Repérage d'un solide dans l'espace

Référentiel : ensemble des repères d'espaces fixes par rapport à une structure matérielle de référence.

On choisit un de ces repères : Oxyz, orthonormé direct.

Des grandeurs vectorielles (vitesse, moment cinétique…) dépendent souvent du référentiel.
Une fois ces grandeurs définies par rapport à un référentiel donné, on peut exprimer leurs composantes dans n'importe quel repère (fixe ou mobile).

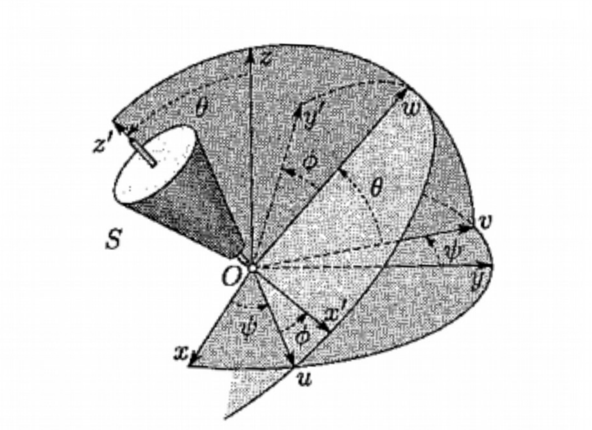
Solide = système matériel **indéformable**, ie. 2 points A et B d'un solide restent à une distance constante au cours du mouvement.

On peut associer à ce solide un **repère** R'=(O'x'y'z') dans lequel celui-ci est fixe.

La position d'un solide dans l'espace est donc déterminée par 6 paramètres (on dit 6 degrés de liberté) :

- 3 coordonnées d'un point particulier O' du solide (c'est souvent G) ;
- 3 angles repérant les axes x'y'z' par rapport aux axes xyz du répère absolu.

Exemple des **angles d'Euler** : ψ est l'angle de précession, θ est l'angle de nutation, l'axe Ou est appelé *ligne des nœuds*.

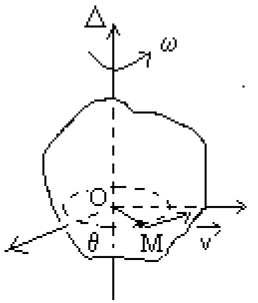


Champ de vitesses dans un solide

- **Translation** : tous les points du solide ont même vecteur vitesse à l'instant t
  - Attention : le vecteur **v** peut varier au cours du temps !
  - Si **v** ne change pas de direction dans le temps : translation rectiligne
  - Si **v** ne change pas de norme dans le temps : translation uniforme

- **Rotation autour d'un axe fixe** Δ : tous les points de Δ ont une vitesse nulle et les autres points du solide ont une trajectoire circulaire autour d'un point de Δ.

  - Il existe un unique vecteur **ω** parallèle à Δ tel que $\mathbf{v}_{A/R} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA}$ pour tout point A du solide
  - Si **ω** ne change pas en norme : rotation uniforme
  - Si A est repéré par l'angle θ des coord. cylindriques alors ω = dθ/dt.



- **Mouvement général** : la condition AB = cste impose une propriété essentielle du champ de vitesses dans un solide :

$$\boxed{\mathbf{v}_{A/R} = \mathbf{v}_{B/R} + \mathbf{AB} \times \boldsymbol{\omega}_{S/R} = \mathbf{v}_{B/R} + \boldsymbol{\omega}_{S/R} \times \mathbf{BA}}$$

  - Le vecteur **ω** est le **vecteur rotation instantané** du solide, il n'est pas forcement constant, sa direction définit l'axe instantané de rotation.

  - Loi de composition des rotations : $\boldsymbol{\omega}_{S/R1} = \boldsymbol{\omega}_{S/R2} + \boldsymbol{\omega}_{R1/R2}$
    - Exemple : toupie et angles d'Euler

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_u + \dot{\varphi}\vec{e}_{z'}$$

  - **Loi de dérivation vectorielle** : si R' est en rotation / R avec le vecteur **ω** alors pour tout champ de vecteur **A**, on a

$$\boxed{(d\mathbf{A}/dt)_R = (d\mathbf{A}/dt)_{R'} + \boldsymbol{\omega}_{R'/R} \times \mathbf{A}}$$

Modélisation d'un système matériel – Degrés de liberté

On peut adopter deux modélisations pour la répartition de la matière dans le système :

- Répartition discrète des masses : point A_i de masse m_i
- Répartition continue de la matière : à chaque point courant A on définit un volume élémentaire de masse $dm = \rho(A)\, d\tau$

Définition du **centre de masse** d'un système : point G tel que $\sum_i m_i \overrightarrow{GA_i} = 0$

Ou encore pour tout point O : $$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{M}\sum_i m_i \overrightarrow{OA_i} = \frac{1}{M}\iiint_V \rho(A)\,\overrightarrow{OA}\, d\tau}$$

Le centre de masse joue un rôle particulier dans la mécanique du solide (cf. dynamique).

Etant donné un référentiel absolu R, par rapport auquel on étudie le mouvement d'un système, le référentiel R* d'origine G et dont les axes *restent parallèles* à tout instant aux axes de R (on dit que **R* est en translation par rapport à R**) est appelé **référentiel barycentrique** ou référentiel du centre de masse. Il est très utile dans les exercices de mécanique.

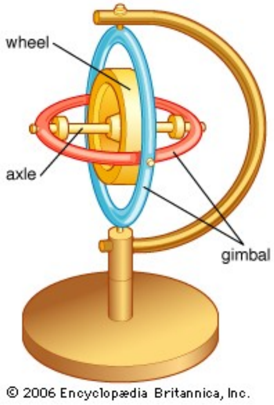
Dans le cas le plus général, un seul solide possède au plus 6 degrés de liberté mais des liaisons peuvent réduire ce nombre.

Exemples :

boule sur une table = 5 degrés de liberté tant qu'il y a contact

balancier d'une horloge ou tout solide en rotation autour d'un axe fixe (liaison pivot) = 1 seul degré de liberté

gyroscope ou tout solide en rotation autour d'un point fixe (liaison rotule) = 3 degrés de liberté.



Eléments cinétiques d'un système matériel

Qu'on adopte une répartition discrète ou continue de matière on définit les grandeurs vectorielles suivantes :

- Quantité de mouvement (résultante cinétique) : $\vec{P}=\sum_i m_i \vec{v}_i = M\,\vec{v}_G$
- Résultante dynamique : $\vec{S}=\sum_i m_i \vec{a}_i = M\,\vec{a}_G$
- Moment cinétique en un point O quelconque : $\vec{L}_O=\sum_i \overrightarrow{OA}_i \wedge m_i \vec{v}_i$
- Moment dynamique en O : $\vec{\delta}_O=\sum_i \overrightarrow{OA}_i \wedge m_i \vec{a}_i$

Propriété fondamentale :

$$\boxed{\vec{L}_{O'}=\vec{L}_O+\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{P} \qquad \vec{\delta}_{O'}=\vec{\delta}_O+\overrightarrow{O'O}\wedge\vec{S}}$$

On dit que [**P**, $\mathbf{L}_O$] et [**S**,$\boldsymbol{\delta}_O$] sont des **torseurs**, l'un est le torseur cinétique et l'autre le torseur dynamique.

Relation entre torseurs cinétique et dynamique :

$$\boxed{\vec{S}=d\vec{P}/dt \qquad \vec{\delta}_O=d\vec{L}_O/dt+\vec{v}_O\wedge\vec{P}}$$

Cas particulier du référentiel du centre de masse R* :

P* = **S*** = 0 (par définition de G)

L* et **δ*** ne sont pas nuls mais ne dépendent pas du point en lequel on les calcule et

δ* = d**L***/dt

Théorème de Koenig pour le moment cinétique : $\boxed{\mathbf{L}_O = \mathbf{L}^* + \mathbf{OG} \times M\,\mathbf{v}_G}$

De même pour l'énergie cinétique du solide $E_c=\sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$ on dispose d'un second **théorème de Koenig** :

$$\boxed{E_c = E_c^* + (1/2)\,M\,v_G^2}$$

Le second terme est l'énergie cinétique de translation et le premier terme est l'énergie cinétique de rotation.

En théorie cinétique des gaz parfaits, E_c* s'apparente à l'énergie interne...

Inertie

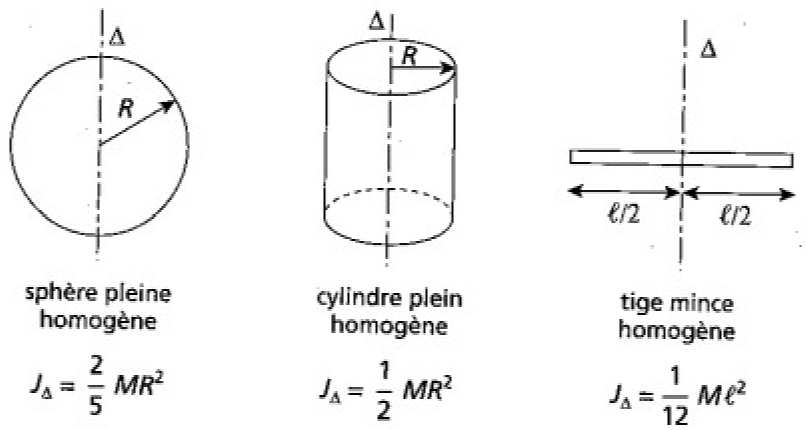
Cas particulier du **mouvement d'un solide autour d'un axe fixe Δ** :

il est facile de montrer que la **composante axiale** du moment cinétique, selon la direction Δ, est proportionnelle au vecteur rotation instantanée **ω** :

$$\mathbf{L}_\Delta = J_\Delta\,\boldsymbol{\omega} \qquad \text{avec} \qquad J_\Delta = \iiint r^2\,dm$$

J_Δ est le **moment d'inertie du solide** par rapport à l'axe Δ [ML²].
C'est une caractéristique intrinsèque du solide : répartition géométrique de la masse autour de l'axe Δ.

Exemples pour des solides homogènes de forme simple (calculs à savoir refaire)



De même, dans ce cas, l'énergie cinétique du solide prend la forme simple : $E_c = 1/2\, J_\Delta\, \omega^2$
C'est l'énergie cinétique de rotation.

Théorème de Huygens : si on note J_G le moment d'inertie du solide par rapport à un axe passant par G et *parallèle* à Δ alors

$$J_\Delta = J_G + Md^2 \qquad \text{où d est la distance entre les deux axes}$$

Inertie

Attention : le moment cinétique d'un solide, même en rotation autour d'un axe fixe, n'est en général pas colinéaire à **ω**, le paragraphe précédent ne portait que sur la composante **axiale**.

Dans le cas général d'un mouvement autour d'un point fixe O (par exemple G dans R*), la relation entre $\mathbf{L}_O$ et **ω** est matricielle :

$$\mathbf{L}_O = [\, I_O \,]\, \boldsymbol{\omega}$$

$[\, I_O \,]$ est le **tenseur d'inertie du solide** (il est une caractéristique intrinsèque du solide et ne dépend pas du repère dans lequel on le calcule)

Dans un repère cartésien (Oxyz) on a

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2)\, dm = J_{(Ox)} \quad etc.$$
$$I_{xy} = I_{yx} = \iiint xy\, dm \quad etc.$$

La matrice $[\, I_O \,]$ étant symétrique et réelle, elle est diagonalisable, i.e il existe une base orthonormale $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ dite **principale d'inertie** dans laquelle $[\, I_O \,]$ est diagonale :

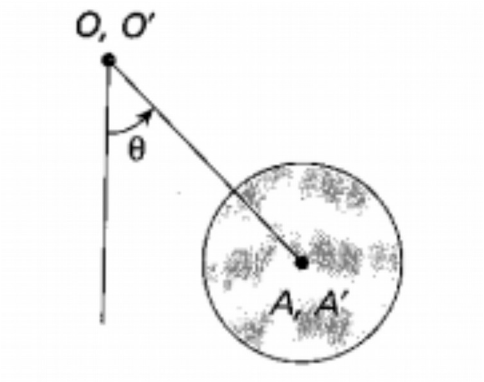
$$[I_O] = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Les I_n sont les **moments principaux d'inertie**.

Très souvent les solides usuels ont des formes géométriques simples (boule, cylindre, barre…) et les axes principaux d'inertie se confondent avec les axes de symétries.

Exemple : mouvement pendulaire d'un cylindre

Un cylindre de masse M et de rayon R est suspendu à un axe horizontal par deux tiges sans masse de longueur a soudées au cylindre. Moment cinétique en O ? Energie cinétique ?



Deux méthodes de résolution :

1) Théorème(s) de Koenig : $\mathbf{L}_O = \mathbf{L}^* + \mathbf{OG} \times M\,\mathbf{v}_G$ et $E_c = E_c^* + 1/2\ M\,v_G^2$

G sur l'axe AA' a un mouvement circulaire autour de OO' : $\mathbf{v}_G = a\omega\,\mathbf{e}_\theta$

Dans R* le cylindre a un mouvement de rotation autour de AA' fixe à la vitesse $\omega = d\theta/dt$.

$\mathbf{L}^* = J_{AA'}\,\boldsymbol{\omega} = 1/2\ MR^2\,\boldsymbol{\omega}$ et $E_c^* = 1/2\ J_{AA}'\,\omega^2 = 1/4\ MR^2\,\omega^2$

$\mathbf{L}_O = M\,(R^2/2 + a^2)\,\boldsymbol{\omega}$ $E_c = M(R^2/4 + a^2/2)\,\omega^2$

2) Plus « rusé » : le cylindre a un mouvement de rotation autour de l'axe fixe (OO') dans R

$\mathbf{L}_O = J_{OO'}\,\boldsymbol{\omega} = (J_{AA'} + Ma^2)\,\boldsymbol{\omega}$ par le théorème de Huygens !

$E_c = 1/2\ J_{OO'}\,\omega^2 = M(R^2/4 + a^2/2)\,\omega^2$