

LP. Présentation de l'optique géométrique à partir du principe de Fermat

Maria Ubero Gonzalez

2 juin 2020

Table des matières

1	Enoncé moderne du principe de Fermat	3
1.1	Cadre de l'optique géométrique	3
1.2	Temps de parcours et chemin optique	4
1.3	Conséquences directes	5
2	Lois de l'optique géométrique	6
2.1	Lois de Snell-Descartes	7
2.2	Formation des images : stigmatisme	9
3	Propagation dans un milieu non homogène	10
3.1	Loi fondamentale de l'optique géométrique	10
3.2	Application : mirage	11
3.3	Application : fibre optique à saut d'indice	12

Rapport du jury

2017. Les applications à des systèmes optiques réels sont très souvent absentes dans cette leçon.

2014 : La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion. Les analogies avec d'autres principes variationnels sont appréciées.

2013 : La leçon doit illustrer ce que le principe de Fermat apporte de plus que les lois de la réfraction et de la réflexion.

2010 : Notion de rayon lumineux. Principe de Fermat. Conséquences et applications.

2010 : Le caractère *variationnel* du principe de Fermat doit clairement ressortir. Cette leçon peut être l'occasion d'introduire le théorème de Malus.

2009 : Le caractère *variationnel* du principe de Fermat doit clairement ressortir.

2008 : L'intérêt de l'introduction de la notion de chemin optique est central dans cette leçon.

2005 : La notion de rayon lumineux reste imprécise. L'expression mathématique du principe de Fermat mettant en avant l'expression de l'infiniment petit du premier ordre mis en jeu est souvent ignorée. Par ailleurs, l'interprétation du stigmatisme est une application intéressante du principe de Fermat³⁷.

Jusqu'en 2004, le titre était : *Notion de rayon lumineux. Principe de Fermat. Conséquences.*

2000 : Cette leçon nécessite d'avoir réfléchi au lien existant entre la notion de rayon lumineux et l'optique ondulatoire.

1999 : Pour que cette leçon soit complète et afin de faire correctement le lien avec le théorème de Malus il est nécessaire de savoir relier chemin optique et phase d'une onde et de comprendre à la lumière de la théorie ondulatoire la concentration de l'énergie sur un rayon lumineux. On peut discuter sans calcul comment le principe de Fermat intervient dans la formation des images.

1996 : Il est bon d'expliquer comment on est conduit à ne rechercher les courbes de chemin optique stationnaire que parmi les lignes brisées, et de souligner que le principe de Fermat ne fait que sélectionner les trajectoires possibles pour la lumière – sans préciser comment la répartition du flux s'effectue entre elles.

Bibliographie :

- Pérez Optique.
- <https://www.youtube.com/watch?v=J22D4tQu5GI>

Pré-requis :

- Equations de Maxwell.
- Optique géométrique.
- Mécanique : principe variationnel, équations d'Euler Lagrange.
- Optique ondulatoire.

Objectif. Importance du principe variationnel en physique. Le principe de Fermat nous permet de trouver toutes les lois de l'optique géométrique et de faire le lien avec l'optique ondulatoire.

Introduction

L'histoire de l'optique commence avec les Grecs : le mot optique vient du grec "opticos" qui veut dire relatif à l'oeil humain. Depuis l'Antiquité, et notamment grâce à Euclide, la notion de rayon lumineux et la propagation rectiligne de la lumière ont été comprises. Toutefois, ces interprétations plaçaient l'oeil en tant que source d'émission de la lumière.

Il a fallu attendre Ibn Al Haytham (935-1039), qui a expliqué la vision comme la réception des rayons lumineux par l'oeil.

En 1621 Snell a établi les lois de la réfraction et suite à ses travaux, Descartes a publié ses lois qui seront plus tard la base de l'optique géométrique. Les travaux de ces derniers ont permis à Fermat d'annoncer son principe concernant le déplacement de la lumière en 1657.

Nous avons étudié lors de cours précédents l'optique géométrique et l'optique ondulatoire. L'objectif de cette leçon est de **retrouver les lois de l'optique géométrique grâce au principe de Fermat** et de regarder si ce principe peut nous renseigner sur d'autres propriétés de la lumière. Nous allons commencer par énoncer le principe historique de Fermat :

La lumière se propage d'un point à un autre le long d'une trajectoire telle que le temps du parcours soit minimal.

Nous allons donner une formulation plus moderne de ce principe et voir les conséquences que l'on peut en tirer.

1 Enoncé moderne du principe de Fermat

Pour arriver à l'énoncé de ce principe nous allons commencer par citer les hypothèses du cadre de l'étude de l'optique géométrique et quelques définitions.

1.1 Cadre de l'optique géométrique

La lumière est constituée de rayons lumineux. Un **rayon lumineux** est une ligne imaginaire le long de laquelle se propage l'énergie lumineuse. **Définition 2 : ligne de champ du vecteur de Poynting.**

Hypothèses de travail :

- Milieu **linéaire, transparent et isotrope**. On néglige toute dissipation d'énergie et il n'y a pas de biréfringence.
- Le milieu peut être non homogène mais si n varie, il le fait sur une distance caractéristique grande devant la longueur d'onde (afin de négliger la diffraction).

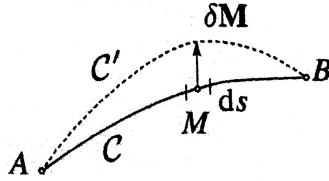
1.2 Temps de parcours et chemin optique

Dans le cas d'une propagation finie entre deux points A et B distants de ds , le chemin optique correspondant est donné par l'intégrale :

$$L = \int_{t_A}^{t_B} c dt = \int_A^B n ds \quad (1)$$

où la vitesse de la lumière dans un milieu d'indice n est $v = \frac{c}{n}$. Le chemin optique est **le chemin parcouru par la lumière dans le vide pendant la durée de propagation dans le milieu considéré**.

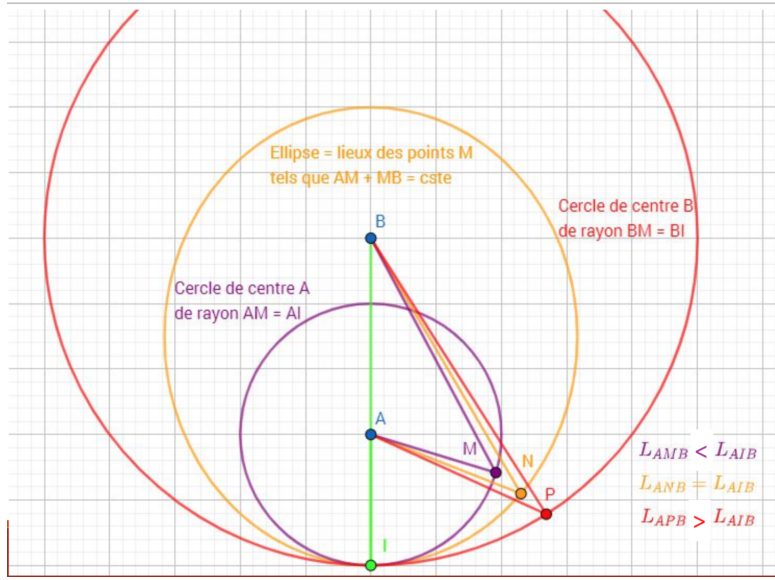
Soit deux points A et B atteints par la lumière et entre eux deux trajectoires C et C' qui a été obtenue en déformant C par un déplacement élémentaire $\delta \vec{M}$ en chaque point M de C tel que $\delta \vec{A} = \delta \vec{B} = 0$:



Le principe de Fermat moderne dit : *le chemin optique L calculé le long de C n'est pas minimal mais stationnaire si la quantité élémentaire $\delta L = L' - L$ est infiniment petite par rapport à la valeur supérieure de $\|\delta \vec{M}\|$.*

Cet énoncé est le **premier principe variationnel** en physique. Il présente en outre l'intérêt d'être d'une très grande généralité et nous verrons que son énoncé moderne contient **toute l'optique géométrique**. De surcroît, ce point de vue variationnel est très utilisé en physique par exemple en mécanique analytique où on utilise le principe variationnel de moindre action de Maupertuis énoncé en 1744. Selon ce principe la trajectoire d'un point matériel, est aussi celle pour laquelle une certaine quantité appelée l'action, est minimale (S \rightarrow L, p \rightarrow n).

Le basculement entre chemin minimal de l'énoncé historique et chemin stationnaire de l'énoncé moderne fait que ce principe est moins restrictif. De plus, il peut être justifié à travers les schémas de trajets suivis par la lumière suivants :



On s'intéresse à la propagation du rayon AIB par réflexion selon trois dioptries : l'ellipse orange et les cercles plus ou moins concaves violet et rouge. Dans les trois cas le rayon AIB correspond à une incidence normale existante réellement. On différencie pourtant trois variations différentes :

- Dans le cas orange, quel que soit le point N , le chemin optique (ANB) est le même que (AIB). Le chemin optique est constant.
- Dans le cas rouge, le chemin optique (APB) est supérieur au chemin (ANB) donc en particulier au chemin (AIB). Le trajet suivi par la lumière correspond bien à un minimum du chemin optique.
- Dans le cas violet, le chemin optique (AMB) est inférieur au chemin (ANB) donc en particulier à (AIB). Le trajet suivi par la lumière correspond à un maximum du chemin optique.

On montre que le chemin suivi par la lumière n'est pas celui qui emprunte le chemin optique minimal mais stationnaire.

Transition Mais comment peut-on appliquer le principe de Fermat pour retrouver toutes les lois de l'optique géométrique ? Commençons par deux conséquences directes, qui constituent usuellement des principes compris dans la définition des rayons lumineux.

1.3 Conséquences directes

Propagation rectiligne dans un milieu homogène

$$L = \int_{AB} n ds = n \widehat{AB} \quad (2)$$

L est minimal si \widehat{AB} s'identifie à la droite AB.

Retour inverse de la lumière

$$L(AB) = \int_{AB} n ds = \int_{BA} n(-ds) = \int_{BA} n ds' \quad (3)$$

où ds' désigne l'élément curviligne orienté de B vers A . Par conséquent :

$$L(AB) = L(BA) \quad (4)$$

Le trajet suivi par la lumière ne dépend pas de son sens de parcours.

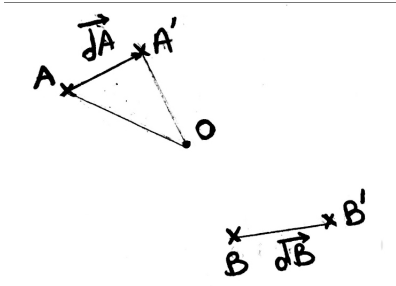
Transition. Montrons maintenant que nous pouvons trouver les lois de l'optique géométrique grâce au principe de Fermat.

2 Lois de l'optique géométrique

Afin de démontrer la stationnarité d'un trajet de la lumière, on va regarder des trajets voisins dans un milieu homogène. La longueur d'un segment AB peut s'écrire $AB = \vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$L(AB) = nAB = n\overrightarrow{AB}\vec{u}$$

Nous allons déterminer la variation de la longueur d'un segment lorsqu'on déplace ses extrémités. Si on impose des variations élémentaires d' \vec{A} et d' \vec{B} :



$$\begin{aligned} dL(AB) &= nd(\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB}) = n\overrightarrow{AB} \cdot d\vec{u} + n\vec{u} \cdot d\overrightarrow{AB} \\ &= nAB\vec{u} \cdot d\vec{u} + n\vec{u} \cdot (d\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) \\ &= n\vec{u} \cdot (d(-\overrightarrow{OA}) + d\overrightarrow{OB}) \end{aligned}$$

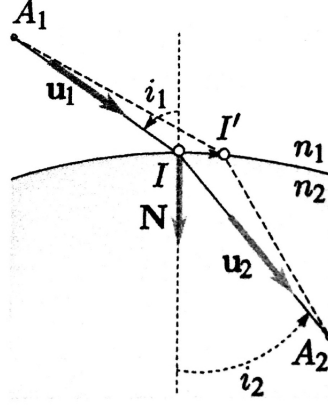
car $\vec{u} \cdot d\vec{u} = \frac{1}{2}d\vec{u}^2 = 0$ (\vec{u} est un vecteur unitaire). On obtient :

$$\boxed{dL(AB) = n\vec{u} \cdot (d\overrightarrow{OB} - d\overrightarrow{OA})} \quad (5)$$

car $d\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = d\overrightarrow{AA'}$, pareil pour $d\overrightarrow{OB}$.

2.1 Lois de Snell-Descartes

On considère un rayon lumineux tombant sur I sur un dioptre d'indices n_1 et n_2 .



$$L(A_1A_2) = n_1 A_1I + n_2 IA_2$$

Variation de la position du point I . On utilise l'expression précédente mais en faisant varier qu'une extrémité car il n'y a que I qui varie. Si on fait :

$$\delta L(A_1I) = n_1 \vec{u}_1 \cdot (\delta \vec{I} - \delta \vec{A}_1) = n_1 \vec{u}_1 \cdot \delta \vec{I}$$

$$\text{car } \delta \vec{A}_1 = 0.$$

$$\delta L(IA_2) = n_2 \vec{u}_2 \cdot (\delta \vec{A}_2 - \delta \vec{I}) = n_2 \vec{u}_2 \cdot (-\delta \vec{I})$$

$$\text{car } \delta \vec{A}_2 = 0.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \delta L(A_1A_2) &= \delta L(A_1I) + \delta L(IA_2) \\ &= n_1 \vec{u}_1 \cdot \delta \vec{I} - n_2 \vec{u}_2 \cdot \delta \vec{I} \end{aligned}$$

En appliquant le principe de Fermat : $\delta L = 0$. On obtient :

$$0 = -\delta \vec{I} (n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1)$$

$$\boxed{n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = a \vec{N}} \quad (6)$$

Par conséquent $\vec{u}_2 = \frac{n_1 \vec{u}_1 + a \vec{N}}{n_2}$. Le rayon réfracté est contenu dans le plan (\vec{u}_1, \vec{N}) appelé **plan d'incidence**.

Réfraction

On multiplie vectoriellement l'expression précédente par \vec{N} ce qui donne :

$$n_2(\vec{N} \wedge \vec{u}_2) = n_1(\vec{N} \wedge \vec{u}_1) \quad (7)$$

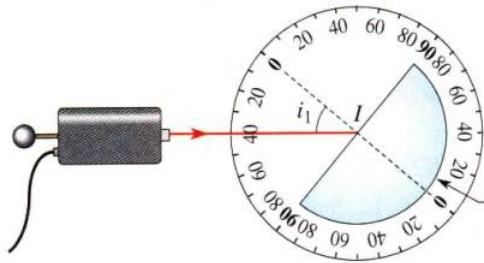
où $i_1 = (\vec{N}, \vec{u}_1)$ et $i_2 = (\vec{N}, \vec{u}_2)$. On obtient :

$$\boxed{n_2 \sin i_2 = n_1 \sin i_1} \quad \text{Loi de Descartes} \quad (8)$$

Pour illustrer cette loi on peut faire un expérience :

Plexiglass avec laser λ fixe. Montrer vidéo jusqu'à la seconde 50. En fonction de la position du demi cercle on passe d'un milieu moins réfringent à un plus réfringent ou l'inverse. Montrer qu'il y a un angle limite dans le cas où on passe de plus réfringent à moins réfringent et qu'il n'y en a pas dans le cas contraire.

<https://www.youtube.com/watch?v=J22D4tQu5GI>

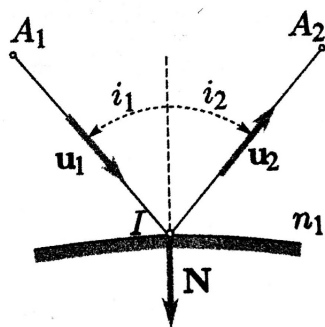


On peut représenter différents angles i_1 en fonction de i_2 . On voit que ce n'est pas linéaire. On représente alors $\sin i_2$ en fonction de $\sin i_1$. On trouve une droite. On trouve n_2 (pente) correspondant au plexiglass ($n_2 = 1,47$). On a montré que notre modèle est correct (il faudrait calculer les incertitudes...).

On montre que si n_2 est plus grand que n_1 , alors $i_1 > i_2$. Le rayon réfracté se rapproche de la normale.

On ne peut pas s'éloigner de la normale de plus de 90° . On peut définir un angle limite dans le cas où on passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent : $\sin(i_{lim}) = \frac{n_2}{n_1}$ ce qui donne $i_{lim} \approx 43^\circ$. Comparer par rapport à celui trouvé par l'expérience (regarder la vidéo). Si $i > i_{lim}$ le rayon ne se propage pas dans le milieu 2.

Réflexion



Même démarche que pour la réfraction mais $n_1 = n_2$ dans ce cas. On obtient $\vec{N} \wedge \vec{u}_2 = \vec{N} \wedge \vec{u}_1$. $i_2 = (\vec{N}, \vec{u}_2)$ est l'angle réfléchi. On obtient $-\sin i_2 = \sin i_1$.

$$\boxed{i_2 = -i_1} \quad \text{Loi de Descartes} \quad (9)$$

Les valeurs absolues des angles incident et réfléchi sont égales.

Transition. Le principe de Fermat permet donc de retrouver les lois de Snell-Descartes. Mais le principe de Fermat nous amène plus loin grâce à la notion de chemin optique. On va ainsi étudier le stigmatisme grâce à ce principe.

2.2 Formation des images : stigmatisme

Considérons un système optique constitué de dioptries et/ou de miroirs. Si tout rayon issu d'un point A arrive, après avoir traversé le système optique, en un point A' , on dit que A' est l'image de A , et le système optique est rigoureusement stigmatique vis à vis des points A et A' .

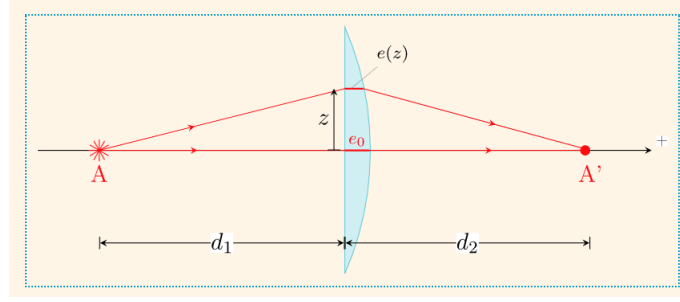
En vertu du principe de Fermat, un rayon lumineux issu de A et traversant le système optique, parviendra en A' s'il existe un trajet qui présente un **chemin optique stationnaire**. Aussi, tous les rayons issus de A arriveront en A' si le chemin optique $L(AA')$ est une fonction partout stationnaire, c'est-à-dire constante.

Excepté le miroir plan, il n'existe pas de système optique rigoureusement stigmatique pour tout point. En revanche, de nombreux systèmes présentent un stigmatisme rigoureux pour certains points particuliers. Par exemple :

- le miroir sphérique conjugue son centre avec lui-même ;
- le miroir elliptique conjugue un foyer avec l'autre foyer ;
- la parabole conjugue un point à l'infini sur son axe optique avec son foyer.

Le stigmatisme est évidemment une propriété très recherchée si l'on souhaite former des images. La plupart du temps, cette propriété n'est vérifiée que dans un cadre approximatif pour un ensemble restreint de rayons ; on parle alors de stigmatisme approché.

Application lentille plan-convexe dans l'approximation paraxiale



Profil parabolique d'une lentille et on peut obtenir la formule de conjugaison des lentilles minces ! Calcul fait dans <https://femto-physique.fr/optique/principe-de-fermat.php>.

Transition. On peut de la même façon considérer des milieux dans lesquels l'indice optique n varie, milieux non homogènes. Ce qui nous amène à trouver la loi fondamentale de l'optique géométrique.

3 Propagation dans un milieu non homogène

3.1 Loi fondamentale de l'optique géométrique

La formule vectorielle de Snell-Descartes permet d'établir l'équation différentielle de la trajectoire d'un rayon lumineux dans un milieu non homogène.

Si on applique $n_2 \vec{u}_2 - n_1 \vec{u}_1 = a \vec{N}$ entre deux points voisins situés de part et d'autre d'une surface équi-indice :

$$d(n\vec{u}) = a \vec{N} \quad \text{ou} \quad d(n\vec{u}) = a' \overrightarrow{\text{grad}}(n) \quad (10)$$

$$d(n\vec{u}) = nd\vec{u} + \vec{u}dn \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{d\vec{r}}{ds} \quad \text{et} \quad dn = \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot d\vec{r} \quad (11)$$

On multiplie par \vec{u} :

$$(nd\vec{u} + \vec{u}dn) \cdot \vec{u} = (a' \overrightarrow{\text{grad}}(n)) \cdot \vec{u} \quad (12)$$

$$dn = a' \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad (13)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(n) d\vec{r} = a' \overrightarrow{\text{grad}}(n) \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right) \quad (14)$$

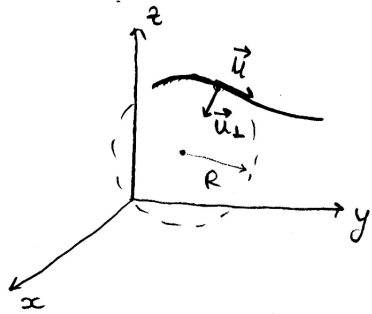
Ce qui donne $a' = ds$. On obtient finalement la loi fondamentale de l'optique géométrique :

$$\boxed{\frac{d(n\vec{u})}{ds} = \overrightarrow{\text{grad}}(n)} \quad (15)$$

Cette relation nous confirme que dans un milieu homogène ($n = cte$) le rayon se propage en ligne droite ($\vec{u} = cte$). A l'inverse, dans un milieu inhomogène, l'existence d'un gradient d'indice

fait courber les rayons lumineux. On peut faire une analogie entre la loi fondamentale de la mécanique et la loi qu'on vient de trouver. En optique c'est le gradient d'indice qui courbe la trajectoire de la même façon qu'en mécanique c'est le gradient de l'énergie potentielle.

Nous pouvons étudier plus précisément comment se courbent les rayons. On se place dans le trièdre de Frenet :



$$\frac{\vec{u}_\perp}{R} = \frac{d\vec{u}}{ds}$$

$$\frac{d(n\vec{u})}{ds} = n \frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{u} \frac{dn}{ds} = \overrightarrow{grad}(n)$$

En prenant le produit scalaire avec le vecteur normal on aboutit à la relation :

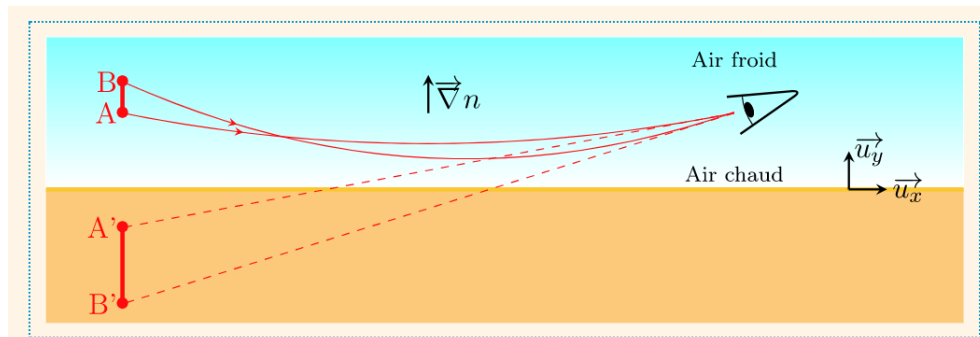
$$\boxed{\frac{n}{R} = \vec{u}_\perp \cdot \overrightarrow{grad}(n)}$$

Etant donné que le rayon de courbure est positif, l'angle entre \vec{u}_\perp et $\overrightarrow{grad}(n)$ est nécessairement aigu.

La concavité du rayon est donc tournée dans le sens du $\overrightarrow{grad}(n)$.

Transition Nous allons maintenant appliquer ce résultat au cas des mirages et des fibres optiques.

3.2 Application : mirage



Vidéo minute 2'20" principe du mirage : <https://www.youtube.com/watch?v=J22D4tQu5GI>

Le gradient d'indice dépend de la température. Ces mirages sont liés à la courbure des rayons à proximité du sol surchauffé. En effet, l'air chaud étant moins dense que l'air froid, l'indice optique augmente avec l'altitude ce qui fait naître un gradient d'indice vertical. Par conséquent, les rayons se courbent comme indiqué sur la Figure ci-dessus (comme nous avons montré précédemment, la concavité du rayon est dans la direction du gradient). L'observateur voit une image virtuelle du ciel en surimpression du sol.

On peut trouver la courbure des rayons grâce au principe de Fermat et les équations d'Euler Lagrange.

$$L(AB) = \int_A^B n(y) ds = \int_A^B n(y) \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{y_A}^{y_B} n(y) \sqrt{1 + x'(y)^2} dy \quad (16)$$

Principe de Fermat : rendre stationnaire $\int_{y_A}^{y_B} f(y, x(y), x'(y)) dy$. Application des équations d'Euler Lagrange :

$$\frac{\delta f}{\delta x} = \frac{d}{dy} \left(\frac{\delta f}{\delta x'} \right) \quad \text{c'est à dire} \quad 0 = \frac{d}{dy} \left(\frac{nx'}{\sqrt{1 + x'^2}} \right) \quad (17)$$

On en déduit :

$$\frac{nx'}{\sqrt{1 + x'^2}} = a = Cte \quad (18)$$

La constante d'intégration a représente l'indice de réfraction au sommet de la courbe, lorsque $x' \rightarrow \pm\infty$. Si on note (x_0, y_0) les coordonnées du sommet, on a $a = n(y_0)$. Si on sépare les variables on obtient :

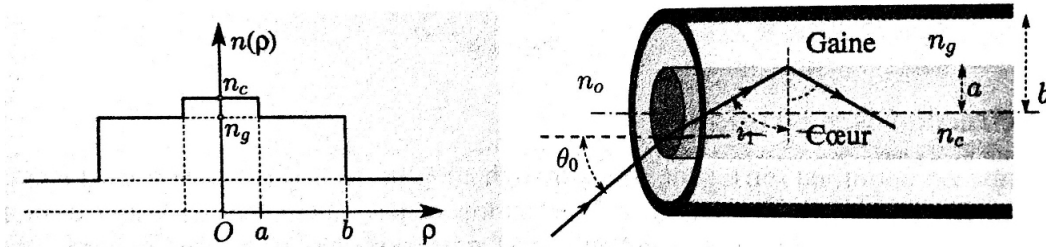
$$dx = \frac{\pm a}{\sqrt{n^2 - a^2}} dy$$

On choisit pour simplifier un modèle linéarisé de n^2 : $n^2 = a^2 + \alpha(y - y_0)$ où $\alpha > 0$. En substituant sur l'équation précédente et en intégrant on trouve :

$$y = y_0 + \frac{\alpha}{4a^2} (x - x_0)^2$$

Le rayon lumineux adopte une trajectoire parabolique dont la courbure est d'autant plus prononcée que le gradient d'indice est important

3.3 Application : fibre optique à saut d'indice



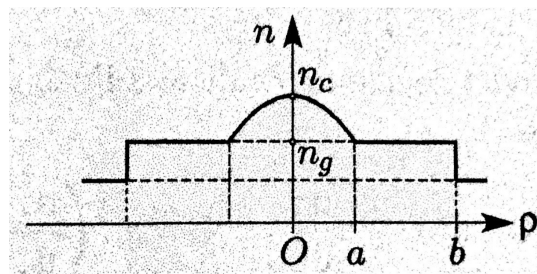
Calcul fait Pérez pag 16.

Vidéo minute 1'47" montrer le principe de la fibre à saut d'indice : <https://www.youtube.com/watch?v=J22D4tQu5GI>

Problème fibre à saut d'indice : différents angles, le temps de parcours de l'information pour un rayon qui est sur l'axe est inférieur que pour un rayon qui est à i_{lim} . Il y un phénomène de **dispersion**. Système non stigmatique.

Ordres de grandeur : dispersion relative de 20%, 1 ns pour 5 m de fibre, 100 MHz.

Pour surmonter ce problème on utilise des **fibres à gradient d'indice** (Pérez pag 206). Système stigmatique.



Conclusion

Résumé. Nous avons vu que le principe de Fermat est un **principe variationnel** qui permet de retrouver tous les résultats de l'optique géométrique. C'est aussi un outil commode pour l'étude de l'optique dans un milieu non homogène, ce qui nous a permis d'obtenir la loi fondamentale de l'optique. Nous avons ensuite cité l'analogie entre le principe de Fermat et le principe de moindre action en mécanique. Ce résultat nous a amenés à l'explication des phénomènes comme les mirages ou le cheminement de la lumière dans les fibres optiques à gradient d'indice, qui jouent un rôle de plus en plus important grâce à leurs propriétés stigmatiques notamment dans le cas des connexions Internet à très haut débit. [OdG vitesse de connexion Internet fibre personnelle : 100 Mbits/s](#), [ADSL : 10 Mbits/s](#).

Ouverture. Le principe de Fermat permet aussi de faire le lien entre l'optique géométrique et l'optique ondulatoire grâce au **théorème de Malus**.