrique aux symétries de réflexion.

Ces considérations permettent de résoudre l'apparente contradiction avec le principe de Curie.

- Pour les sceptiques, voici une explication plus physique de la nécessité de l'antisymétrie du champ B.

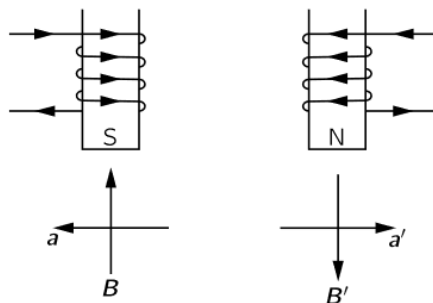


Fig. 52-4. A magnet and its mirror image.

Supposons qu'on envoie un électron dans le solénoïde avec une vitesse initiale \vec{v}_0 suivant le vecteur \vec{a} (cf. figure ci-dessous). La force de Lorentz nous indique que l'électron va être dévié et va rentrer dans le plan de la feuille. Si on considère le symétrique de la bobine par une réflexion plane, et que l'on envoie un électron suivant une vitesse initiale \vec{v}_1 symétrique de \vec{v}_0 . La nouvelle force de Lorentz est symétrique (grâce au produit vectoriel !). La trajectoire obtenue est donc le symétrique de la trajectoire précédente car le champ B' est antisymétrique. Si on avait fait l'erreur de prendre B' symétrique de B , alors la symétrie des causes aurait entraîné une antisymétrie de la trajectoire².

-
- ² La symétrie de la trajectoire par une réflexion plane du problème n'est pas toujours observée ! Le contre-exemple est l'expérience dite de Madame Wu qui consiste à observer la désintégration β du cobalt 60 soumis à un champ magnétique. L'expérience montre que les électrons, produits de la désintégration, sont majoritairement déviés dans le sens opposé au champ magnétique B. Cette expérience montre la non conservation de la parité par l'interaction faible. (Prix nobel en 1957).

- Les symétries ne servent pas juste à simplifier des calculs mais leur conséquence permettent de déduire des propriétés importantes des phénomènes physiques.

Exemple : Une particule chargée se déplace dans un champ électrique \vec{E} et un champ magnétique \vec{B} perpendiculaires. Sa vitesse initiale \vec{V}_0 est perpendiculaire à \vec{B} . \vec{E} et \vec{V}_0 étant polaire et \vec{B} axial, le plan contenant \vec{E} et \vec{V}_0 est un plan de symétrie à l'instant initial et le reste. Par conséquent, la trajectoire de la particule est contenue dans ce plan.

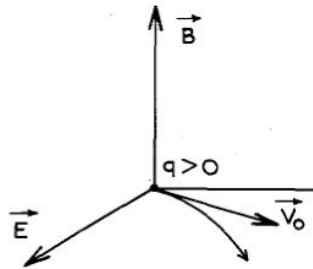


Fig. 2. — Mouvement d'une charge q dans des champs \vec{E} et \vec{B} perpendiculaires.

Transition : Jusqu'ici, nous avons exploré les relations entre symétrie des causes et des conséquences. Nous avons aussi légèrement abordé la notion de symétrie des lois de la physique à travers l'expérience de la réflexion de la bobine. Dans la partie suivante, nous allons nous focaliser sur les symétries des lois de la physique (ie symétrie de l'action ou du lagrangien) et des conséquences importantes sur les lois de conservations.

II- Equivalence entre Symétries et loi de Conservation

C- Théorème de Noether

- Emmy Noether (1882-1935) : Mathématicienne allemande spécialiste d'algèbre et de physique théorique. Le Théorème de Noether fut qualifié par Albert Einstein de « monument de la pensée mathématique ». **Il établit une relation d'équivalence entre les symétries d'un système physique et les lois de conservation.**

- Enoncé :

A toute *symétrie du lagrangien* correspond une quantité qui est conservée.

- On entend par symétrie du lagrangien, une *transformation* qui le laisse invariant³.
- Précisons le sens du mot *transformation* à partir d'exemples (cf slides) :

- Translation spatiale : $\vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \alpha \vec{a}$
- Rotation : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

A chaque fois, la transformation est définie à partir d'un paramètre continu (ici α) qui va contrôler la transformation (comme un bouton de contrôle). Si $\alpha = 0$, alors il n'y a pas de transformation (ie c'est l'identité), plus α grand, plus la transformation est « importante » (angle de rotation grand, vecteur translation grand).

³ Pour être plus précis on devrait dire *invariant à une transformation de jauge* près. On rappelle que plusieurs lagrangiens peuvent décrire une même situation physique si l'intégrale d'action reste invariante. Pour simplifier le théorème de Noether on fera abstraction de cette subtilité.

- Ce qui rend le théorème de Noether puissant c'est la capacité à trouver la grandeur conservée à partir de la connaissance de la symétrie.
- On montre que si la transformation spatiale qui transforme les coordonnées généralisées $(q_i) \rightarrow (q'_i)$ laisse le lagrangien invariant, alors la quantité conservée est :

$$I = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{\partial q_i}{\partial \alpha} \right)_{\alpha=0} \quad \#(1)$$

La démonstration est simple et peut être présentée sur transparent (ou au tableau si temps). Elle consiste à différencier le lagrangien par rapport au paramètre α puis à injecter les équations d'Euler-Lagrange pour arriver assez simplement à la loi de conservation.

D- Conséquences : Quelles sont les grandeurs conservées ?

- **La symétrie du lagrangien par la transformation de translation spatiale a pour conséquence la conservation de l'impulsion :**

Exemple/Démo : Une particule libre (ie n'étant soumise à aucun champ extérieur) Le lagrangien se limite à l'énergie cinétique. $L = \frac{1}{2}mv^2$. Il est symétrique par transformation translation (définie ci-dessus pour tout vecteur \vec{a}). D'après le théorème de Noether, $\vec{P} = m\vec{v}$ est une grandeur conservée. On retrouve le principe d'inertie. C'est la première fois que des considérations sur les symétries nous permettent de déduire des lois.

- **La symétrie du lagrangien par la transformation de rotation a pour conséquence la conservation du moment angulaire. [Dandoloff]**

Démo : Démonstration dans un référentiel cylindrique (symétrie de rotation autour de l'axe z . $L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - V(r, z)$. Dans ce référentiel, on n'a pas besoin d'utiliser la formule (1) mais directement l'équation d'Euler-lagrange : $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}$ est conservée. On reconnaît l'expression du moment angulaire dans la direction z .

Exemple : Pour une planète soumise au champ de gravitation du soleil. L'invariance de rotation autour des axes x, y, z implique la conservation des moments L_x, L_y et L_z donc du moment cinétique global.

- **Qu'en est-il de l'invariance par translation dans le temps ?** Pour une translation temporelle, la formule (1) n'est plus valable. En revanche, on peut montrer qu'il existe une grandeur conservée en calculant la dérivée (droite) du lagrangien par rapport au temps (démo sur transparent). On trouve alors que la quantité conservée est $\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) - L$. On reconnaît la transformée de Legendre définissant l'Hamiltonien. L'Hamiltonien s'assimile à l'énergie du système dans le cas de forces conservatives⁴.
- **Il existe d'autres**

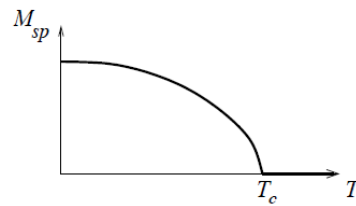
Transition : L'approche que nous avons fait nous a permis de déduire des propriétés à partir de la prise en compte de symétrie. Cela nous a même permis de retrouver le

⁴ Si les forces sont conservatives (ie le potentiel ne dépend que de la position), on montre que l'hamiltonien est égal à l'énergie du système en utilisant le théorème d'euler. Cf p48-49 Dandoloff)

principe d'inertie. Nous n'avons rien inventé puisque toutes les propriétés pouvaient se déduire des lois de Newton. Nous avons juste trouvé une autre approche pour retrouver les mêmes résultats. Cette approche est largement utilisée en théorie quantique des champs.

III- Brisure spontanée de Symétrie (cas de la transition Para-Ferro)

- **Observation :** Au dessus de la température caractéristique dite température de curie ($T_c = 1043\text{K}$ pour le fer), l'aimantation spontanée M du matériau ferromagnétique est nulle (on ne considère qu'un seul domaine de Weiss). En revanche, au dessous on observe l'apparition d'une aimantation non nulle orientée suivant une direction



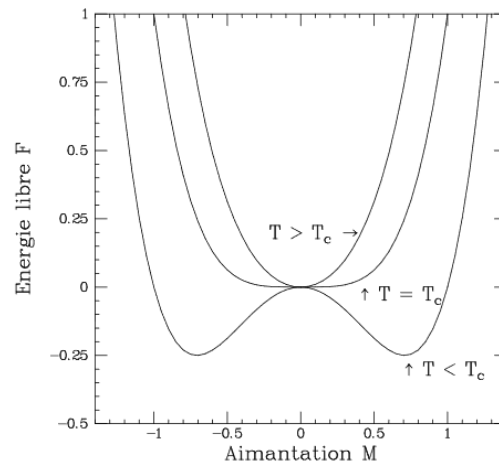
aléatoire.

- On peut se demander si cela entre **en contradiction avec le principe de Curie**. En effet, l'isotropie de l'espace engendre une anisotropie du champ magnétique. Ce qui **semble apparaître** comme une contradiction entre les symétries des causes et des effets s'appelle **brisure spontanée de symétrie**. Une variation infinitésimale d'un paramètre physique (ici la température), engendre spontanément une perte de symétrie. Essayons de comprendre l'origine physique de cette perte de symétrie.
- **Minimiser l'énergie libre :** A partir du hamiltonien de Heisenberg et dans l'approximation du champ moyen, il est possible de calculer l'énergie libre du système (cf. leçon para-Ferro) :

$$F(M) = Nk \left(\frac{T_c}{2} \left(\frac{M}{M_{sat}} \right)^2 - T \ln \left(2ch \left(\frac{T_c}{T} \frac{M}{M_{sat}} \right) \right) \right)$$

L'énergie libre est le potentiel thermodynamique du système (équilibre thermique + absence de travaux). Il faut donc le minimiser par rapport au paramètre interne M .

- **Energie libre en fonction de la température :** Lors de la transition para-ferro, on remarque que le minimum pour $M=0$ devient un équilibre instable. De plus, deux minima égaux apparaissent symétriquement par rapport à l'origine ($M=0$).



- Les deux minima étant égaux, le système a le choix entre deux valeurs de M .
- **Retour sur le principe de Curie :**
En réalité, le choix de l'orientation de M est donné par les conditions initiales (champ magnétique infinitésimal). Puisque les conditions initiales entraînent une perte de l'isotropie de l'espace alors ce n'est pas étonnant qu'on retrouve cette perte d'isotropie dans les effets. Ainsi, le principe de Curie n'est pas remis en cause.

Conclusion

Pourquoi s'intéresse-t-on aux Symétries ? Conséquence importante des lois de symétrie est l'équivalence entre les invariances et les paramètres conservés. Les postulats de symétrie (ie. relativité) deviennent un moyen pour trouver des lois générales alors que jusqu'à présent on postulait des lois pour en déduire des propriétés. Inversion du raisonnement. Les symétries vont donc bouleverser notre façon de raisonner.

auquel il a été soumis.

- Brisure spontanée de symétrie (cas Ferromagnétisme, Ising) : Zuber p49
- Principe de Curie p 41
- Symétrie + Lagrangien → Loi de Newton. P46 Marleau
- Théo
- Nous allons faire le lien entre symétrie de l'espace (ie invariance du Lagrangien) et quantité conservée. Le résultat fondamental que nous allons présenter est le suivant : Si le lagrangien reste invariant alors il existe une quantité qui est conservée. Si je connais la *transformation* qui laisse invariant le lagrangien, alors, je connais la grandeur qui est conservée.
- **Notions de transformation continue :**
- **La symétrie de réflexion (=conservation de la parité) est brisée dans le cas de désintégration beta :** Aimant à basse température, cobalt spin aligné avec aimant et désintégration émission des électrons dans le sens opposé au champ. Cela remet en cause le principe de symétrie par réflexion car d'un côté du miroir les électrons vont vers le bas et de l'autre vers le haut.
- **Brisure spontanée de symétrie : Cas ferromagnétisme**

IV- Résumé Feynmann Symétries :

- **Symmetry operations** : How can physical law be symmetrical ? What we can do to a physical phenomena or to a physical situation in an experient and yet leave the result the same. C'est la même chose que de réaliser une transformation géométrique d'un objet (ex rotation d'un vase), et qu'il reste identique.
- **Symmetry in space and time** : translation, déplacement dans le temps, rotation. Invariance par transformation de lorentz, symmetry par changement d'atome (il existe des atomes identiques). Contre-exemple : dilatation difficile à expliquer car comment comprendre la dilatation des atomes. Rotation à un moment angulaire constant : On a pas du tout les mêmes lois Forces centrifuges, de coriolis. *Réversibilité du temps...* The conservation law which is connected with the quantum-mechanical phase seems to be the *conservation of electrical charge*.
- **Mirror reflections** : Exemple intuitif de l'horloge que l'on refabrique par rapport à son image dans un miroir. Si la réflexion est laisse inchangé les lois de la physique, alors il est impossible de distinguer la droite de la gauche en faisant une expérience. De la même manière qu'il est impossible de déterminer la vitesse du référentiel inertiel dans lequel on se trouve par rapport à un autre référentiel inertiel (impossibilité de définir une vitesse absolue). Nous définissons la gauche à partir de la main avec laquelle nous écrivons, du sens dans lequel on tourne une vis qui ne sont pas des définitions absolues mais relative à une convention. Peut-on trouver un phénomène dans lequel la notion de « gauche » ou « droite » est impliquée fondamentalement.
- The conservation law which is connected with the quantum-mechanical phase seems to be the *conservation of electrical charge*.
- **Vecteur polaire, vecteur axiaux** : Les vecteurs axiaux sont définis à partir d'une convention = convention de la main droite. Si on fait une symétrie de réflexion, la convention est inversée car le trièdre direct est inversé ! Donc les vecteurs axiaux ne respectent pas les transformations de symétries. On pourrait alors penser que cela ait des conséquences : que les lois de la physique ne soient pas invariantes par réflexion. Cela n'est pas observé : exemple de la force de Lorentz il y a un vecteur axial MAIS aussi un produit vectoriel dont la direction est aussi inversé (étant donné que le trièdre directe l'est !). Donc les *phénomènes physiques* sont symétriques.
- **S'il y avait un moyen de savoir par une expérience physique quel est le pôle nord du pôle sur, alors ce serait la fin de la symétrie par réflexion des lois de la physique.**

Principe de Curie, théorème de Wigner, théorème de Neother, sont similaires en ce qu'ils donnent des informations à partir de symétries. Montre qu'en physique moderne, on renverse les choses : on part de symétries (que l'on suppose souvent) pour en déduire des lois (alors qu'avant on postulait les lois puis on étudiait les symétries).