

Électromagnétisme

Quelques exercices classiques corrigés

Brahim Lamine

brahim.lamine@irap.omp.eu



Université
de Toulouse

« Le bonheur c'est de chercher » JULES RENARD

Ouvrages de référence

Ouvrages introductifs :

- Tout livre de niveau prépa (Hprépa, précis etc...).
- « Physique 2 : Électricité et magnétisme » Eugène Hecht (De Boek Université) ;

Ouvrages plus élaborés

- « Electromagnétisme » (tome 1), Bertin-Faroux-Renaud.
- « Électromagnétisme », Perez.

Ouvrages avancés

- « Classical electrodynamics », Jackson.
- « Electromagnétisme », cours en ligne de Jean-Michel Raimond
<http://www.phys.ens.fr/cours/notes-de-cours/jmr/electromagnetisme.htm>
- « Classical electromagnetic theory », Vanderlinde.

Thématiques des exercices

— Champ électrostatique	p. 1
— Modèles d'atome	p. 20
— Modèles d'électron	p. 26
— Piège de Penning	p. 34
— Dipole électrostatique	p. 40
— Magnétostatique	p. 43
— Force de Laplace	p. 64
— Induction	p. 72

Champ électrostatique

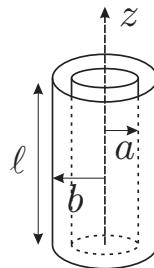
I Exercices élémentaires classiques

I.1 Applications directes de la formule donnant le champ électrique

1. Calculer le champ électrique au centre d'une *demi-sphère* chargée uniformément σ .
2. Calculer le champ électrique au centre d'une *demi-boule* chargée uniformément ρ .
3. Soit un disque uniformément chargé $\sigma > 0$ en surface. Calculer le champ électrique en un point M sur l'axe de révolution, à la distance z du disque.

I.2 Applications directes du théorème de Gauss

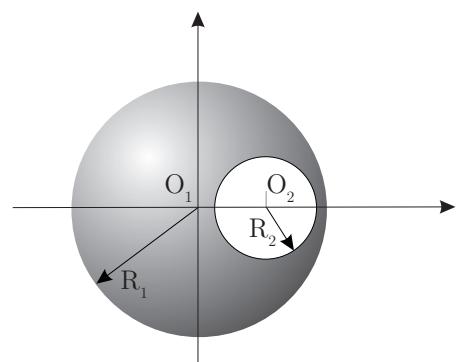
1. Calculer le champ électrique de part et d'autre d'un plan uniformément chargé en surface σ .
2. Calculer le champ électrique d'un fil uniformément chargé en longueur λ .
3. Calculer la capacité d'un condensateur cylindrique tel que représenté ci-dessous ($\ell \gg (b - a)$).



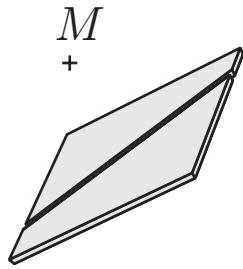
I.3 Théorème de superposition

1. On considère une boule uniformément chargée ρ , de centre O_1 et de rayon R_1 , dans laquelle existe une cavité creuse de centre O_2 et de rayon R_2 telle que représentée sur la figure ci-dessous.

- a) Montrer que le champ électrique dans la cavité est uniforme et donner son expression en fonction de ρ , ε_0 et du vecteur $\overrightarrow{O_1 O_2}$.
- b) Tracer les lignes du champ électrique dans la cavité.

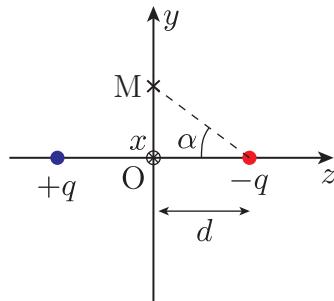


2. On considère un plan infini chargé σ sur lequel il existe une rayure très fine de largeur a , droite, et de longueur infinie. Calculer le champ électrique en tout point.



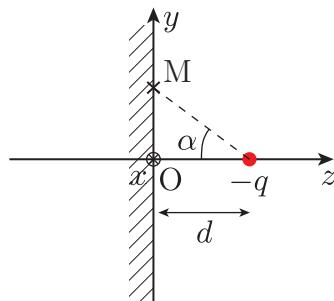
II Interactions molécule-surface [méthode des images]

On considère un système de deux charges $(+q, -q)$ séparées d'une distance $2d$ ($q > 0$).



1. Représenter les lignes du champ électrique.
2. Justifier que pour les points appartenant au demi-espace $z > 0$, la situation précédente est complètement équivalente à celle qui consiste à placer un conducteur plan en $z = 0$ relié à la masse ($V = 0$), et une charge $-q$ à une distance d du plan.

À partir de maintenant, on considère donc cette nouvelle situation.



3. Justifier qu'il doit apparaître une distribution surfacique de charge σ sur le conducteur donnée par

$$\sigma = \frac{q \cos^3 \alpha}{2\pi d^2}$$

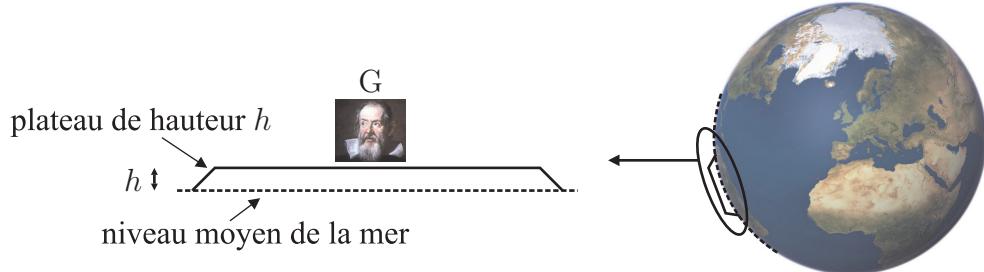
Commenter (en particulier la charge totale sur la surface).

On remplace désormais la charge $-q$ par un dipôle électrostatique permanent \vec{p} .

4. Calculer l'énergie d'interaction du dipôle avec la surface.
5. En moyennant sur les différentes directions possibles du dipôle, supposées équiprobables, montrer que l'énergie d'interaction molécule-surface se met sous la forme $-K/d^3$. Comment appelle-t-on cette interaction ?

III Analogie gravitation - correction de Bouguer

Le champ de pesanteur moyen g_0 au niveau de la mer vaut $g_0 \approx 9,81 \text{ m.s}^{-1}$. On se propose de calculer dans cet exercice la modification du champ de pesanteur lorsque celui-ci est mesuré par monsieur G sur un haut plateau chilien situé à l'altitude $h = 1000 \text{ m}$ par rapport au niveau de la mer. On fait les hypothèses suivantes : le plateau est de masse volumique $\rho_p = 2670 \text{ kg.m}^{-3}$ uniforme et on le suppose suffisamment étendu dans les directions horizontales pour pouvoir le supposer **plan** et **infini** pour les calculs qui nous intéressent.



1. Calculer $\delta g = g - g_0$, la modification du champ de pesanteur en fonction de G, ρ_p et h .
2. Faire l'application numérique pour δg (on donne $G \approx 6,7 \times 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$) et commenter.

IV Atmosphère

Le champ électrique dans l'atmosphère, au voisinage de la Terre supposée conductrice, est dirigé vers le centre de celle-ci et vaut :

- au voisinage immédiat du sol $E(r = 0^+) = -150 \text{ V.m}^{-1}$;
- à l'altitude $H = 1 \text{ km}$, $E(r = H) = -30 \text{ V.m}^{-1}$.

1. Justifier qu'il existe une distribution surfacique de charge σ sur le sol terrestre. D'après les hypothèses, quel est le signe de cette charge ?
2. Exprimer σ et faire l'application numérique de la charge totale stockée à la surface de la Terre.
3. Justifier désormais que les hypothèses impliquent qu'il existe également une distribution volumique de charges ρ dans l'atmosphère. Cette distribution volumique de charge est constituée d'ions libres.

Puisque H est très petit devant le rayon de la Terre, on pourra supposer que l'atmosphère est modélisé par le demi-espace $z > 0$ et négliger la courbure de la Terre.

4. Montrer que dans l'hypothèse où on peut supposer ρ constant, celle-ci s'écrit

$$\rho = \frac{\epsilon_0}{H} (E(H) - E(0))$$

Faire l'application numérique (et commenter son signe).

5. Calculer $E(z)$ en fonction de $E(0)$, H et $E(H)$ dans la couche comprise entre le sol et l'altitude z .
6. En déduire la différence de potentiel U entre le sol et l'altitude $z = H$. D'après vous, qu'est-ce qui entretient cette différence de potentiel ?

V Écrantage - flocculation de colloïdes

Une particule colloïdale peut être assimilée, en première approximation, à une sphère de grand diamètre, à l'échelle atomique, portant une densité superficielle de charge σ . En suspension dans un électrolyte, cette particule est entourée d'une gaine ionique qui modifie ses propriétés physico-chimiques. On se propose de déterminer ici quelques caractéristiques électrostatiques de ce phénomène.

Dans un but de simplification :

- la particule colloïdale est assimilée, en tout point de la surface, à son plan tangent. Ainsi donc, le problème est ramené à l'étude de la gaine ionique qui vient recouvrir un plan que l'on suppose infini et uniformément chargé (densité superficielle de charge σ). Ce plan est au contact de l'électrolyte situé dans le demi-espace des x positifs. Dans le demi-espace des x négatifs (intérieur de la particule colloïdale), le champ électrique est supposé nul.
- L'électrolyte est constitué d'ions I_+ portant une charge positive $+q$ et d'ions I_- portant la charge négative $-q$. Du fait de l'existence d'un équilibre thermodynamique, on peut montrer que les nombres $n_+(x)$ et $n_-(x)$ d'ions I_+ et I_- par unité de volume peuvent s'écrire :

$$n_+(x) = n_0 \exp\left(-\frac{qV(x)}{k_B T}\right) \quad , \quad n_-(x) = n_0 \exp\left(+\frac{qV(x)}{k_B T}\right) \quad (1)$$

où n_0 est une constante, $V(x)$ représente le potentiel à l'abscisse x , k_B est la constante de Boltzman et T la température.

1. Trouver une équation différentielle satisfaite par $V(x)$.
2. Donner les solutions générales de cette équation dans le cas où l'énergie thermique est très grande devant l'énergie électrostatique ($qV(x) \ll k_B T$ pour tout x).
3. Montrer que la solution physiquement acceptable s'écrit $V(x) = A \exp(-\frac{x}{D})$. Donner l'expression de D . Tracer $V(x)$ et discuter l'effet de la gaine ionique.
4. Utilisez le théorème de Gauss pour déterminer A en fonction des données du problème.
5. Montrer que le potentiel de la particule colloïdale a la même expression que la différence de potentiel qui existe entre les armatures d'un condensateur qui sont distants de D et pour lesquels la densité superficielle de charge est σ .
6. À partir du modèle précédent, expliquer qualitativement pourquoi l'ajout de sel à un colloïde le fait précipiter (on parle de flocculation). Ce même phénomène explique (une partie de) la sédimentation des estuaires comme provenant de la flocculation des particules d'argile de charge négative au contact des cations contenus dans l'eau de mer.

VI Loi de Child-Langmuir

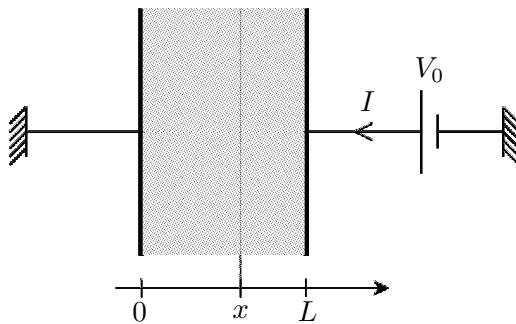
Soient deux électrodes planes, parallèles, distantes de L , d'aire S et séparées par le vide. On porte l'une des électrodes au potentiel nul et l'autre au potentiel V_0 positif. Des électrons de charge de charge $-e$ et de masse m sont émis par l'électrode de potentiel nul à vitesse nulle et se dirigent sous l'action du champ électrique qui règne entre les électrodes vers celle de potentiel V_0 d'abscisse $x = L$. On a donc une densité non nulle d'électrons entre les électrodes, ce qui constitue une « charge d'espace ». On se propose d'établir la caractéristique



FIGURE 1 – À gauche, floculation de fines particules colloïdale dans l'estuaire de la Betsiboka sur la côte Nord-Ouest de Madagascar. À droite, un verre de lait, qui est une suspension colloïdale.

courant-tension, c'est-à-dire la relation entre l'intensité I et la différence de potentiel V_0 . On définit :

- $n(x)$ le nombre d'électrons par unité de volume à l'abscisse x ,
- $v(x)$ leur vitesse à l'abscisse x ,
- $V(x)$ le potentiel électrique à l'abscisse x .



1. Écrire l'équation différentielle liant $V(x)$ à $n(x)$:
2. Exprimer $n(x)$ en fonction de $V(x)$ et des données du problèmes que sont le courant I , S , ϵ_0 , e et m .
3. On cherche une solution de l'équation précédente sous la forme $V(x) = V_0 \left(\frac{x}{L}\right)^a$. Quelle doit être la valeur de a ?
4. En déduire la relation entre l'intensité I et le potentiel V_0 .
5. APPLICATION NUMÉRIQUE : calculer la valeur de l'intensité I pour $S = 1 \text{ cm}^2$, $L = 1 \text{ mm}^2$ et $V_0 = 1 \text{ V}$. On rappelle les valeurs numériques suivantes :

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ S.I.} \quad e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \quad m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

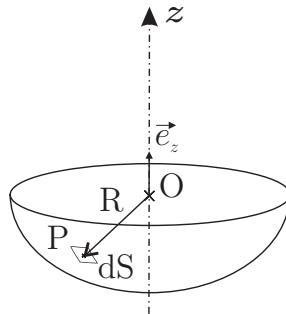
Correction

I Exercices élémentaires classiques

I.1 Applications directes de la formule donnant le champ électrique

Tout plan contenant le point O et l'axe (Oz) est un plan de symétrie, donc le champ $\vec{E}(O)$ en O doit appartenir à tous ces plans, donc il est selon (Oz). Comme le demi-disque est chargé positivement le champ électrique doit être dirigé selon $+\vec{e}_z$:

$$\vec{E}(O) = E(O)\vec{e}_z \quad , \quad E(O) > 0 \quad (1)$$

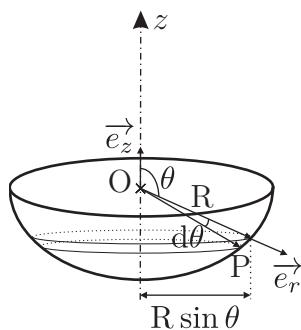


$$\text{Cas volumique } \rho : \quad \vec{E}(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P\epsilon V} \frac{\rho \vec{PO}}{||\vec{PO}||^3} dV \quad (2)$$

$$\text{Cas surfacique } \sigma : \quad \vec{E}(O) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{P\epsilon S} \frac{\sigma \vec{PO}}{||\vec{PO}||^3} dS \quad (3)$$

- Découpage de la demi-sphère en petites bandelettes qui respectent la symétrie (voir figure). La surface dS de la bandelette s'écrit comme le produit de sa hauteur $Rd\theta$ par sa circonférence $2\pi R \sin \theta$:

$$dS = Rd\theta \times 2\pi R \sin \theta \quad (4)$$



Ensuite on a $||\vec{PO}|| = R$ et $\vec{PO} = -R\vec{e}_r$. Le champ est dirigé selon l'axe (Oz), on obtient sa norme en multipliant scalairement l'équation (3) par le vecteur unitaire \vec{e}_z :

$$\begin{aligned}
 E(O) &= \vec{E}(O) \cdot \vec{e}_z = -\frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0 R^2} \int_{\theta=\pi/2}^{\theta=\pi} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_r \times 2\pi R^2 \sin \theta d\theta \\
 E(O) &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = -\frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} \cos(2\theta) \right]_{\pi/2}^{\pi} \\
 E(O) &= \frac{\sigma}{4\epsilon_0}
 \end{aligned} \quad (5)$$

REMARQUE : On peut comparer ce résultat au cas du plan chargé qui donne $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$.

2. Découpage en couronne sphérique de rayon r compris entre 0 et R , dont le volume s'écrit, à partir de l'expression (4) de dS :

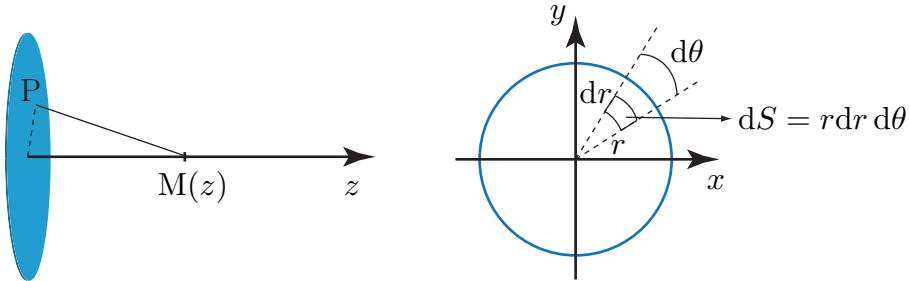
$$dV = dS(r) \times dr = 2\pi r^2 \sin \theta dr d\theta \quad (6)$$

Donc on a pour la norme du champ électrique en O, en utilisant (2) :

$$\begin{aligned} E(O) &= \vec{E}(O) \cdot \vec{e}_z = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_{\theta=\pi/2}^{\theta=0} \int_{r=0}^{r=R} \frac{\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r}{r^2} \times 2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr \\ E(O) &= \frac{\rho R}{4\epsilon_0} \end{aligned} \quad (7)$$

3. La formule générale s'écrit

$$\vec{E}(M) = \iint_P dS \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{PM}}{PM^3}$$



Les considérations de symétries permettent de déterminer que le champ \vec{E} est le long de l'axe (Oz), dans le sens des z croissants car $\sigma > 0$. En effet, tout plan contenant l'axe (Oz) étant un PS, \vec{E} en un point M de cet axe doit appartenir à l'intersection de tous ces plans, donc à l'axe (Oz). On choisit évidemment le système de coordonnées cylindriques. On a alors $\vec{E}(M) = E(z) \vec{e}_z$. On projette l'équation précédente sur \vec{e}_z pour obtenir $E(z)$

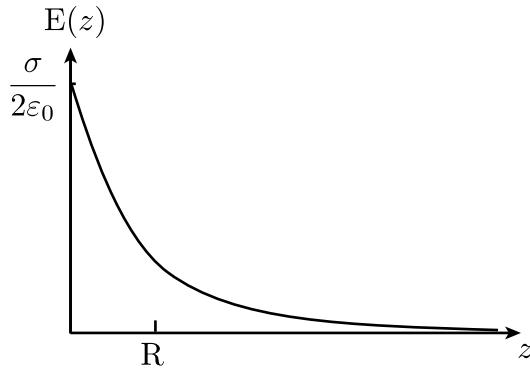
$$\vec{E} \cdot \vec{e}_z = E(z) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \iint_P dS \frac{\vec{PM} \cdot \vec{e}_z}{PM^3}$$

Or $\vec{PM} \cdot \vec{e}_z = z$, $dS = r dr d\theta$, $PM = (r^2 + z^2)^{1/2}$

Donc $E(z) = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[-\frac{1}{(r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_0^R$

C'est-à-dire $E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \sqrt{\frac{z^2}{z^2 + R^2}} \right)$

Le champ électrique décroît avec r , comme il se doit, l'échelle caractéristique étant donnée par le rayon R du disque.



I.2 Applications directes du théorème de Gauss

1.
 - Symétries (tout plan contenant M et perpendiculaire au plan est un PS) : $\vec{E} = E(x, y, z)\vec{e}_z$, où l'axe z est perpendiculaire au plan chargé.
 - Invariance (translation selon x et y) : $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$.
 - Théorème de Gauss sur un cube entièrement dans un demi-espace \Rightarrow le champ ne dépend pas de z , donc il est uniforme dans chaque demi-espace et égal en norme par symétrie.
 - Théorème de Gauss sur un cube à cheval sur le plan :

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z \quad , \quad z > 0$$

2. À la vue des symétries, le champ électrique est perpendiculaire au fil, dirigé radialement vers l'extérieur du fil si $\lambda > 0$. En effet, le plan contenant le point M et le fil, ainsi que le plan contenant M et perpendiculaire au fil sont tous les deux des plans de symétrie. Le champ électrique appartient donc à leur intersection.

Une surface de Gauss \mathcal{S}_r en forme de cylindre de rayon r est donc bien adaptée. En effet, sur les faces supérieures et inférieures, le champ est perpendiculaire au vecteur surface $d\vec{S}$, et sur la face latérale, \vec{E} et $d\vec{S}$ sont alignés et leur produit scalaire est constant. On obtient donc

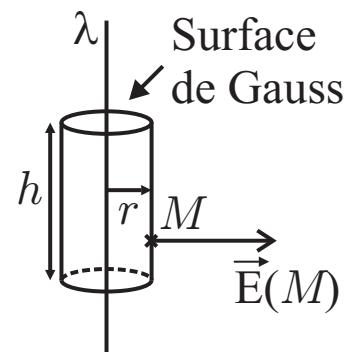
$$\oint_{\mathcal{S}_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Avec $Q_{\text{int}} = \lambda \times h$, on obtient

$$2\pi r h E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

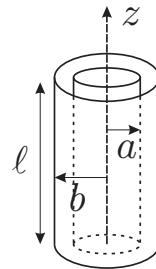
Et donc

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0}$$



3. Si on appelle Q_a et Q_b les charges sur les surfaces intérieur et extérieur, alors par définition

$$C = \frac{Q_b}{V_b - V_a}$$



Il faut donc calculer V_b et V_a . Le théorème de Gauss sur un cylindre de rayon r et de hauteur $h \ll \ell$ compris entre les deux armatures donne

$$2\pi rh E(r) = \frac{Q_a}{\ell\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad E(r) = \frac{Q_a}{2\pi r\ell\epsilon_0}$$

La relation $E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$ nous permet d'obtenir $V(r)$ (à une constante près) :

$$V(r) = -\frac{Q_a}{2\pi\ell\epsilon_0} \ln(r) + V_0$$

Ensuite, la neutralité du condensateur implique que $Q_a = -Q_b$, donc

$$V_b - V_a = \frac{Q_b}{2\pi\ell\epsilon_0} (\ln(b) - \ln(a)) = \frac{Q_b}{2\pi\ell\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Et donc

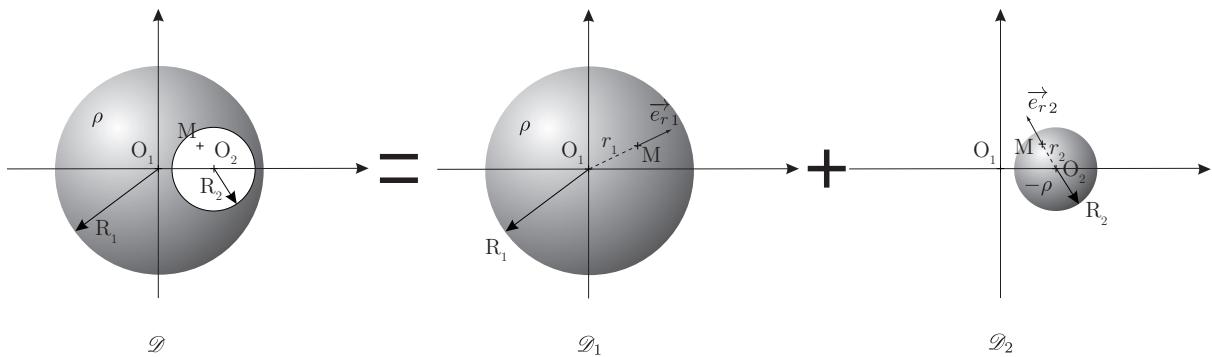
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\ell}{\ln(b/a)}$$

I.3 Théorème de superposition

1. La distribution \mathcal{D} (la boule avec une cavité creuse) peut être remplacée par la superposition des deux distributions de charge \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 suivante

- \mathcal{D}_1 : boule pleine de centre O_1 , de rayon R_1 et de densité volumique de charge ρ .
- \mathcal{D}_2 : boule pleine de centre O_2 , de rayon R_2 et de densité volumique de charge $-\rho$.

Ainsi, on retrouve bien que $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$.



a) Le théorème de superposition permet d'écrire

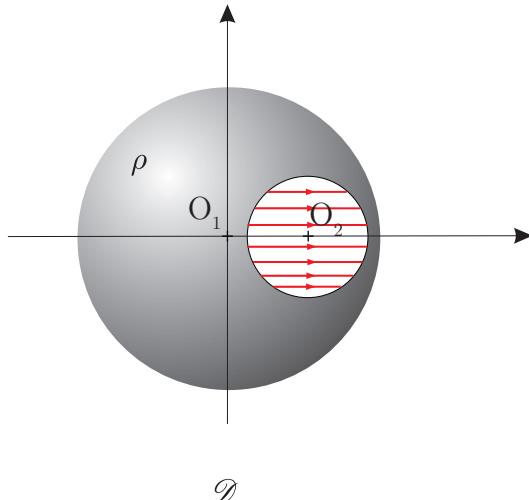
$$\vec{E}(M) = \vec{E}_1(M) + \vec{E}_2(M)$$

Les deux distributions \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont des boules, donc le champ électrique s'écrit, en utilisant le résultat de l'exercice 1,

$$\vec{E}_1(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r_1 \vec{e}_{r1} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 M} \quad \text{et} \quad \vec{E}_2(M) = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_2 M}$$

$$\text{On en déduit } \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\overrightarrow{O_1 M} - \overrightarrow{O_2 M}) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \overrightarrow{O_1 O_2}}$$

- b) On constate que le champ électrique est constant dans la cavité et dirigé selon $\overrightarrow{O_1O_2}$. Les lignes de champs sont donc des droites parallèles.



2. On suppose pour simplifier que le point M est au dessus de la rainure (c'est-à-dire que la projection orthogonale du point M sur le plan appartient à la rainure). On va appliquer le théorème de superposition, car on peut remplacer ce problème par un plan infini chargé σ + un fil infini de charge opposée à la charge rajoutée pour compléter le plan ; en effet, l'intérêt d'une telle décomposition est que l'on connaît la solution pour chacun de ces deux problèmes pris séparément. Comme le plan est chargé uniformément σ et que la rainure a une largeur a , la charge linéique du fil équivalent est égale à $-\sigma a$. En appelant \vec{n} le vecteur unitaire perpendiculaire au plan et d la distance du point M au plan, on obtient immédiatement :

$$\vec{E}(M) = \left(\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{\sigma a}{2\pi d \epsilon_0} \right) \vec{n}$$

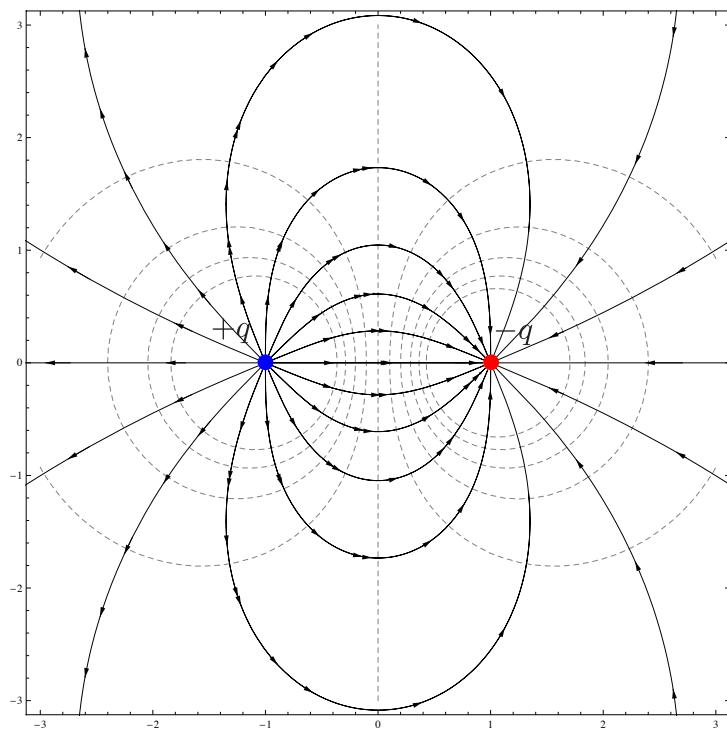
Ou encore

$$\boxed{\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{a}{\pi d} \right) \vec{n}}$$

Pour que l'on puisse approximer la rainure à un fil, il faut que le point M soit loin du plan par rapport à la longueur a , donc l'expression précédente est valable si $a \ll d$.

II Interactions molécule-surface [méthode des images]

1. Il s'agit des lignes de champ d'un dipole électrostatique.



2. Cherchons l'ensemble des points M tels que $V(M) = 0$.

Ainsi,

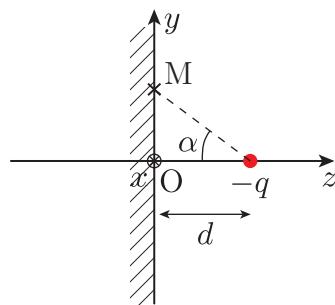
$$V(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 AM} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 BM}$$

Donc

$$V(M) = 0 \Leftrightarrow AM = BM$$

M doit être équidistant des deux charges, donc il appartient au plan médiateur, c'est-à-dire le plan (xOy).

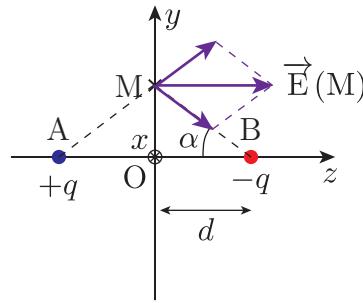
D'après les théorèmes d'unicité de l'équation de Poisson $\Delta V = 0$, la solution des deux problèmes est unique car ils satisfont aux même conditions aux limites de Dirichlet ($V = 0$ sur le plan et à l'infini).



3. On dispose une charge négative en face d'un conducteur. Comme les électrons du conducteur sont libres de se déplacer, ils vont fuire la charge $-q$ et rejoindre la masse. Le conducteur va donc se charger positivement (en surface car un conducteur ne peut se charger qu'en surface), donc on s'attend à $\sigma > 0$.

En utilisant le théorème de Coulomb, $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$, Pour le champ électrique, il suffit d'utiliser la distribution image. D'après le théorème de superposition,

$$\vec{E}(M) = \vec{E}_{+q}(M) + \vec{E}_{-q}(M) = \frac{q\vec{AM}}{4\pi\epsilon_0 AM^3} - \frac{q\vec{BM}}{4\pi\epsilon_0 BM^3} = \frac{q\vec{AB}}{4\pi\epsilon_0 BM^3}$$



car $AM = BM$ sur le plan médiateur. On retrouve que la somme vectoriel est dirigé selon \vec{e}_z (xOy est un plan d'antisymétrie).

$$BM = \frac{d}{\cos \alpha} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = 2d \vec{e}_z$$

Ainsi,

$$\vec{E}(M) = \frac{q \cos^3 \alpha}{2\pi\epsilon_0 d^2}$$

On obtient immédiatement

$$\boxed{\sigma = \epsilon_0 \|\vec{E}\| = \frac{q \cos^3 \alpha}{2\pi d^2}}$$

La charge totale s'écrit

$$Q_{\text{surface}} = \int_0^\infty 2\pi r \sigma dr$$

Or,

$$r = d \tan \alpha \quad \Rightarrow \quad dr = \frac{d}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

Et donc

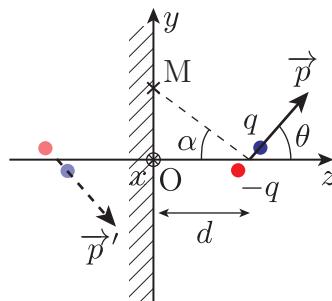
$$Q_{\text{surface}} = \int_0^{\pi/2} 2\pi d \tan \alpha \frac{q \cos^3 \alpha}{2\pi d^2} \frac{d}{\cos^2 \alpha} d\alpha$$

C'est-à-dire

$$\boxed{Q_{\text{surface}} = q \int_0^{\pi/2} \sin \alpha d\alpha = q}$$

Autrement dit la charge totale déposée sur la surface est l'opposé de la charge $-q$ disposée devant elle. Cela est évident car il y a une influence électrostatique totale (toute ligne de champ quittant la charge $-q$ arrive sur la surface et vice-versa). Par ailleurs, on retrouve rapidement ce résultat de façon générale en appliquant le théorème de Gauss sur une sphère centrée sur la charge et dont le rayon R tend vers l'infini, $\Phi(R \rightarrow \infty) \rightarrow 0$, donc $Q_{\text{int}}(R \rightarrow \infty) = Q_{\text{surface}} + (-q) = 0$.

4. En considérant le dipôle \vec{p} comme l'association de deux charges $(+q, -q)$, on voit immédiatement que la situation d'un dipôle face à une surface conductrice est équivalente à deux dipôles antisymétriques l'un par rapport à l'autre (cf figure).



Ainsi, l'énergie potentielle électrostatique s'écrit

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}'$$

Avec

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{3(\vec{p}' \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}'}{r^3} = \frac{p}{32\pi\varepsilon_0 d^3} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin\theta \\ 2\cos\theta \end{pmatrix}$$

On a utilisé $|\vec{p}'| = |\vec{p}| \equiv p$. On obtient finalement

$$E_p = -\frac{p^2}{32\pi\varepsilon_0 d^3} (1 + \cos^2\theta)$$

5. En moyennant sur les orientations, on obtient

$$\langle E_p \rangle = \frac{\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi E_p(\theta)}{\int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi}$$

C'est-à-dire

$$\langle E_p \rangle = -\frac{p^2}{24\pi\varepsilon_0 d^3}$$

On retrouve ainsi la force de van der Waals.

Remarque : la dépendance en $1/d^3$ n'est en fait valable que pour des distances d suffisamment grandes : trop près de la surface, des effets dus aux temps finis de propagation des interactions interviennent, et des termes en $1/z^4$ apparaissent : on passe au cas de l'interaction de Casimir-Polder.

Le calcul a été fait ici pour un dipôle quelconque sans plus de précision. Si l'on faisait l'expérience avec un atome, même sans dipôle permanent (orbitale s par exemple), on observerait quand même une telle interaction. C'est la moyenne de p^2 (fluctuations quantiques) et non celle de p qui caractérise la force de l'interaction.

III Analogie gravitation - correction de Bouguer

1. Analogie avec l'électrostatique. Pour une tranche d'épaisseur h , on trouve à l'aide du théorème de Gauss que

i) pour $z > h/2$: $E(z)S - E(-z)S = \frac{\rho Sh}{\varepsilon_0}$

Donc $E(z) = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0}$

i) pour $0 < z < h/2$: $E(z)S - E(-z)S = \frac{\rho S 2z}{\varepsilon_0}$

Donc $E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0}$

On retrouve le cas du plan infini par la limite $h \rightarrow 0$ et $\rho h = \text{constante}$. Si on ajoute désormais un champ constant E_0 , on obtient.

$z > h/2$ $E(z) = \frac{\rho h}{2\varepsilon_0} - E_0$

$$z < -h/2$$

$$\boxed{E(z) = - \left(\frac{\rho h}{2\epsilon_0} + E_0 \right)}$$

Au dessus du plateau Chilien, en analogie avec e qui précède (cas $z > h/2$ pour être au dessus du plateau), et en notant $\vec{g} = -g\vec{u}_z$, on voit que

$$-g = -2\pi G \rho_p h - g_0$$

Donc

$$\boxed{\delta g = g - g_0 = 2\pi G \rho_p h > 0}$$

On retrouve le fait que le champ gravitationnel est plus important qu'en l'absence du plateau, ce qui est normal car le plateau participe à nous attirer (un peu) vers le bas !

2. AN

$$\boxed{\delta g \sim 10^{-3} \text{ m.s}^{-2} \Rightarrow \frac{\delta g}{g_0} \sim 10^{-4} \ll 1}$$

Donc la modification du champ de gravité est faible. Il faudrait la comparer à la variation du champ de gravité dû au fait que G est plus loin du centre de la Terre, ce qui donne cette fois une contribution négative

$$\delta g = -\frac{GM}{R^3} h \sim -3 \times 10^{-3} \text{ m.s}^{-2}$$

Autrement dit la contribution « naturelle » de diminution de g est trois fois plus importante que celle liée à la présence du plateau (et de signe opposé).

IV Atmosphère

- Le champ juste au dessus de la surface de la Terre est non nul et dirigé vers le centre. Grâce au théorème de Gauss appliqué à une sphère de rayon R légèrement supérieur au rayon R_{\oplus} de la Terre, on en déduit qu'il existe une charge intérieure à cette sphère. Comme la Terre est un conducteur, cette charge est nécessairement répartie en surface (si le rayon R de la sphère de Gauss s'approche suffisamment du rayon R_{\oplus} de la Terre, on peut négliger la présence éventuelle de charges dans l'atmosphère entre R et R_{\oplus}). Enfin, puisque le champ électrique est dirigé vers le centre de la Terre, les charges doivent être négatives,

$$\boxed{\sigma < 0}$$

- On retrouve les résultats de la question précédente et une expression de σ à l'aide du théorème de Coulomb, qui donne à l'**équilibre** la relation entre la charge surfacique sur un conducteur et le champ électrique au voisinage immédiat de celui-ci

$$\boxed{\vec{E}(0^+) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \epsilon_0 E(0^+) \simeq -1 \text{ nC.m}^{-2}}$$

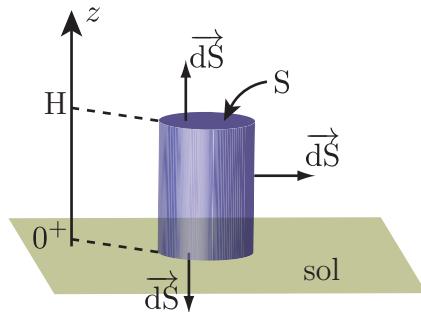
C'est une valeur assez faible, car frotter un baton d'ébonite permet d'arracher une centaine de nC sur une surface beaucoup plus petite que 1 m^2 .

- On applique le théorème de Gauss sur un cylindre § de base S et de hauteur H posé juste au dessus du sol, entre $z = 0^+$ et $z = H$.

$$\frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = \oint_{\S} \vec{E} \cdot d\vec{S} = (E(H) - E(0^+))S$$

On en déduit

$$\boxed{Q_{\text{int}} > 0}$$



Ainsi, l'atmosphère doit être chargée positivement, c'est-à-dire qu'il doit apparaître une distribution volumique de charge $\rho > 0$. Au bout du compte, ce résultat est normal car la Terre devant être globalement neutre, si le sol est chargé négativement, il faut que des charges positives apparaissent quelque part (ici dans l'atmosphère).

4. Si ρ est supposé constant,

$$Q_{\text{int}} = \rho S H$$

Et donc

$$\boxed{\rho = \frac{\varepsilon_0}{H} (E(H) - E(0^+)) \simeq 1 \text{ pC.m}^{-3}}$$

5. On applique cette fois le théorème de Gauss sur un parallélépipède entre 0^+ et l'altitude z . On obtient aisément

$$(E(z) - E(0^+))S = \frac{\rho Sz}{\varepsilon_0}$$

Donc

$$\boxed{E(z) = \frac{\rho z}{\varepsilon_0} + E(0^+) = E(0^+) \left(1 - \frac{z}{H}\right) + \frac{z}{H} E(H)}$$

6. La relation entre champ électrique et potentiel s'écrit

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \quad \Rightarrow \quad E(z) = -\frac{dV}{dz}$$

Donc

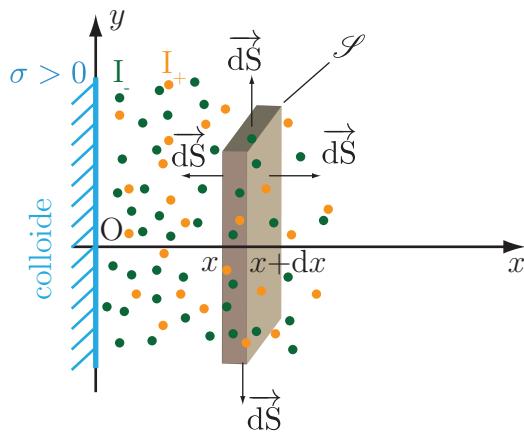
$$V(z) - V(0^+) = -\frac{\rho z^2}{2\varepsilon_0} - E(0^+)z$$

Et ainsi

$$\boxed{U \equiv V(0^+) - V(H) = \frac{H}{2} (E(H) + E(0^+))}$$

Les éclairs (donc les orages) participent à l'entretien de cette différence de potentiel.

V Écrantage - flocculation de colloïdes



- Les considérations de symétries et d'invariances permettent d'écrire

$$\vec{E}(M) = E(x) \vec{e}_x \quad , \quad V = V(x)$$

car les plans $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(M, \vec{e}_x; \vec{e}_z)$ sont des plans de symétries et que la distribution est invariante par translation selon y et z . L'équation de Poisson permet d'écrire

On obtient finalement

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{2qn_0}{\varepsilon_0} \operatorname{sh}\left(\frac{qV(x)}{k_B T}\right) = 0$$

On peut retrouver cette expression en appliquant le théorème de Gauss sur un parallélépipède entre x et $x + dx$.

- Avec l'hypothèse $qV \ll k_B T$, l'équation se linéarise en

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{2q^2n_0}{\varepsilon_0 k_B T} V(x) = 0$$

qui admet comme solution générale

$$V(x) = A \exp\left(-\frac{x}{D}\right) + B \exp\left(-\frac{x}{D}\right)$$

où

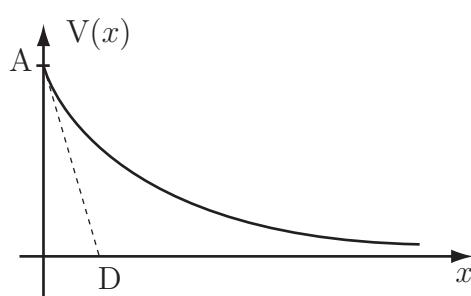
$$D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 q^2}}$$

a la dimension d'une longueur et A et B sont des constantes d'intégration, à déterminer avec les conditions aux limites.

- Seule l'exponentielle décroissante est physiquement acceptable : l'autre terme divergerait en effet (sans raison !) à l'infini.

Ainsi,

$$V(x) = A \exp\left(-\frac{x}{D}\right)$$



Le potentiel V décroît beaucoup plus vite que dans le vide. En effet, l'accumulation de charges négatives au voisinage de la particule colloïdale (dans le cas $\sigma > 0$) a pour effet d'**écranter** sa charge électrique.

4. En reprenant une surface de Gauss du type de celle de la question 1 et en la positionnant à cheval sur la surface de la colloïde (entre $-dx/2$ et $+dx/2$), on obtient :

$$S [E(dx/2) - E(-dx/2)] = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} + \frac{\rho(0)dx}{\epsilon_0}$$

En faisant tendre $dx \rightarrow 0$, on obtient l'expression de la discontinuité de E à l'interface :

$$S (E(0^+) - E(0^-)) = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

Ensuite, on utilise le fait que la colloïde est un conducteur, donc le champ électrique à l'intérieur est nul, $E(0^-) = 0$. Enfin, en comparant à l'expression du champ $E(0^+)$ trouvée en dérivant l'expression de $V(x)$, on identifie :

$$E(0^+) = \frac{A}{D} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}$$

5. Le potentiel de la colloïde vaut

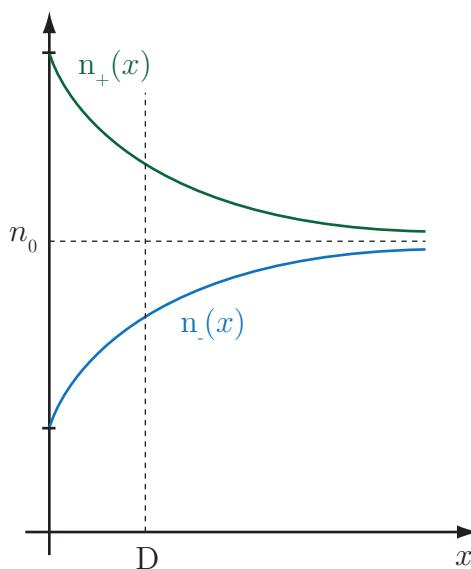
$$V(x=0) = A = \frac{\sigma D}{\epsilon_0}$$

On retrouve l'expression de la différence de potentiel entre deux plaques chargées σ et séparées d'une distance D .

6. Augmenter la concentration en ions augmente la valeur de n_0 et diminue donc D . Les particules colloïdales vont donc pouvoir se rapprocher, ce qui augmente la probabilité qu'elles se rencontrent et précipitent sous l'effet des forces de Van Der Waals.

REMARQUES :

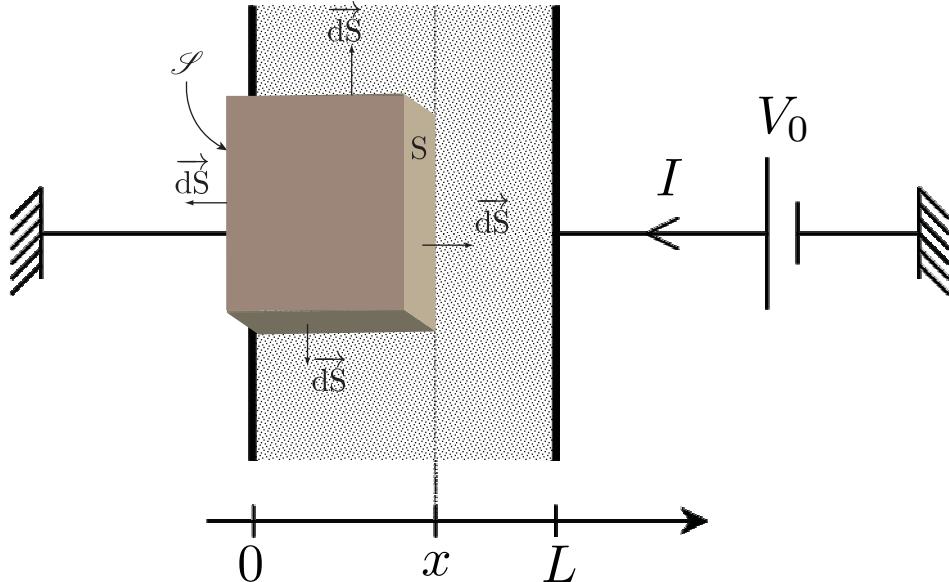
- Cet effet explique aussi l'envasement des estuaires, l'argile (chargé négativement) précipitant au contact des cations de l'eau salé.
- Ce principe est également utilisé pour traiter les eaux usées et dépolluer en faisant précipiter (souvent des cations comme Al^{3+} , Ca^{2+} , Mg^{2+} , Fe^{2+} etc...).
- Il existe également des agents déflocculants.
- On peut tracer les concentrations en ions I_+ et I_- .



VI Loi de Child-Langmuir

On néglige pour simplifier les *effets de bord* : les dimensions transverses sont suffisamment grandes pour qu'on puisse négliger les dépendances des différentes grandeurs avec une autre variable que x . Tout plan $y = y_0$ ou $z = z_0$ est donc plan de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique est donc toujours colinéaire à \vec{e}_x :

$$\vec{E} = E(x) \vec{e}_x$$



1. Équation de Poisson :

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} - \frac{e}{\epsilon_0} n(x) = 0$$

2. Avec notre convention, $I = -\frac{dq}{dt}$. Cette intensité ne dépend pas de x car tous les électrons qui entrent à un instant dans une tranche à l'abscisse x en ressortent (autrement dit, les différentes tranches sont en série). Pendant un temps court dt , $dq = -Idt$ d'une part, et d'autre part cette charge dq est celle contenu dans un parallélépipède rectangle de section S et d'épaisseur $v(x)dt$, donc

$$dq = (-e) \times S \times v(x)dt \times n(x)$$

ce qui permet d'obtenir : $I = n(x)e v(x)S$

Ensuite, on écrit la conservation de l'énergie mécanique (nulle au départ de l'électrode) pour éliminer $v(x)$:

$$0 = \frac{1}{2} mv^2 - eV$$

Donc

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m}}$$

On a donc

$$n(x) = \frac{I}{eSv(x)} = \frac{I}{eS} \sqrt{\frac{m}{2eV(x)}}$$

et ainsi

$$\frac{d^2V}{dx^2} - \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2eV(x)}} = 0$$

3. Si on remplace $V(x)$ par la solution proposée, on trouve :

$$V_0 a(a-1) \frac{x^{a-2}}{L^a} - \frac{I}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2e}} L^{a/2} x^{-a/2} = 0,$$

équation qui doit être valable pour tout x , ce qui impose deux conditions :

$$\begin{aligned} a-2 &= -\frac{a}{2} \\ 0 &= \frac{a(a-1)V_0}{L^a} - \frac{IL^{a/2}}{\epsilon_0 S} \sqrt{\frac{m}{2eV_0}} \end{aligned}$$

On trouve donc en particulier

$$a = \frac{4}{3}$$

4. Et on en déduit à l'aide de la deuxième équation du système de la question précédente :

$$I = \frac{4\epsilon_0 S}{9L^2} \sqrt{\frac{2e}{m}} V_0^{3/2}$$

5. Le tracé de la caractéristique (et notamment son démarrage brut) fait penser à une diode (d'où le nom de l'exercice). En fait, c'est la caractéristique courant-tension du vide, appelée également **loi de Child-Langmuir**.

6. Application numérique :

$$I \simeq 0,2 \text{ mA}$$

Modèles d'atome

I L'orbital 1s de l'atome d'hydrogène

Dans ce problème on cherche à déterminer une distribution de charge \mathcal{D} en fonction du potentiel électrostatique qu'elle crée dans l'espace. On suppose donc qu'on connaît ce potentiel, et qu'il s'écrit en un point M situé à la distance r d'un centre O :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} + k \right) \exp(-2kr) \quad (1)$$

où $k > 0$ est une constante (déterminez sa dimension) et $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C désigne la charge élémentaire.

1. Calculer le champ électrique créé par la distribution de charge \mathcal{D} .
2. Calculer la charge $q(r)$ contenue dans une sphère de rayon r et de centre O.
3. En déduire que la distribution \mathcal{D} contient une charge ponctuelle e placée en O.
4. Que vaut $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r)$? En déduire qu'en plus de la charge ponctuelle placée en O, il existe une distribution volumique de charge, dont vous donnerez la charge totale.
5. En quoi la distribution \mathcal{D} peut-elle modéliser un atome d'hydrogène?
6. Calculer $\frac{dq(r)}{dr}$ et en déduire la charge $dq(r)$ contenue dans une couronne sphérique d'épaisseur dr .
7. Montrer que la densité volumique de charge $\rho(r)$ s'écrit alors :

$$\rho(r) = -\frac{ek^3}{\pi} \exp(-2kr) \quad (2)$$

8. En mécanique quantique, on montre que la probabilité $d\mathcal{P}(r)$ d'observer un électron à une distance comprise entre r et $r + dr$ du noyau s'écrit :

$$d\mathcal{P}(r) = \frac{4\pi r^2 \rho(r) dr}{-e} \quad (3)$$

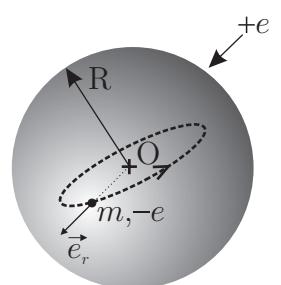
Discuter cette expression.

9. Tracer l'allure de la densité radiale de probabilité $D(r) \equiv \frac{d\mathcal{P}(r)}{dr}$.
10. Donner l'expression de r_0 qui maximise la densité radiale de probabilité. Déterminer à quelle constante physique correspond r_0 et donner sa valeur (telle que vous la trouverez dans les tables). En déduire la valeur de la constante k .

II L'atome de Thomson

En 1907, avant la découverte du noyau par Ernest Rutherford, le physicien anglais Joseph John Thomson émet l'hypothèse que l'atome est constitué :

- d'une boule pleine, positivement et uniformément chargée, dont le rayon est de l'ordre de quelques Angström;
- d'électrons ponctuels qui peuvent se déplacer librement (sans frottement) à l'intérieur de la boule chargée positive. L'atome reste électriquement neutre.



Ainsi, l'atome d'hydrogène est constitué d'un nuage sphérique de rayon R , de charge totale $+e$ et de centre O, ainsi que d'un électron de charge $-e$ et de masse m . On prendra les valeurs suivantes pour les applications numériques :

$$\begin{aligned}
 \text{masse de l'électron} &: m = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg} \\
 \text{vitesse de la lumière} &: c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-2} \\
 \text{charge élémentaire} &: e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C} \\
 \text{permittivité du vide} &: \varepsilon_0 = 8,8 \times 10^{-12} \text{ S.I.} \\
 \text{rayon de l'atome d'hydrogène} &: R = 1\text{\AA}
 \end{aligned} \tag{4}$$

1. Rappeler la définition de l'Angström.
2. Déterminer la direction et le sens du champ électrique $\vec{E}(M)$ créé par la sphère pleine en un point M à l'intérieur de la sphère.
3. Calculer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en fonction de e , de la distance r au centre, et de R .
4. En déduire la force exercée par la sphère pleine sur l'électron que l'on place au point M. Interpréter cette force.

On cherche maintenant à décrire le mouvement de l'électron sous l'action de cette force. Il est possible de montrer que ce mouvement est nécessairement plan (plan que nous notons (xOy)) et que, dans le cas général, l'électron décrit une ellipse autour du centre du noyau. Pour simplifier, nous allons supposer que le mouvement de l'électron est linéaire, c'est-à-dire que celui se déplace selon un axe, que nous prendrons égal à l'axe (Ox).

5. Écrire l'équation du mouvement de l'électron le long de cet axe et montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \tag{5}$$

où vous déterminerez ω_0 en fonction des données du problème.

6. Montrer que la période d'oscillation T de l'électron s'écrit

$$T = \frac{4\pi}{e} \sqrt{\pi \varepsilon_0 m R^3} \tag{6}$$

7. Calculer T à l'aide des valeurs (4).

8. Montrer que le potentiel $V(0)$ au centre de la sphère s'écrit :

$$V(0) = \frac{3e}{8\pi\varepsilon_0 R} \tag{7}$$

9. Déterminer de ce qui précède l'énergie de ionisation de l'atome d'hydrogène dans le modèle de Thomson. Exprimer le résultat en électron volt.

Correction

I L'orbital 1s de l'atome d'hydrogène

La dimension de k est l'inverse d'une longueur, $[k] = \text{L}^{-1}$.

- On a par définition, $\vec{E} = -\nabla V$, donc :

$$\vec{E} = -\frac{dV(r)}{dr} \vec{e}_r = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r^2} e^{-2kr} - 2ke^{-2kr} \left(\frac{1}{r} + k \right) \right) \vec{e}_r$$

Donc

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2} (1 + 2kr + 2k^2r^2) \exp(-2kr) \vec{e}_r}$$

- Le théorème de Gauss sur une sphère de rayon r et de centre O donne :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$

Donc

$$q(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E(r)$$

C'est-à-dire

$$\boxed{q(r) = e (1 + 2kr + 2k^2r^2) \exp(-2kr)}$$

- $\lim_{r \rightarrow 0} q(r) = e$, donc il y a une charge ponctuelle e placée en O (c'est-à-dire en $r = 0$).
- $\lim_{r \rightarrow \infty} q(r) = 0$, donc il existe une distribution volumique de charge en plus de la charge ponctuelle au centre, dont la charge totale est $-e$, de façon à compenser la charge ponctuelle au centre.
- La charge ponctuelle au centre modélise le noyau tandis que la distribution volumique constitue le « nuage électronique », délocalisé dans tous l'espace.
- On a :

$$\frac{dq(r)}{dr} = -4ek^3r^2 \exp(-2kr)$$

Et donc

$$\boxed{dq(r) = -4ek^3r^2 \exp(-2kr) dr}$$

- La charge contenue dans une couronne sphérique d'épaisseur dr s'écrit aussi comme le produit de la densité volumique de charge par le volume de la couronne sphérique, c'est-à-dire $dq(r) = 4\pi r^2 dr \rho(r)$. En identifiant avec l'expression ci-dessus, on obtient :

$$\boxed{\rho(r) = -\frac{ek^3}{\pi} \exp(-2kr)}$$

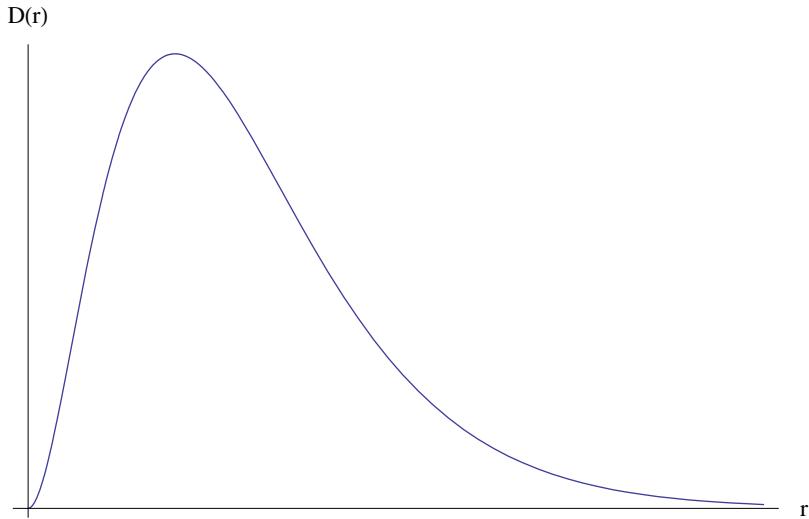
- On voit immédiatement que :

$$dP(r) = \frac{dq(r)}{-e}$$

Donc $dP(r)$ représente la fraction de la charge comprise dans la couronne sphérique, ramené à la charge totale. On comprend donc que plus il y a de charge dans cette couronne, plus « l'électron y passe du temps », donc plus forte sera sa probabilité de présence.

9. On a :

$$D(r) = 4k^3r^2 \exp(-2kr)$$



10. On calcule la dérivée de $D(r)$:

$$\frac{dD}{dr} = 4k^3(2r - 2kr^2) \exp(-2kr)$$

La dérivée s'annule pour

$$r_0 = \frac{1}{k}$$

On peut associer r_0 au rayon de Bohr qui vaut :

$$r_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0,53 \text{ \AA}$$

Et donc

$$k \approx 1,9 \times 10^{10} \text{ m}^{-1}$$

II L'atome de Thomson

1. Un Angström vaut $1\text{\AA} = 10^{-10} \text{ m}$. L'Angström représente la taille caractéristique des atomes.
2. Tout plan contenant M et le centre de la sphère est un plan de symétrie. Le champ électrique en M appartient donc à l'ensemble de ces plans, c'est-à-dire à la droite (OM) : le champ électrique est radial. Comme le noyau est chargé positivement, le champ est dirigé vers l'extérieur, selon \vec{e}_r . Il y a invariance par rotation autour de n'importe quel axe, donc le champ électrique ne dépend que de la distance au centre : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$.
3. Le théorème de Gauss sur une sphère \mathcal{S}_r de rayon r s'écrit

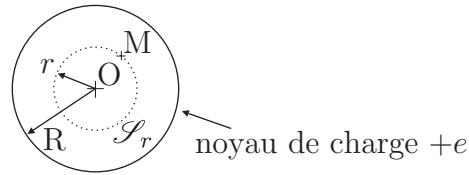
$$\oint_{\mathcal{S}_r} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

où Q_{int} est la charge à l'intérieur de la sphère \mathcal{S}_r . La densité de charge étant constante dans cette sphère, on obtient $Q_{\text{int}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$, d'où :

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} = \frac{e}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{R}\right)^3$$

Soit

$$E(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R^3} r$$



4. La force $\vec{F} = -e\vec{E}$ s'en déduit :

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} r \vec{e}_r$$

Il s'agit d'une force de rappel élastique (comme un ressort).

5. En supposant l'électron sur l'axe Ox, la force est aussi le long de cet axe et s'écrit alors $\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x \vec{e}_x$. Le principe fondamental de la dynamique selon cet axe donne :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} x$$

Et donc

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi m \epsilon_0 R^3}$$

6. La période d'oscillation T de l'électron s'écrit

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{4\pi}{e} \sqrt{\pi m \epsilon_0 R^3}$$

7. On obtient $T \approx 4 \times 10^{-16}$ s.

8. Le potentiel $V(r)$ à l'intérieur de l'atome se déduit du champ $E(r)$ de la question 3 :

$$E(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$$

donc $V(r) = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 R^3} r^2 + \text{cte}$ pour $r \leq R$

où on voit que $V(0) = \text{cte}$. Pour déterminer cette constante, calculons le potentiel en $r = R$. Pour $r \geq R$, le potentiel s'écrit, d'après le théorème de Gauss, qui permet de remplacer la boule comme un point où on concentre toute la charge :

$$V(r) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{pour} \quad r \geq R$$

Ainsi, $V(R) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 R}$

En identifiant pour $r = R$ dans les expressions valables pour $r \leq R$ et $r \geq R$, on obtient

$$\frac{e}{4\pi\epsilon_0 R} = -\frac{e}{8\pi\epsilon_0 R} + V(0) \quad \text{donc} \quad V(0) = \frac{3e}{8\pi\epsilon_0 R}$$

9. Pour ioniser l'atome d'hydrogène, il faut lui fournir une énergie tout juste suffisante pour l'amener à l'infini avec une vitesse nulle. Si on imagine l'électron au centre sans vitesse, son énergie mécanique vaut $-eV(0)$. Pour l'amener à l'infini sans vitesse, son énergie mécanique doit être nulle (car l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont nulles). Il faut donc lui communiquer une énergie égale à $+eV(0)$. L'énergie de ionisation de l'atome d'hydrogène s'écrit donc

$$E_{\text{ionisation}} = eV(0) = \frac{3e^2}{8\pi\epsilon_0 R} = 3,5 \times 10^{-18} \text{ J} = 21,7 \text{ eV}$$

On peut comparer cette valeur au résultat théorique (et expérimental) qui donne une énergie de ionisation de 13,6 eV.

Modèle d'électron

I Rayon classique de l'électron

En relativité, un électron immobile possède une énergie égale à $m_e c^2$, où m_e est la masse de l'électron et c la vitesse de la lumière (dans le vide). On se propose dans cette exercice d'interpréter cette énergie comme l'énergie électrostatique de l'électron que l'on modélise comme une sphère uniformément chargée de rayon r_e et de charge totale $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ (on notera ρ la densité volumique de charge associée). On rappelle que l'énergie électrostatique d'une distribution de charge est donnée par le travail nécessaire à fournir pour construire cette distribution en amenant progressivement les charges depuis l'infini (là où le potentiel est nul). Ici, on se propose de construire astucieusement la boule par dépôts successifs de couches sphériques : supposons que l'on ait déjà construit une boule de rayon $r < r_e$, on rajoute alors une couronne sphérique infinitésimale d'épaisseur dr de telle sorte qu'on se retrouve avec une boule d'épaisseur $r + dr$. On recommence ensuite afin de construire une boule de rayon $r + 2dr$ et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on soit arrivé au rayon r_e .

Calculer l'énergie électrostatique de l'électron, en déduire l'ordre de grandeur du rayon r_e de l'électron et commenter.

II Moment magnétique de l'électron

Considérons un électron de façon classique comme une boule uniformément chargée. Un électron possède un moment magnétique¹ et nous allons tenter de l'interpréter comme l'effet d'une rotation de l'électron sur lui-même.

Soit une boule de rayon R et de centre O , chargée uniformément avec une densité volumique ρ et tournant sur elle-même à la vitesse Ω dans le référentiel de l'observateur, son axe de rotation passant par O . R , ρ et Ω sont les seuls paramètres du problème en fonction desquels on souhaite exprimer le moment magnétique $\vec{\mathcal{M}}$ de la boule chargée.

Pour connaître ce moment magnétique, on découpe la boule par la pensée en coquilles élémentaires de rayon r tel que $0 \leq r \leq R$ et d'épaisseur élémentaire dr .²

Enfin pour s'approcher le plus possible d'un «cas d'école», à savoir une spire parcourue par un courant, on découpe à nouveau les coquilles en tranches élémentaires horizontales d'épaisseur $rd\theta$, avec θ la colatitude³ de l'anneau. On obtient donc des anneaux élémentaires épais (tridimensionnels), semblables à des boucles de courant, puisqu'ils sont chargés et qu'ils sont en rotation.⁴

1. Quel est le rayon x d'un anneau de colatitude θ ?

2. Quelle est l'intensité I parcourant un anneau ?

1. En mécanique quantique, on parle de moment magnétique de spin, le mot anglais *spin* indiquant l'analogie avec une rotation propre, comme un toupet.

2. On peut voir chaque coquille élémentaire comme une pelure d'oignon.

3. Colatitude et latitude sont deux coordonnées angulaires complémentaires sur une sphère. La colatitude θ est comptée depuis un pôle d'une sphère, tandis que la latitude, plus habituelle en géographie pour se repérer à la surface de la Terre, est comptée depuis l'équateur, et c'est $\pi/2 - \theta$. La colatitude est donc le demi-angle au sommet d'un cône de sommet le centre de la sphère et contenant le point à repérer. Ici c'est l'axe de rotation qui nous permet de définir deux pôles et un équateur.

4. Ces anneaux sont comme les pelures d'un oignon qu'on a coupé en tranches.

Paramètre	Valeur	Unité (SI)
\hbar	1.05×10^{-34}	J.s
m_e	9.11×10^{-31}	kg
c	3.00×10^8	m.s^{-1}
R	2×10^{-15}	m

TABLE 0.1 – Valeurs numériques approximatives de quelques paramètres.

3. Exprimer le moment magnétique $\vec{d}\mu$ de l'anneau, comme si c'était une spire, en fonction de ρ , Ω , r , θ et des éléments différentiels dr et $d\theta$.
4. Calculer le moment magnétique $\vec{d}\mathcal{M}$ d'une coquille élémentaire de rayon r et l'exprimer en fonction de ρ , Ω , r et l'élément différentiel dr .

Indication : on donne le résultat de l'intégrale \mathcal{I} :

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \sin^3(u) du = \frac{2}{3}$$

5. Calculer le moment magnétique total $\vec{\mathcal{M}}$ de la boule en fonction de R, ρ et Ω .
6. Si la boule chargée est un électron, combien vaut ρ ? Exprimer de nouveau $\vec{\mathcal{M}}$ mais en fonction de R, la charge élémentaire e et Ω .
7. En mécanique quantique, le moment magnétique de spin d'un électron doit valoir, en valeur absolue :

$$\mu_e = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

avec \hbar la constante de Planck réduite et m_e la masse d'un électron.

Donner l'expression de la vitesse de rotation absolue $|\Omega|$ qui permettrait d'accorder les modèles classique et quantique.

8. En utilisant les valeurs données ⁵ dans la table 0.1, calculer la vitesse d'un point situé sur l'équateur de notre électron dans le référentiel de l'observateur. Commenter et conclure quant à la pertinence de notre modélisation. Montrer qu'on pourrait contester la valeur de R ; faudrait-il l'augmenter ou la réduire ? Quel modèle ne respecterait-on plus ?

5. Remarques : c est la célérité de la lumière dans le vide ; la valeur de R est celle trouvée au TD 2 dans l'exercice sur l'énergie au repos d'un électron.



FIGURE 1 – Ceci n'est pas un électron.

Correction

I Rayon classique de l'électron

L'élément de volume en coordonnées sphérique s'écrit

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Le volume d'une calotte sphérique d'épaisseur dr s'écrit comme l'intégrale du volume élémentaire précédent sur θ et φ .

$$dV = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} dV = 4\pi r^2 dr$$

Donc

$$dq = \rho dV = 4\pi \rho r^2 dr$$

Puis on utilise le résultat qu'une boule vue de l'extérieur (donc vue de sa surface) est équivalente à une charge ponctuelle ramenée au centre.

Ainsi,

$$V(r) = \frac{q(r)}{4\pi \epsilon_0 r}$$

où

$$q(r) = \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$$

Donc

$$V(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r^2$$

Le travail dW nécessaire pour amener la charge dq de l'infini, où le potentiel est nul, à la surface de la boule de rayon r s'écrit, d'après le cours, comme l'opposée de la variation de l'énergie potentielle électrostatique

$$dW = -dq(V(\infty) - V(r)) = dqV(r)$$

Donc

$$dW = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr$$

L'énergie électrostatique de l'électron s'écrit comme le travail total que doit fournir l'opérateur pour construire l'électron par couches successives.

$$E_p = \int_{r=0}^{r_e} dW = \int_{r=0}^{r_e} \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^{r_e} = \frac{4\pi \rho^2 r_e^5}{15\epsilon_0}$$

Puis en utilisant

$$\rho = \frac{3e}{4\pi r_e^3}$$

On obtient le résultat final

$$E_p = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r_e}$$

Si on identifie, comme le suggère l'énoncé, cette énergie potentielle à l'énergie au repos de l'électron, alors

$$m_e c^2 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 r_e} \quad \Rightarrow \quad r_e = \frac{3e^2}{20\pi \epsilon_0 m - E c^2}$$

AN

$$r_e \simeq 2 \times 10^{-15} \text{ m} = 2 \text{ fm}$$

C'est environ 50 000 fois plus petit que la taille d'un atome.

REMARQUE : vous pourrez vous convaincre qu'on obtient le même résultat en calculant

$$E_p = \iiint_{\text{espace}} \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} d\tau$$

II Moment magnétique de l'électron

II.1 Position du problème

Considérons un électron de façon classique comme une boule uniformément chargée. Un électron possède un moment magnétique et nous allons tenter de l'interpréter comme l'effet d'une rotation de l'électron sur lui-même.

Soit une boule de rayon R et de centre O , chargée uniformément avec une densité volumique ρ et tournant sur elle-même à la vitesse Ω dans le référentiel de l'observateur, son axe de rotation passant par O (voir fig. 1). R , ρ et Ω sont les seuls paramètres du problème en fonction desquels on souhaite exprimer le moment magnétique \vec{M} de la boule chargée.

Pour connaître ce moment magnétique, on découpe la boule par la pensée en coquilles élémentaires de rayon r tel que $0 \leq r \leq R$ et d'épaisseur élémentaire dr (voir fig. 2).

Enfin pour s'approcher le plus possible d'un «cas d'école», à savoir une spire parcourue par un courant, on découpe à nouveau les coquilles en tranches élémentaires horizontales d'épaisseur $rd\theta$, avec θ la colatitude de l'anneau (voir fig. 3). On obtient donc des anneaux élémentaires épais (voir fig. 4), semblables à des boucles de courant, puisqu'ils sont chargés et qu'ils sont en rotation.

II.2 Développement dans une perspective classique

- Il était rappelé que la colatitude est l'angle complémentaire de la latitude, sur une sphère dotée d'un axe. Le rayon d'un anneau vaut r à $\theta = \pi/2$ et vaut 0 à $\theta = 0$; nos grandes connaissances en triangles rectangles nous permettent de dire :

$$x = r \sin \theta$$

- L'intensité d'un courant qui parcourt un volume est la charge passant à travers une section du volume, perpendiculaire au courant, par unité de temps. Ici le courant «suit» l'anneau (en coordonnées sphériques, il serait selon le vecteur qu'on appelle conventionnellement \vec{e}_ϕ), la section est donc visible sur la figure 4 et sa surface est : $S = rd\theta dr$, puisqu'étant infinitésimale elle est assimilée à un rectangle. Cette section est invariante dans le référentiel de l'observateur au cours de la rotation de l'électron.

La charge dq qui la traverse entre t et $t+dt$ est contenue dans un prisme s'appuyant sur cette section et de hauteur $v dt$ si $v = x\Omega$ est la vitesse (toujours selon \vec{e}_ϕ) des «charges» réparties uniformément avec une densité ρ . On a donc :

$$dq = \rho \cdot S v dt \iff \frac{dq}{dt} = \rho r d\theta dr x \Omega$$

ce qui conduit, avec nos définitions et le résultat de la question précédente, à $I = dq/dt$ soit :

$$I = \rho r^2 \Omega \sin \theta dr d\theta$$

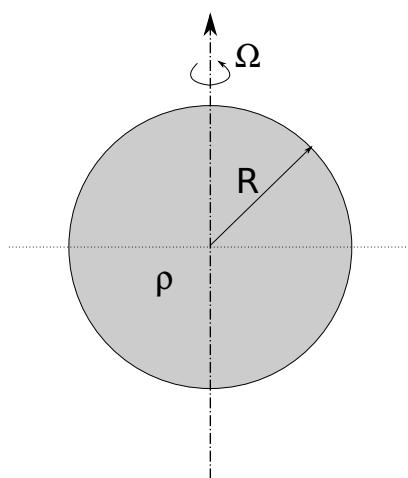


FIGURE 1 – Électron modélisé par une boule chargée en rotation.

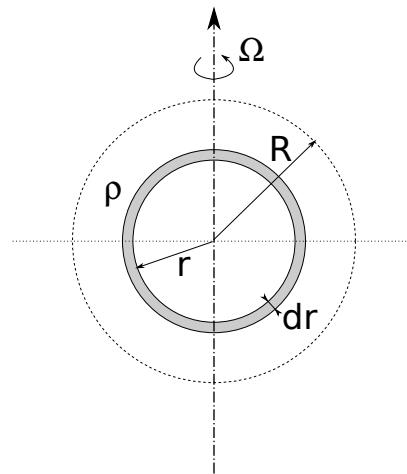


FIGURE 2 – Coquille élémentaire utilisée comme intermédiaire de calcul.

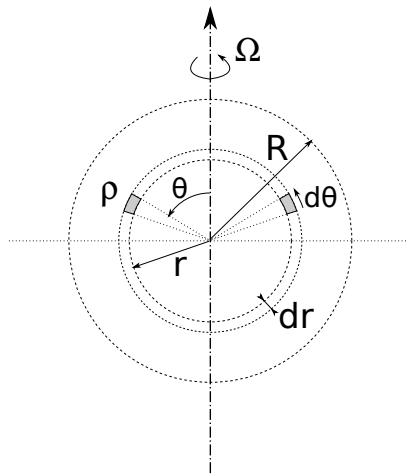


FIGURE 3 – Anneau élémentaire utilisé comme intermédiaire de calcul, vu de profil.

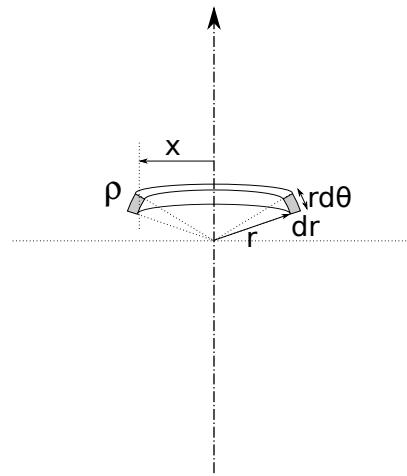


FIGURE 4 – Anneau élémentaire utilisé comme intermédiaire de calcul, vu dans l'espace.

3. Pour une spire, le moment magnétique est simplement le produit de la surface plane délimitée par la spire par l'intensité du courant qui la parcourt. C'est une grandeur vectorielle et la surface est orientée par le sens de circulation du courant. Dans l'élégant langage mathématique cela se traduit par :

$$\overrightarrow{d\mu} = \pi x^2 \cdot I \overrightarrow{e_z}$$

soit :

$$\boxed{\overrightarrow{d\mu} = \rho r^4 \pi \Omega \sin^3 \theta \, dr d\theta \, \overrightarrow{e_z}}$$

4. Le moment magnétique d'une coquille est la somme des moments magnétiques de tous les anneaux qui la composent. Chaque anneau infinitésimal est défini par sa colatitude θ , il faut donc sommer de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$ mais comme le problème est symétrique autour du plan équatorial, on se contentera de doubler la somme de $\theta = 0$ à $\theta = \pi/2$.

Par chance, les moments magnétiques de tous les anneaux sont parallèles et l'intégration ne porte pas sur le terme vectoriel ($\overrightarrow{e_z}$).

On a ainsi :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dM} &= \int_0^{\pi/2} \overrightarrow{d\mu}(\theta) \\ &= \rho r^4 \pi \Omega \, dr \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \, d\theta \, \overrightarrow{e_z} \end{aligned}$$

où l'on reconnaît l'intégrale \mathcal{I} qui était donnée :

$$\mathcal{I} = \int_0^{\pi/2} \sin^3(u) du = \frac{2}{3}$$

et on aboutit à :

$$\boxed{\overrightarrow{dM} = \frac{2}{3} \rho r^4 \pi \Omega \, dr \, \overrightarrow{e_z}}$$

Fort heureusement, aucun θ n'apparaît plus dans cette formule.

5. Le moment magnétique de la boule est la somme des moments magnétiques de toutes les coquilles qui la composent. Chaque coquille infinitésimale est définie par son rayon r , il faut donc sommer de $r = 0$ à $r = R$.

Ceci s'écrit :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M} &= 2 \times \int_0^R \overrightarrow{dM}(r) \\ &= \frac{4}{3} \pi \rho \Omega \int_0^R r^4 \, dr \, \overrightarrow{e_z} \end{aligned}$$

Soit :

$$\boxed{\overrightarrow{M} = \frac{4}{15} \pi \rho \Omega R^5 \, \overrightarrow{e_z}}$$

À nouveau, aucune occurrence de la variable r n'intervient. Comme dit dans l'introduction, on obtient une expression qui est fonction des seules variables R , Ω et ρ .

6. Plus haut on a mis le terme *charges* entre guillemets parce que si la boule chargée est un électron, elle ne peut pas être constituée de charges plus petites ; c'est pourquoi on dit que l'électron a une charge *élémentaire*. Parler alors de densité de charge demanderait une explication physique qui est ici hors de propos.

La boule est uniformément chargée donc la somme de toutes ses parties élémentaires chargées revient au produit de la densité par le volume :

$$\begin{aligned} e &= \int \rho d\tau \\ &= \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

En inversant la relation et en injectant l'expression de ρ dans celle de $\vec{\mathcal{M}}$, on trouve :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}} = \frac{e\Omega R^2}{5} \vec{e}_z}$$

7. Si les modèles s'accordent, $\|\vec{\mathcal{M}}\| = \mu_e$ d'où :

$$\boxed{|\Omega| = \frac{5\hbar}{2m_e R^2}}$$

8. La vitesse d'un point à l'équateur v_{eq} est simplement le produit de la vitesse de rotation Ω par le rayon R de la boule. À l'aide des données, on trouve :

$$\boxed{v_{eq} \approx 3.44 \times 10^{11} \text{ m.s}^{-1}}$$

On constate quelque chose d'extraordinairement choquant pour nos yeux de physiciens : $v_{eq} \gg c$. En effet, et ce n'est pas un paquet de neutrinos helvético-italiens qui nous diront le contraire, c est une vitesse indépassable dans notre univers.

On pourrait alors imaginer que le rayon estimé de l'électron-boule n'est pas correct ; il faudrait l'augmenter de trois ordres de grandeur. Cependant le rayon avait été calculé pour une boule uniformément chargée dont l'énergie potentielle électrique avait été identifiée à l'énergie au repos relativiste. Comme quoi, un électron n'est pas un oignon.

II.3 Conclusion et épistémologie

La mécanique relativiste (qui concerne les échelles astronomiques) et la mécanique quantique (qui concerne les échelles subatomiques) expliquent toutes les deux des phénomènes observés qui échappent à la mécanique classique. De plus, les résultats de la mécanique classique sont des solutions asymptotiques de la mécanique relativiste (pour des vitesses très faibles devant c) mais aussi de la mécanique quantique (pour des distances très grandes devant l'atome ou, dans le cas de la thermodynamique, pour un très grand nombre de particules). Et là survient un problème des plus épineux : la mécanique classique ne permet pas d'accorder les deux autres théories ... La théorie quantique des champs permet de concilier les postulats de la relativité restreinte et de la mécanique quantique ; elle s'appuie énormément sur les lois de l'électromagnétique. Il reste à inclure la gravitation.

Piège de Penning

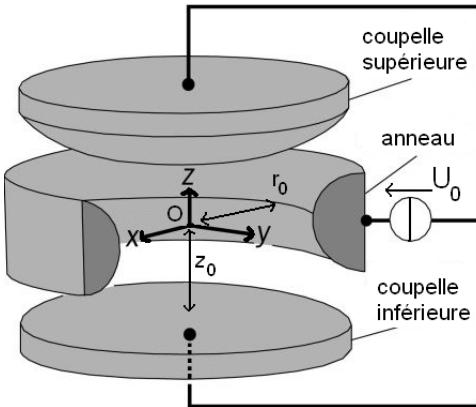
Nous avons vu qu'il n'était pas possible de réaliser une position d'équilibre stable avec un champ électromagnétique. Néanmoins, cela ne signifie nullement l'impossibilité de piéger des particules chargées (électron, proton, ions) avec un tel champ. Nous allons le voir en étudiant le piège de Penning, qui valut en 1989 le prix Nobel à Hans Dehmelt qui l'a développé.

Dans un tel piège, les particules sont confinées dans le volume délimité par trois électrodes conductrices : un anneau et deux coupelles (voir ci-contre).

Les coupelles sont maintenues au même potentiel, tandis qu'une différence de potentiel U_0 est appliquée avec l'anneau.

On souhaite que le potentiel électrostatique créé par les électrodes ait la forme suivante (potentiel quadrupolaire) :

$$\Phi(x, y, z) = A(x^2 + y^2 - 2z^2).$$



1. Tracer les lignes équipotentielles de Φ dans le plan (Oxz). Il faut donc résoudre l'équation $\Phi(x, 0, z) = A(x^2 - 2z^2) = \text{constante}$. Attention à bien distinguer deux cas, selon que le potentiel est positif ou négatif.
2. Par un argument de symétrie, en déduire les surfaces équipotentielles de Φ dans tout l'espace. Ces surfaces équipotentielles portent le nom d'hyperbolôde de révolution.
Quelle doit être la forme des électrodes pour créer un tel potentiel ? (N.B. : la forme des électrodes sur le schéma ci-dessus n'est qu'indicative...) En déduire l'expression de A en fonction de z_0 , r_0 et U_0 .

On considère une particule de charge q et de masse m dans le piège. On va utiliser le potentiel électrostatique Φ pour la piéger dans la direction z .

3. Montrer qu'il existe une position d'équilibre et donner le signe de A pour lequel cette position d'équilibre est stable dans la direction z . Conclure à l'impossibilité de piéger simultanément des particules de charge opposée dans un piège de Penning.

La particule est donc piégée dans la direction z , mais on peut montrer qu'elle ne l'est pas dans le plan (Oxy) (le point d'équilibre y est instable). Pour circonvenir à ce problème, on fait baigner le piège dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

4. Montrer que les équations du mouvement des coordonnées cartésiennes $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ de la particule dans le champ électrostatique \vec{E} qui dérive de Φ et le champ magnétique \vec{B} du piège de Penning sont :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 2qAx(t) + qBy(t) \\ m\ddot{y}(t) = 2qAy(t) - qB\dot{x}(t) \\ m\ddot{z}(t) = -4qAz(t) \end{cases}$$

5. En déduire que, dans la direction z , la particule décrit une oscillation sinusoïdale à la fréquence angulaire $\omega_z = 4|qA|/m$.

6. On s'intéresse maintenant au mouvement de la particule dans le plan (Oxy). On considère les fonctions suivantes :

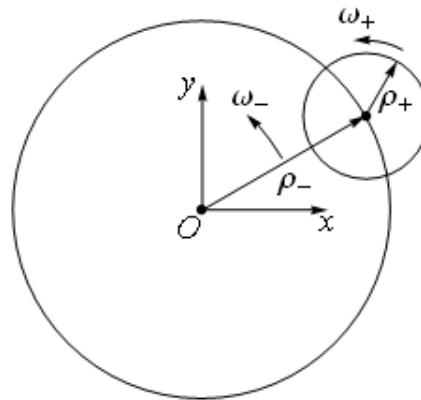
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos(\omega t + \phi) \\ \rho \sin(\omega t + \phi) \end{pmatrix},$$

où ω , ρ et ϕ sont des constantes. Montrer qu'elles sont solutions des équations du mouvement pour deux valeurs bien précises de ω , qu'on notera ω_+ et ω_- et qu'on exprimera en fonction de ω_z et la fréquence cyclotron $\omega_c = -qB/m$.

On vient de déterminer deux solutions particulières des équations du mouvement dans le plan (Oxy) : la trajectoire correspondant à la solution ω_+ (ω_-) est un cercle de rayon ρ_+ (ρ_-) parcouru à la vitesse angulaire ω_+ (ω_-). La solution générale, quant à elle, est une superposition linéaire de ces deux solutions ω_+ et ω_- :

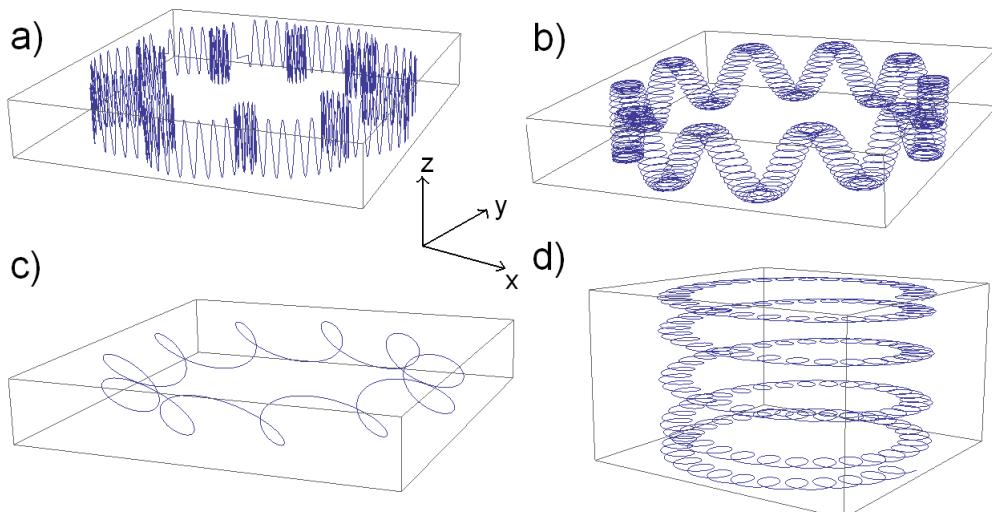
$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_+ \cos(\omega_+ t + \phi_+) + \rho_- \cos(\omega_- t + \phi_-) \\ \rho_+ \sin(\omega_+ t + \phi_+) + \rho_- \sin(\omega_- t + \phi_-) \end{pmatrix}.$$

Dans la pratique, on a $\omega_+ \gg \omega_-$ et $\rho_+ \ll \rho_-$. Dans ce cas, comme illustré ci-dessous, la particule se déplace (rapidement) à la vitesse angulaire ω_+ sur un cercle de rayon ρ_+ dont le centre lui-même se déplace (lentement) à la vitesse angulaire ω_- sur un cercle de rayon ρ_- .



A ce mouvement dans le plan (Oxy) se superpose l'oscillation dans la direction z à la fréquence ω_z , qui est telle que $\omega_+ \gg \omega_z \gg \omega_-$.

7. Compte-tenu de ces informations, identifier le mouvement de la particule dans le piège de Penning parmi les quatres propositions suivantes :



8. APPLICATION. Les pièges de Penning permettent de réaliser des mesures extrêmement précises - métrologiques - de la masse de particules chargées. Par exemple, en refroidissant un piège à la température de l'hélium liquide (4,2 Kelvin) et en y piégeant un unique ion, des métrologues ont pu mesurer la masse de l'électron avec une erreur relative de $7,3 \times 10^{-10}$!⁶

- a) Montrer en effet que si on connaît les fréquences cyclotron de deux particules de masses différentes, alors on connaît le rapport de leur masse.
- b) Le but est donc d'extraire ω_c . Pour cela, il faut mesurer ω_+ , ω_- et ω_z . Pour y arriver, on observe que de très faibles courants alternatifs, qui sont liés à la particule piégée, circulent dans les électrodes. Expliquer leur origine et dire en quoi ils permettent de mesurer ω_+ , ω_- et ω_z .
- c) De ces mesures on déduit ω_c à l'aide de l'égalité suivante (qu'on ne demande pas de démontrer) :

$$\omega_c^2 = \omega_+^2 + \omega_z^2 + \omega_-^2.$$

Cette égalité a en effet l'avantage de rester valable même si les champs présentent de petites imperfections. Proposer plusieurs causes possibles à ces imperfections.

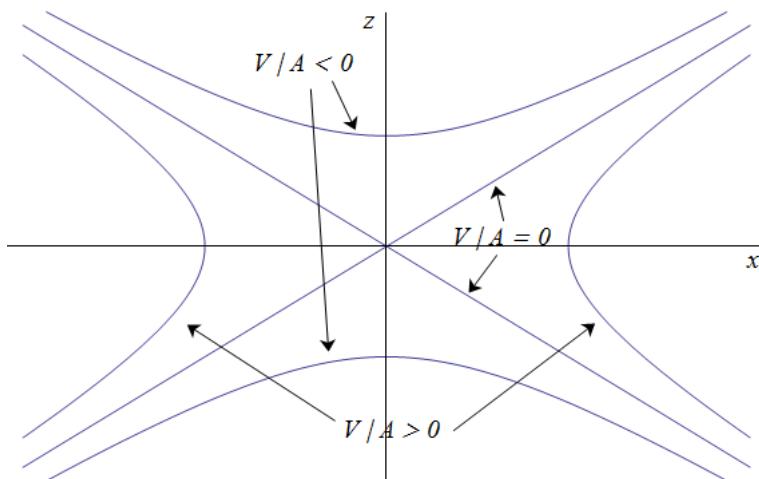
6. Beier, Phys Rev Lett, **88**, 011603 (2002) - *New Determination of the Electron's Mass*
 Werth, Int J Mass Spectrometry, **251**, 152 (2006) - *Highly charged ions, QED and the electron mass*
 Werth, Eur Phys J D, **22**, 163 (2003) - *Double Penning trap technique*

Correction

- Les lignes équipotentielles, de potentiel V , dans le plan (xOz) sont les solutions de :

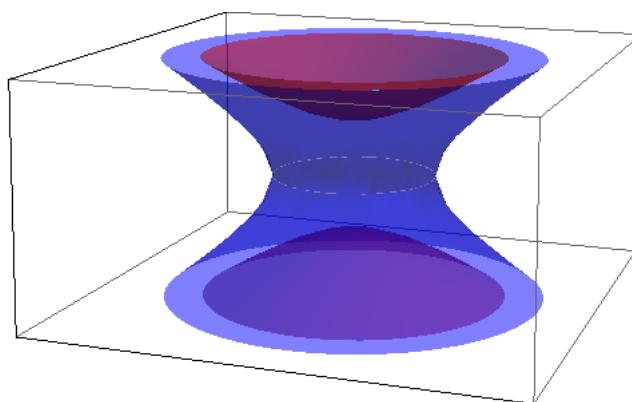
$$A(x^2 - 2z^2) = V \Leftrightarrow z = \pm \sqrt{\frac{(x^2 - V/A)}{2}}.$$

Si $V/A > 0$, la solution n'existe que pour $|x| > \sqrt{V/A}$, et l'équipotentielle est un hyperboloïde dont l'extrémité se trouve au point $(x = \sqrt{V/A}, z = 0)$. Si $V/A < 0$, la solution existe pour tout x , et l'équipotentielle est un hyperboloïde dont l'extrémité se trouve au point $(x = 0, z = \sqrt{|V/2A|})$.



- Le potentiel $\Phi(x, y, z)$ est invariant par rotation autour de l'axe (Oz). Cela se voit en l'exprimant en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) : $\Phi = A(\rho^2 - 2z^2)$. La variable θ , en effet, n'apparaît pas dans l'expression de Φ .

Par conséquent, on obtient les surfaces équipotentielles en faisant simplement subir une révolution autour de l'axe (Oz) aux lignes équipotentielles déterminées à la question précédente. D'où le nom d'hyperboloïde de révolution.



Puisque le potentiel est constant à la surface d'un conducteur parfait, les électrodes doivent avoir une forme aussi proche que possible des surfaces équipotentielles de Φ . Les coupelles correspondent au cas $V/A < 0$ et l'anneau au cas $V/A > 0$.

Le potentiel vaut : $V_a = Ar_0^2$ sur l'anneau, et $V_c = -2Az_0^2$ sur les coupelles. On en déduit :

$$U_0 = V_a - V_c = A(r_0^2 - 2z_0^2) \Leftrightarrow A = \frac{U_0}{r_0^2 - 2z_0^2}.$$

3. Les positions d'équilibres sont solutions de :

$$\vec{\nabla}\Phi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2Ax = 0 \\ 2Ay = 0 \quad \Leftrightarrow x = y = z = 0 \\ -2Az = 0 \end{cases}$$

Cette position d'équilibre sera stable dans la direction z , si l'énergie potentiel de la particule, $E_p = q\Phi$, y est minimum dans la direction z :

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial z^2}(x = 0, y = 0, z = 0) > 0 \Leftrightarrow -2qA > 0 \Leftrightarrow qA < 0.$$

Il faut donc que le signe de A soit opposé au signe de la charge q de la particule. Evidemment, ce n'est pas simultanément possible pour des particules de charges opposées.

4. En négligeant l'effet du champ gravitationnel (on a vu au TD1 que c'était une très bonne approximation), la particule subit la force de Lorentz : $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, où $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi$ et \vec{v} est la vitesse de la particule. On a :

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} -2Ax \\ -2Ay \\ 4Az \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B\dot{y} \\ -B\dot{x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le PFD nous donne alors les équations du mouvement :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2qAx + qB\dot{y} = 2|qA|x + qB\dot{y} \\ m\ddot{y} = -2qAy - qB\dot{x} = 2|qA|y - qB\dot{x} \\ m\ddot{z} = 4qAz = -4|qA|z \end{cases},$$

où l'on a utilisé que $qA < 0$.

5. Bien que les équations des coordonnées x et y sont couplées, ce n'est pas le cas de la coordonnée z . On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique dont la solution est une oscillation sinusoïdale à la fréquence angulaire $\omega_z = \sqrt{4|qA|/m}$.
6. Le mouvement est plus complexe dans le plan (xOy) du fait de ce couplage entre x et y . L'énoncé nous propose de tester une solution. Injectons-la dans la première équation :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 2|qA|x + qB\dot{y} \\ &\Leftrightarrow -m\rho\omega^2 \cos(\omega t + \phi) = 2|qA|\rho \cos(\omega t + \phi) + qB\rho\omega \cos(\omega t + \phi) \\ &\Leftrightarrow -m\omega^2 = 2|qA| + qB\omega \\ &\Leftrightarrow \omega^2 + qB/m\omega + 2|qA|/m = 0 \\ &\Leftrightarrow \omega^2 - \omega_c\omega + \omega_z^2/2 = 0 \end{aligned}$$

On voit que ω est solution d'un polynôme d'ordre 2 dont le discriminant est :

$$\Delta = \omega_c^2 - 2\omega_z^2$$

En pratique, $\omega_c \gg \omega_z$, donc $\Delta > 0$ est ω peut prendre les 2 valeurs :

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2}(\omega_c \pm \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_z^2}).$$

(On aboutirait exactement au même résultat en utilisant la deuxième équation plutôt que la première.)

7. Il faut comparer la fréquence ω_z du mouvement dans la direction z aux fréquences ω_+ et ω_- du mouvement dans le plan (xOy).

La figure a) correspond au cas $\omega_z \gg \omega_+ \gg \omega_-$.

La figure b) correspond au cas $\omega_+ \gg \omega_z \gg \omega_- \rightarrow$ C'est la bonne !

La figure c) correspond au cas $\omega_+ = \omega_z \gg \omega_-$.

La figure d) correspond au cas $\omega_+ \gg \omega_- \gg \omega_z$.

8. a) On introduit deux particules de charges q_1, q_2 et de masses m_1, m_2 dans le même piège de Penning, et donc dans le même champ magnétique \vec{B} . Alors on a :

$$\frac{\omega_{c1}}{\omega_{c2}} = \frac{q_1}{q_2} \frac{m_2}{m_1}.$$

Comme on sait quelles sont les particules chargées (électron, proton, ion, ...), on connaît q_1, q_2 , et donc le rapport des fréquences cyclotron permet de déterminer le rapport des masses.

b) Lors de son mouvement dans le piège, la particule s'approche et s'éloigne périodiquement des électrodes. Or cette particule étant chargée, elle crée un champ électrique. On sait toutefois qu'à l'intérieur des électrodes, le champ électrique doit être nul. Les charges présentes dans les électrodes (électrons de conduction, ions du réseau cristallin) doivent donc s'arranger de manière à compenser exactement le champ électrique créé par la particule piégée. Mais comme la particule piégée s'approche et s'éloigne des électrodes, le champ électrique à compenser varie. Il doit donc y avoir une réorganisation permanente des charges à l'intérieur des électrodes pour réaliser cette compensation. Or si ces charges bougent en permanence, c'est qu'un courant électrique circule dans les électrodes.

Toutefois, cette réorganisation des charges à l'intérieur de l'électrode n'est pas suffisante. Elle permet d'assurer que le champ électrique y est nul, mais ne permet pas de maintenir constant le potentiel auquel est porté l'électrode. Pour cela, il faut en plus augmenter ou diminuer la charge totale se trouvant à l'intérieur de l'électrode : c'est le rôle de la source de tension U_0 qui est reliée aux électrodes. Cela signifie que, en plus des courants circulant à l'intérieur même des électrodes, il y a un courant qui circule entre les électrodes et la source de tension.

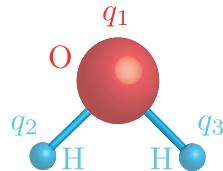
Bien sûr, tous ces courants étant liés au mouvement de la particule piégée, il vont également être périodiques selon les trois fréquences ω_\pm et ω_z . En mesurant ces courants, on peut donc en déduire ω_\pm et ω_z . Pour des raisons pratiques, c'est le courant entre les électrodes et la source de tension qui est mesuré.

c) Dans tout système expérimental il y a des imperfections. Ainsi, les électrodes n'auront pas exactement la forme d'un hyperbole de révolution, donc le potentiel électrostatique réel sera légèrement différent de Φ . Le champ magnétique ne sera pas exactement dirigé le long de l'axe z . De nombreuses autres imperfections peuvent avoir lieu (potentiel des électrodes fluctuant, etc), mais on peut montrer que les deux précédemment citées ont l'avantage de ne pas modifier la formule de l'énoncé.

Dipôle électrostatique

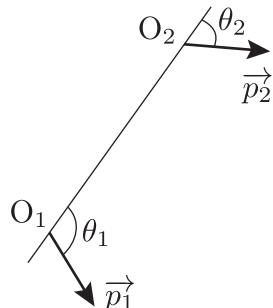
I Modèle dipolaire d'une molécule d'eau

En première approximation, on considère qu'une molécule d'eau est formée de trois charges $q_1 = -2e$, $q_2 = q_3 = e$, portées par les atomes d'oxygène et d'hydrogène et disposées selon la figure ci-dessous.



1. Tracer le moment dipolaire \vec{p} sur la figure.
2. Calculer la norme p du moment dipolaire \vec{p} qu'aurait la molécule sachant que $\alpha = 104^\circ$ et $d \equiv OH = 1\text{\AA}$. Préciser la direction et le sens de \vec{p} .
3. La valeur expérimentale du dipôle électrostatique est $p = 1,83 \text{ D}$. En déduire la charge réellement portée par chaque atome.

On considère maintenant deux molécules d'eau, respectivement représentées par leurs dipôles \vec{p}_1 et \vec{p}_2 centrées respectivement en O_1 et O_2 (voir figure ci-dessous). On introduit les angles $\theta_1 = (\vec{p}_1, \overrightarrow{O_1O_2})$ et $\theta_2 = (\vec{p}_2, \overrightarrow{O_1O_2})$.



4. Calculer l'énergie potentielle d'interaction des deux molécules dans chacun des cas suivants :
 - i) $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = \pi/2$
 - ii) $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$
 - iii) $\theta_1 = \pi/2$, $\theta_2 = -\pi/2$
 - iv) $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = \pi$

On utilisera l'expression du champ électrique créé par un dipôle à longue distance, qui a été vue dans le cours :

$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{e}_r)\vec{e}_r - \vec{p}}{r^3}$$

5. En utilisant la formule du couple qu'exerce un champ électrique sur un dipôle, peut-on dire si les différentes configurations considérées ci-dessus sont des positions d'équilibre ? Si c'est le cas, quelle est leur stabilité ? Commenter.

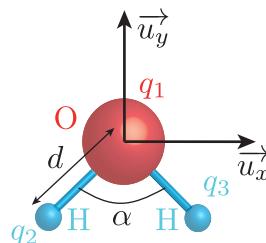
Correction

I Modèle dipolaire d'une molécule d'eau

1. a) Comme la molécule est globalement neutre, on peut utiliser pour calculer le moment dipolaire la formule :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i,$$

où les q_i et les \vec{r}_i représentent respectivement les charges et leurs positions par rapport à un point de référence (que l'on prendra ici comme étant l'atome d'oxygène, c'est-à-dire $\vec{r}_O = \vec{0}$).



En notant les positions des deux atomes d'hydrogène :

$$\begin{cases} \vec{r}_2 = (-d \sin(\alpha/2), -d \cos(\alpha/2)) \\ \vec{r}_3 = (d \sin(\alpha/2), -d \cos(\alpha/2)) \end{cases}$$

AN : on trouve un moment dipolaire $\vec{p} = -2ed \cos(\alpha/2) \vec{u}_y$, de norme

$$p = 1,92 \cdot 10^{-29} \text{ C.m}$$

- b) Le moment dipolaire calculé ci-dessus correspond en Debye à $p = 5,76 \text{ D}$, ce qui est près de trois fois plus grand que la valeur expérimentale. Comme le moment dipolaire est proportionnel aux charges portées par les atomes, cela signifie que les atomes ne portent pas une charge $-2e$ pour l'oxygène et e pour chaque hydrogène, mais (pour des raisons de symétrie) moins $-2Q_{\text{eff}}$ pour l'oxygène et $+Q_{\text{eff}}$ pour chaque hydrogène (c'est-à-dire que l'oxygène ne vole pas tout à fait les électrons des atomes d'hydrogènes, mais ils se les partagent).

Le même calcul que précédemment donne $\vec{p} = -2Q_{\text{eff}}d \cos(\alpha/2) \vec{u}_y$ qui doit être égale à $1,83 \text{ D}$, ce qui implique $Q_{\text{eff}} = 0,31 e$ soit environ un tiers de la charge d'un électron.

2. a) Le champ électrique créé par un dipôle \vec{p}_1 s'écrit à une distance \vec{r} :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3\vec{r} \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_1}{r^3} \right)$$

L'énergie potentielle d'un dipôle \vec{p}_2 à la position \vec{r} en interaction avec le dipôle \vec{p}_1 s'écrit $U = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}(\vec{r})$, ou encore :

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3\vec{p}_2 \cdot \vec{r} \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} \right),$$

ce qui donne dans les notations du problème :

$$U = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(3\vec{p}_2 \cdot \vec{O}_1 \vec{O}_2 \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{O}_1 \vec{O}_2}{|\vec{O}_1 \vec{O}_2|^5} - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{|\vec{O}_1 \vec{O}_2|^3} \right) = -\frac{p_2 p_1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{O}_1 \vec{O}_2|^3} (3 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \cos(\theta_1 - \theta_2))$$

ce qui donne au final :

$$U = -\frac{P_2 P_1}{4\pi\epsilon_0 |O_1 O_2|^3} (2 \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \sin(\theta_2))$$

On peut maintenant étudier les quatre cas posés (en notant $U_0 = \frac{p_2 p_1}{4\pi\epsilon_0 |O_1 O_2|^3} > 0$) :

- i) $U = U_0$
 - ii) $U = -2U_0$
 - iii) $U = -U_0$
 - iv) $U = 2U_0$
- b) La formule du couple exercé par un dipôle sur un autre s'écrit (en notant \vec{e}_z le vecteur normal à \vec{p}_1 , \vec{p}_2 et $\overrightarrow{O_1 O_2}$ quand il existe) :

$$\vec{\Gamma} = \vec{p}_2 \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \frac{p_2 p_1 \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0 |O_1 O_2|^3} (3 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) + \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

ou encore, en posant $\vec{\Gamma}_0 = \frac{p_2 p_1 \vec{e}_z}{4\pi\epsilon_0 |O_1 O_2|^3}$:

$$\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_0 (2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_1) + \sin(\theta_1 - \theta_2))$$

En reprenant les cas donnés dans l'énoncé :

- i) $\vec{\Gamma} = \vec{0}$
- ii) $\vec{\Gamma} = \vec{0}$
- iii) $\vec{\Gamma} = \vec{0}$
- iv) $\vec{\Gamma} = \vec{0}$

On voit ainsi que dans les positions données, les dipôles n'exercent pas de couple l'un sur l'autre, c'est-à-dire qu'ils ne font pas tourner l'autre dipôle : ce sont donc quatre positions d'équilibre (notons cependant qu'il existe une force, donc les dipôles vont bouger, il ne s'agit d'une position d'équilibre qu'en ce qui concerne la rotation). Par contre, on sait qu'un système tend toujours à minimiser son énergie potentielle, ce qui est le cas si les dipôles sont alignés, cas ii), dont on peut prouver par ailleurs que c'est la position de moindre énergie. Ainsi, seule cette configuration est un équilibre stable, car dans les autres cas, la moindre perturbation emportera le système loin de ces positions d'équilibre instable.

Nous avons ainsi vu que les molécules d'eau vont avoir tendance à s'aligner, ce qui permet de comprendre bien des comportements parfois étonnant de l'eau. Cela explique par exemple pourquoi l'eau prend plus de volume quand elle est solide que liquide (ce qui fait exploser les bouteilles d'eau pleine au congélateur ou fait flotter les glaçons), ou encore pourquoi l'eau peut former des flocons de neige. Notons enfin que les propriétés polaires de nombreuses molécules organiques et de l'eau, qui donnent lieux aux liaisons hydrogènes, sont à la base de la vie.

Magnétostatique

I Relativité des champs électromagnétiques

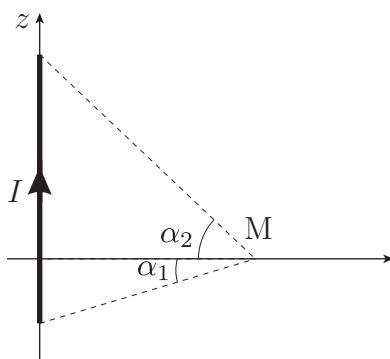
On considère deux référentiels Galiléens \mathcal{R} et \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre à la vitesse \vec{V} . Il règne dans le référentiel \mathcal{R} les champs électrique et magnétique (\vec{E}, \vec{B}) et dans \mathcal{R}' les champs (\vec{E}', \vec{B}') . On désire exprimer les champs \vec{E}' et \vec{B}' régnant dans \mathcal{R}' en fonction de ceux existants dans \mathcal{R} . Pour cela, on considère le mouvement d'une particule de charge q .

PRINCIPE DE GALILÉE : *La force exercée sur cette particule par les champs électrique et magnétique doit être indépendante du référentiel choisi.*

1. En considérant la force exercée sur une particule de charge q se déplaçant à une vitesse \vec{v} quelconque dans \mathcal{R} , utiliser l'invariance de la force et la composition des vitesses pour exprimer (\vec{E}', \vec{B}') en fonction de (\vec{E}, \vec{B}) .
2. On désire vérifier ces lois de transformation sur un cas particulier. On considère un fil infini chargé de façon linéaire λ , porté par l'axe (Oz) et se déplaçant à la vitesse $\vec{V} = V\vec{e}_z$ le long de son axe dans le référentiel \mathcal{R} .
 - a) Calculer les champs \vec{E} et \vec{B} en un point M dans le référentiel \mathcal{R} .
 - b) On se place maintenant dans le référentiel \mathcal{R}' qui se déplace à la vitesse \vec{V} par rapport à \mathcal{R} . Dans ce référentiel, le fil est donc fixe. Calculer les champs \vec{E}' et \vec{B}' dans ce référentiel.
 - c) Calculer les champs obtenus à la question précédente avec ceux que l'on obtiendrait en utilisant les lois de transformation de la question précédente (on les notera \vec{E}'' et \vec{B}'').
3. Que vaut la différence $\vec{F}'' - \vec{F}'$ entre les deux forces de Lorentz subies par une particule de charge q , calculées avec (\vec{E}'', \vec{B}'') et (\vec{E}', \vec{B}') . Commenter.

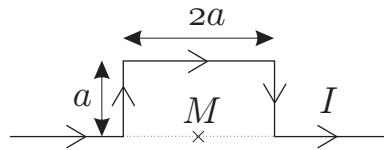
II Biot et Savart

II.1 Fil



1. Calculer le champ magnétique au point M.

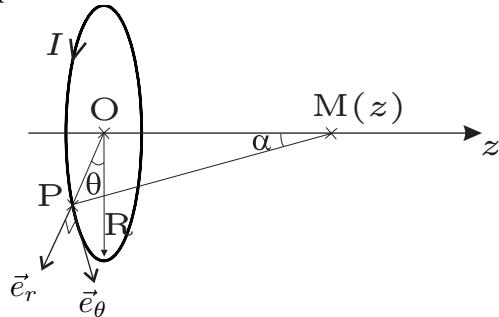
On considère maintenant le schéma de la figure ci-dessous.



2. Calculer le champ magnétique au point M.

II.2 Spire sur l'axe

1. On considère une spire circulaire de rayon R. On désire calculer le champ magnétique créé sur l'axe de la spire.

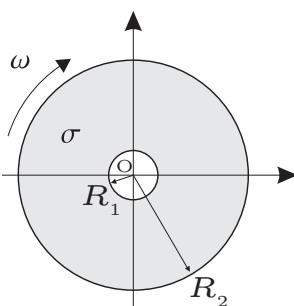


- a) Calculer le champ magnétique au centre d'une spire.
b) Montrer que le champ sur l'axe s'écrit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z = \vec{B}(0) \times \sin^3 \alpha$$

- c) Comment est modifiée la formule précédente lorsque l'on considère un enroulement de N spires superposées ?

On considère maintenant le schéma de la figure ci-contre. Le disque troué est chargé en surface σ et tourne à la vitesse angulaire ω . Son rayon intérieur est noté R_1 et son rayon extérieur R_2 .



2. Calculer le champ magnétique au centre O.
3. APPLICATION – Un disque dur moderne de 3,5 pouces (1 pouce = 2,54 cm) peut tourner à 10000 tours par minute. Quelle charge Q doit être déposée sur le disque dur pour que le champ magnétique créé par la rotation du disque dur soit de l'ordre du champ magnétique terrestre ($B_T \sim 5 \times 10^{-5}$ T) ? Commenter cette valeur.

II.3 Spire au voisinage de l'axe

On s'intéresse en un point proche de son axe (Oz).

1. Montrer que \vec{B} n'a pas de composante orthoradiale B_θ et que sa norme ne dépend que de r et z .
2. Justifier soigneusement qu'au voisinage de l'axe on a :

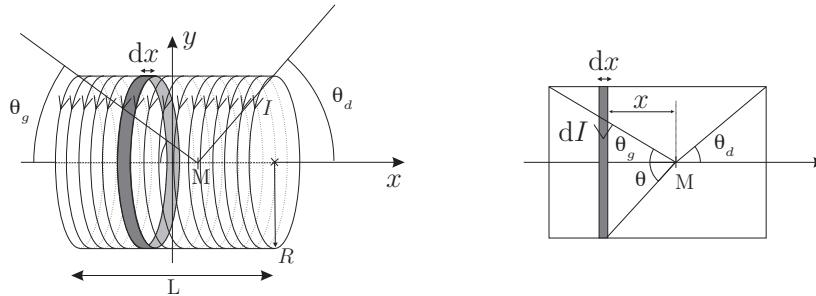
$$B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz}$$

3. Montrer finalement que

$$B_z(r, z) = B(0, z) - \frac{r^2}{4} \times \frac{d^2 B_z(0, z)}{dz^2}. \quad (1)$$

II.4 Solénoïde

On considère un ensemble de N spires ($N \gg 1$) collées les unes aux autres et on note n le nombre de spire par unité de longueur. On s'intéresse au champ magnétique créé sur l'axe à l'intérieur du solénoïde, en un point M que l'on paramètre à l'aide des angles $\theta_{g,d}$ de la figure ci-dessous. Pour faire ce calcul, on découpe par la pensée le solénoïde en une multitude de spires élémentaire d'épaisseur dx , afin d'utiliser les résultats précédents valables sur les spires.



1. Montrer que le courant dI qui circule dans une spire élémentaire d'épaisseur dx s'écrit

$$dI = -\frac{nIR}{\sin^2 \theta} d\theta$$

2. En utilisant les résultats de l'exercice précédent, en déduire l'expression du champ magnétique au point M en fonction de θ_g et θ_d .
3. Que vaut ce champ magnétique dans le cas d'un solénoïde infini ? Retrouver ce résultat à l'aide du théorème d'Ampère et tracer les lignes de champ à l'intérieur.

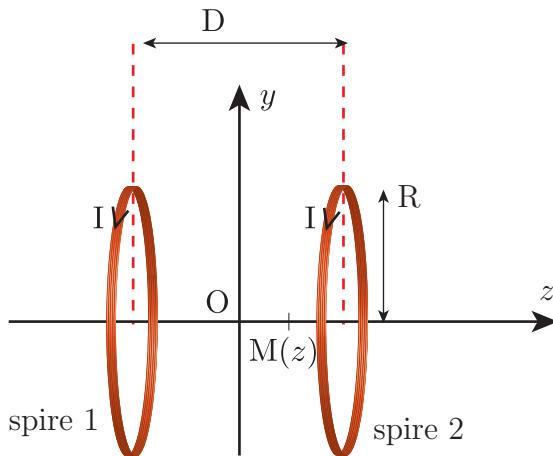
II.5 Bobine de Helmholtz

On considère maintenant deux spires identiques d'axe commun, de même rayon R , et parcourues par le même courant I. Les deux spires sont séparées d'une distance D. L'objectif de la configuration de Helmholtz est d'obtenir au voisinage du centre des deux spires (autour du point O) un champ magnétique le plus uniforme possible (c'est-à-dire constant spatialement).

1. Utiliser les résultats de l'exercice précédent pour exprimer le champ magnétique \vec{B} en un point M d'abscisse z situé sur l'axe entre les deux spires.
2. On suppose maintenant que le point M est au voisinage du centre O de telle sorte que $z \ll D$ et $z \ll R$. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 en z/D , en déduire à quelle distance D il faut placer les deux spires pour avoir le champ le plus uniforme possible.

Rappel : $(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2$ pour $x \ll 1$.

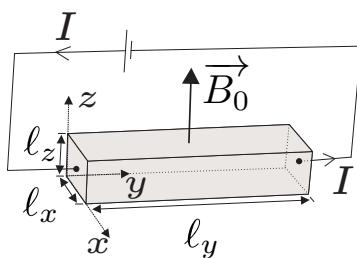
3. Tracer les lignes de champ magnétique.



III Effet Hall

On considère le conducteur parallélépipédique de la figure ci-contre, parcouru par un courant I et soumis à un champ magnétique constant \vec{B}_0 . En régime permanent, les électrons se déplacent le long de l'axe y dans le conducteur et on note v leur vitesse.

1. Montrer, sans calcul pour le moment, qu'en régime permanent il se crée un champ électrique dirigé selon \vec{e}_x .
2. Déterminer la valeur du champ électrique de Hall \vec{E}_H en fonction de v et B_0 .

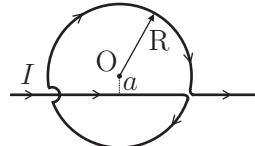


3. Exprimer la tension de Hall $U_H = V(0) - V(\ell_x)$ qui existe entre les extrémités $x = 0$ et $x = \ell_x$ en fonction de I , e , B_0 , ℓ_z et le nombre n d'électron par unité de volume.
4. SONDE À EFFET HALL – La mesure de U_H permet donc de déterminer la valeur d'un champ magnétique. On prend un conducteur en cuivre ($n \sim 8 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$) de dimension $\ell_z = 1 \text{ mm}$, parcouru par un courant $I = 1 \text{ A}$. On mesure une tension de Hall de $1 \mu\text{V}$. Déterminer la valeur du champ magnétique.
5. Quel matériau faudrait-il plutôt utiliser pour augmenter la sensibilité de la sonde ?
6. APPLICATION – Le sang contient des ions de telle sorte que lorsque le corps est plongé dans un champ magnétique, il se crée une tension de Hall à travers le diamètre d'une artère. Déterminer l'ordre de grandeur de cette tension pour une artère de diamètre de 5 mm dans laquelle circule du sang à une vitesse de $0,6 \text{ m.s}^{-1}$. On prendra pour B_0 la valeur du champ magnétique terrestre $B_0 \simeq 4,7 \times 10^{-5} \text{ T}$.

IV Théorème d'Ampère

IV.1 Mise en bouche

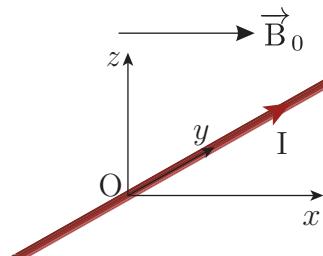
Soit le circuit représenté sur le schéma ci-dessous parcouru par un courant I. Trouver la distance a pour laquelle on a un champ magnétique nul au centre O du cercle.



IV.2 Guide à atome

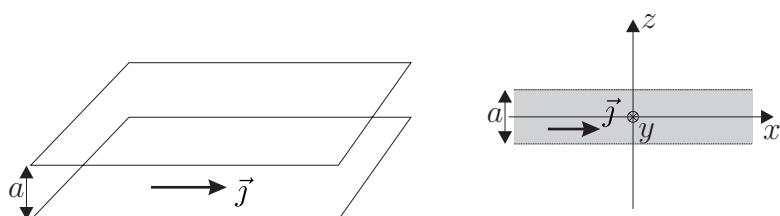
On considère un fil conducteur infini porté par l'axe (Oy), parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_x$.

1. Déterminer l'ensemble des points M dans l'espace pour lesquels le champ magnétique est nul.
2. Tracer $B(z)$ pour un point M sur l'axe (Oz).
3. Tracer les lignes de champs dans le plan (xOz).

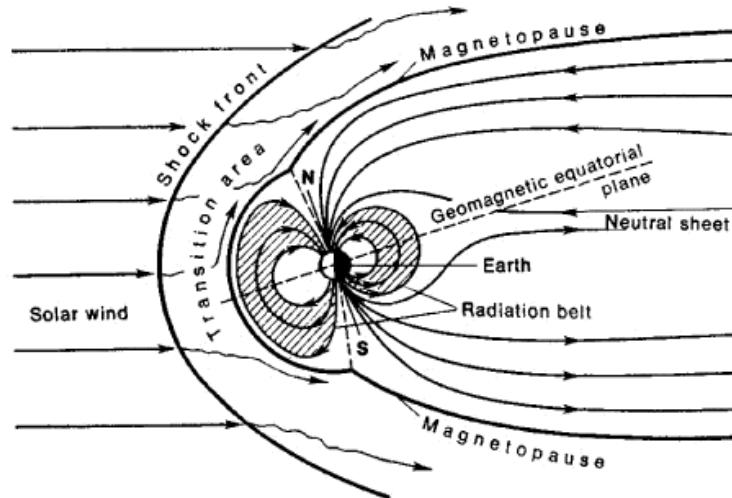


IV.3 Nappe de courant

On considère la nappe de courant représentée sur la figure ci-dessous. Un courant volumique $\vec{j} = j \vec{e}_x$ circule entre deux plans infinis espacés d'une distance a et perpendiculaires à l'axe z .



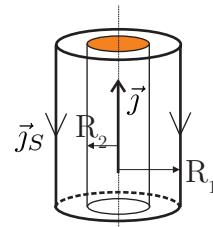
1. Calculer $B(z)$ et le tracer en fonction de z . Distinguer les cas $|z| \geq a/2$ et $|z| \leq a/2$. Que se passe-t-il si $a \rightarrow 0$ et $ja \equiv j_S = \text{cte}$?
2. Tracer les lignes de champs.
3. Montrer qu'un courant circule dans la « neutral sheet » et trouver sa direction et son sens.



IV.4 Cable coaxial

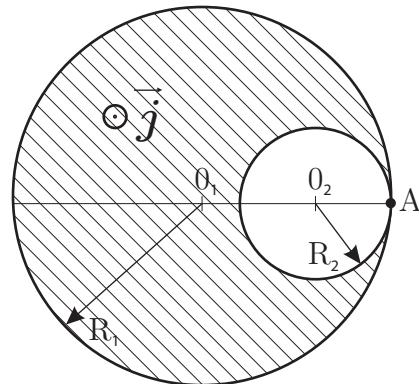
Un cable coaxial (BNC) est constitué d'un cylindre intérieur plein et d'un cylindre extérieur creux de même axe. Le courant circule en volume dans le petit cylindre intérieur, avec une densité volumique de courant \vec{j} . Le courant circule en surface sur le cylindre creux extérieur, avec une densité surfacique de courant \vec{j}_S . Les deux cylindres sont parcourus par le même courant global I mais en sens opposé.

1. Calculer le champ magnétique entre les deux cylindres puis à l'extérieur du cable coaxial.
2. Calculer le champ magnétique à l'intérieur du cylindre interne.



IV.5 Fil troué

Un fil infini de section transverse représentée sur la figure ci-dessous est parcouru par un courant total I. On appelle j la densité de courant.



1. Exprimer la densité volumique de courant j en fonction des données du problème.
2. Calculer le champ magnétique au point A en fonction de I, R_1 et R_2 .

Correction

I Relativité des champs électromagnétiques

1. REMARQUE SUR L'INVARIANCE DE LA FORCE DE LORENTZ : Le principe de relativité stipule que la force doit prendre la même expression dans les deux référentiels, à savoir

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{et} \quad \vec{F}' = q'(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

On admet l'invariance de la charge, $q = q'$, et l'invariance de la masse $m = m'$. D'autre part, les transformations de Galilée pour le changement de référentiel s'écrivent

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{V}t \quad \text{et} \quad t' = t$$

Donc

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad \text{avec} \quad \vec{V} = \vec{C}^{\text{té}}$$

On en déduit

$$m' \frac{d\vec{v}'}{dt'} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

C'est-à-dire

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

La force est donc un invariant par les transformations de Galilée.

On en déduit

$$\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{E}' + (\vec{v}' - \vec{V}) \wedge \vec{B}'$$

Cette relation doit être vérifiée quelque soit \vec{v} .

- i) Lorsque $\vec{v} = \vec{V}$, on déduit que nécessairement

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}$$

- ii) Les deux équations précédentes donnent

$$(\vec{v} - \vec{V}) \wedge (\vec{B} - \vec{B}') = \vec{0}$$

Et ce quelque soit \vec{v} ,

donc

$$\vec{B}' = \vec{B}$$

2. a) On se place en symétrie cylindrique autour de l'axe du fil. Les symétries et invariances montrent que $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$ et $\vec{B} = B(r) \vec{u}_\theta$. Le théorème de Gauss sur un cylindre de hauteur h centré sur le fil donne

$$2\pi rhE(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

Donc

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \vec{u}_r$$

Dans le référentiel \mathcal{R} , le fil en mouvement peut être considéré comme un fil parcouru par un courant $I = \frac{dq}{dt} = \frac{\lambda V dt}{dt} = \lambda V$. Le théorème d'Ampère sur un contour circulaire autour du fil donne

$$2\pi r B(r) = \mu_0 \lambda V$$

C'est-à-dire

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda V}{2\pi r} \vec{u}_\theta = \frac{\vec{V} \wedge \vec{E}}{c^2}$$

b) Dans le référentiel \mathcal{R}' , le fil est immobile, donc

$$\vec{B}' = \vec{0}$$

Pour le champ électrique, le calcul est le même que précédemment, donc

$$\vec{E}' = \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r$$

c) On trouve

$$\vec{E}'' = \vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{u}_r + V \vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 \lambda V}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

A l'aide de la relation $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, on en déduit finalement

$$\vec{E}'' = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \vec{u}_r = \vec{E} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)$$

et

$$\vec{B}'' = \vec{B} = \frac{\mu_0 \lambda V}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

On voit donc que $\vec{E}'' \neq \vec{E}'$ et $\vec{B}'' \neq \vec{B}'$.

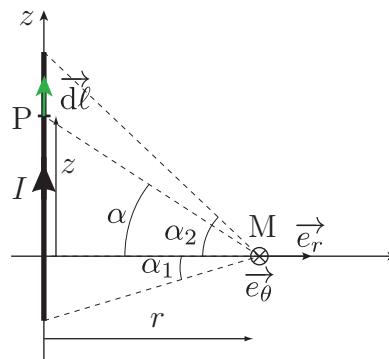
3.

$$\vec{F}'' - \vec{F}' = q \frac{\vec{v}}{c} \wedge \left(\frac{\vec{V}}{c} \wedge \frac{\vec{E}}{c} \right) - q \frac{V^2}{c^2} \vec{E}$$

La différence est négligeable devant \vec{F} dans la limite non relativiste $V, v \ll c$.

II Biot et Savart

II.1 Fil



- Le plan contenant M et le segment est un plan de symétrie (PS), donc $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire à ce plan. Si on opte pour un système de coordonnées cylindrique, cela permet d'écrire

$$\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{e}_\theta = B(r, z) \vec{e}_\theta$$

où l'invariance par rotation autour de l'axe (Oz) nous a permis de montrer que l'amplitude $B(r, \theta, z)$ ne peut pas dépendre de θ .

On applique maintenant la relation de Biot et Savart. Sans perte de généralité, on peut positionner le point M en $z = 0$ et paramétriser la position d'un point P du fil à l'aide d'un angle α entre l'horizontal et la droite MP (α allant ainsi de $-\alpha_1$ à α_2).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P\epsilon fil} \frac{d\ell \wedge \vec{PM}}{PM^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P\epsilon fil} \frac{\cos \alpha}{r^2 + z^2} dz$$

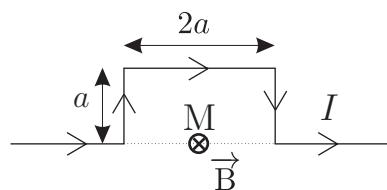
Puisque $z = r \tan \alpha$ $dz = r d\alpha \frac{dtan \alpha}{d\alpha} = \frac{r d\alpha}{\cos^2 \alpha}$

Par ailleurs, $r^2 + z^2 = \frac{r^2}{\cos^2 \alpha}$

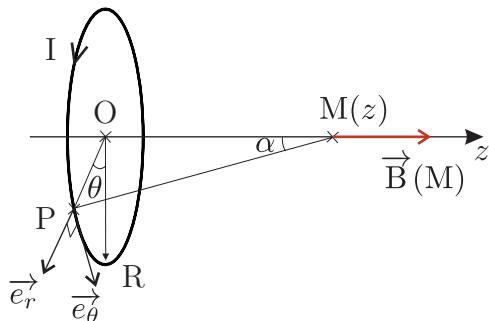
Ainsi, $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \cos \alpha d\alpha \vec{e}_\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1) \vec{e}_\theta}$

2. À l'aide du théorème de superposition et en utilisant 4 fois le segment de fil avec $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi/4$, on obtient immédiatement

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\sqrt{2} \mu_0 I}{\pi a} \vec{e}_z}$$



II.2 Spire sur l'axe



1. a) Biot et Savart $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_C \frac{Id\ell \wedge \vec{PO}}{PO^3}$

où $d\ell = Rd\theta \vec{e}_\theta$ et $\vec{PO} = -R\vec{e}_r$, donc $d\ell \wedge \vec{PO} = R^2 d\theta \vec{e}_z$.

On en déduit $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\theta \vec{e}_z$

C'est-à-dire

$$\boxed{\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{e}_z}$$

- b) Le champ magnétique $d\vec{B}$ créé en M par un élément de circuit $d\ell$ situé en P s'écrit

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell \wedge \vec{PM}}{PM^3}$$

En se plaçant en coordonnée cylindrique, on a $d\ell = Rd\theta \vec{e}_\theta$ et en remarquant que $\vec{PM} = \vec{PO} + \vec{OM}$, on obtient pour \vec{B} :

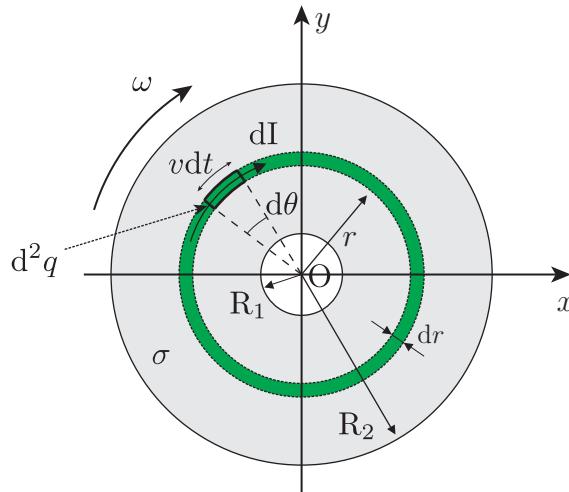
$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R \vec{e}_\theta \wedge (\vec{PO} + \vec{OM})}{PM^3} d\theta \quad \text{avec} \quad PM = (x^2 + R^2)^{1/2}$$

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 IR}{4\pi(x^2 + R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta \vec{e}_\theta \wedge \vec{PO} \quad \text{car} \quad \int_0^{2\pi} d\theta \vec{e}_\theta \wedge \vec{OM} = \vec{0}$$

C'est-à-dire $\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{e}_z$

On peut aussi écrire $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z}$

- c) Dans le cas d'un enroulement de N spires superposées, il suffit de remplacer I par $N \times I$.



2. On découpe le disque en couronne sphérique de rayon r et d'épaisseur dr , de façon à se ramener au cas de la spire. Le courant $dI(r)$ qui circule sur cette couronne est par définition la quantité de charge d^2q qui traverse une ligne radiale de longueur dr pendant un temps dt . Cette charge est répartie dans une portion de couronne circulaire d'épaisseur dr et de longueur $vdt = r\omega dt$, donc

$$d^2q = \sigma dr v dt = \sigma \omega r dr dt$$

Ainsi, $dI(r) = \frac{d^2q}{dt} = \sigma \omega r dr$

On utilise ensuite la formule du champ magnétique créé par une spire en son centre

$$\vec{dB}(O) = \frac{\mu_0 dI}{2r} \vec{e}_z$$

Le champ magnétique total se calcule en intégrant l'expression précédente

$$\vec{B}(O) = \int d\vec{B}(O) = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 \sigma \omega r dr}{2r} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} (R_2 - R_1) \vec{e}_z$$

3. APPLICATION – On prend $R_1 = 0$ pour simplifier.

$$Q = \pi R_2^2 \sigma = \frac{2\pi R_2 B_T}{\mu_0 \omega}$$

Puisque $\omega = \frac{2\pi \times 10000}{60}$, $\boxed{Q \simeq 2 \times 10^{-2} \text{ C}}$

C'est une valeur gigantesque, qui ne risque pas de se réaliser en pratique. En effet, si on calcule quelle tension il devrait exister entre le disque et le support qui lui fait face (ce qui forme en gros un condensateur), on aurait

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{Q\ell}{\epsilon_0 S} \sim 10^7 \text{ V}$$

II.3 Spire au voisinage de l'axe

On s'intéresse à un point M proche de son axe (Oz).

- Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est un plan d'antisymétrie donc $\vec{B}(M) \in (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$, c'est-à-dire que $\vec{B}(M)$ n'a pas de composante orthoradiale. Par ailleurs il y a invariance par rotation autour de l'axe des z donc l'amplitude de $\vec{B}(M)$ ne dépend que de r et de z.

D'où

$$\boxed{\vec{B}(M) = B_r(r, z)\vec{e}_r + B_z(r, z)\vec{e}_z}$$

- \vec{B} est à flux conservatif,

$$0 = \operatorname{div} \vec{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r(r, z)) + \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial z}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial r} (r B_r(r, z)) = -r \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial z}$$

Puisque M est proche de l'axe, on peut faire un développement limité autour de $r = 0$,

$$r \frac{\partial B_z(r, z)}{\partial z} \underset{r \rightarrow 0}{\sim} r \frac{dB_z(0, z)}{dz} + O(r^2)$$

avec

$$B_z(0, z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}$$

d'après les questions précédentes. Il est désormais possible d'intégrer pour obtenir

$$r B_r(r, z) = -\frac{1}{2} r^2 \frac{dB_z(0, z)}{dz} + \text{cte}$$

La constante doit être nulle (il suffit de considérer $r = 0$).

Ainsi,

$$\boxed{B_r(r, z) = -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz}}$$

Notons que ce résultat peut être retrouvé en utilisant une forme intégrale de la conservation du flux, appliquée sur une surface fermée cylindrique d'axe (Oz), de rayon r faible, comprise entre z et $z + dz$

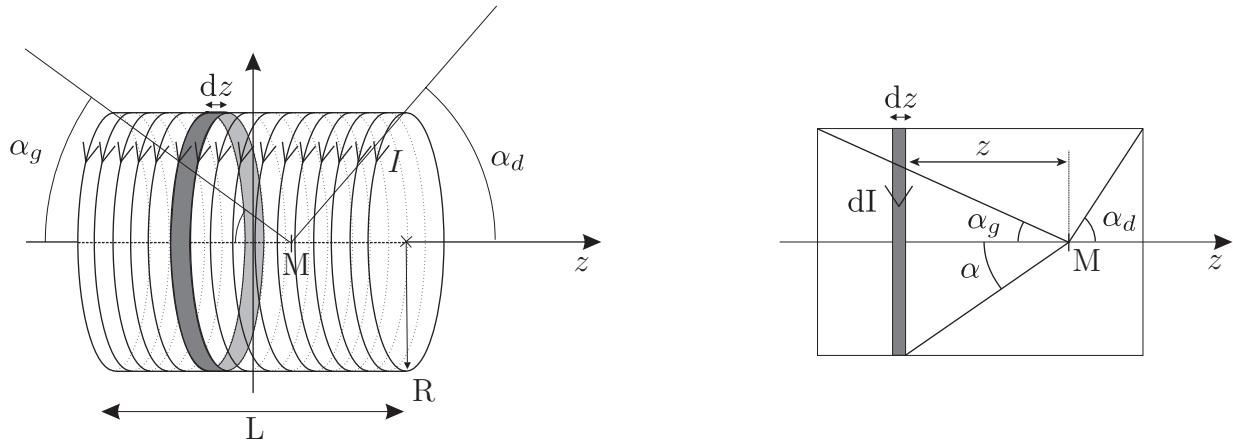
- On obtient la composante $B_z(r, z)$ en considérant par exemple $\vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \vec{0}$ en M.

$$\vec{0} = \vec{\operatorname{rot}} \vec{B} = \left(\frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta \Rightarrow \frac{\partial B_z}{\partial r} = -\frac{r}{2} \frac{d^2 B_z(0, z)}{dz^2}$$

Et donc

$$\boxed{B_z(r, z) = B(0, z) - \frac{r^2}{4} \frac{d^2 B(0, z)}{dz^2}}$$

II.4 Solénoïde



1. On a $dI = n dz I$

Or, $z = \frac{R}{\tan \alpha} \Rightarrow dz = -\frac{R}{\tan^2 \alpha} d(\tan \alpha) = -\frac{R d\alpha}{\sin^2 \alpha}$

Donc
$$dI = -\frac{nIR}{\sin^2 \alpha} d\alpha$$

2. On utilise les résultats de l'exercice précédent.

$$\vec{B}(O) = - \int_{\alpha_g}^{\pi - \alpha_d} \frac{\mu_0}{2R} \frac{nIR}{\sin^2 \alpha} d\alpha \sin^3 \alpha \vec{e}_z = \frac{\mu_0 n I}{2} [\cos \alpha]_{\alpha_g}^{\pi - \alpha_d} \vec{e}_z$$

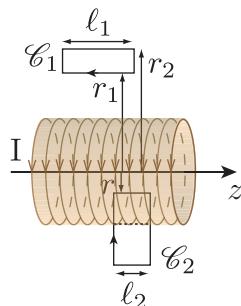
Donc
$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 n I}{2} (\cos \alpha_g + \cos \alpha_d)$$

3. Pour le solénoïde infini, $\alpha_g \rightarrow 0$ et $\alpha_d \rightarrow 0$.

Ainsi,
$$\vec{B}(O) = \mu_0 n I \vec{e}_z$$

La démonstration avec le théorème d'Ampère est très simple.

Invariance et symétrie : $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$



Appliquons le théorème d'Ampère sur le contour fermé \mathcal{C}_1 , qui est un rectangle de largeur ℓ_1 entre r_1 et r_2 . Il est clair que $I_{\text{enlacé}} = 0$, donc

$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0 = \int_{\text{haut}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{bas}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{gauche}} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{\text{droite}} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

Puisque $\vec{B} = B(r) \vec{e}_z$

$$0 = - \iint_{r_1} B(r) d\ell + \iint_{r_2} B(r) d\ell$$

$$(\mathbf{B}(r_1) - \mathbf{B}(r_2))\ell_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B}(r_1) = \mathbf{B}(r_2)$$

Ainsi, le champ magnétique ne dépend finalement pas de r (résultat non évident à priori). Il est donc constant à l'extérieur du solénoïde. Puisque le champ magnétique doit s'annuler à l'infini, $\mathbf{B}(r \rightarrow \infty) = 0$, on en déduit que celui-ci est finalement constant et nul à l'extérieur du solénoïde (même aussi près que l'on veut du solénoïde!).

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{ext}} = \overrightarrow{0}}$$

Un raisonnement équivalent sur un contour entièrement contenu dans le solénoïde montre qu'à l'intérieur également, le champ magnétique doit être constant. Par contre, on ne peut pas encore conclure sur sa valeur.

Pour déterminer la valeur du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde, appliquons le théorème d'Ampère sur le contour fermé \mathcal{C}_2 , à cheval sur le solénoïde.

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = +\mu_0 n \ell_2 I$$

Or,

$$\oint_{\mathcal{C}_2} \overrightarrow{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B_{\text{int}} \ell_2$$

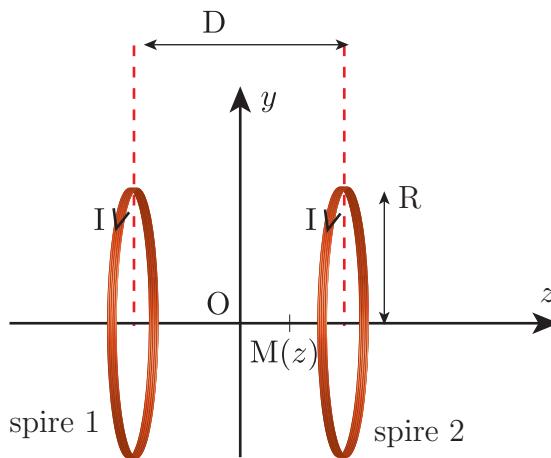
Donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\text{int}} = \mu_0 n I \overrightarrow{e_z}}$$

II.5 Bobine de Helmholtz

- On utilise le théorème de superposition

$$\overrightarrow{\mathbf{B}}(z) = \frac{\mu_0 I}{2R} \left(\frac{1}{\left[1 + \left(\frac{D+2z}{2R} \right)^2 \right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{D-2z}{2R} \right)^2 \right]^{3/2}} \right) \overrightarrow{e_z}$$



$$2. \quad \left[1 + \left(\frac{D+2z}{2R} \right)^2 \right]^{-3/2} = \left(1 + \frac{D^2}{4R^2} \right)^{-3/2} \left[1 + \underbrace{\frac{zD}{R^2 + \frac{D^2}{4}} + \frac{z^2}{R^2 + \frac{D^2}{4}}}_{\equiv \epsilon} \right]^{-3/2}$$

$$\left[1 + \left(\frac{D+2z}{2R}\right)^2\right]^{-3/2} = \left(1 + \frac{D^2}{4R^2}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2}\epsilon + \frac{15}{8}\epsilon^2\right)$$

en collectant les termes au plus en z^2 , on obtient

$$\left(1 + \frac{D^2}{4R^2}\right)^{3/2} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{zD}{R^2 + \frac{D^2}{4}} - \frac{3}{2} \frac{z^2}{R^2 + \frac{D^2}{4}} + \frac{15}{8} \frac{z^2 D^2}{\left(R^2 + \frac{D^2}{4}\right)^2}\right)$$

Le deuxième terme intervenant dans l'expression du champ magnétique s'obtient en remplaçant z par $-z$ dans l'expression ci-dessus. Ainsi, pour $z \sim 0$,

$$\vec{B}(z) \sim \frac{\mu_0 I}{2R} \left(1 + \frac{D^2}{4R^2}\right)^{-3/2} \left[2 - \frac{3z^2}{R^2 + \frac{D^2}{4}} + \frac{15}{4} \frac{z^2 D^2}{\left(R^2 + \frac{D^2}{4}\right)^2}\right] \vec{e}_z$$

Le terme en z^2 s'annule lorsque

$$\frac{3}{R^2 + \frac{D^2}{4}} = \frac{15}{4} \frac{D^2}{\left(R^2 + \frac{D^2}{4}\right)^2} \Rightarrow \frac{15}{4} D^2 = 3R^2 + \frac{3}{4} D^2$$

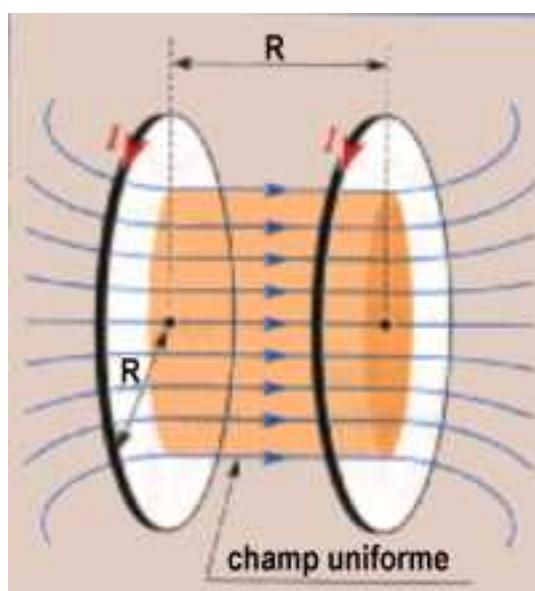
C'est-à-dire

$$D = R$$

Le champ magnétique est uniforme au centre des bobines de Helmholtz (les dérivées première et seconde s'annulent simultanément) et le champ vaut

$$B = \left(\frac{4}{5}\right)^{3/2} \frac{\mu_0 I}{R}$$

3. Les lignes de champs sont quasi-rectiligne au centre.



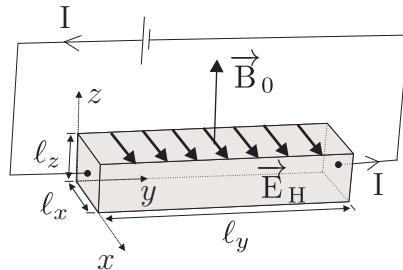
III Effet Hall

- En régime permanent, les électrons se déplacent selon $-\vec{e}_y$. Or, puisqu'il y a un champ magnétique, ces électrons subissent la force de Lorentz $-e\vec{v} \wedge \vec{B}_0$ qui est dirigée selon $+\vec{e}_x$. Pour que la composante de la force selon \vec{e}_x s'annule, il faut qu'il se crée un champ électrique \vec{E}_H dirigé selon $+\vec{e}_x$ afin que la force exercée sur l'électron soit selon $-\vec{e}_x$. L'origine de cette force provient du fait que lorsqu'on allume le courant, les électrons commencent d'abord à s'accumuler sur la face $x = \ell_x$ du conducteur à cause de la force de Lorentz due à \vec{B}_0 . Ce faisant, les électrons localisés à la surface sont à l'origine de la création d'un champ électrique qui repousse les électrons venant s'accumuler (répulsion des électrons entre eux). Le régime permanent est atteint lorsque cette force de répulsion compense la force de Lorentz due à \vec{B}_0 .
- En régime permanent, la force due au champ de Hall compense la force de Lorentz magnétique, donc :

$$-e(\vec{E}_H + \vec{v} \wedge \vec{B}_0) = \vec{0}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B}_0}$$



- La relation entre le potentiel et le champ électrique s'écrit $\vec{E}_H = -\vec{\text{grad}} V_H$. Donc ici, puisque \vec{E}_H est portée par \vec{e}_x

$$E_H = -\frac{dV_H}{dx}$$

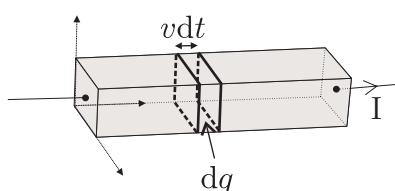
\vec{E}_H est un vecteur constant, de norme vB_0 , ce qui permet d'intégrer l'équation précédente en

$$V_H(x) - V_H(0) = - \int_0^x E_H dx = -xE_H$$

Le tension de Hall est par définition la différence de potentiel entre les deux bords du barreau :

$$U_H = V_H(\ell_x) - V_H(0) = -\ell_x E_H = -v\ell_x B_0$$

Il reste à exprimer v en fonction de I , n et e . Pour cela, on se rappelle que I est la quantité de charge qui traverse une section du barreau par unité de temps. Pendant un temps dt , la charge qui passe est contenue dans le parallélépipède de section $\ell_x \ell_z$ et de longueur vdt . Ainsi, pendant ce temps circule une charge $dq = -e \times n \times \ell_x \ell_z \times vdt$, donc



$$I = -ne\ell_x\ell_z v \quad \text{soit} \quad v\ell_x = -\frac{I}{ne\ell_z}$$

D'où

$$U_H = \frac{IB_0}{ne\ell_z}$$

4. SONDE À EFFET HALL – La mesure de V_H permet de déterminer la valeur d'un champ magnétique perpendiculaire au barreau. Pour le conducteur, on trouve

$$B_0 = \frac{ne\ell_z U_z}{I} \simeq 13 \text{ T}$$

ce qui est une très grande valeur.

5. Pour avoir une meilleure sensibilité, il faut prendre un matériau dans lequel n est le plus petit possible, tout en restant conducteur. En pratique, on utilise des semi-conducteurs.
6. APPLICATION – On trouve une tension de Hall de l'ordre de

$$U_H = vdB_0 \simeq 1 \times 10^{-8} \text{ V}$$

ce qui est tout à fait négligeable devant les potentiels électriques présents dans le corps humain (de l'ordre du volt ou de la centaine de millivolt).

IV Théorème d'Ampère

IV.1 Mise en bouche

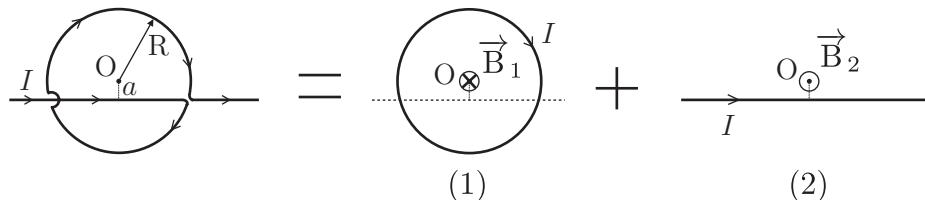
On pense à utiliser le théorème de superposition pour cette question, la distribution se ramenant à un cercle plus un fil infini. On connaît les expressions des champs magnétiques pour ces deux distributions. Par ailleurs, on voit grâce à la règle de la main droite que le champ magnétique créé par le cercle et celui créé par le fil sont perpendiculaires au plan de la feuille et surtout de sens opposé. Il peut donc y avoir à priori une distance a pour laquelle les deux contributions se compensent de telle sorte que le champ soit nul.

Il suffit que

$$B_1 = B_2 \Rightarrow \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

Donc

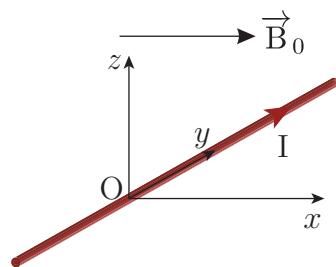
$$a = \frac{R}{\pi}$$



IV.2 Guide à atome

1. Le champ magnétique du fil doit compenser le champ \vec{B}_0 , donc

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \Rightarrow r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B_0}$$

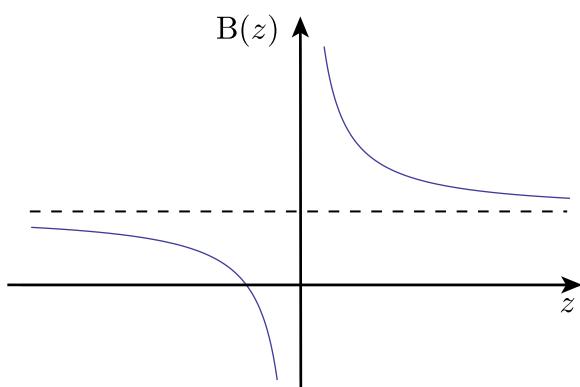


Les points correspondants sont situés **sous** le fil (de sorte que le champ magnétique créé par le fil s'oppose à \vec{B}_0), tels que

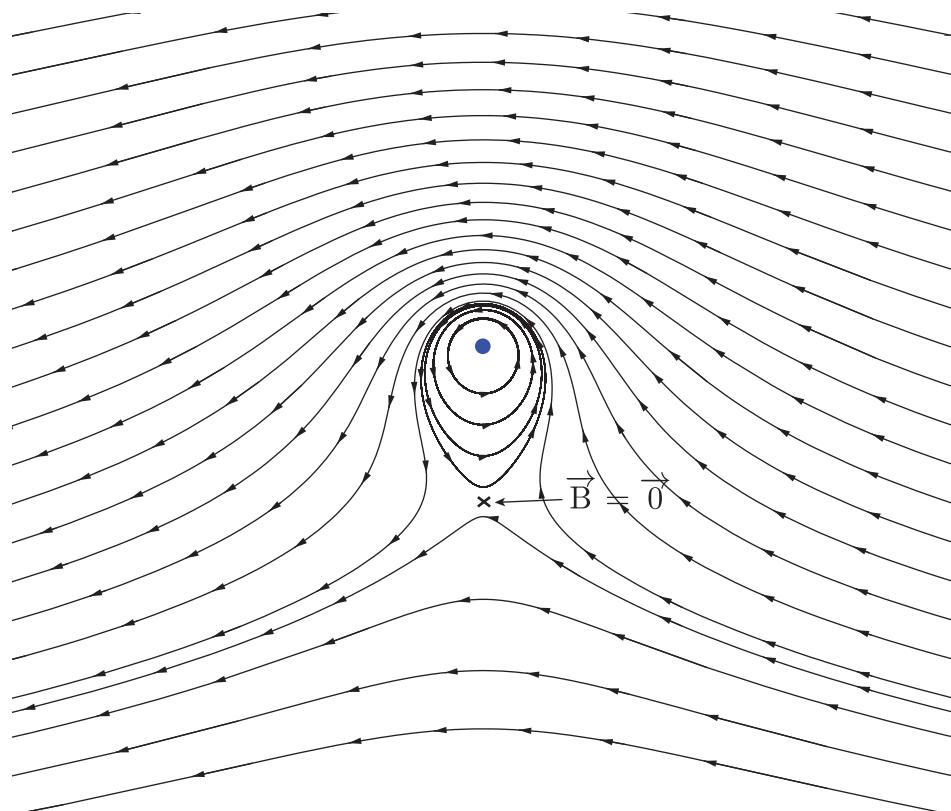
$$z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi B_0}$$

2.

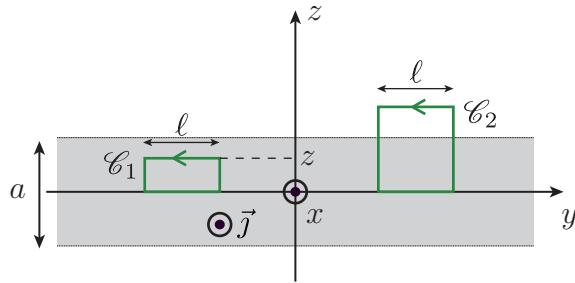
$$B(z) = B_0 + \frac{\mu_0 I}{2\pi z}$$



3. La figure ci-dessous représente les lignes de champs, avec le courant venant vers vous.



IV.3 Nappe de courant



- Le plan (xMz) est un plan de symétrie de la distribution de courant, donc \vec{B} est perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire porté par \vec{e}_y . Par ailleurs, les invariances par translation selon x et y montrent que l'amplitude du champ ne dépend pas de ces variables.

Ainsi,

$$\vec{B} = B(z) \vec{e}_y$$

Si on positionne un point M en $z = 0$, il existe un plan de symétrie supplémentaire, à savoir le plan (xOy) (qui contient bien le point M). Le champ magnétique doit donc être à la fois perpendiculaire à (xOz) et à (xOy), qui sont deux plans perpendiculaires. Ce n'est possible que si \vec{B} est nul.

Donc

$$B(z = 0) = 0$$

Considérons le cas $|z| \leq a/2$. On applique le théorème d'Ampère sur le contour \mathcal{C}_1 .

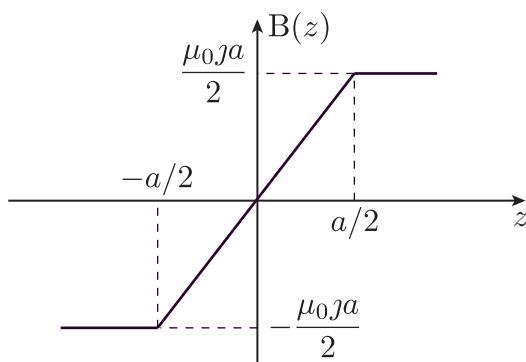
$$\oint_{\mathcal{C}_1} \vec{B} \cdot d\ell = B(z)\ell = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \mu_0 j \ell z$$

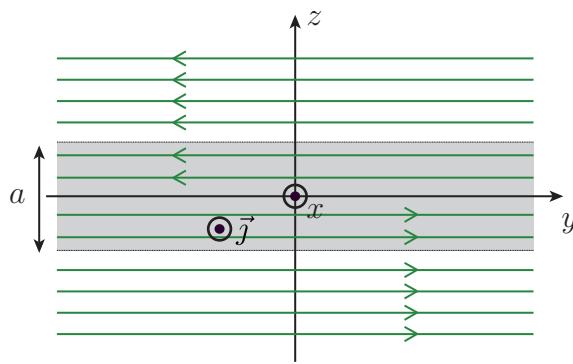
Donc

$$\boxed{\vec{B} = \mu_0 j z \vec{e}_y \quad , \quad |z| \leq a/2}$$

Dans le cas où $|z| \geq a/2$, on applique le théorème d'Ampère sur le contour \mathcal{C}_2 . Puisque $I_{\text{enlacé}} = \frac{\mu_0 j a}{2}$, on obtient

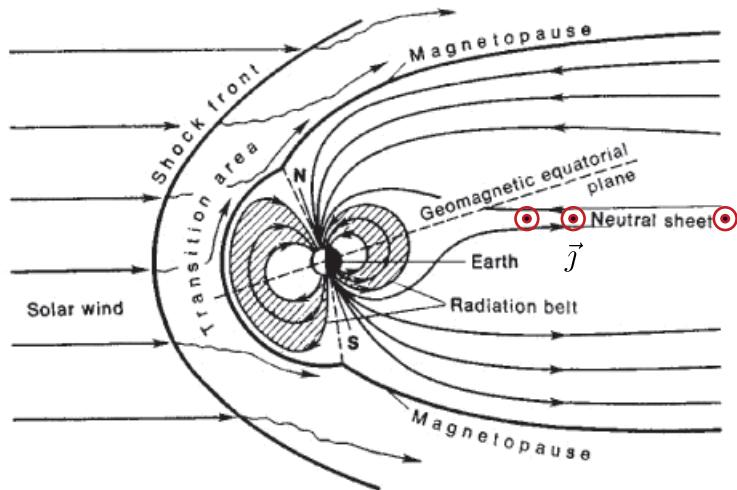
$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 j a}{2} \vec{e}_y \quad , \quad |z| \geq a/2}$$



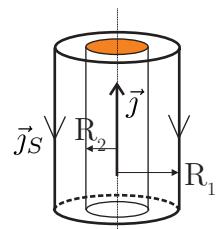


2.

3. On reconnaît qu'au voisinage de la « neutral sheet », les lignes de champ magnétique sont les mêmes que celles de la nappe de courant.



IV.4 Cable coaxial



1. On a

$$I = \jmath \pi R_2^2 \quad , \quad I = \jmath_S 2\pi R_1$$

Les invariances (rotation autour de l'axe et translation le long de l'axe) et symétries (le plan contenant M et l'axe est un plan de symétrie) permettent d'écrire

$$\vec{B} = B(r) \vec{e}_\theta$$

En appliquant le théorème d'Ampère sur un cercle encerclant l'axe, on trouve

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad , \quad R_2 \leq r \leq R_1}$$

$$\boxed{\vec{B} = \vec{0} \quad , \quad R_1 \leq r}$$

À noter que le champ magnétique est nul en dehors du BNC, ce qui limite les pertes et les interférences avec l'extérieur.

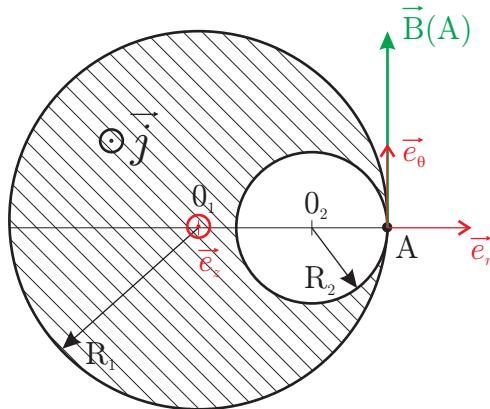
2. On applique encore une fois le théorème d'Ampère sur un cercle, contenu dans le cylindre intérieur.

$$I_{\text{enlacé}} = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = j\pi r^2 = I \left(\frac{r}{R_2} \right)^2$$

Donc

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R_2} \frac{r}{R_2} \vec{e}_\theta}$$

IV.5 Fil troué



1. Par définition, $I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S}$, où l'intégrale doit être prise sur l'aire hachurée. Puisque la densité de courant est constante et parallèle à \vec{B} , on peut écrire

$$I = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint j \, dS = j \iint dS$$

Or, l'aire hachurée s'écrit comme l'aire du disque de rayon R_1 moins l'aire du disque de rayon R_2 , donc

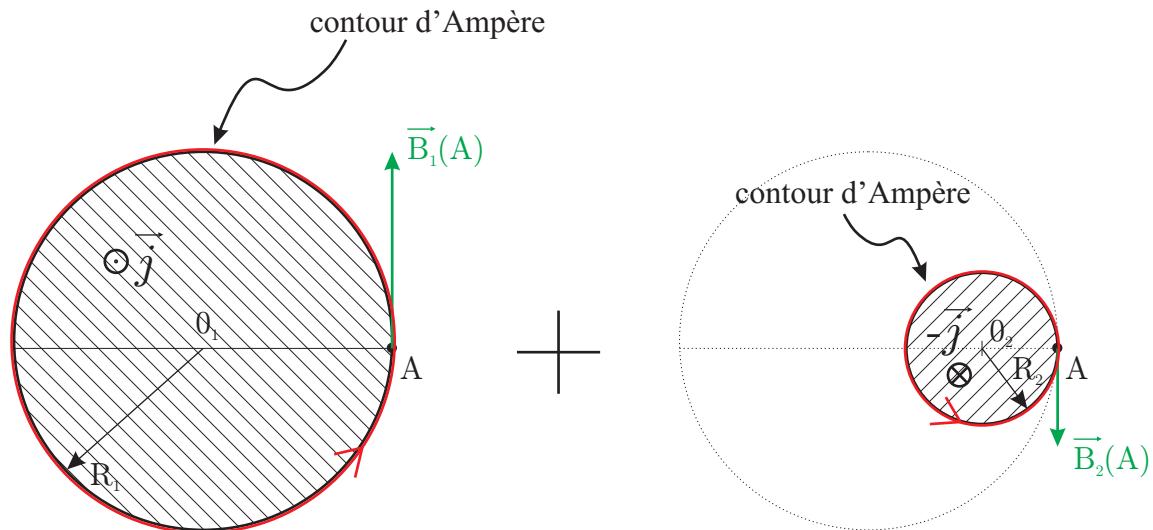
$$I = j(\pi R_1^2 - \pi R_2^2)$$

d'où

$$j = \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)}$$

2. Le plan contenant l'axe ($O_1 z$) et le point A est un plan de symétrie, donc le champ magnétique est perpendiculaire à ce plan, c'est-à-dire dirigé selon le vecteur \vec{e}_θ des coordonnées cylindriques. Le sens est obtenu à l'aide de la règle de la main droite, ou bien de la règle du tire-bouchon (voir figure ci-dessus).

Le théorème de superposition nous permet de remplacer la distribution de courant ci-dessus comme la somme d'un cylindre plein de rayon R_1 centré sur O_1 parcouru par une densité de courant \vec{j} et d'un cylindre plein de rayon R_2 , de centre O_2 , et parcouru par une densité de courant $-\vec{j}$.



Le champ magnétique total s'écrit alors $\vec{B}(A) = \vec{B}_1(A) + \vec{B}_2(A)$. Pour calculer $\vec{B}_1(A)$ et $\vec{B}_2(A)$, on utilise le théorème d'Ampère sur les contours qui sont représentés sur la figure. Pour le cylindre 1, nous avons :

$$2\pi R_1 B_1 = \mu_0 I_1^{\text{enlacé}} = \mu_0 \times j\pi R_1^2$$

Et donc

$$\vec{B}_1(A) = \frac{\mu_0 j R_1}{2} \vec{e}_\theta$$

De même

$$2\pi R_2 B_2 = \mu_0 I_2^{\text{enlacé}} = -\mu_0 \times j\pi R_2^2$$

car le courant enlacé doit être compté négativement vu l'orientation du contour d'Ampère.

Donc

$$\vec{B}_2(A) = -\frac{\mu_0 j R_2}{2} \vec{e}_\theta$$

D'où

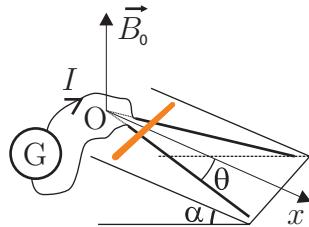
$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 j}{2} (R_1 - R_2) \vec{e}_\theta$$

Et avec la question 1,

$$\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(R_1 + R_2)} \vec{e}_\theta}$$

Force de Laplace

I Rails

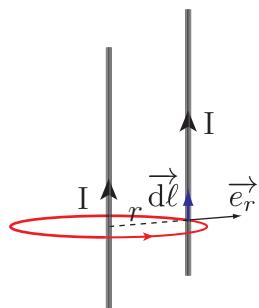


On considère un rail de Laplace sur une pente α . Les rails font un angle θ entre eux (mais ne se rejoignent pas). Le champ \vec{B}_0 est supposé vertical et uniforme. On suppose qu'on laisse glisser sans vitesse initiale une tige conductrice de masse M . On néglige les frottements.

1. Quelle est l'équation du mouvement de la tige.
2. En déduire son mouvement, et en particulier sa fréquence d'oscillation.

II Définition d'unité

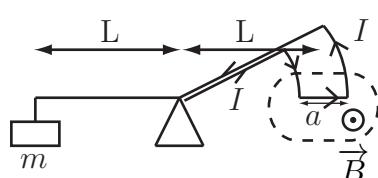
II.1 Définition de l'Ampère



On considère deux fils parallèles parcouru par un même courant I (dans le même sens). On pose par définition de l'Ampère qu'il correspond au courant $I = 1 \text{ A}$ qui doit circuler pour que la force linéaire qui s'exerce entre deux fils à la distance $r = 1 \text{ m}$ vole $2 \times 10^{-7} \text{ N}$.

En déduire la valeur de μ_0 .

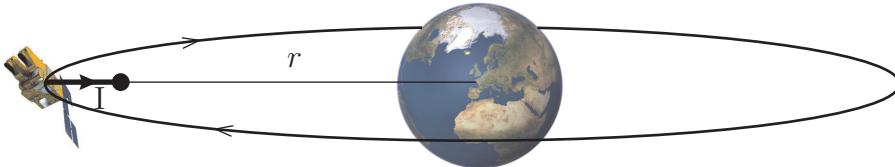
II.2 Balance de Cotton



Lorsque la balance est équilibrée, exprimer la masse m en fonction du courant I que l'on doit faire circuler et des autres données du problème.

III Désorbitation

On considère un satellite de masse m en mouvement circulaire (de rayon r) autour de la Terre dans le plan équatorial. On note M la masse de la Terre et G la constante de gravitation de Newton.



On modélise le champ terrestre par celui d'un dipôle magnétique \vec{M} .

1. Faire un schéma représentant la Terre, les lignes de champs magnétiques ainsi que la trajectoire du satellite.

Afin de désorbiter un satellite en fin de vie, le CNES a proposé la solution suivante : on relie à ce satellite un câble de longueur $\ell \ll r$ au bout duquel est fixé un petit satellite, tel que représenté sur la figure. On fait ensuite circuler un courant I entre ces deux satellites. Pour simplifier, on suppose que le câble est toujours orienté radialement. Par ailleurs, on supposera que la perte d'énergie par orbite est petite devant l'énergie potentielle gravitationnelle, de telle sorte qu'on pourra supposer le mouvement circulaire à chaque instant.

2. Afin que l'effet de la force de Laplace qui apparaît soit une force de traînée, doit-on avoir I positif ou négatif ?
3. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par le rayon $r(t)$ du satellite s'écrit :

$$\frac{dr}{dt} + \frac{K}{r^{3/2}} = 0$$

où vous donnerez l'expression de K en fonction de I , ℓ , μ_0 , M , m , G et M .

4. Résoudre en supposant que $r_0 = r(t = 0)$ et tracer l'allure de $r(t)$.

IV Action sur des dipoles : champ magnétique terrestre

On se propose de mesurer la norme de la composante horizontale \vec{B}_H du champ magnétique terrestre. À Toulouse, B_H est de l'ordre de 2×10^{-5} T. Pour cela, on dispose d'une petite aiguille aimantée, assimilable à un dipôle magnétique de moment \vec{M} , libre de tourner autour d'un axe vertical sans frottement. On notera J le moment d'inertie par rapport à cet axe. Ce petit aimant est placé au centre O d'une bobine comportant N spires circulaires de rayon R chacune contenue dans un plan vertical, et alimentée par un courant continu d'intensité I réglable. On mesure l'angle de rotation θ de l'aiguille par rapport au plan de la bobine.

1. MÉTHODE STATIQUE : On part d'une situation initiale où l'aiguille est dans le plan de la bobine, $\theta = 0$ quand $I = 0$. Lorsque l'on fait passer une intensité I dans la bobine, l'aiguille tourne d'un angle θ . Calculer B_H en fonction de I et θ .

APPLICATION NUMÉRIQUE : On donne $N = 5$, $R = 12$ cm, $I = 0,381$ A et $\theta = 20^\circ$.

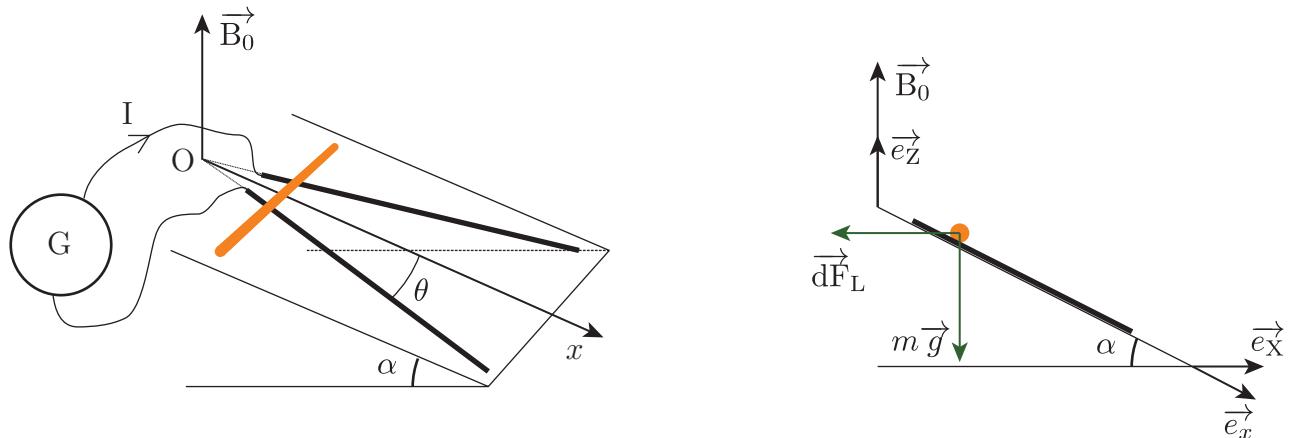
2. MÉTHODE DYNAMIQUE*** : Cette fois, la position initiale de la bobine est telle que l'aiguille aimantée est perpendiculaire au plan de la bobine. À $t = 0$, on fait circuler un courant I à travers la bobine et on note B_0 la valeur du champ magnétique créé (on suppose $B_0 < B_H$).

- a) Quelle est la nouvelle position d'équilibre ?
- b) En utilisant le théorème du moment cinétique, calculer la période des petites oscillations de l'aiguille lorsque celle-ci est légèrement écartée de sa position d'équilibre.
- c) Montrer que la période des oscillations dépend du sens du courant I dans le circuit et que si on note T et T' les périodes correspondantes, on a la relation suivante :

$$B_H = \frac{T'^2 + T^2}{T'^2 - T^2} B_0 \quad (1)$$

Correction

I Rails



- La force de Laplace élémentaire \vec{dF}_L qui agit sur un segment élémentaire $d\ell$ de la tige s'écrit

$$\vec{dF}_L = Id\ell \wedge \vec{B}_0 = -Id\ell B_0 \vec{e}_X$$

La force de Laplace est donc horizontale et dirigée vers l'intérieur de la pente (une force qui a tendance à faire remonter le rail). La longueur $\ell(x)$ de la tige qui est soumise au courant I et au champ \vec{B}_0 s'écrit

$$\ell(x) = 2x \tan \theta$$

Donc $\vec{F}_L(x) = -I\ell(x)B_0 \vec{e}_X = -2IB_0x \tan \theta \vec{e}_X$

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit

$$m\ddot{x}\vec{e}_x = m\vec{g} + \vec{F}_L(x)$$

En projetant sur \vec{e}_x , on obtient

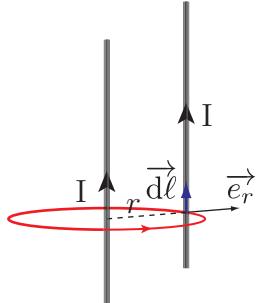
$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - 2IB_0x \tan \theta \cos \alpha$$

C'est-à-dire
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g \sin \alpha \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{2IB_0 \tan \theta \cos \alpha}{m}$$

- On obtient une équation d'oscillateur harmonique, le mouvement est donc oscillant de pulsation ω_0 . On peut le comprendre facilement, car plus la tige va descendre, plus $\ell(x)$ sera grand et donc plus la force de Laplace qui a tendance à faire remonter le mobile sera grande (et finira par dominer sur le poids).

II Définition d'unité

II.1 Définition de l'Ampère



La force élémentaire \vec{dF} exercée par un des fils sur un segment $\vec{dl} = dl \vec{e}_z$ de l'autre fil s'écrit

$$\vec{dF_L} = Idl \vec{e}_z \wedge \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \right) = -\frac{\mu_0 I^2 dl}{2\pi r} \vec{e}_r$$

On définit la force par unité de longueur $\frac{dF}{dl}$ (car la force totale est bien sûre infinie si les fils sont infinis). La définition de l'Ampère fixe la valeur de μ_0 qui doit donc prendre la valeur

$$\boxed{\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ N.s}^2.\text{C}^{-2}}$$

À partir de cette définition, on peut construire ϵ_0 grâce à $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ et le fait que $c = 299\,792\,458 \text{ m.s}^{-1}$ est également défini comme ayant une valeur fixée.

II.2 Balance de Cotton

La force de Laplace qui s'exerce sur la balance s'écrit

$$\vec{F_L} = -IaB \vec{e}_z$$

La résultante des moments qui s'exercent sur la balance s'écrit comme la somme du moment du poids de la masse m et du moment de la force de Laplace (on néglige la masse du circuit de droite dans la balance). À l'équilibre, la somme des moments est nulle. Ainsi,

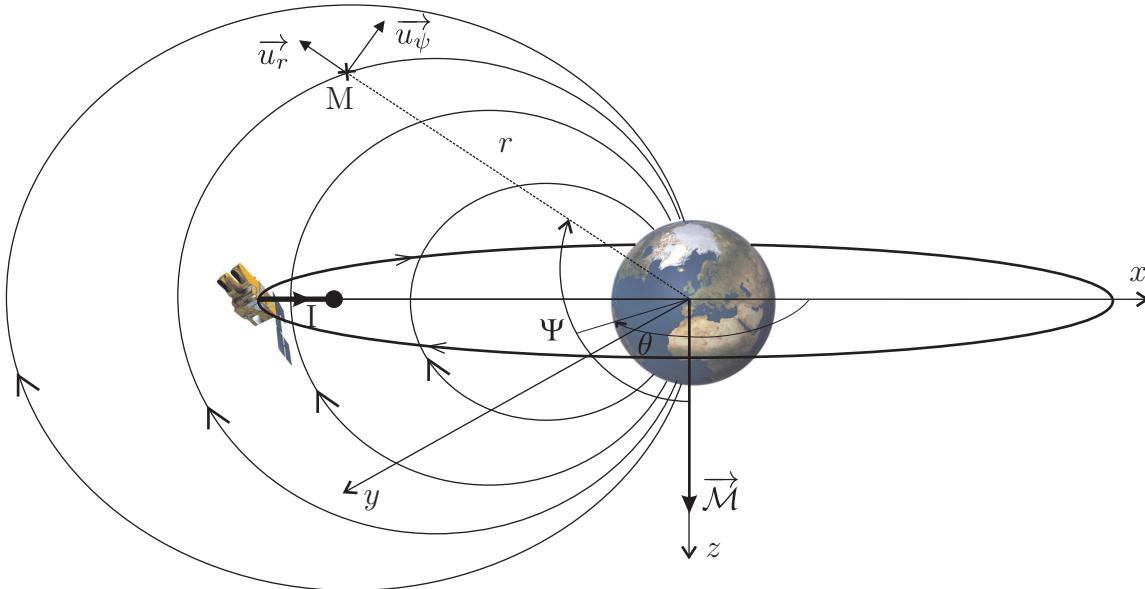
$$\vec{\Gamma_L} + \vec{\Gamma_P} = \vec{0} = \vec{OM} \wedge \vec{F_L} + \vec{OM} \wedge m \vec{g}$$

C'est-à-dire

$$m = \frac{IaB}{g}$$

Cette méthode permet de mesurer des petites masses grâce à la relation. En sophistiquant encore, on peut construire la balance du Watt, qui permet d'avoir un nouvel étalon du kilogramme basé sur une mesure de fréquence (qui sont les mesures les plus précises).

III Désorbitation



- Voir la figure. Pour des raisons de commodité, on dispose l'axe z vers le bas de la figure, pour l'aligner avec le moment magnétique de la Terre.

Le champ magnétique créé par un dipôle \vec{M} au niveau d'un point M est donné par l'expression

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} (2 \cos \psi \vec{u}_r + \sin \psi \vec{u}_\psi)$$

Sur le plan de l'orbite, $\psi = \pi/2$, donc $\vec{u}_\psi = -\vec{e}_z$.

d'où

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 M}{4\pi r^3} \vec{e}_z$$

- La force élémentaire de Laplace, $d\vec{F}_L$, qui agit sur un bout de fil de longueur $d\ell$, s'écrit

$$d\vec{F}_L = I d\ell \wedge \vec{B}$$

$$d\ell = -d\ell \vec{u}_r$$

Donc

$$d\vec{F}_L = -\frac{\mu_0 I M}{4\pi r^3} d\ell \vec{u}_\theta$$

Et finalement

$$\vec{F}_L = -\frac{\mu_0 I \ell M}{4\pi r^3} \vec{u}_\theta$$

On constate que I doit être positif pour que la force de Laplace soit une force de traînée.

- On écrit la conservation de l'énergie

$$\frac{dE_m}{dt} = \sum \vec{F} \cdot \vec{v}$$

où E_m est l'énergie mécanique. Dans le cas d'un mouvement circulaire,

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \vec{u}_\theta \quad \Rightarrow \quad E_m = -\frac{GMm}{2r}$$

La force gravitationnelle ne travaille pas puisque le mouvement est (quasi-)circulaire. L'équation de conservation de l'énergie s'écrit donc

$$\frac{1}{2} \frac{GMm}{r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{\mu_0 I \ell M}{4\pi} \sqrt{GM} r^{-7/2}$$

D'où

$$\frac{dr}{dt} + \frac{K}{r^{3/2}} = 0 \quad \text{avec} \quad K = \frac{\mu_0 I \ell M}{2\pi m \sqrt{GM}}$$

4. Il vient

$$r^{3/2} dr = -K dt$$

Donc

$$\left[\frac{2}{5} r^{5/2} \right]_0^t = -Kt$$

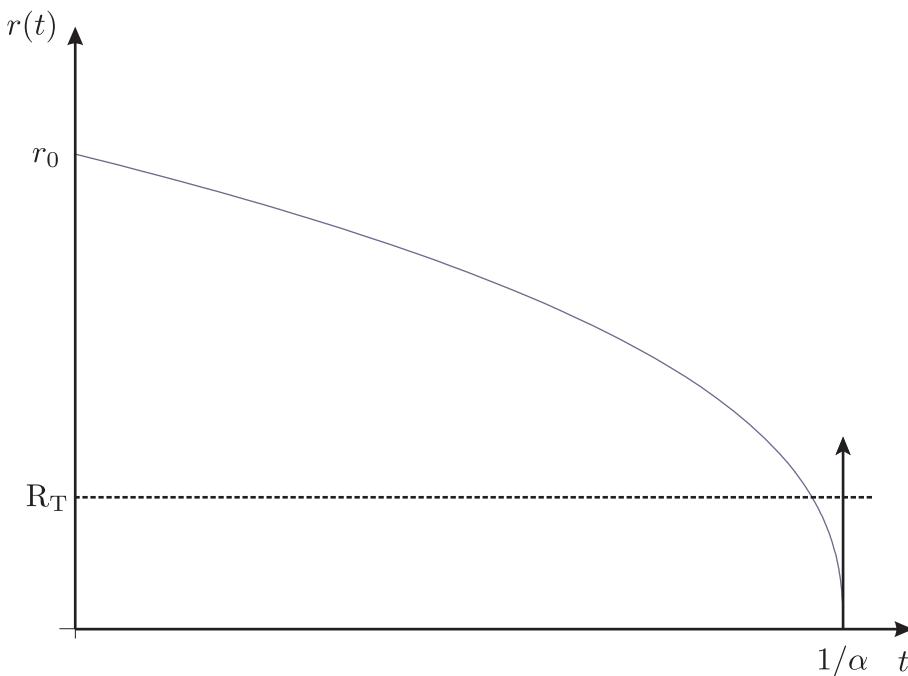
C'est-à-dire

$$r(t)^{5/2} - r(0)^{5/2} = -\frac{5}{2} Kt$$

Donc

$$r(t) = r_0 (1 - \alpha t)^{2/5} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{5K}{2r_0^{5/2}}$$

La trajectoire est une spirale décroissante.



IV Action sur des dipôles : champ magnétique terrestre

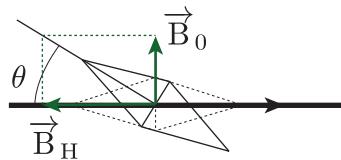
1. MÉTHODE STATIQUE : à l'équilibre, le moment magnétique s'aligne avec le champ magnétique total.

Donc

$$\tan \theta = \frac{B_0}{B_H} = \frac{\mu_0 N I}{2R B_H}$$

Et ainsi

$$B_H = \frac{\mu_0 N I}{2R \tan \theta} \simeq 2,7 \times 10^{-5} \text{ T}$$



vue du dessus

2. MÉTHODE DYNAMIQUE*** :

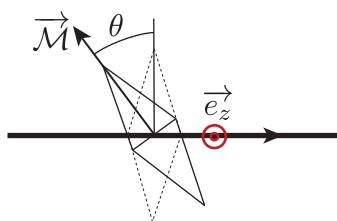
a) La position d'équilibre est l'axe de la bobine.

b)

$$J\ddot{\theta}\vec{e}_z = \vec{\Gamma} = \vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}$$

Donc

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{\mathcal{M}(B_H + B_0)}{J}$$



vue du dessus

c) Si on change le signe de I, on change le signe de B_0.

$$\omega_0'^2 = \frac{\mathcal{M}(B_H - B_0)}{J}$$

En utilisant $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $\omega_0' = \frac{2\pi}{T'}$ et les expressions de ω_0^2 et $\omega_0'^2$, on peut éliminer les inconnus \mathcal{M} et J en formant le rapport $\frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2}$:

$$\frac{\omega_0^2}{\omega_0'^2} = \frac{B_H + B_0}{B_H - B_0}$$

Et donc

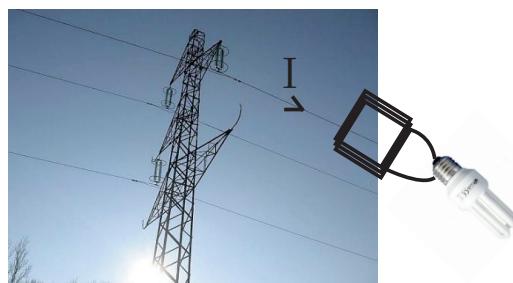
$$B_H = \frac{T'^2 + T^2}{T'^2 - T^2} B_0$$

Induction

I Ligne à haute tension

On considère une ligne à haute tension transportant un courant sinusoïdale de fréquence 50 Hz et d'amplitude $I_0 = 1 \text{ kA}$. On désire récupérer de l'énergie de cette ligne afin d'alimenter une ampoule basse consommation de 20 W. Pour cela, on approche, à une distance $d = 1 \text{ cm}$, une bobine carré de côté $a = 30 \text{ cm}$ et comportant N spires. On négligera l'inductance et la résistance interne de cette bobine. On branche en série de cette bobine l'ampoule basse consommation.

On souhaite déterminer le nombre de spires nécessaire pour que la lampe s'allume normalement.



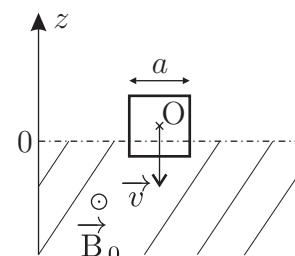
1. Sachant que l'ampoule est vendue dans le commerce comme une ampoule de 20 W, que vaut sa résistance interne ?
2. Grâce à quel phénomène peut-on récupérer de l'énergie dans la bobine et l'ampoule ? Comment faut-il orienter la plan de la bobine pour optimiser cette récupération ?
3. Calculer la force électromotrice induite dans la spire.
4. En déduire le nombre N de spires nécessaire pour récupérer les 20 W du fonctionnement nominal de l'ampoule.

II freinage par induction

On considère la chute d'une spire carré de côté a dans la zone de champ magnétique représentée ci-contre :

- pour $z < 0$, le champ magnétique \vec{B}_0 est supposé uniforme et horizontal (dirigé vers nous) ;
- pour $z > 0$, il est nul.

On note m la masse de la spire et r sa résistance linéique.



1. Quelle est l'équation du mouvement de la spire lorsque celle-ci se trouve entièrement dans le demi-espace $z > 0$? Même question pour le demi-espace $z < 0$.

On traite maintenant le cas où la spire est à cheval entre les deux demi-espaces.

2. Calculer, de deux manières différentes, la force électromotrice induite sur la spire, puis le courant qui circule dans la spire en fonction de B_0 , r , et de la norme v de la vitesse de la spire.
3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, trouvez une équation différentielle sur la vitesse v de la spire.

4. Résoudre cette équation en supposant que la spire arrive avec une vitesse v_0 à l'interface.
5. Tracer $v(t)$ pour les différents cas de figure selon la valeur de v_0 .

III Effets inductifs dans un condensateur

Première approche

On pose $\vec{E}_0 = A_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ le champ qui règne à l'ordre le plus bas entre les armatures du condensateur.

1. Calculer le champ magnétique induit \vec{B}_1 , en le choisissant de la forme $\vec{B}_1 = B_1(r, t) \vec{e}_\theta$ (justifier cette forme).
2. En déduire le champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_1$ qui règne entre les armatures si on tient compte de \vec{B}_1 , en fonction de $x = \frac{r\omega}{c}$.
3. Application numérique : quelle erreur sur la capacité fait-on pour $a = 10$ cm et $\nu = 10$ MHz ?

Approche globale

Le raisonnement précédent peut se poursuivre ordre par ordre. On cherche le champ électrique sous la forme

$$\vec{E} = A(r, z) \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

4. Trouver une équation différentielle sur $A(r, z)$.
5. Résoudre formellement en cherchant une solution sous la forme d'une série entière.

IV Effets inductifs dans une résistance

On considère un conducteur cylindrique d'axe (Oz), de hauteur ℓ , de rayon a et de conductivité γ . On soumet ce conducteur à un courant alternatif $I_0 \cos(\omega t)$ selon \vec{e}_z .

1. Calculer le champ électrique induit dans le conducteur.
2. En déduire qu'il apparaît un courant induit \vec{j}_1 dont vous donnerez l'expression.
3. Calculer la puissance moyenne $\langle \mathcal{P} \rangle$ dissipée par effet Joule.
4. Que vaut $\langle \mathcal{P} \rangle / I_0^2$, où $I_0 = \gamma_0 \pi a^2$. Commenter en introduisant $R_0 = \frac{\gamma \ell}{\pi a^2}$.

Correction

I Ligne à haute tension

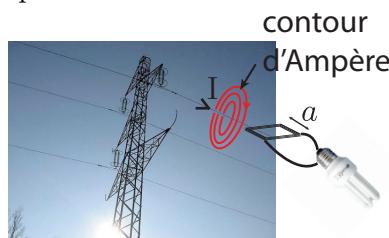
1. L'alimentation électrique en France est de 220 V. La puissance s'écrit

$$P = UI = \frac{U^2}{R}$$

Donc

$$R = \frac{U^2}{P} \sim 2 \text{ k}\Omega$$

2. On peut espérer récupérer l'énergie du cable électrique grâce au phénomène d'**induction**, car le courant est variable dans le cable. Pour optimiser la fem, il faut optimiser le flux (en fait sa dérivée), donc il faut positionner le plan des spires carré perpendiculaire au champ magnétique, de telle sorte que \vec{B} et $d\vec{S}$ soient alignés. Pour cela, il suffit de s'assurer que le plan des spires carrés contienne le cable électrique.



3. On commence par calculer le champ magnétique d'un fil infini. On choisit un système de coordonnées cylindriques d'axe le cable électrique. Les symétries et invariances permettent de montrer que

$$\vec{B}(M) = B(r, t) \hat{e}_\theta$$

Le champ magnétique est donc orthoradial. Le théorème d'Ampère sur un contour circulaire (voir figure) permet de trouver $B(r)$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r, t) = \mu_0 I_{\text{enlacé}} = \mu_0 I(t)$$

Donc

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I(T)}{2\pi r} \hat{e}_\theta$$

Le flux s'écrit, si les spires sont positionnées comme précisé à la question précédente,

$$\phi = N \times \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} = Na \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{Na\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{d} \right)$$

où $a = 1 \text{ m}$ est la longueur du côté du carré.

$$\phi = \frac{Na\mu_0 I}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{d} \right)$$

Et la fem

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{Na\mu_0}{2\pi} \ln \left(1 + \frac{a}{d} \right) \frac{dI}{dt}$$

4. On note $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$, avec $\omega = 2\pi f$ ($f = 50 \text{ Hz}$).

Ainsi,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = NfI_0 a \mu_0 \ln \left(1 + \frac{a}{d} \right) \sin(\omega t)$$

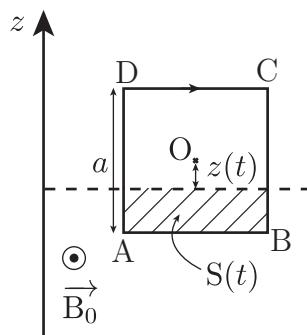
On veut récupérer les 220 V de fonctionnement nominal, donc on désire que e soit d'amplitude $E = 220$ V.

$$N = \frac{E}{a\mu_0 I_0 f \ln \left(1 + \frac{a}{d}\right)} \sim 700 \text{ spires}$$

On a utilisé $\ln(100) \sim 5$.

II freinage par induction

- Si \vec{B} est uniforme et constant, $\frac{d\phi}{dt} = 0$ donc d'après la loi de Faraday, il n'y a pas de force électromotrice induite, donc pas de courant induit, donc pas de force de Laplace. On a donc une simple chute libre sous le poids de la spire. Ainsi, il ne peut se passer quelque chose de particulier que lorsque la spire est à cheval sur la zone de transition $z = 0$.



- PREMIÈRE MÉTHODE : on utilise la loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt} \quad \text{avec} \quad \phi(t) = \iint S(t) \vec{B}_0 \cdot d\vec{S} = -B_0 S(t)$$

Dans le calcul précédent, on a choisi un sens conventionnel pour le calcul du flux. Cette orientation peut être choisi comme on veut, ici elle est représenté sur la figure ci-dessus et a été choisi pour qu'au final on trouve une valeur de e positive (avec une orientation opposée, on aurait trouvé un e négatif, donc au final le même courant induit qui circule, car celui-ci se fuit de la convention que l'on choisit). La surface $S(t)$ est celle contenue dans la zone de champ magnétique. Elle s'écrit

$$S(t) = a \left(\frac{a}{2} - z \right)$$

Donc

$$e = -aB_0 \dot{z} = avB_0$$

Puisque $\dot{z} < 0$, $v = -\dot{z}$ et on voit que $e > 0$ avec notre convention de sens. Ceci se comprend bien avec la loi de Lenz, car le courant induit doit circuler de telle sorte que le champ qu'il créé s'oppose à \vec{B}_0 .

DEUXIÈME MÉTHODE : on utilise la circulation du champ électromoteur, car on a ici une induction motionnelle :

$$e = \int_{\text{spire}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = avB_0$$

avec $\vec{v} = -v\vec{e}_z$.

Le courant induit s'écrit finalement

$$I = \frac{e}{R} = \frac{avB_0}{4ar}$$

C'est-à-dire

$$I = \frac{vB_0}{4r}$$

3. La spire est soumise à

- son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$;
- la force de Laplace $\vec{F}_L = \int_{\text{spire}} I d\ell \wedge \vec{B} = IaB_0\vec{e}_z$

Le principe fondamental de la dynamique projeté sur l'axe z s'écrit donc :

$$m\ddot{z} = -mg + IaB_0$$

d'où

$$\ddot{z} + \frac{aB_0^2}{4mr} \dot{z} = -g$$

C'est-à-dire

$$\dot{v} + \frac{aB_0^2}{4mr} v = g$$

4. C'est une équation différentielle d'ordre un à coefficient constant dont la solution s'écrit

$$v(t) = \frac{4mgr}{aB_0^2} + \lambda e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{4mr}{aB_0^2}$$

$$v(t=0) = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{4mgr}{aB_0^2} + \lambda$$

Donc

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{4mgr}{aB_0^2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

5. Voir la figure.

