nous trouvons ... pressions (et en nous rappelant que $t_2 = t_1$),

$$l_o = x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - x_1) = \gamma l$$

ou bien $l = l_o/\gamma$.

C'est bien la formule de contraction des longueurs (15.15).

Notre exemple suivant est l'un des nombreux soit disant « paradoxes » de la relativité restreinte.

EXEMPLE 15.3 Un serpent relativiste

Un serpent relativiste, de longueur propre 100 cm, rampe sur une table à une vitesse $V = 0{,}6c$. Pour le taquiner, un étudiant de physique tient deux fendoirs séparés par une distance de 100 cm et projette de les faire tomber simultanément sur la table, de sorte que le fendoir de la main gauche tombe exactement derrière la queue du serpent. L'étudiant fait le raisonnement suivant : « Le serpent se déplace à la vitesse $\beta = 0{,}6$. Ainsi, sa longueur est contractée d'un facteur $\gamma = 5/4$ (vérifiez cela) ; sa longueur mesurée dans mon référentiel doit donc être de 80 cm. Par conséquent, le fendoir de ma main droite tombe bien avant la tête du serpent. Celui-ci n'est donc pas atteint. » Ce scénario est illustré sur la figure 15.5. En revanche, le serpent fait le raisonnement suivant : « Les fendoirs s'approchent de moi à une vitesse $\beta = 0{,}6$. Ainsi, la distance entre eux est contractée à 80 cm et je serai certainement coupé en deux morceaux lorsqu'ils tomberont. » Utilisez la transformation de Lorentz pour résoudre ce paradoxe.

Choisissons les référentiels $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ de la manière habituelle. L'étudiant est au repos dans $\mathcal{S}$ et les fendoirs sont aux points $x_G = 0$ et $x_D = 100$ cm. Le serpent est au repos dans $\mathcal{S}'$, de sorte que sa queue est au point $x' = 0$ et sa tête au point $x' = 100$ cm. Pour résoudre le problème, nous devons déterminer où et quand les deux fendoirs tombent, observés dans $\mathcal{S}$ et dans $\mathcal{S}'$.

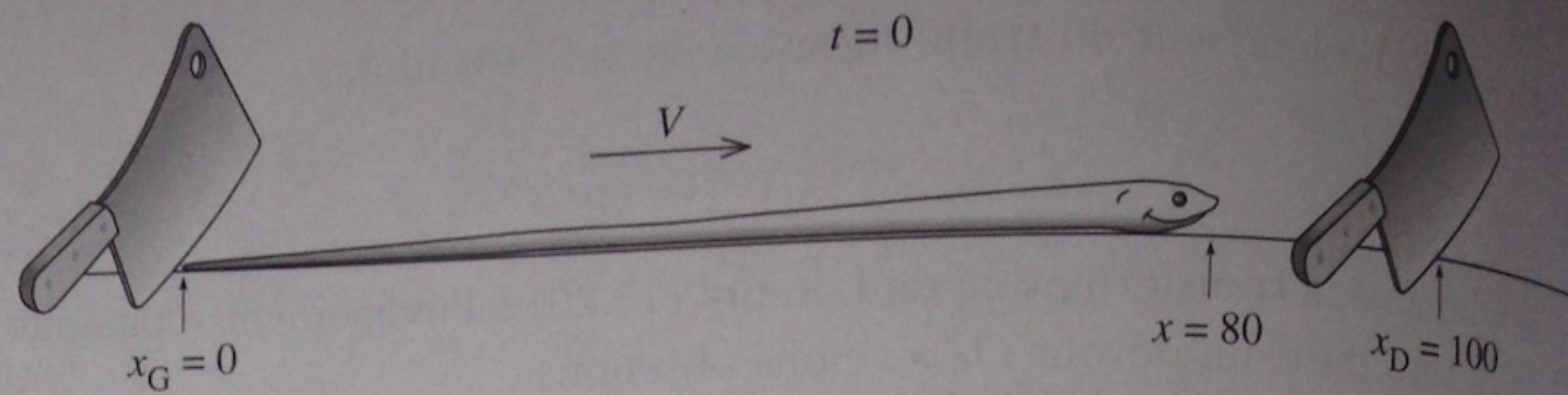

Figure 15.5 Le paradoxe du serpent vu dans le référentiel $\mathcal{S}$ de l'étudiant. Les fendoirs tombent simultanément à l'instant $t = 0$.

Dans $\mathcal{S}$, les fendoirs tombent simultanément à l'instant $t = 0$. La queue du serpent est alors au point $x = 0$. Puisque sa longueur est de 80 cm, sa tête doit être à $x = 80$ cm. [Vérifiez cela en utilisant la transformation de Lorentz $x' = \gamma(x - Vt)$, avec $x = 80$ cm et $t = 0$, ce qui donne la valeur correcte $x' = 100$ cm.] Vue dans $\mathcal{S}$, l'expérience est illustrée sur la figure 15.5. Le fendoir de la main droite tombe bien avant le serpent. Le serpent s'en sort indemne et l'étudiant a raison.

Qu'est ce qui est faux dans le raisonnement du serpent ? Pour répondre à cette question, nous devons examiner les coordonnées et les temps de tombée des deux fendoirs, observés dans le référentiel $\mathcal{S}'$ du serpent. Le fendoir de la main gauche tombe à l'instant $t = 0$ en $x_G = 0$. La transformation de Lorentz (15.20) donne les coordonnées de cet événement dans $\mathcal{S}'$:

$$t'_G = \gamma(t_G - Vx_G/c^2) = 0$$

et

$$x'_G = \gamma(x_G - Vt_G) = 0.$$

Comme prévu, le fendoir de la main gauche tombe juste derrière la queue du serpent, à l'instant $t'_G = 0$, comme illustré sur la figure 15.6.

Jusqu'ici, il n'y a aucune surprise. Cependant, le fendoir de la main droite tombe à $t_D = 0$ et $x_D = 100$ cm. Par conséquent, dans $\mathcal{S}'$, il tombe

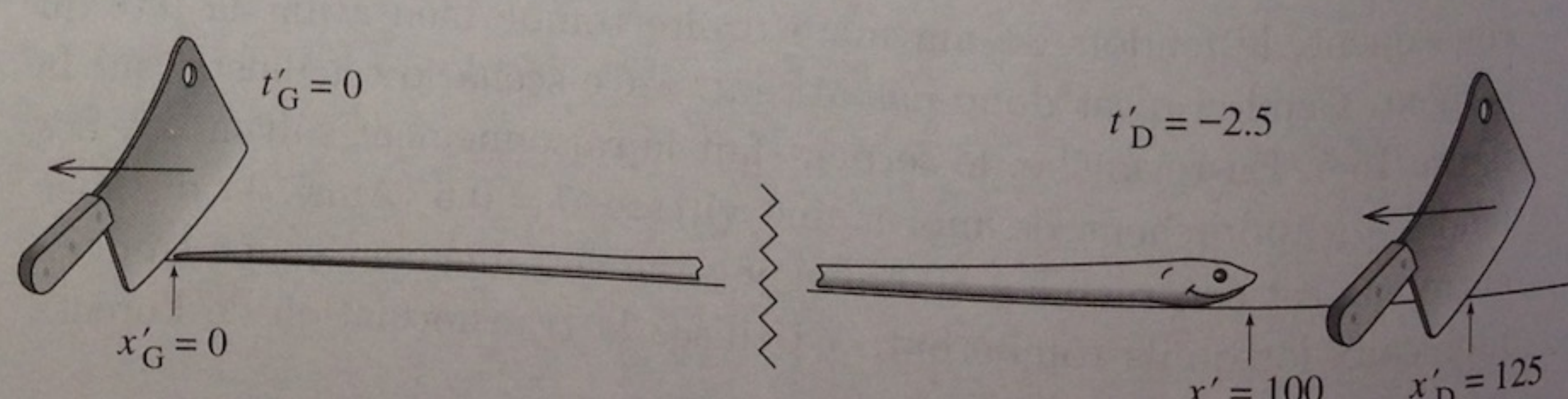

Figure 15.6 Le paradoxe du serpent vu dans le référentiel $\mathcal{S}'$ du serpent. Les fendoirs se déplacent vers la gauche à la vitesse V. La chute du fendoir de la main droite *précède* de 2,5 ns la chute du fendoir de la main gauche. Quoique les fendoirs soient séparés seulement de 80 cm, ils atteignent la table en deux points séparés par une distance de 125 cm.

à un temps donné par la transformation de Lorentz :

$$t'_D = \gamma(t_D - Vx_D/c^2) = -2{,}5 \text{ ns.} \quad ? \quad -3{,}3 \text{ ns}$$

(Vérifiez ce nombre.) Le point crucial est que, vus dans $\mathcal{S}'$, *les deux fendoirs ne tombent pas en même temps*. Puisque le fendoir de la main droite tombe *avant* le fendoir de la main gauche, il ne frappe pas nécessairement le serpent, bien que les fendoirs soient séparés de 80 cm seulement (dans ce référentiel). En effet, l'abscisse du point de chute du fendoir de la main droite est donnée par la transformation de Lorentz

$$x'_D = \gamma(x_D - Vt_D) = 125 \text{ cm.}$$

Le fendoir de la main droite n'atteint donc pas le serpent !

La résolution de ce paradoxe (aussi bien que de plusieurs soit disant paradoxes semblables) est que deux événements qui sont simultanés dans un référentiel ne sont pas nécessairement simultanés dans un autre référentiel. Tout comme le temps de façon générale, **la simultanéité est une notion relative**. En reconnaissant que les deux fendoirs tombent à des instants différents dans le référentiel du serpent, il n'y a plus aucune difficulté pour comprendre comment les fendoirs ne touchent pas le serpent dans les deux référentiels.

15.7 Vitesse relativiste, loi de composition des vitesses

Nous allons à présent nous intéresser à une application très importante de la transformation de Lorentz : la dérivation de la loi relativiste de composition des vitesses. Cette loi est la réponse à la question suivante : si un objet (un électron, une balle de base-ball, une planète, etc.) se déplace à une vitesse **v** par rapport à un référentiel inertiel $\mathcal{S}$, quelle est sa vitesse **v**$'$ par rapport à un autre référentiel $\mathcal{S}'$? En physique classique, la réponse à cette question est
[illegible] des vitesses : si **V** est la vitesse de $\mathcal{S}'$ par
[illegible] le cas particulier où les