

# Optique anisotrope.

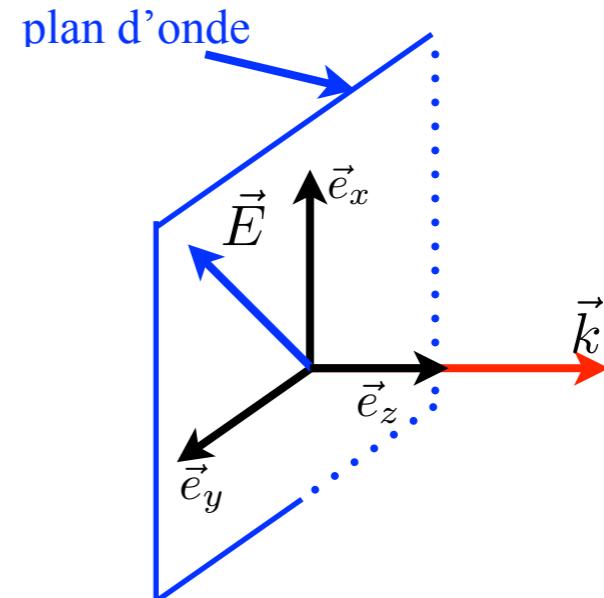
Rémy Battesti

# Partie A : POLARISATION

- L'état de polarisation d'un faisceau lumineux monochromatique est caractérisé par le vecteur déplacement électrique  $\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{A} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = Re[\vec{A} e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}]$

- Si la lumière se propage dans un milieu isotrope,  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ . La polarisation est également donnée par la direction du champ électrique et  $\vec{E} \perp \vec{k}$ .

- $I \propto |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 = |E_x^2| + |E_y^2|$



- Propagation suivant  $z$  :

les 2 composantes de  $\vec{E}$  s'écrivent : 
$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(\omega t - kz - \delta_x) \\ E_y = A_y \cos(\omega t - kz - \delta_y) \end{cases}$$

soit 
$$\begin{cases} E_x = A_x \cos(\omega t - kz) \\ E_y = A_y \cos(\omega t - kz - \delta) \end{cases}$$

avec  $\delta = \delta_y - \delta_x$  qui représente le déphasage relatif de  $y$  par rapport à  $x$ .

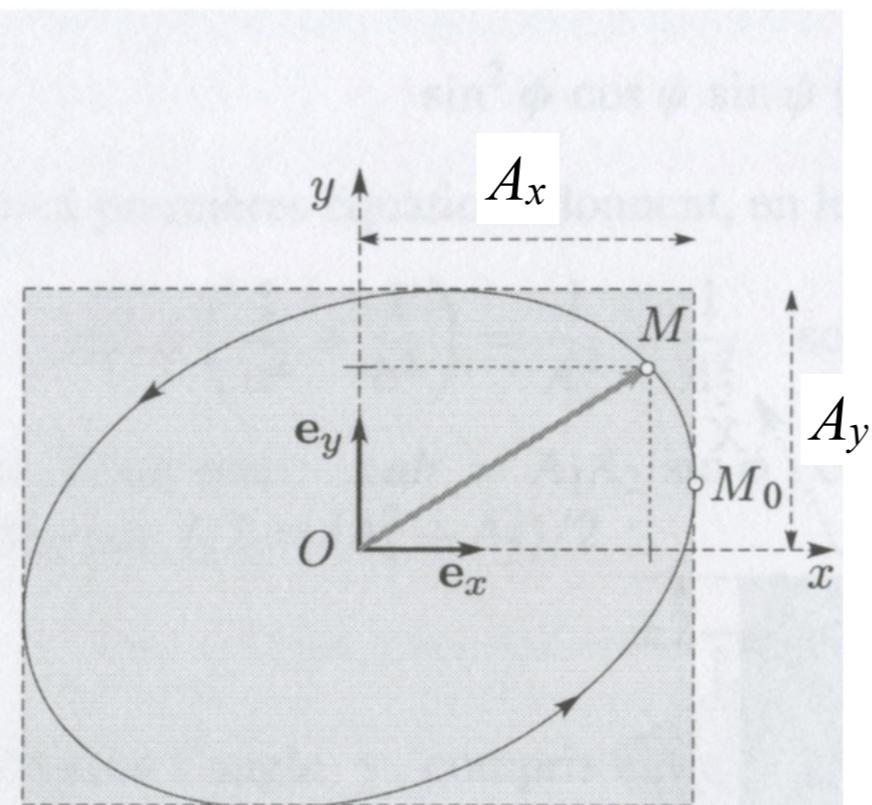
## Lumière totalement polarisée

En un point  $z$  donné, l'extrémité du vecteur champ électrique décrit une trajectoire elliptique

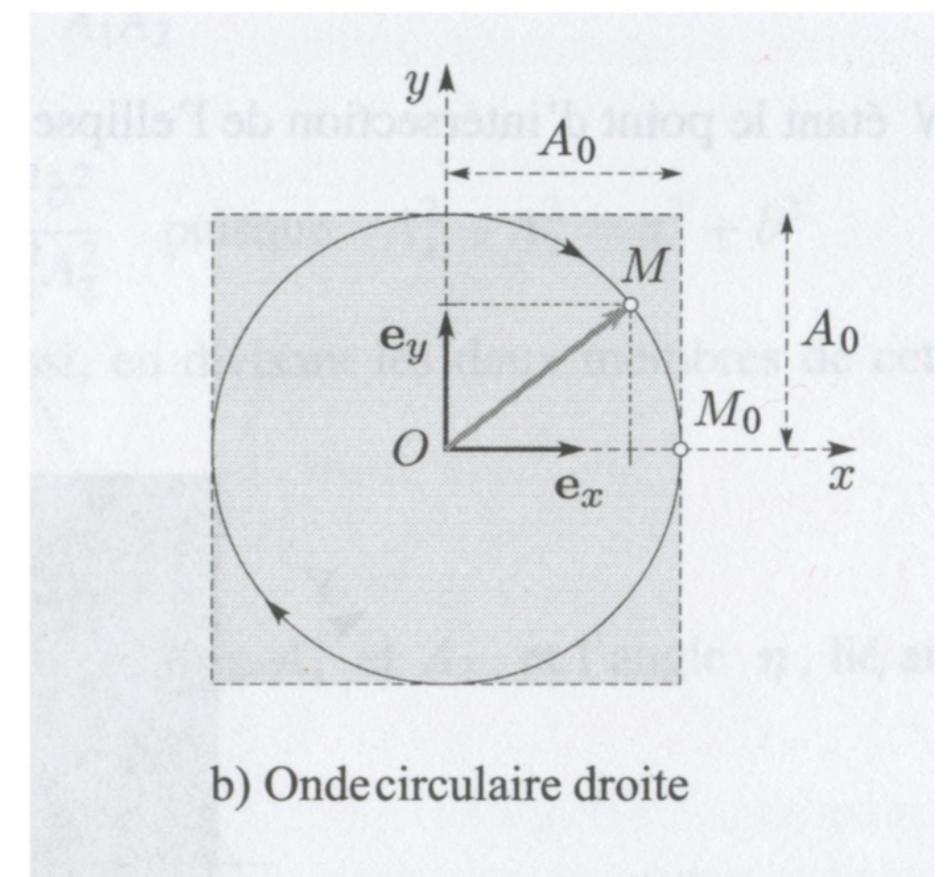
En éliminant le temps entre les 2 composantes de  $E_x$  et  $E_y$ , on montre que :

$$\left(\frac{E_x}{A_x}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{A_y}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{A_x A_y} \cos(\delta) = \sin^2(\delta)$$

$\delta$  quelconque

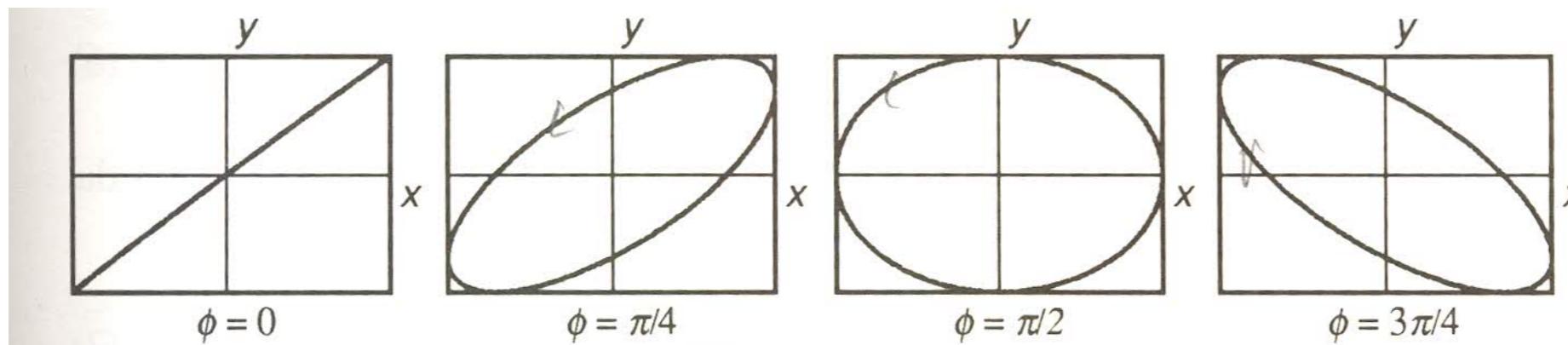


a) Onde elliptique gauche

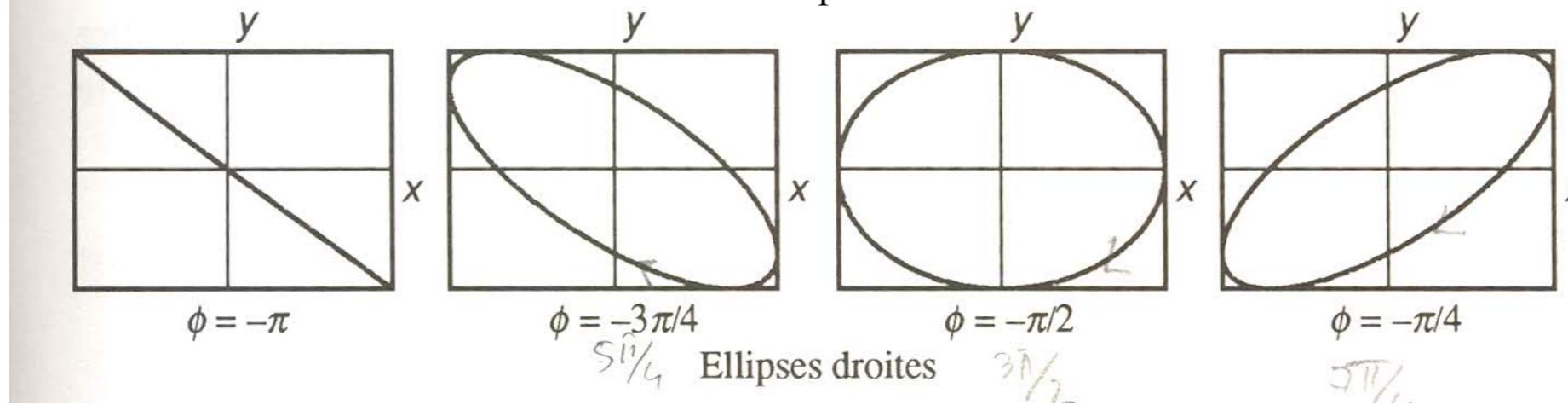


b) Onde circulaire droite

$$\delta = -\frac{\pi}{2}$$
$$A_x = A_y = A_0$$



Ellipses gauches  
hélicité positive



Ellipses droites  
hélicité négative

S. Huard, *Polarisation de la lumière*

Convention française :

l'observateur regarde la lumière venir vers lui et détermine le sens de rotation.

## Notation de Jones (pour des états totalement polarisés !)

L'onde plane peut être décrite en termes d'amplitudes complexes suivant le vecteur de Jones :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} A_x e^{i\delta_x} \\ A_y e^{i\delta_y} \end{bmatrix}$$

et on revient au champ électrique suivant :  $E_x(t) = \operatorname{Re}[J_x e^{-i\omega t}] = \operatorname{Re}[A_x e^{-i(\omega t - \delta_x)}]$

L'intensité  $I$  du champ associé s'écrit :  $I = \mathbf{J}^\dagger \mathbf{J}$  avec  $\mathbf{J}^\dagger = [\bar{\mathbf{J}}]^T$

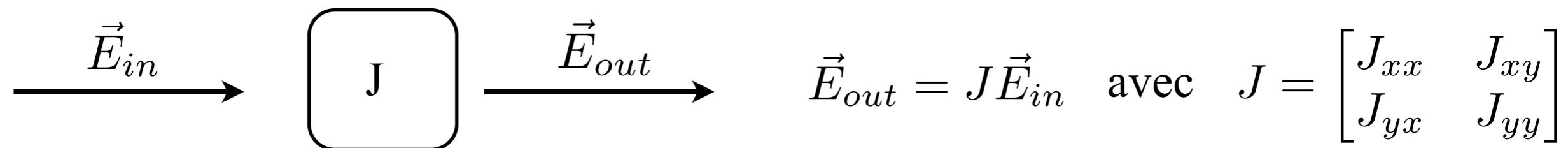
Comme la multiplication par une constante ne change pas l'état de polarisation, on travaille souvent avec des vecteurs de Jones normés

On note ces vecteurs  $\hat{\mathbf{J}}$

Deux vecteurs sont orthogonaux si :  $\mathbf{J}_A^\dagger \mathbf{J}_B = \mathbf{J}_B^\dagger \mathbf{J}_A = 0$

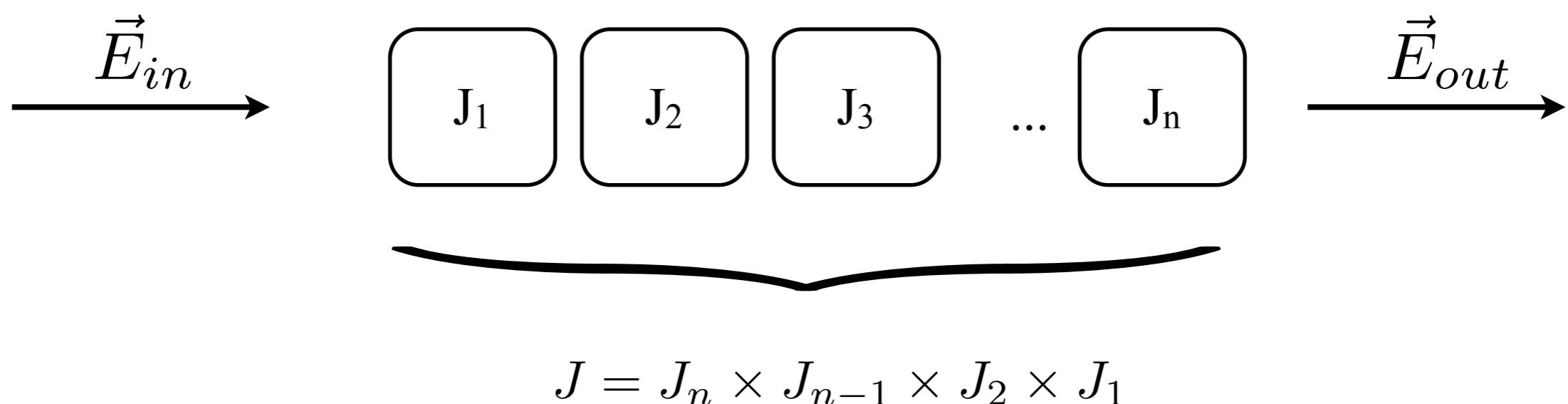
# Matrice de Jones

On s'intéresse à l'interaction de la lumière polarisée avec un milieu qui est décrit par sa **matrice de Jones**.



Composition de matrices de Jones :

si la lumière traverse successivement n milieux, de matrices de Jones  $J_n$ , tout se passe comme si elle traversait un milieu de matrice :



On multiplie les matrices dans l'ordre inverse traversé par la lumière

# Polarisation elliptique

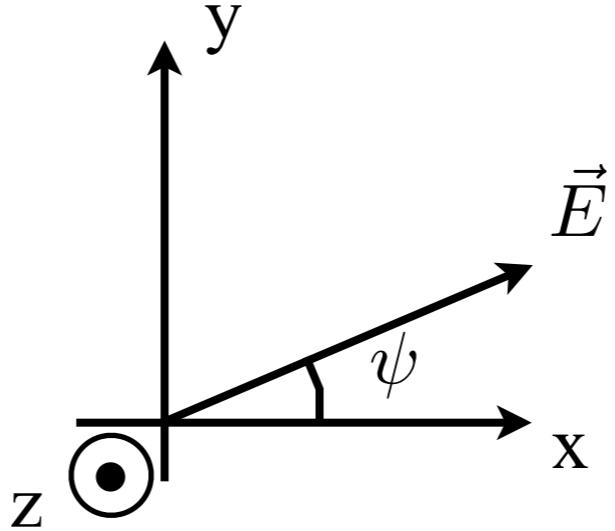
De manière générale, on peut représenter un état de polarisation elliptique par un vecteur de Jones normé dépendant de 2 paramètres, l'angle  $\psi$  et le déphasage  $\delta$  entre ses composantes :

$$\mathbf{J}(\delta, \psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ e^{i\delta} \sin \psi \end{bmatrix}$$

**TABLE 1.2** Various Representations of Polarization States

Polarization Ellipse	Jones Vector	$(\delta, \psi)$
	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$(0, 0)$
	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$(0, \pi/2)$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$(0, \pi/4)$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	$(\pi, \pi/4)$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$	$(-\pi/2, \pi/4)$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$	$(\pi/2, \pi/4)$

## Polarisation rectiligne



$$\hat{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix}$$

L'état de polarisation orthogonal s'écrit :  $\begin{bmatrix} -\sin \psi \\ \cos \psi \end{bmatrix}$

Les cas  $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  et  $\hat{y} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

désignent des ondes pour lesquelles  $\vec{E}$  oscille suivant  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$

## Polarisation circulaire

- Onde polarisée circulairement gauche :  $\hat{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$  (ces 2 états sont orthogonaux)
- Onde polarisée circulairement droite :  $\hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$

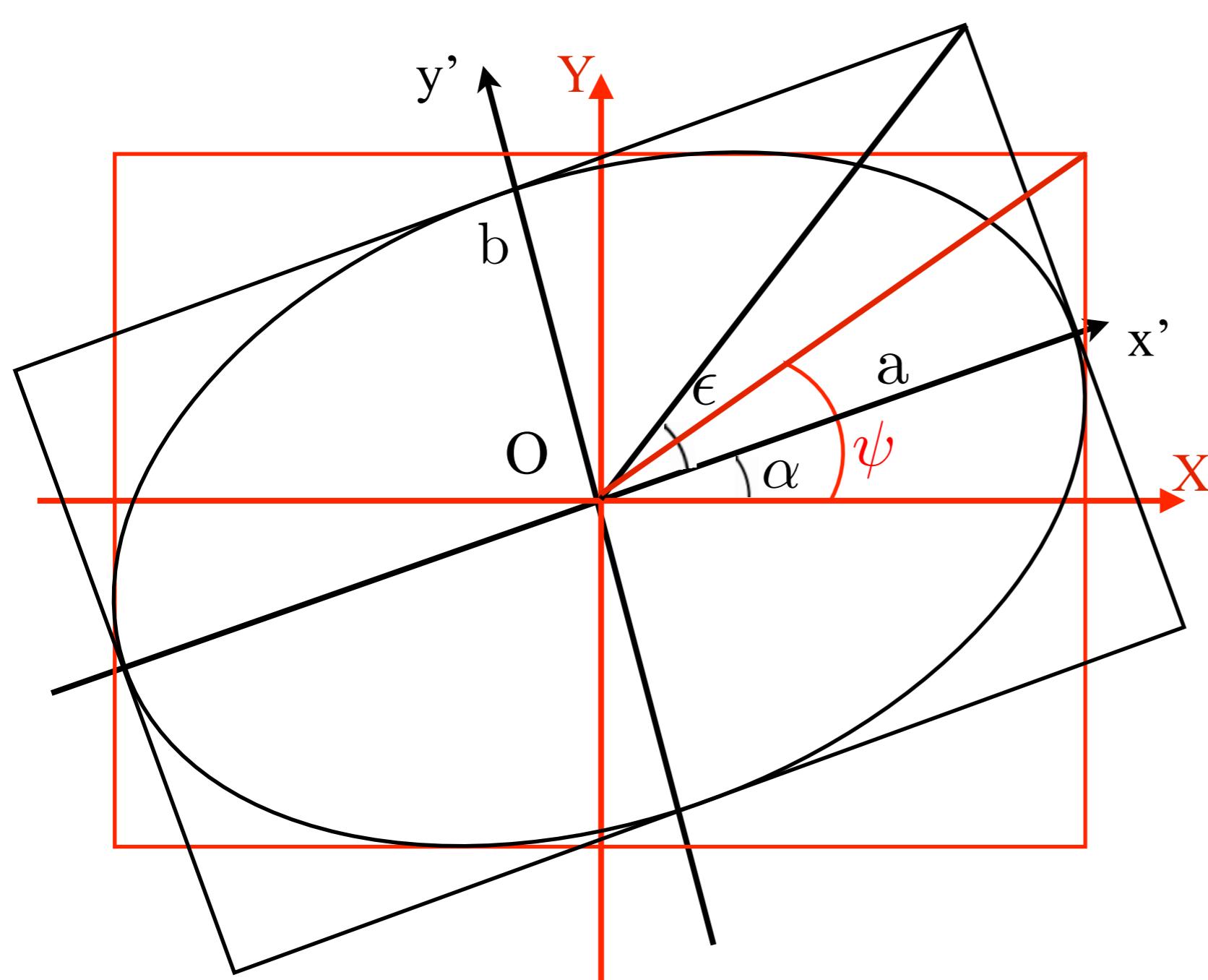
Tout état de polarisation peut être représenté par une superposition de 2 états de polarisation orthogonaux 2 à 2  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  ou  $\vec{L}$  et  $\vec{R}$

En particulier, on peut exprimer 1 polarisation linéaire grâce à 2 états de polarisation  $\vec{L}$  et  $\vec{R}$  et vice versa :

$$\left. \begin{array}{l} \hat{L} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{y}) \\ \hat{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{y}) \end{array} \right\} \text{Superposition de 2 oscillations suivant } \hat{x} \text{ et } \hat{y} \text{ avec une amplitude } 1/\sqrt{2} \text{ mais avec une différence de phase de } \frac{\pi}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{L} + \hat{R}) \\ \hat{y} = \frac{-i}{\sqrt{2}} (\hat{L} - \hat{R}) \end{array} \right\} \text{Une polarisation linéaire est la somme de 2 ondes circulaires opposées}$$

On peut aussi représenter un état elliptique en utilisant la direction  $\alpha$  du grand axe par rapport à ( $Ox$ ) et l'angle  $\epsilon$  caractéristique de l'ellipticité ( $\tan \epsilon = \frac{b}{a}$ ). Dans le repère de l'ellipse, le vecteur de Jones s'écrit :



$$\hat{\mathbf{J}}_{\text{pr}} = \begin{bmatrix} \cos \epsilon \\ i \sin \epsilon \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{J}}_{\text{pr}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{bmatrix} a \\ \pm ib \end{bmatrix}$$

# Matrices de Jones courantes

## Polariseur

Polariseur linéaire suivant une direction  $\mathbf{u}$  :

$$P = \vec{u}\vec{u}^\dagger$$

$$P_X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P_Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \quad P_\theta = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

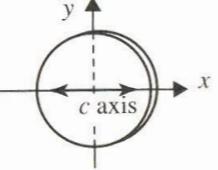
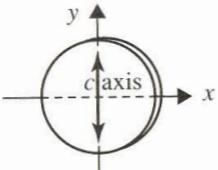
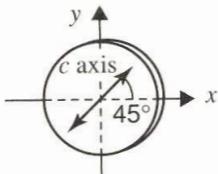
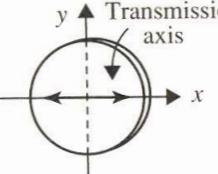
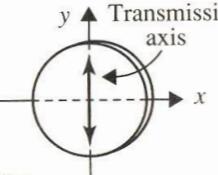
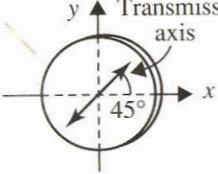
## Déphasage

$$J = \begin{bmatrix} e^{i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\delta/2} \end{bmatrix} \quad (\text{axe lent (plus fort déphasage) suivant (Ox)})$$

$$\text{Si } \delta = \pi, \text{ lame demi-onde} \quad J(\lambda/2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Si } \delta = \pi/2, \text{ lame quart d'onde} \quad J(\lambda/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

TABLE 1.7 Jones Matrices

Optical Element	Jones Matrices
Wave plates	$\Gamma \equiv \frac{2\pi}{\lambda} (n_e - n_o)d$  $\begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix}$
	 $\begin{bmatrix} e^{i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\Gamma/2} \end{bmatrix}$
	 $\begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) & -i \sin(\Gamma/2) \\ -i \sin(\Gamma/2) & \cos(\Gamma/2) \end{bmatrix}$
	$R(-\psi) \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix} R(\psi)$ $= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} \cos^2 \psi + e^{i\Gamma/2} \sin^2 \psi & -i \sin(\Gamma/2) \sin(2\psi) \\ -i \sin(\Gamma/2) \sin(2\psi) & e^{-i\Gamma/2} \sin^2 \psi + e^{i\Gamma/2} \cos^2 \psi \end{bmatrix}$
Polarizers	 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
	 $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
	 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
	$R(-\psi) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} R(\psi)$ $= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2 \psi & \cos \psi \sin \psi \\ \sin \psi \cos \psi & \sin^2 \psi \end{vmatrix}$

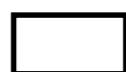
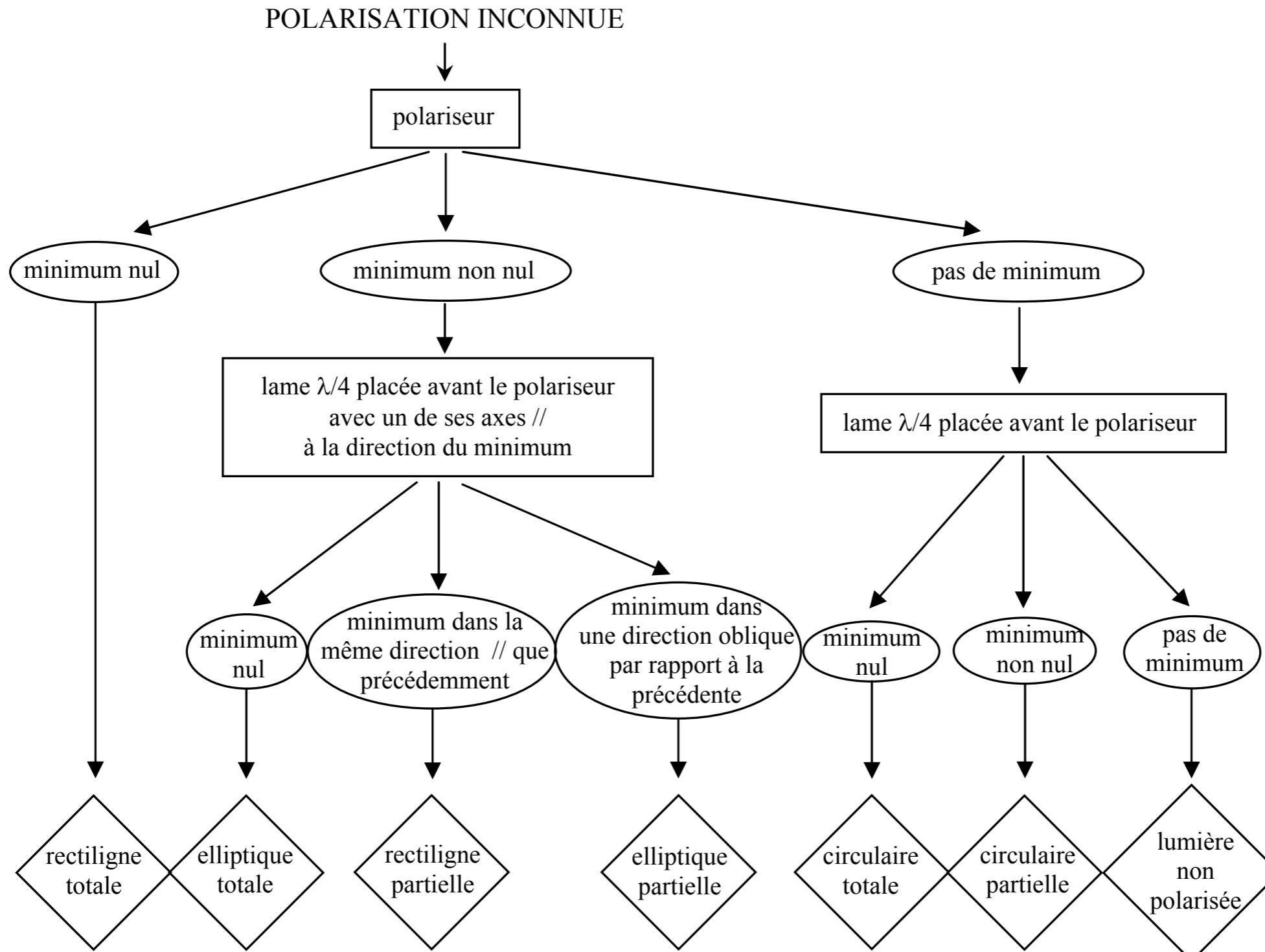
Pour s'entraîner....

A l'aide des matrices de Jones, expliciter l'action d'une lame  $\lambda/2$  sur une polarisation rectiligne quelconque

$\iota t$

A l'aide des matrices de Jones, expliciter l'action d'une lame  $\lambda/4$  sur une polarisation rectiligne quelconque

# Analyse d'une polarisation inconnue



Symbolise un instrument ajouté sur le trajet de la vibration



Symbolise l'observation



Symbolise la conclusion sur le type d'observation

# Propagation des ondes EMG dans un milieu anisotrope



## Milieu anisotrope :

- Propriétés optiques (ie  $n$ , indice de réfraction) dépendent de la direction de propagation.
- exemples : calcite (carbonate de calcium), quartz. Manip : 2 faisceaux émergents (ordinaire, extraordinaire)
  - faisceau e polarisé dans le plan de section principale
  - faisceau o polarisé  $\perp$  au plan de section principale
- ces propriétés sont liées à la structure de la matière (ex : réseau cristallin)
- Dans le cours, nous nous limiterons aux matériaux *linéaires, homogènes, transparents*.

## Milieu anisotrope (2) :

- Sous l'effet de  $\vec{E}$ , il apparaît une polarisation volumique  $P$  qui dépend de  $\vec{E}$ .
- Ce vecteur polarisation vérifie la relation

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

où  $\vec{D}$  est le vecteur déplacement et  $\vec{P} = \epsilon_0[\chi]\vec{E}$ , soit

$$\boxed{\vec{D} = \epsilon_0([1] + [\chi])\vec{E} = \epsilon_0[\epsilon_r]\vec{E} = [\epsilon]\vec{E}}$$

*Conséquence :  $\vec{D}$  et  $\vec{E}$  ne sont pas colinéaires !*

Dans un milieu anisotrope, l'indice « vu » par une onde dépend de sa polarisation

## Tenseur permittivité diélectrique :

- $\vec{D} = \epsilon_0[\epsilon_r]\vec{E}$
- $[\epsilon_r]$  est réel et symétrique, il est donc diagonalisable dans une base orthogonale d'états propres. Dans cette base il s'écrit :

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_3^2 \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} 1 + \chi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \chi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \chi_{33} \end{bmatrix}$$

$\epsilon_i$ = constantes diélectriques principales.

La forme du tenseur est donnée par la structure de la matière (cristaux par exemple)

- les  $n_i$  sont les indices de réfraction propres du milieu. Ils correspondent aussi aux vitesses de phases propres du milieu :  $v_i \equiv \frac{c}{n_i}$
- Si  $n_1 \neq n_2 \neq n_3$  , le milieu est dit biaxe.
- Si  $n_1 \neq n_2 = n_3$  , le milieu est dit uniaxe.
- Si  $n_1 = n_2 = n_3$  , le milieu est isotrope

Dans la suite du cours, nous nous placerons dans la base propre du milieu

## Structure de l'onde plane dans le M.A. :

- Equations de Maxwell

$$(\text{MF}) \quad \vec{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \vec{k} \wedge \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H}$$

$$(\text{MA}) \quad \vec{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \longrightarrow \quad \vec{k} \wedge \vec{H} = -\omega \vec{D}$$

$$(\text{M}\Phi) \quad \text{div} \vec{B} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{H} = 0 \quad \left. \right\} (\vec{D}, \vec{H}, \vec{k}) \text{ trièdre direct}$$

$$(\text{MG}) \quad \text{div} \vec{D} = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$

on appelle le plan  $(\vec{D}, \vec{H})$  le plan d'onde  $\Rightarrow \vec{k} \perp$  au plan d'onde

on appelle le plan  $(\vec{k}, \vec{D})$  le plan de polarisation

$\vec{E} \in$  à ce plan (mais  $\nparallel$  à  $\vec{D}$ )

vecteur de Poynting  $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H}$

$\vec{R}$  et  $\vec{k}$  ne sont pas parallèles !

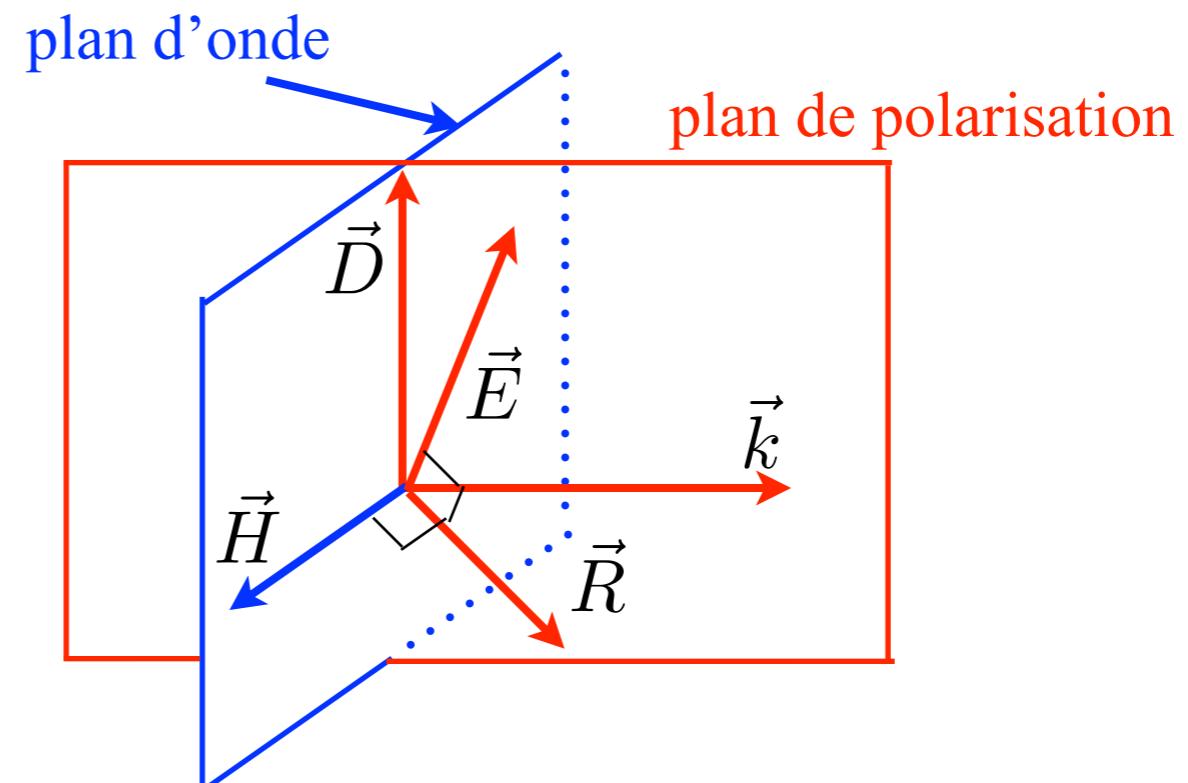
La direction de propagation de l'énergie lumineuse (donc celle des rayons lumineux) ne se propage pas suivant  $\vec{k}$

$$\vec{k} \wedge \vec{E} = \mu_0 \omega \vec{H}$$

$$\vec{k} \wedge \vec{H} = -\omega \vec{D}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$$



## Surface des indices:

- On définit le vecteur indice  $\vec{n} = \vec{k} \frac{c}{\omega}$  dont les composantes sont  $n_x, n_y, n_z$
- L'extrémité de ce vecteur donne l'indice vu par l'onde.
- On part des équations de Maxwell dans le but de trouver  $\vec{n}$

$$(\text{MA} + \text{MF}) \quad \vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \vec{D}$$

$$\vec{D} = \frac{1}{\mu_0 \omega^2} [k^2 \vec{E} - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E})]$$

$$\frac{D_x}{\epsilon_1} (k^2 - \epsilon_1 \mu_0 \omega^2) = k_x (\vec{k} \cdot \vec{E}) \quad \text{car} \quad (D_x = \epsilon_1 E_x)$$

$$\frac{D_y}{\epsilon_2} (k^2 - \epsilon_2 \mu_0 \omega^2) = k_y (\vec{k} \cdot \vec{E})$$

$$\frac{D_z}{\epsilon_3} (k^2 - \epsilon_3 \mu_0 \omega^2) = k_z (\vec{k} \cdot \vec{E})$$

## Surface des indices (2):

- $\vec{k} \cdot \vec{D} = 0$

$$k_x D_x = \frac{\epsilon_1 k_x^2 (\vec{k} \cdot \vec{E})}{k^2 - \epsilon_1 \mu_0 \omega^2} \quad (\text{idem pour y et z})$$

$$\frac{\epsilon_1 k_x^2}{k^2 - \epsilon_1 \mu_0 \omega^2} + \frac{\epsilon_2 k_y^2}{k^2 - \epsilon_2 \mu_0 \omega^2} + \frac{\epsilon_3 k_z^2}{k^2 - \epsilon_3 \mu_0 \omega^2} = 0$$

avec :  $\epsilon_1 = \epsilon_0 n_1^2$    et    $n^2 = \frac{k^2 c^2}{\omega^2} = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$

on obtient l'équation définissant la surface des indices :

$$\frac{n_1^2 n_x^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{n_2^2 n_y^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{n_3^2 n_z^2}{n^2 - n_3^2} = 0$$

C'est l'équation de Fresnel qui relie les indices vus par l'onde et les indices principaux du milieu.

$$\frac{n_1^2 n_x^2}{n^2 - n_1^2} + \frac{n_2^2 n_y^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{n_3^2 n_z^2}{n^2 - n_3^2} = 0$$

- Equation de Fresnel qui décrit les indices possibles suivant la direction de propagation  $\vec{k}$  de l'onde dans le M.A.
- $O\vec{M} = \vec{n}$  : lieu de M lorsque  $\vec{k}$  varie
- A un coefficient de proportionnalité près, cette surface correspond à la surface des vecteurs d'ondes

### Surface des indices (3):

- Surface à 2 nappes.
- Intersection avec le plan  $n_x = 0$  :

$$\frac{\text{si } n^2 - n_1^2 \neq 0}{\frac{n_2^2 n_y^2}{n^2 - n_2^2} + \frac{n_3^2 n_z^2}{n^2 - n_3^2} = 0}$$

$$\Rightarrow \text{ellipse d'axes } n_2 \text{ et } n_3 \quad \frac{n_y^2}{n_3^2} + \frac{n_z^2}{n_2^2} = 1$$

$$\frac{\text{si } n^2 - n_1^2 = 0}{\frac{n_y^2 + n_z^2}{n_1^2} = 1}$$

$$\Rightarrow \text{ cercle} \quad n_y^2 + n_z^2 = n_1^2$$

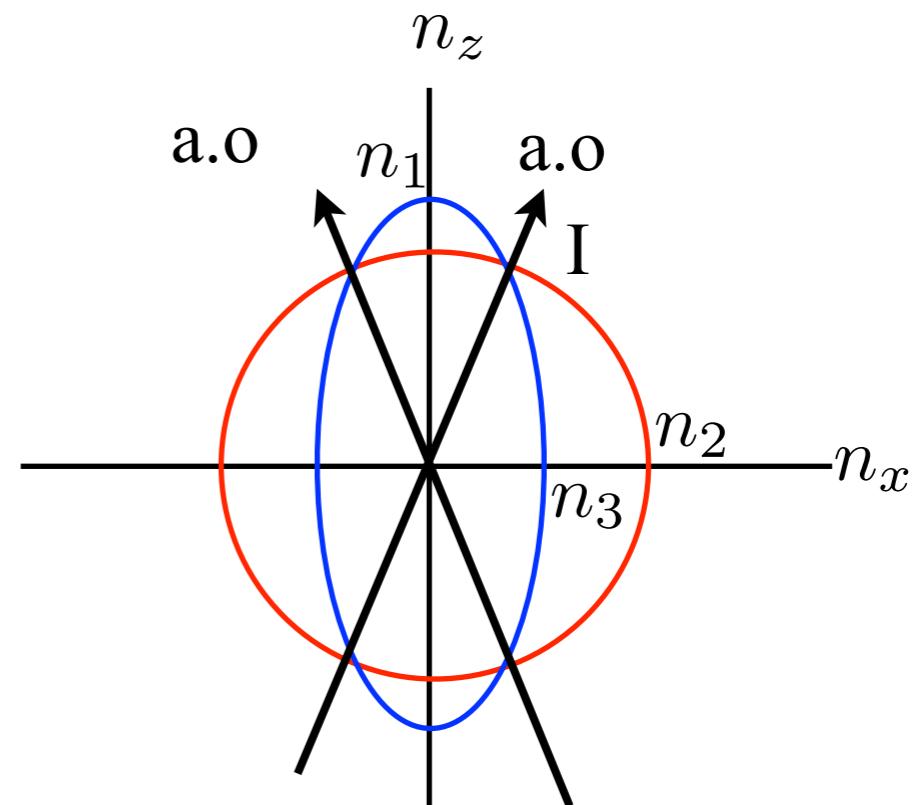
donc, l'intersection de cette surface avec le plan  $n_x = 0$  est à la fois un cercle et une ellipse.

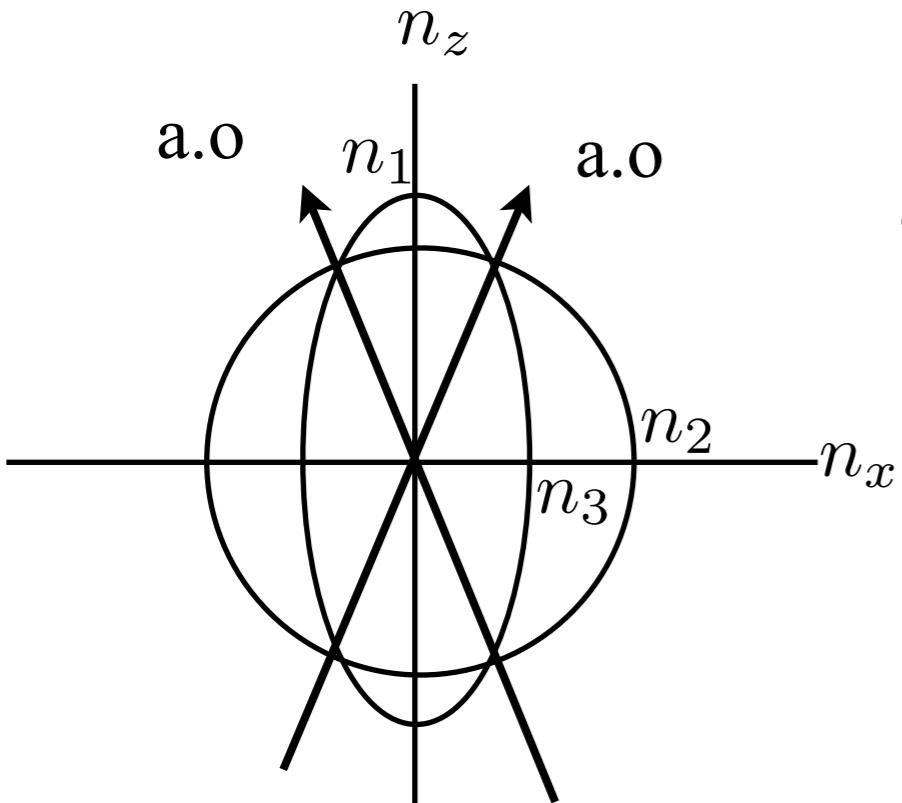
On fait de même avec les plans  $n_y = 0$  et  $n_z = 0$ .

Pour  $n_y = 0$  :  $n_x^2 + n_z^2 = n_2^2$   $\frac{n_z^2}{n_1^2} + \frac{n_x^2}{n_3^2} = 1$

Pour  $n_z = 0$  :  $n_x^2 + n_y^2 = n_3^2$   $\frac{n_x^2}{n_2^2} + \frac{n_y^2}{n_1^2} = 1$

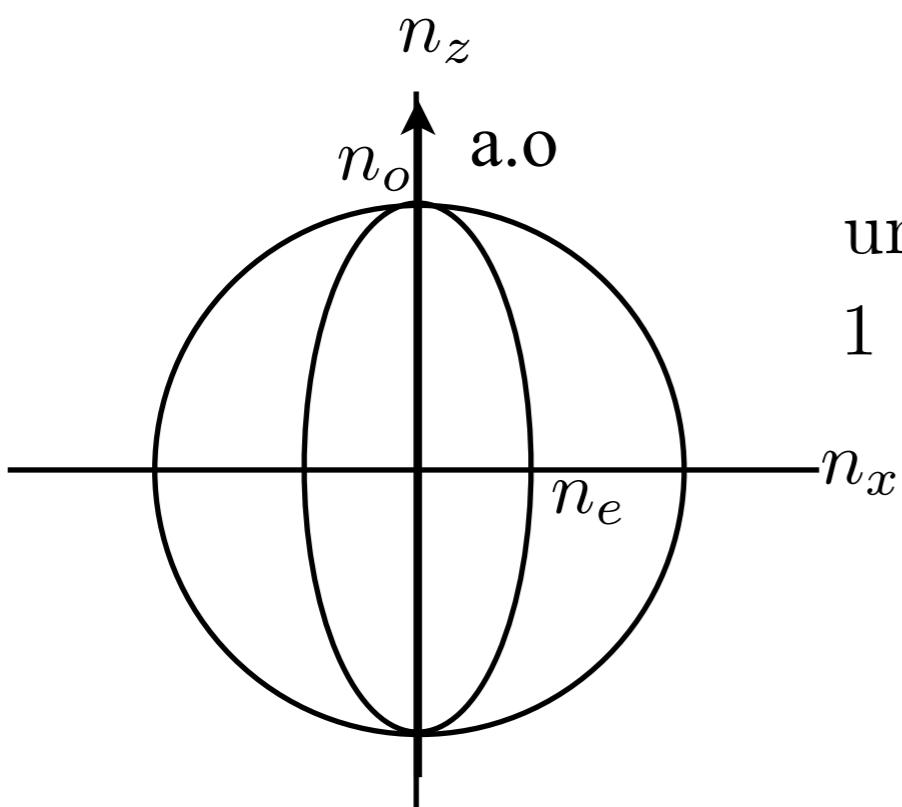
$$n_1 > n_2 > n_3$$



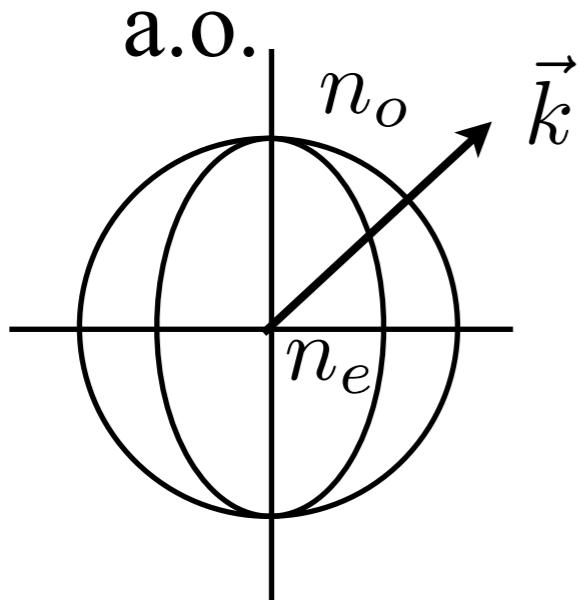


- 2 directions selon lesquelles l'indice n'a qu'une seule valeur (pour les milieux biaxes) :  $\exists$  2 axes optiques

- milieux uniaxes :  $n_1 = n_2 = n_o$  et  $n_3 = n_e$ .



uniaxe négatif ( $n_e - n_0 < 0$ )  
1 seul axe optique suivant (Oz)



uniaxe négatif

$$n_e < n_o$$

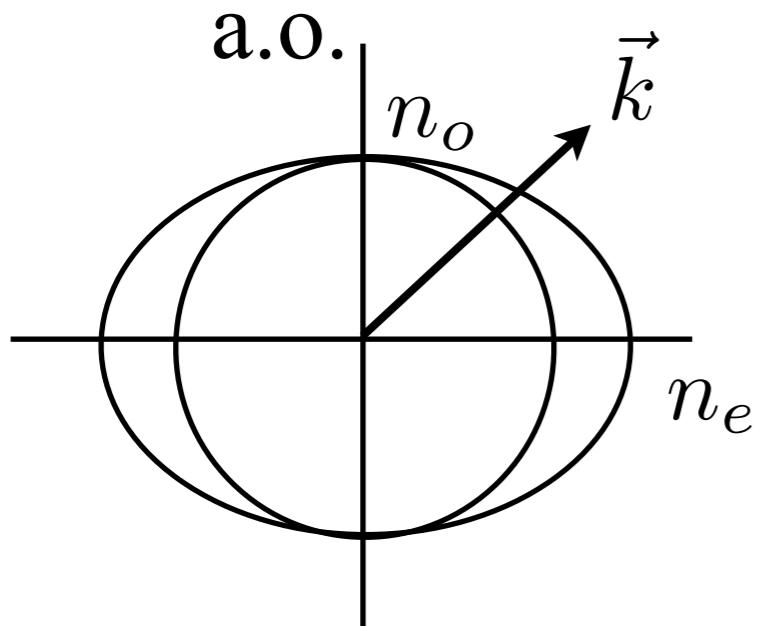
$\text{CaCO}_3$  (spat)

$$n_o = 1,658$$

$$n_e = 1,486$$

$$\Delta n = 0,17$$

Le long de l'a.o., le seul indice qui intervient est  $n_o$ .  
Il n'y a pas de biréfringence.



uniaxe positif

$$n_e > n_o$$

Quartz

$$n_o = 1,544$$

$$n_e = 1,553$$

$$\Delta n = 9 \times 10^{-3}$$

$$\vec{D} = \frac{1}{\mu_0 \omega^2} [k^2 \vec{E} - \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E})] \quad \longrightarrow \quad D_i = \frac{\epsilon_0 n_i}{n^2} \frac{\vec{n} \cdot \vec{E}}{\frac{1}{n_i^2} - \frac{1}{n^2}}$$

- Pour une direction de propagation, il existe 2 valeurs de  $n$  qui satisfont aux équations de Maxwell. Il existe 2 ondes qui se propagent dans le milieu  
⇒ biréfringence
- $\vec{D}'$  et  $\vec{D}''$   $\perp \vec{k}$  et on peut montrer que  $\boxed{\vec{D}' \perp \vec{D}''}$

Pour chaque direction de propagation, il y a 2 polarisations linéaires privilégiées  $\vec{D}'$  et  $\vec{D}''$ , perpendiculaires entre elles, auxquelles on associe 2 indices  $n'$  et  $n''$ .

Pour connaître la propagation d'une onde de polarisation quelconque, il faut la décomposer sur ces 2 polarisations propres (avec la méthode de Jones par exemple)

## Ellipsoïde des indices (1):

- La surface des indices ne permet pas simplement d'obtenir les directions des polarisations propres.
- On étudie une 2ème surface, l'ellipsoïde des indices, définie par l'ensemble des points M tels que :

$$\vec{OM} = \vec{m} = n \frac{\vec{D}}{D}$$

- Pour chaque direction de polarisation, l'ellipsoïde donne l'indice normal associé.

On repart de la même équation :

$$k_x D_x = \frac{1}{(\vec{k} \cdot \vec{E})} \frac{D_x^2 (k^2 - \epsilon_1 \mu_0 \omega^2)}{\epsilon_1} \quad \text{puis, } \vec{k} \cdot \vec{D} = 0 :$$

$$-D^2 \mu_0 \omega^2 + \frac{D_x^2 k^2}{\epsilon_1} + \frac{D_y^2 k^2}{\epsilon_2} + \frac{D_z^2 k^2}{\epsilon_3} = 0$$

$$\frac{D_x^2}{n_1^2} + \frac{D_y^2}{n_2^2} + \frac{D_z^2}{n_3^2} = D^2 \frac{\mu_0 \epsilon_0 \omega^2}{k^2} = \frac{D^2}{n^2}$$

avec  $m_x = n \frac{D_x}{D}$ ,

on obtient l'équation de l'ellipsoïde des indices :

$$\boxed{\frac{m_x^2}{n_1^2} + \frac{m_y^2}{n_2^2} + \frac{m_z^2}{n_3^2} = 1}$$

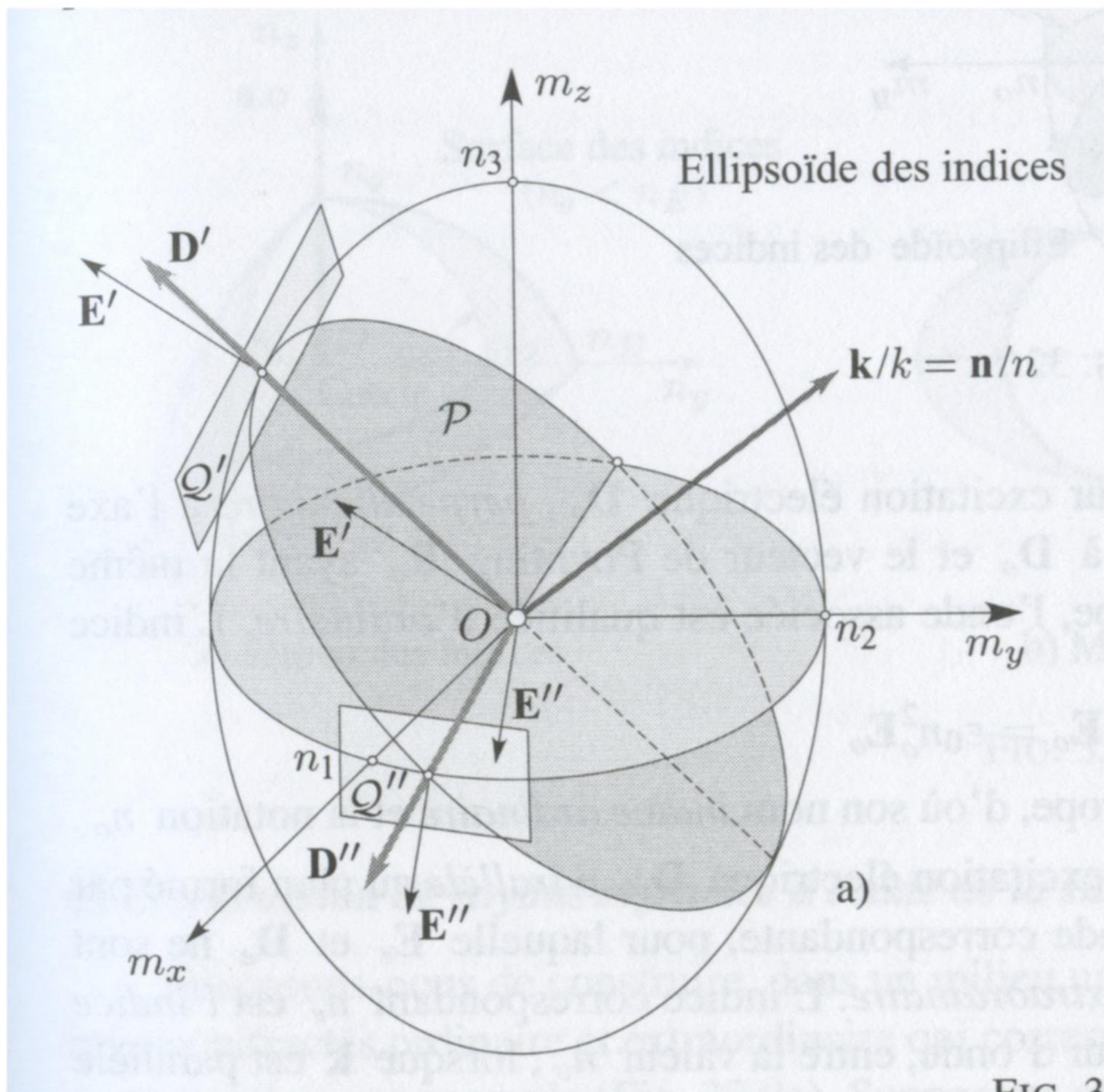
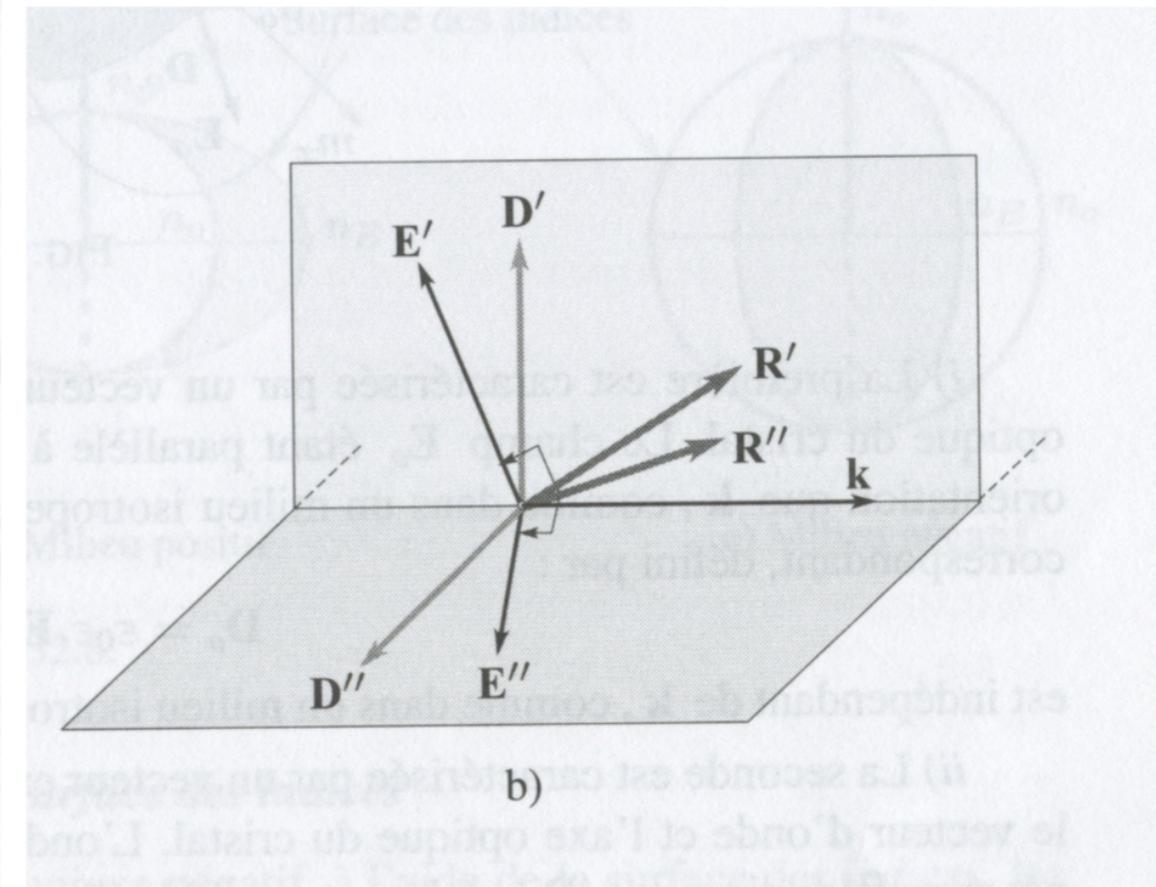


FIG. 2



$$\begin{aligned}\vec{k} \wedge \vec{E} &= \mu_0 \omega \vec{H} \\ \vec{k} \wedge \vec{H} &= -\omega \vec{D} \\ \vec{k} \cdot \vec{H} &= 0 \\ \vec{k} \cdot \vec{D} &= 0\end{aligned}$$

## Structure de l'onde :

- on mq  $\vec{E}$  est  $\perp$  à l'ellipsoïde :

on différencie l'équation :  $\frac{m_x}{n_1^2} dm_x + \frac{m_y}{n_2^2} dm_y + \frac{m_z}{n_3^2} dm_z = 0$

soit, avec  $\frac{m_x}{n_1^2} = \frac{n}{D} \frac{D_x}{n_1^2} = \frac{n}{D} E_x$

$$\text{d'où } E_x dm_x + E_y dm_y + E_z dm_z = 0 \implies \boxed{\vec{E} \cdot d\overrightarrow{OM} = 0}$$

- plan d'onde  $P$  :  $\perp$  à  $\vec{k}$ , contient  $(\vec{D}, \vec{H}, \vec{B})$
  - Pour une direction  $D$  fixée par un point  $M$  sur l'ellipsoïde :  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$  sont  $\perp$  à  $\vec{E}$  et  $\vec{E}$  est  $\perp$  à l'ellipsoïde  
 $\Rightarrow \vec{H}$  et  $\vec{B}$  sont dans le plan tangent à l'ellipsoïde au point  $M$ .
  - Pour une direction donnée de  $\vec{k}$  :  $\vec{D}$  appartient à l'intersection du plan d'onde et de l'ellipsoïde (c'est une ellipse) et  $\vec{D} \perp \vec{H}$  et  $\vec{B}$
- $\implies \vec{D}$  est forcément suivant un des axes de l'ellipse.

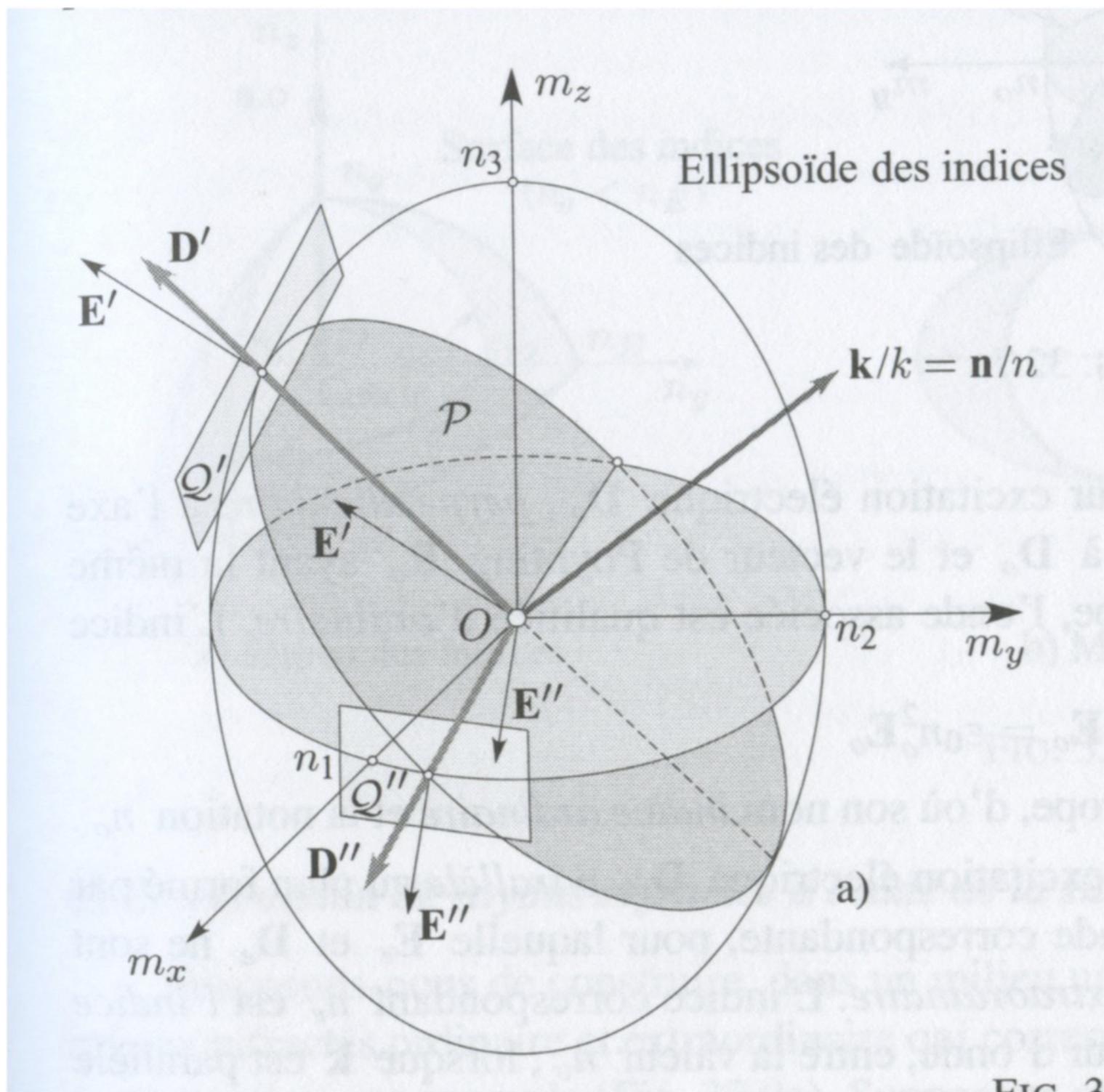
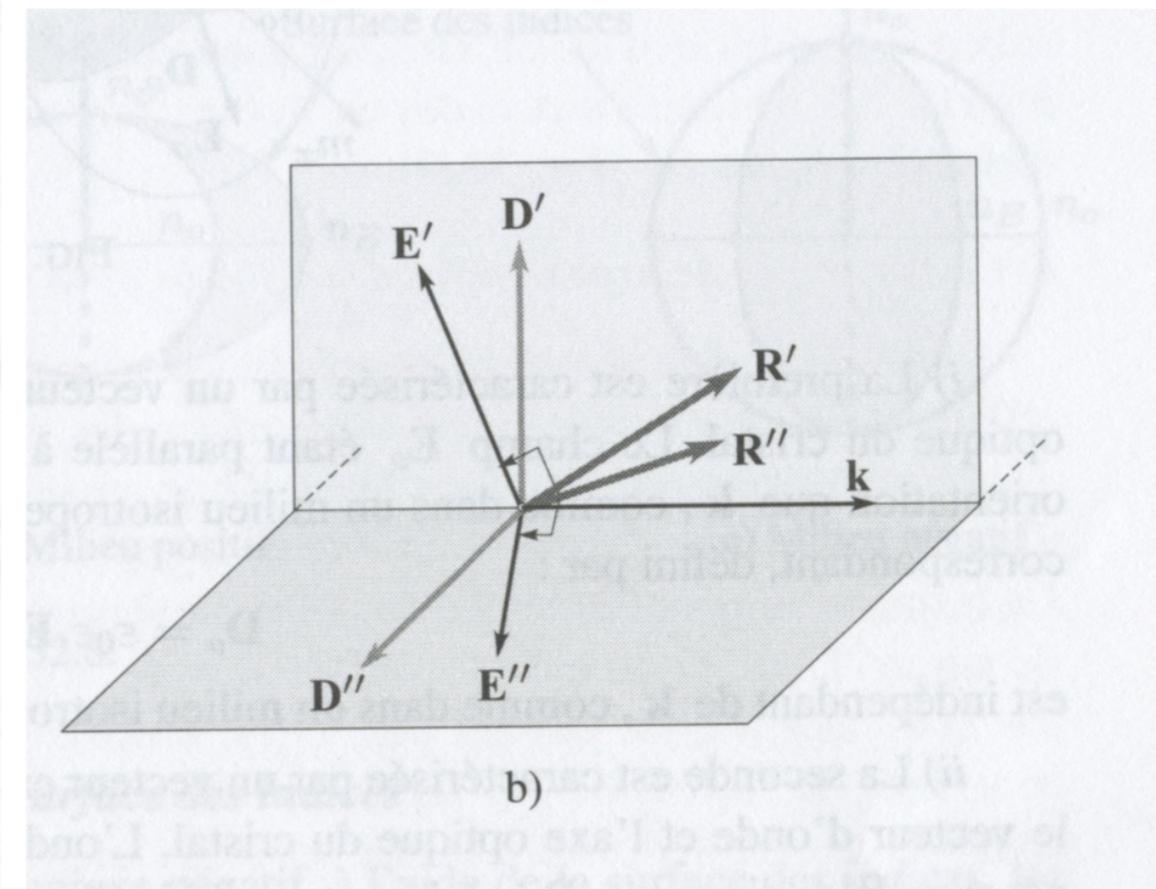


FIG. 2



b)

# Milieux uniaxes

- Onde ordinaire

- $\vec{D}' = \vec{D}_o \perp$  à l'axe optique
- l'indice vaut  $n_o \forall$  l'orientation de  $\vec{k}$  car  $\vec{D}_o$  suit un cercle
- $\boxed{\vec{D}_o = \epsilon_0 n_o^2 \vec{E}_o} \rightarrow \vec{D}_o$  et  $\vec{E}_o$  sont colinéaires et  $\vec{R}_o \parallel \vec{k}$  comme dans un milieu isotrope.

- Onde extraordinaire

- $\vec{D}'' = \vec{D}_e \in$  au plan de section principale contenant (a.o. et  $\vec{k}$ )
- $\boxed{n_o \leq n \leq n_e}$  : de manière générale,  $\vec{E}_e$  et  $\vec{D}_e$  ne sont pas colinéaires,  $\vec{R}_e$  et  $\vec{k}$  non plus.
- si  $\vec{k} \parallel$  a.o., le milieu se comporte comme un milieu isotrope d'indice  $n_o$ .
- si  $\vec{k} \perp$  a.o., alors  $\vec{E}$  et  $\vec{D}$  sont colinéaires. On a alors  $\vec{D}_e = \epsilon_0 n_e^2 \vec{E}_e$  et  $\vec{R}_e \parallel \vec{k}$

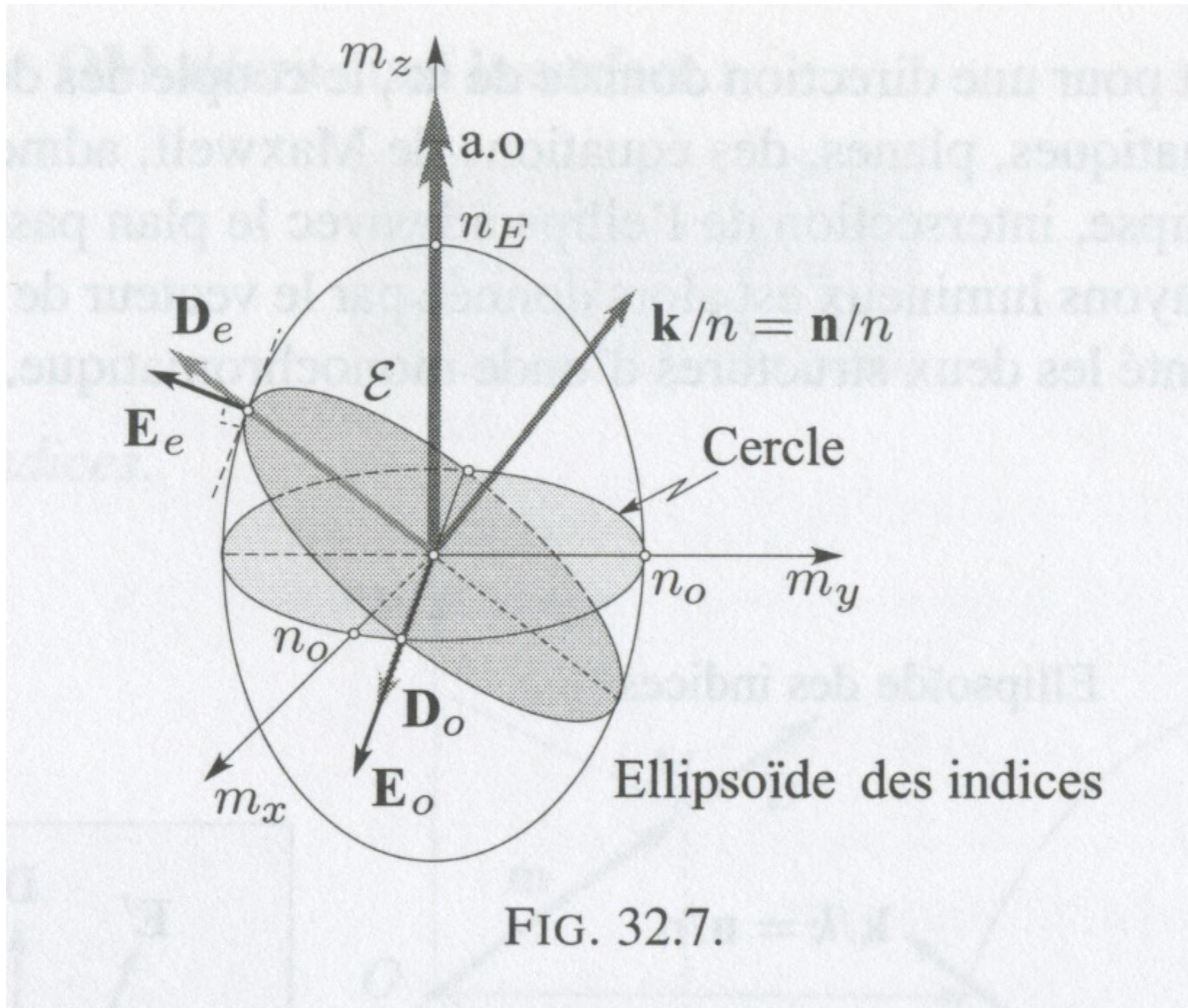
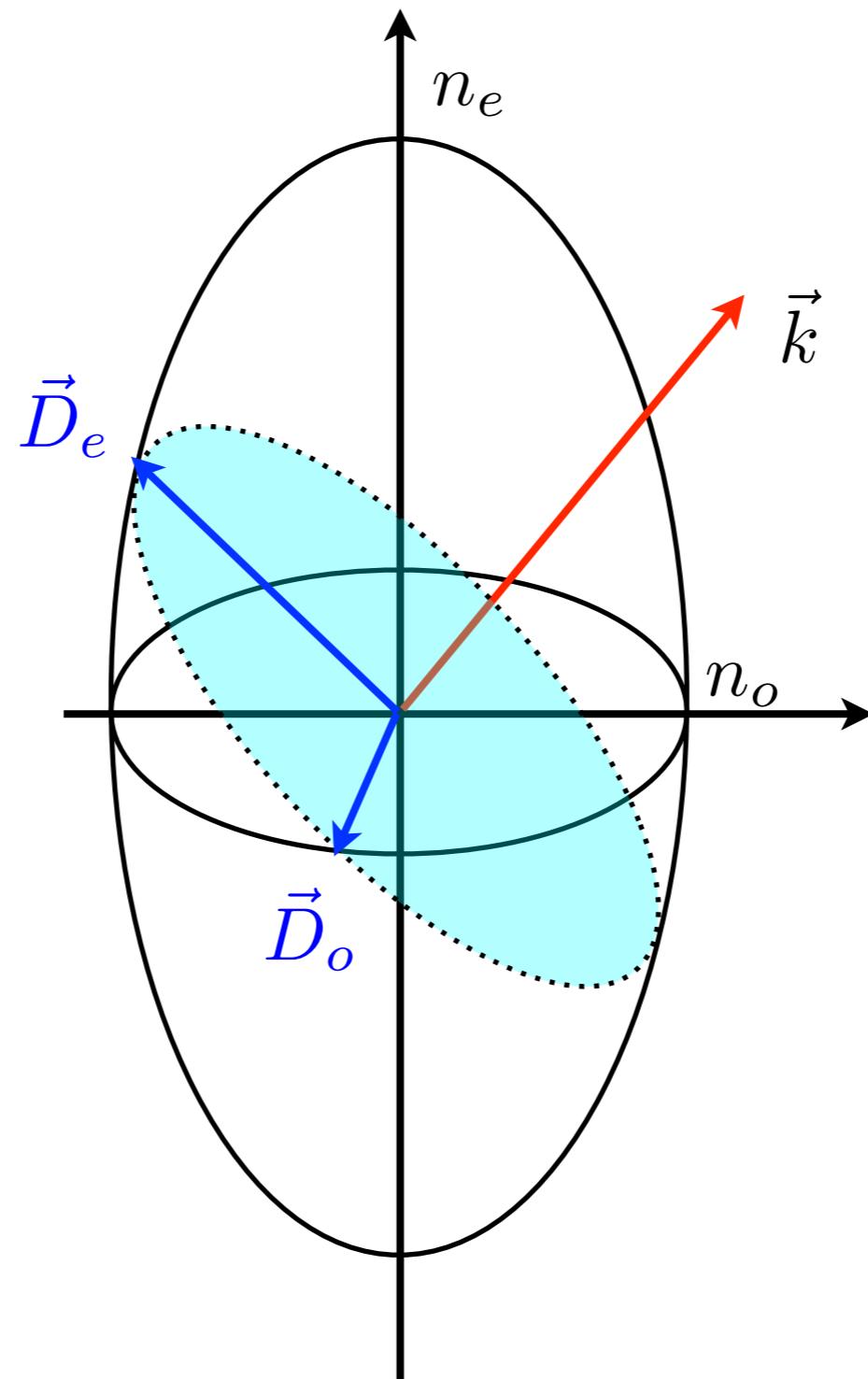
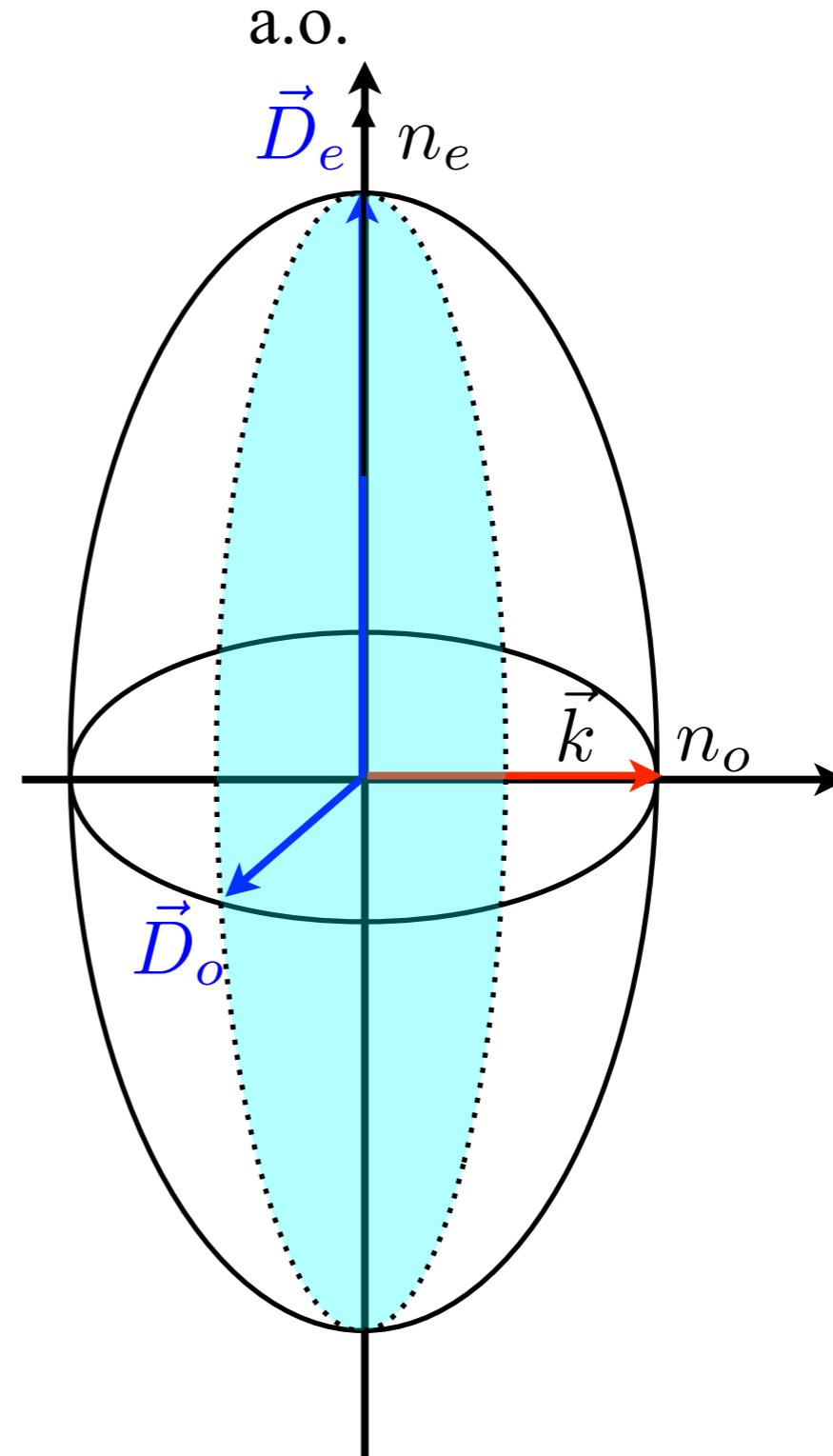
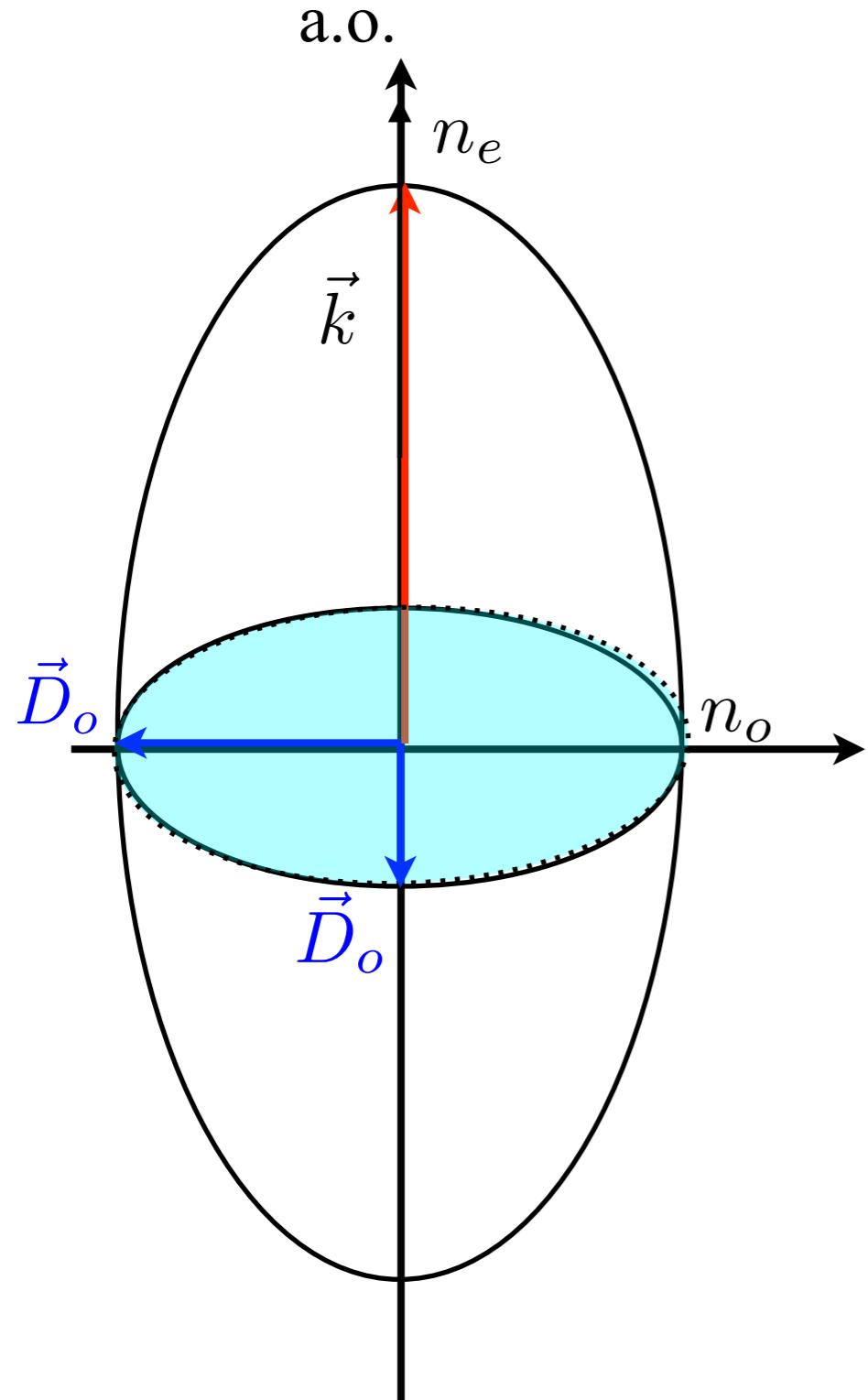
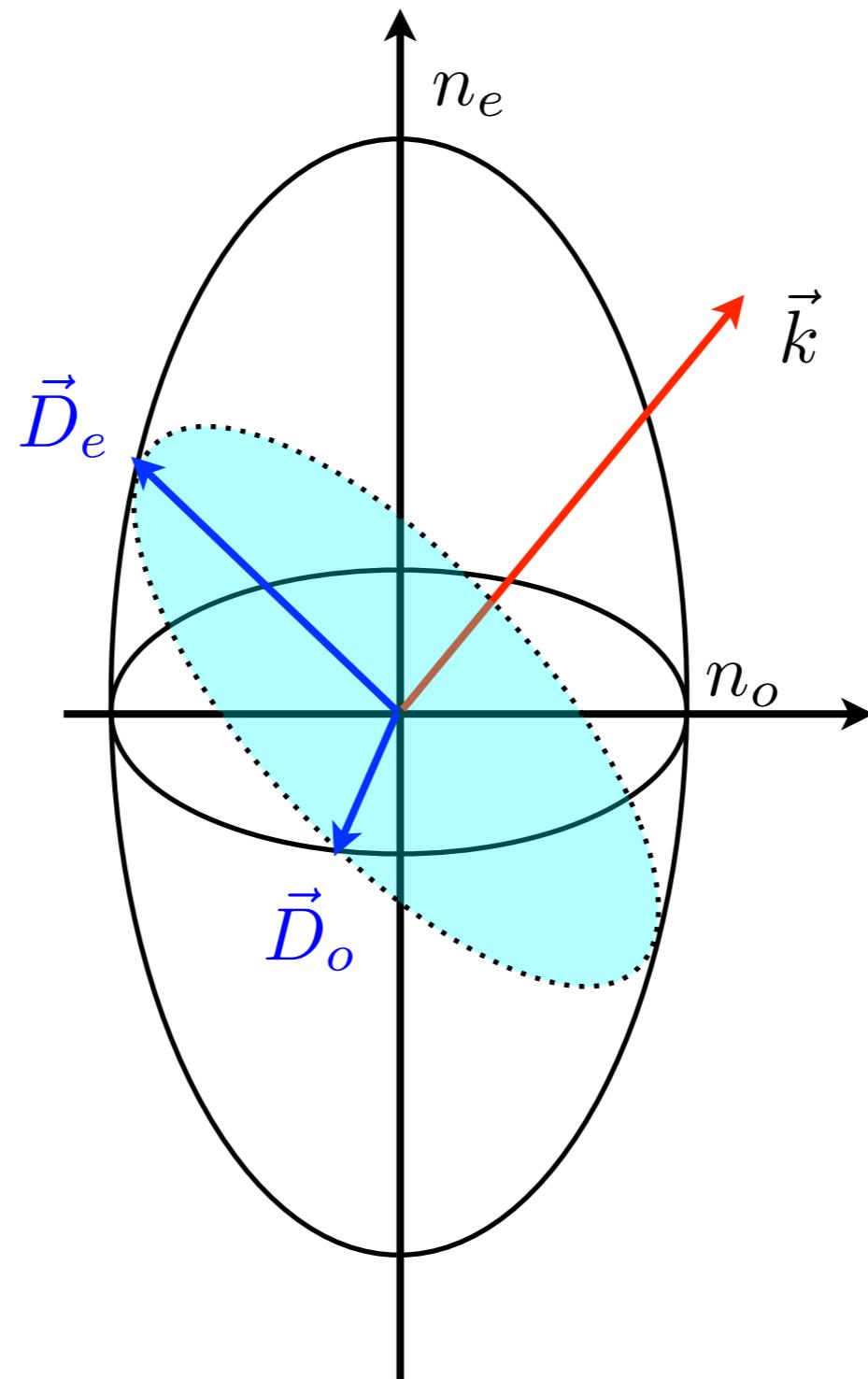


FIG. 32.7.







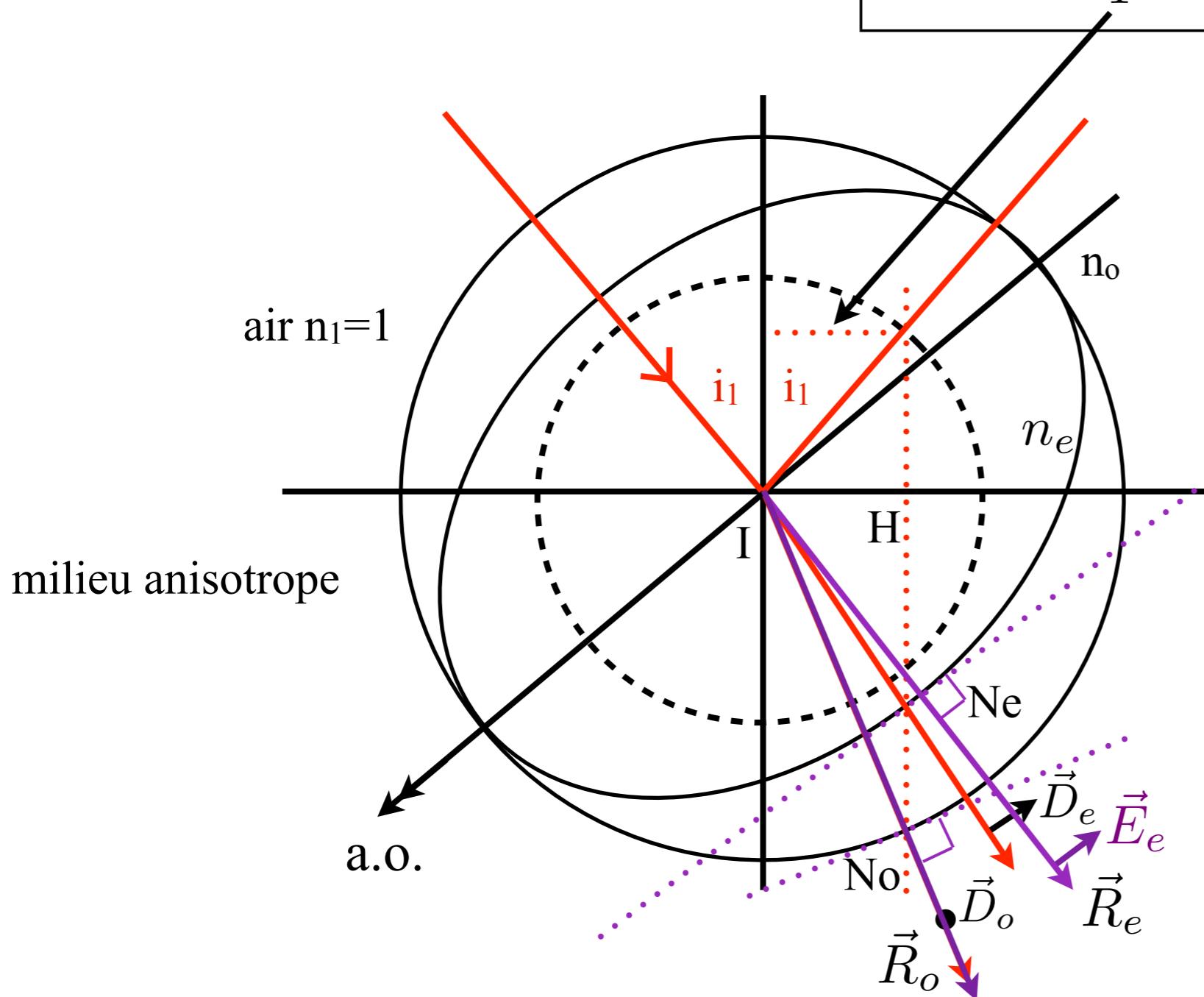
# Construction des rayons réfractés avec un milieu anisotrope

a) à l'aide de la surface des indices

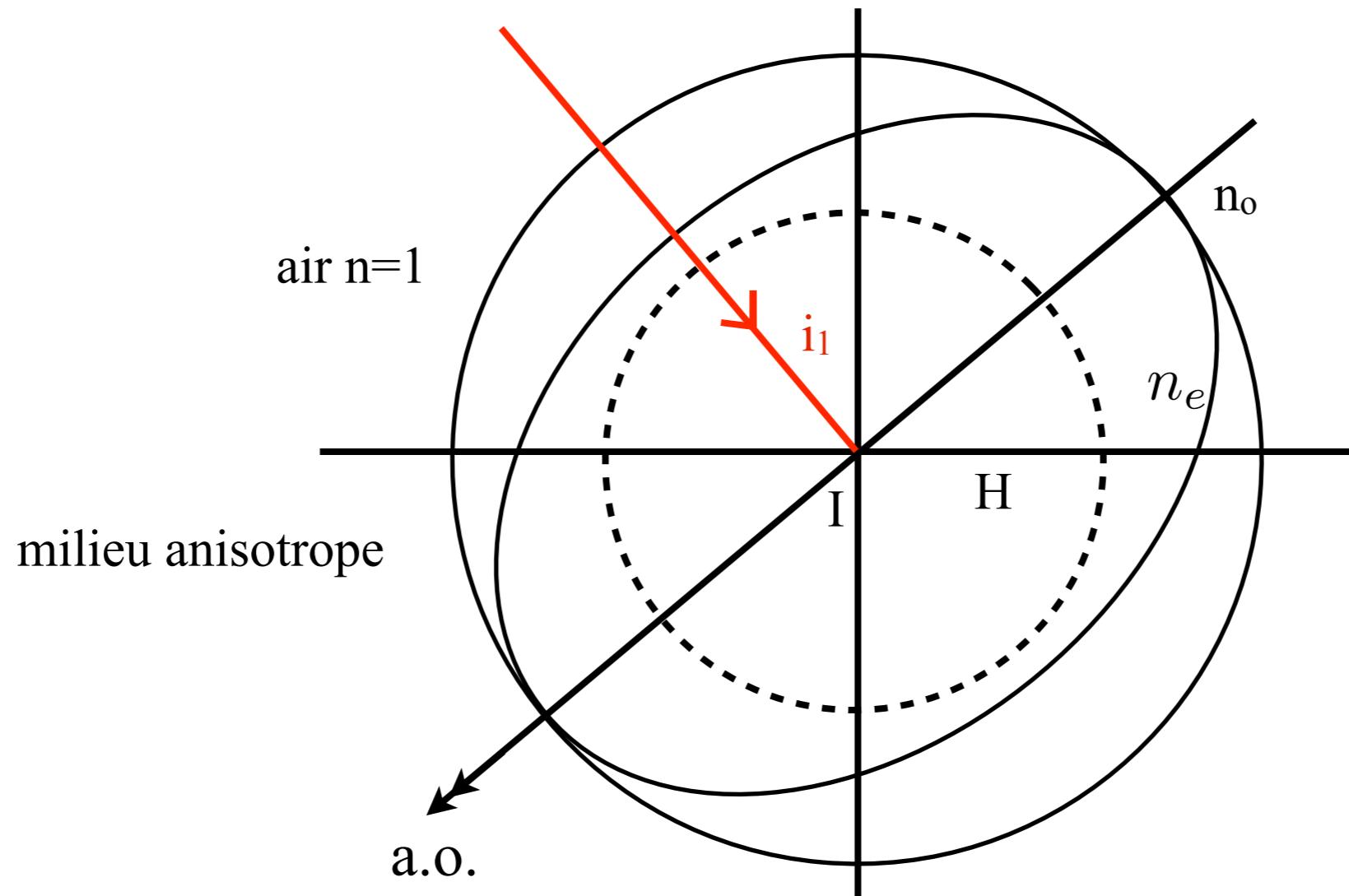
On utilise les lois de Descartes :

$$IH = n_1 \sin i_1 = n_2^o \sin i_2^o = n_2^e \sin i_2^e$$

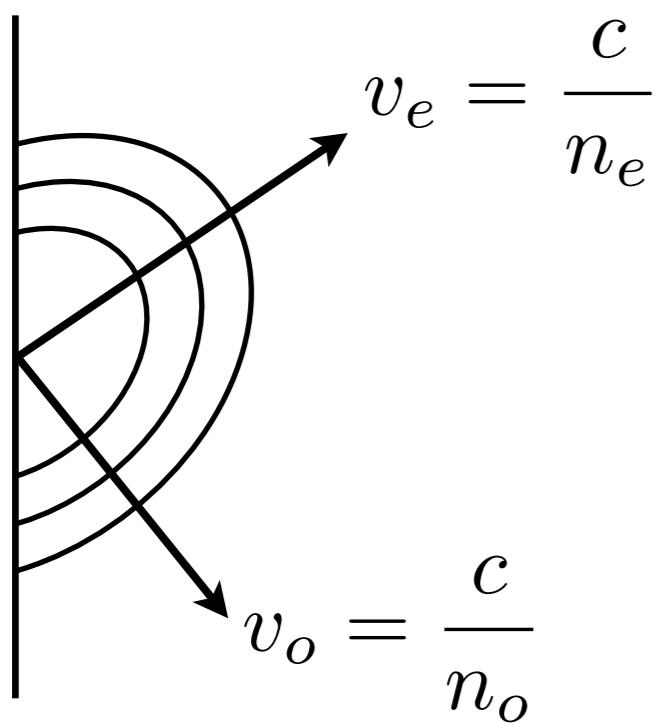
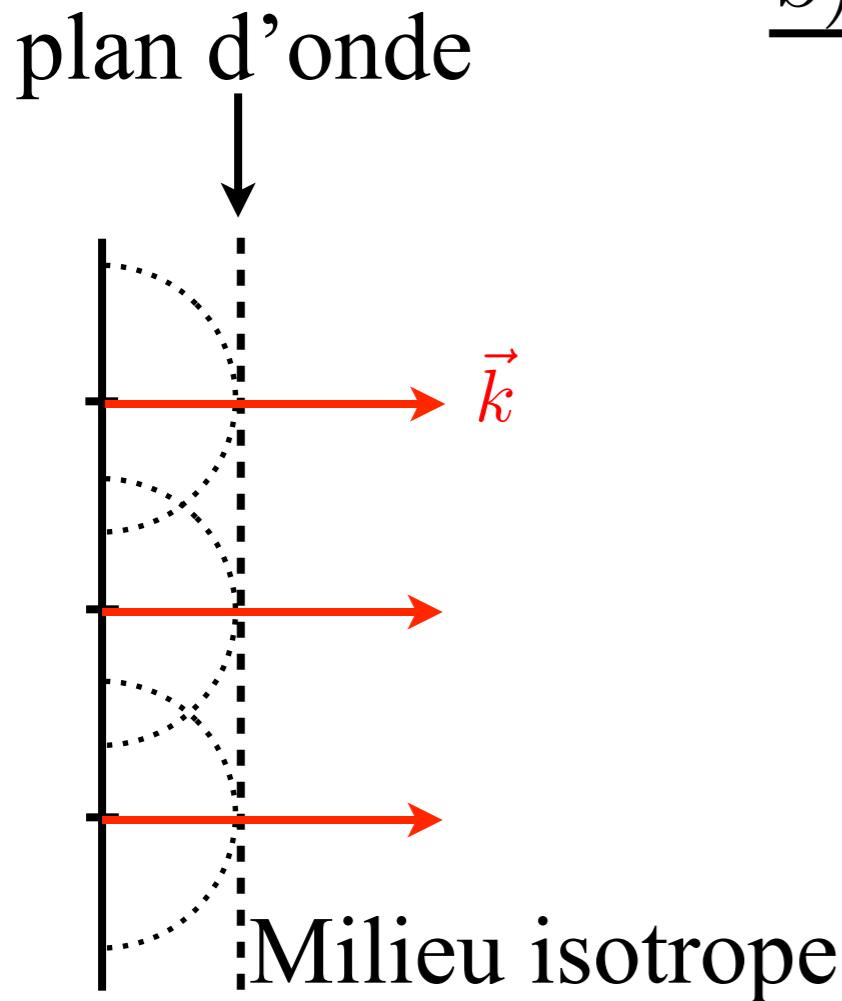
$$n_2^e \in [n_o, n_e]$$



Pour s'entraîner !



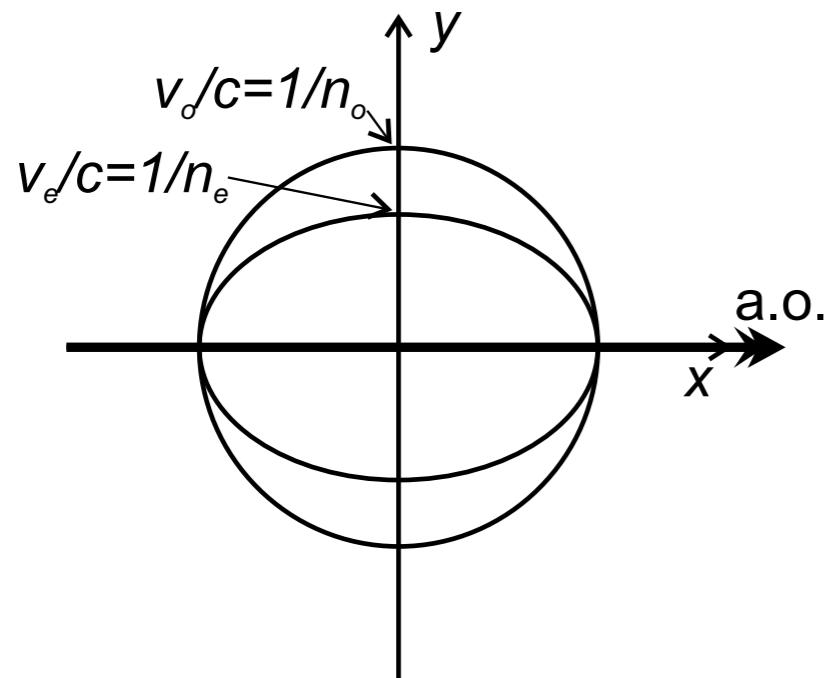
## b) à l'aide de la surface radiale



construction de Huygens

### Ondelettes :

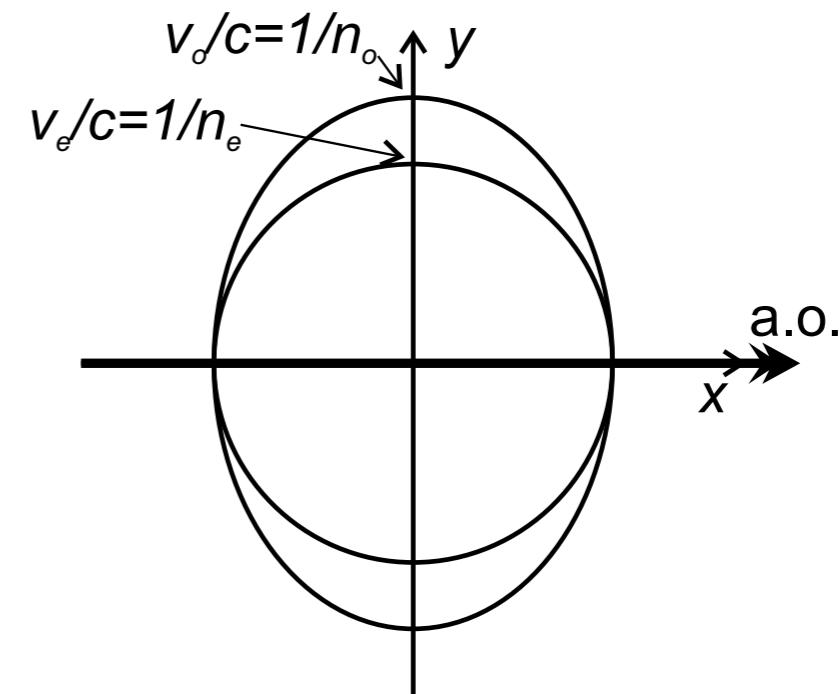
- onde ordinaire : sphère de rayon  $\frac{1}{n_o}$ , vitesse  $\frac{c}{n_o}$
- onde extraordinaire : vitesses  $(\frac{c}{n_o} \parallel \text{a.o})$  et  $(\frac{c}{n_e} \perp \text{a.o})$ . Ellipsoïde d'axes  $\frac{1}{n_o}$  et  $\frac{1}{n_e}$



milieu positif

$$\Delta n = n_e - n_o > 0$$

$$1/n_e < 1/n_o$$



milieu négatif

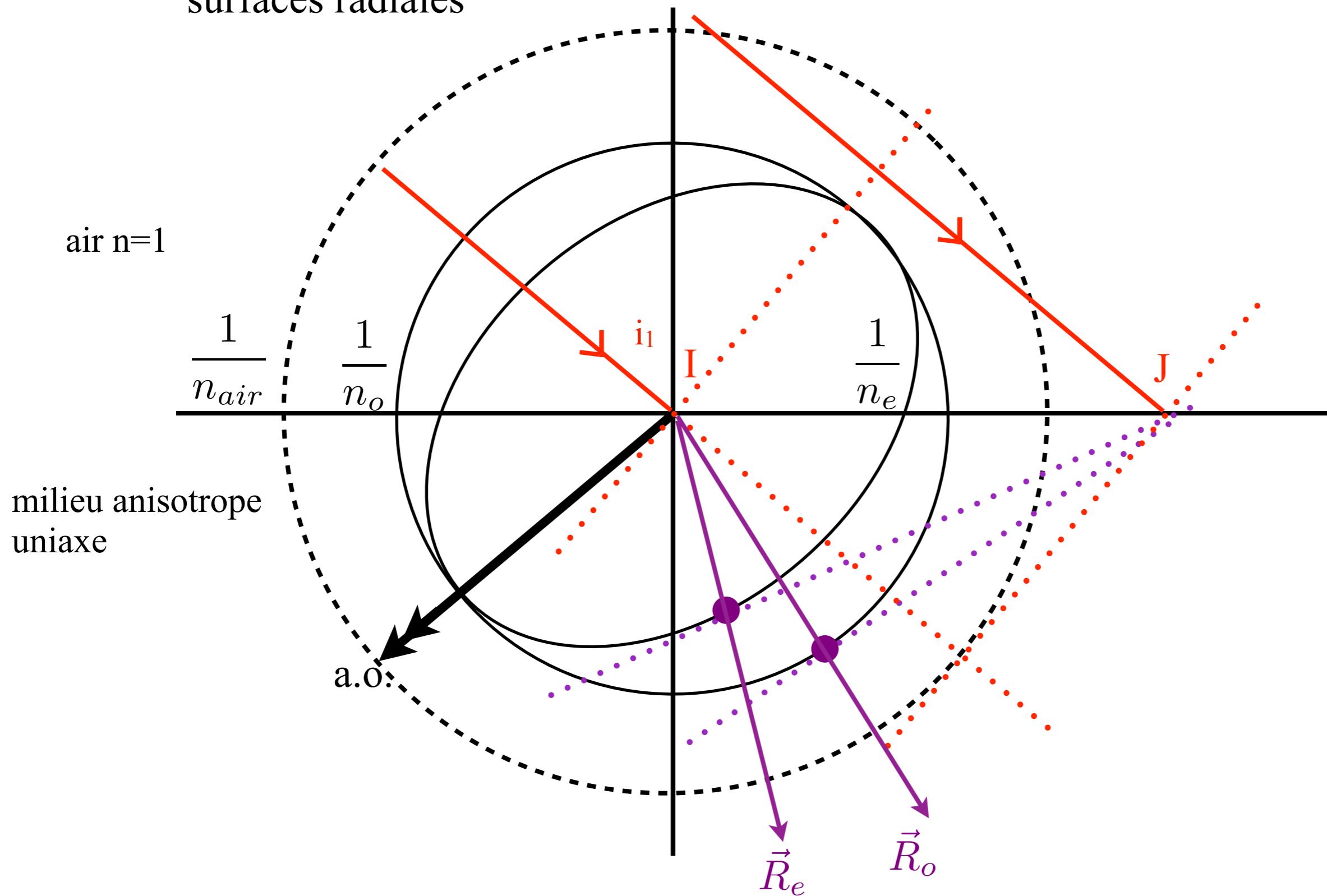
$$\Delta n = n_e - n_o < 0$$

$$1/n_e > 1/n_o$$

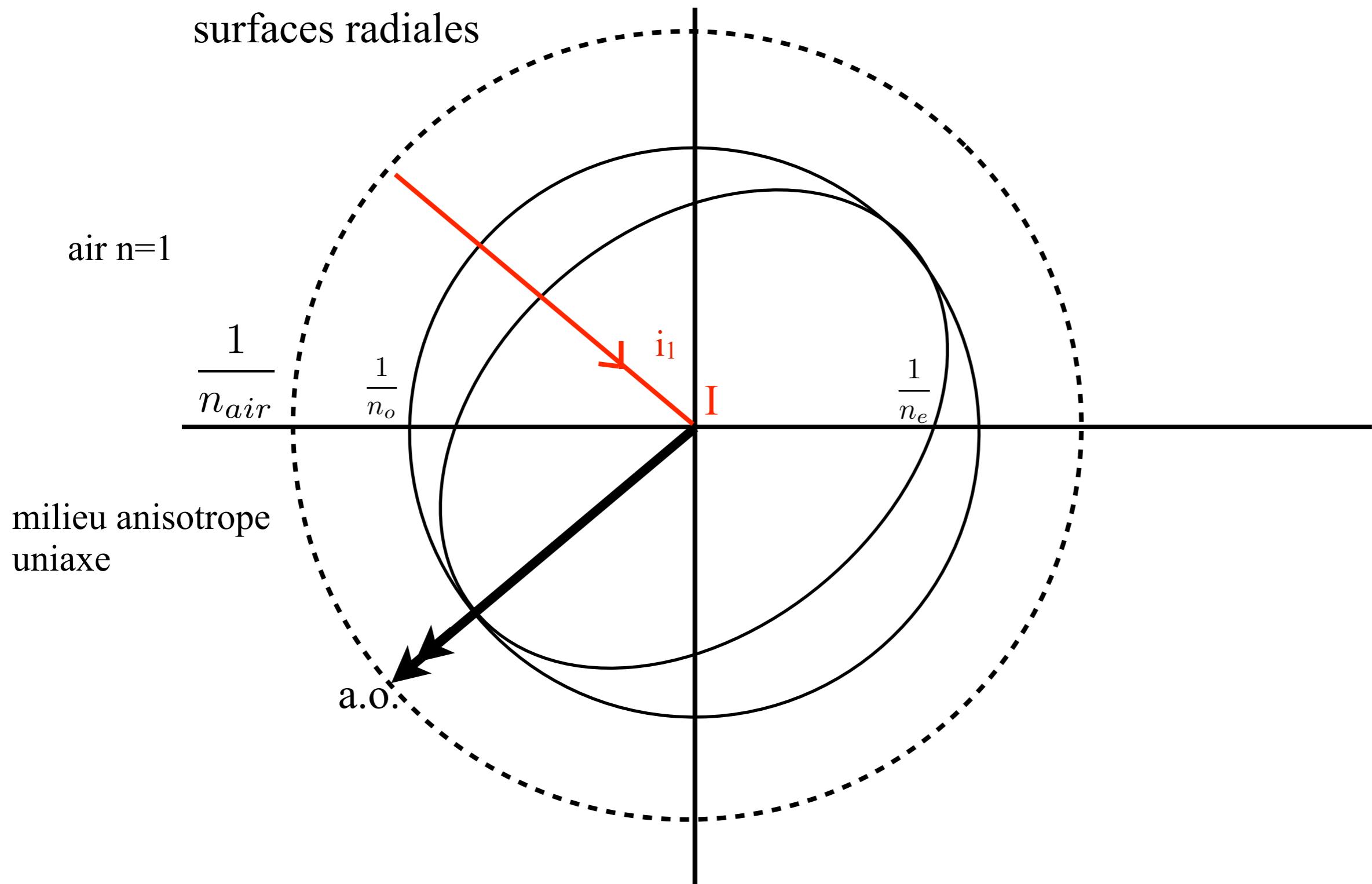
Coupe de la surface ondelette dans le cas  
d'un milieu uniaxe

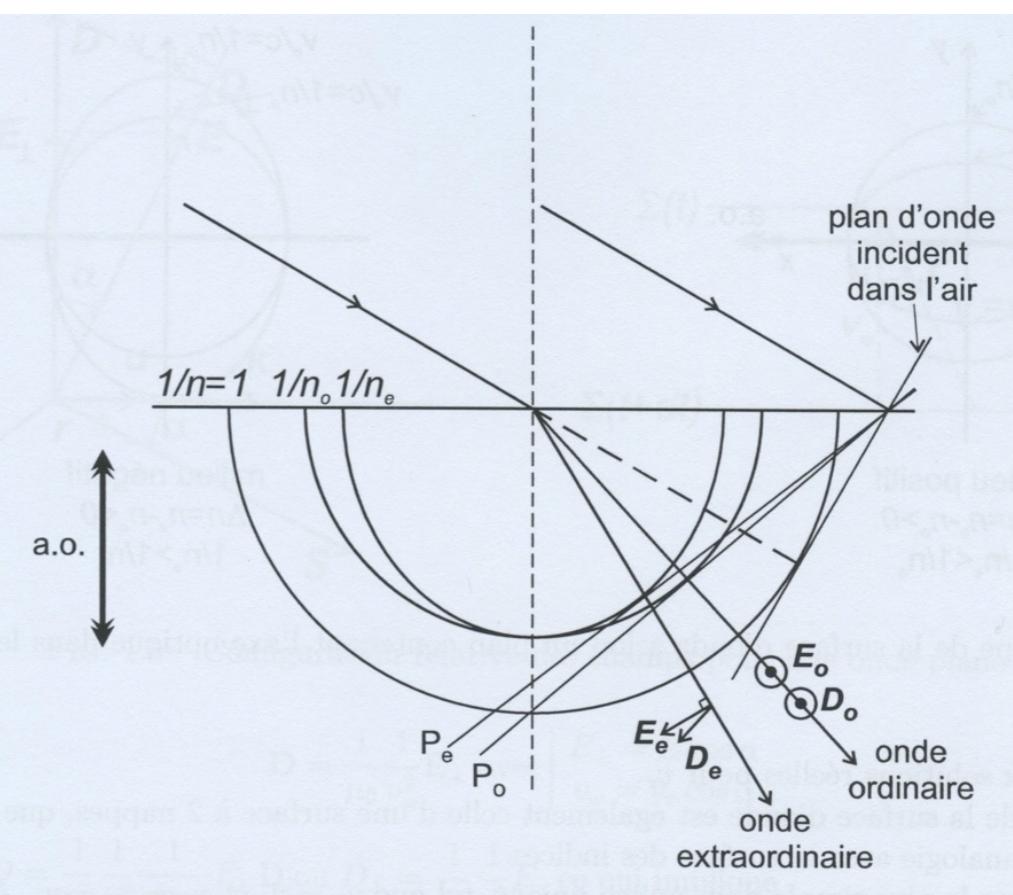
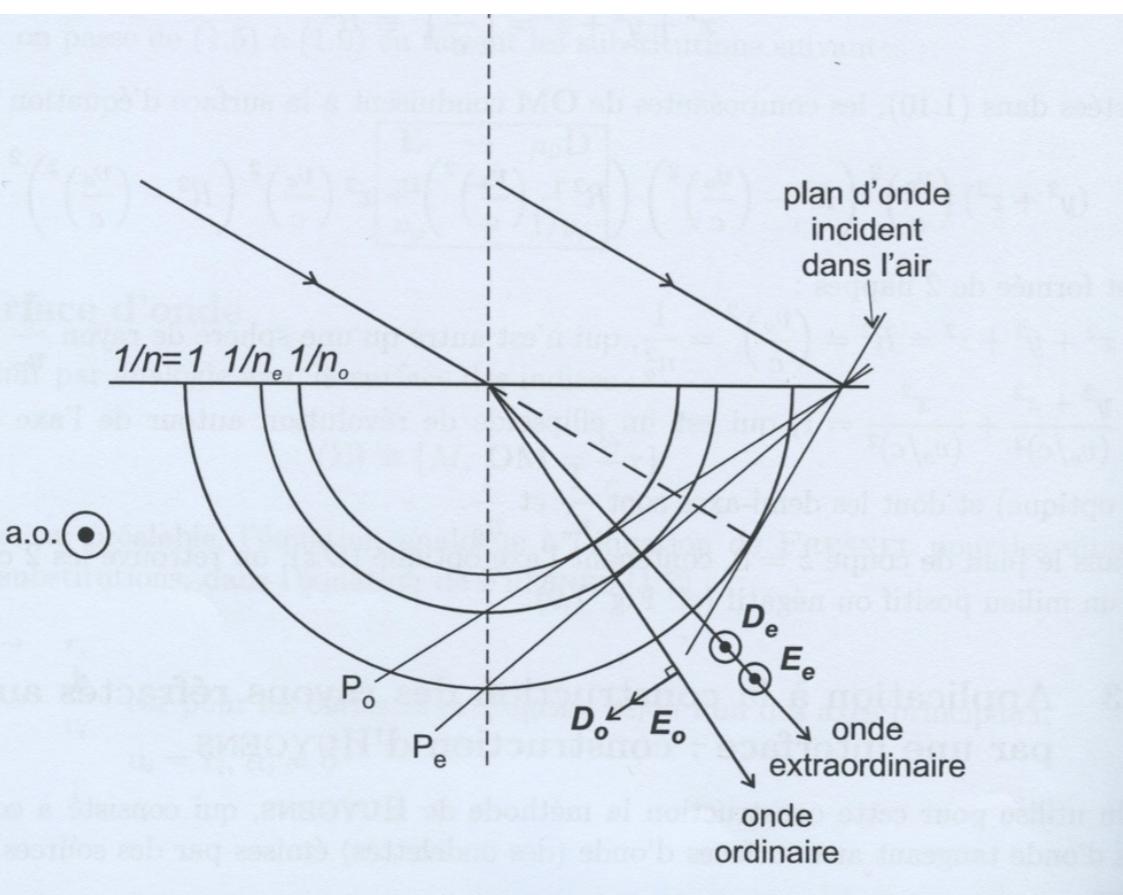
# Construction des rayons réfractés avec un milieu anisotrope

surfaces radiales



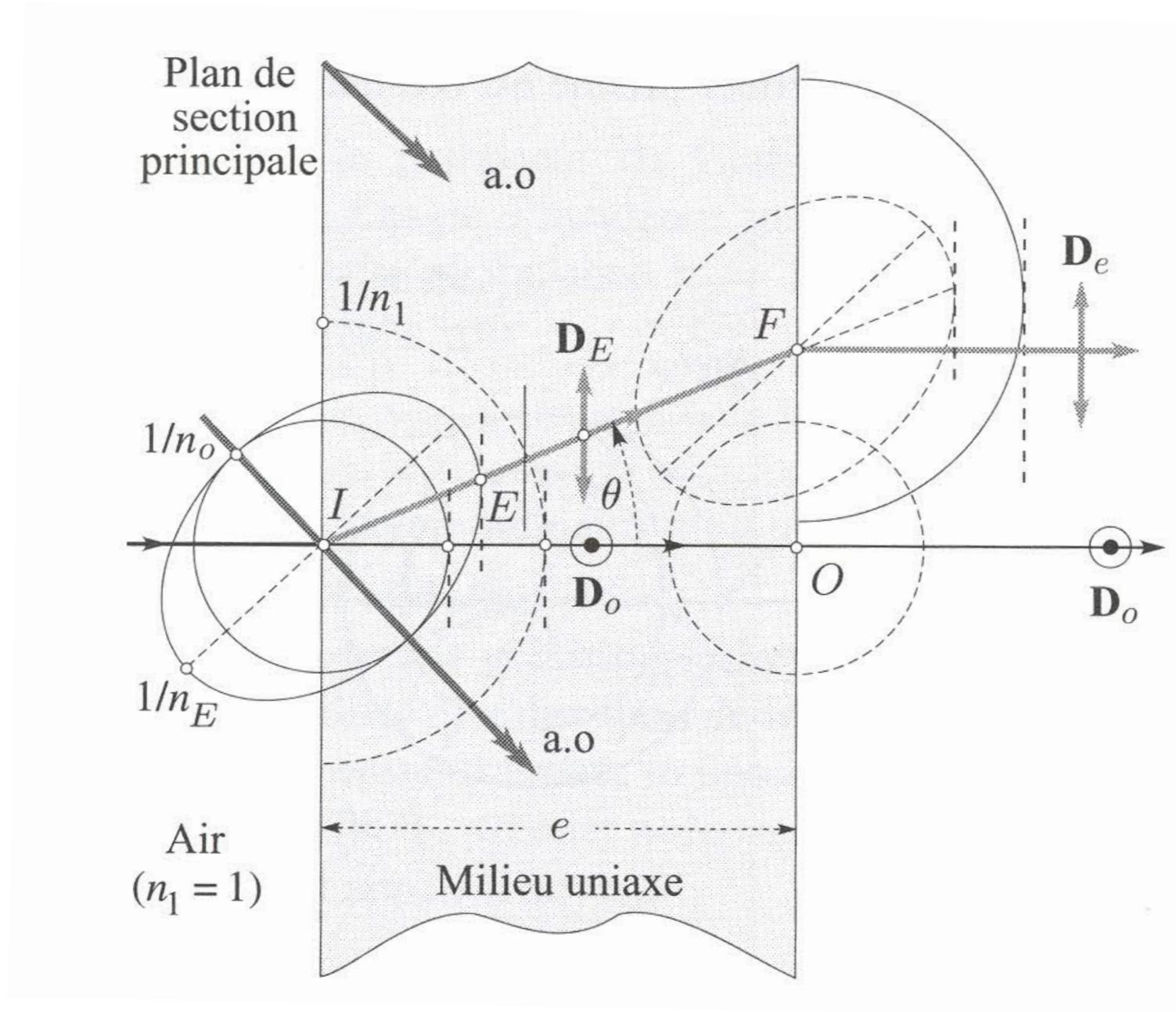
Pour s'entraîner !





# Quelques exemples

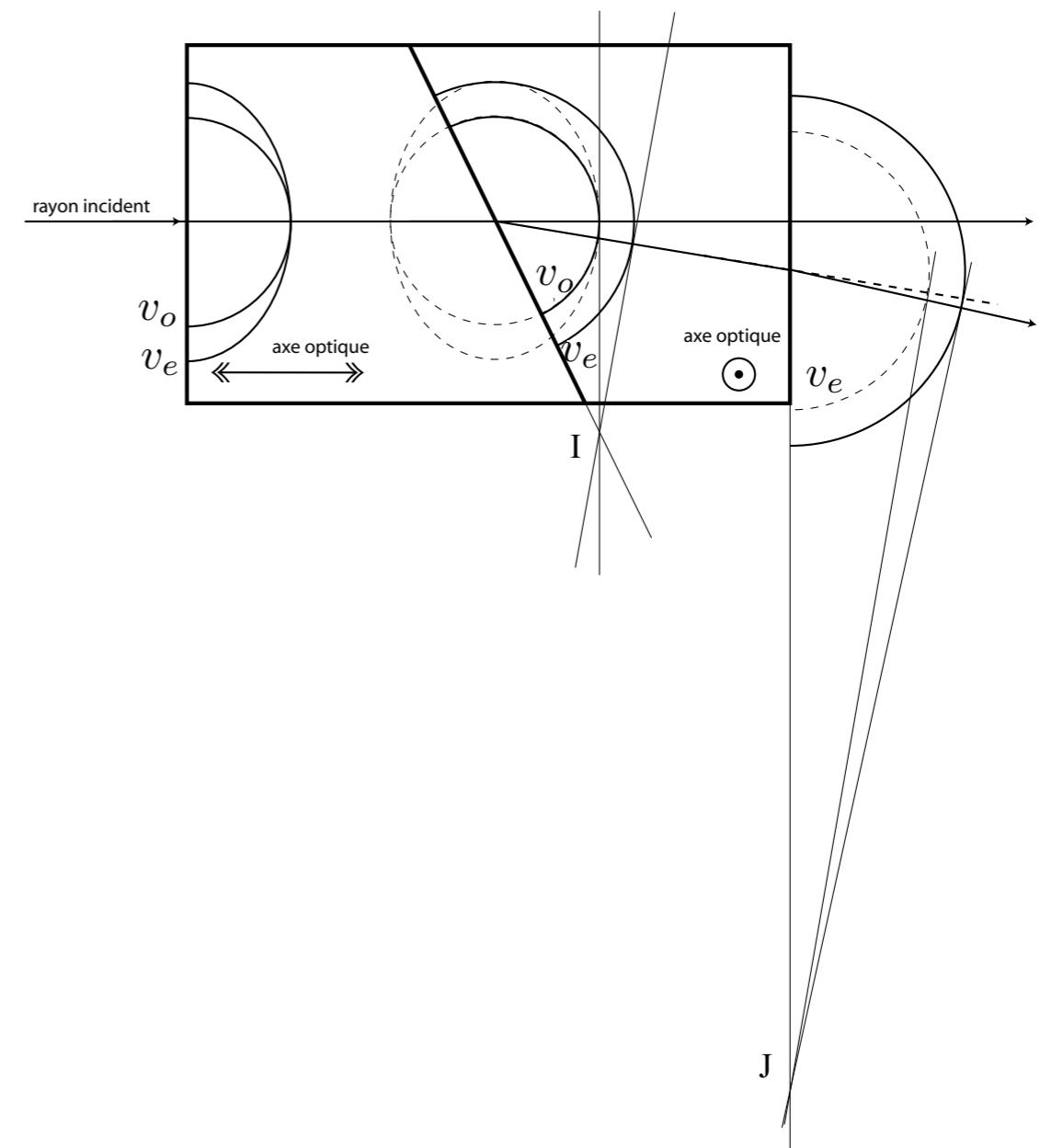
## Lame de spath





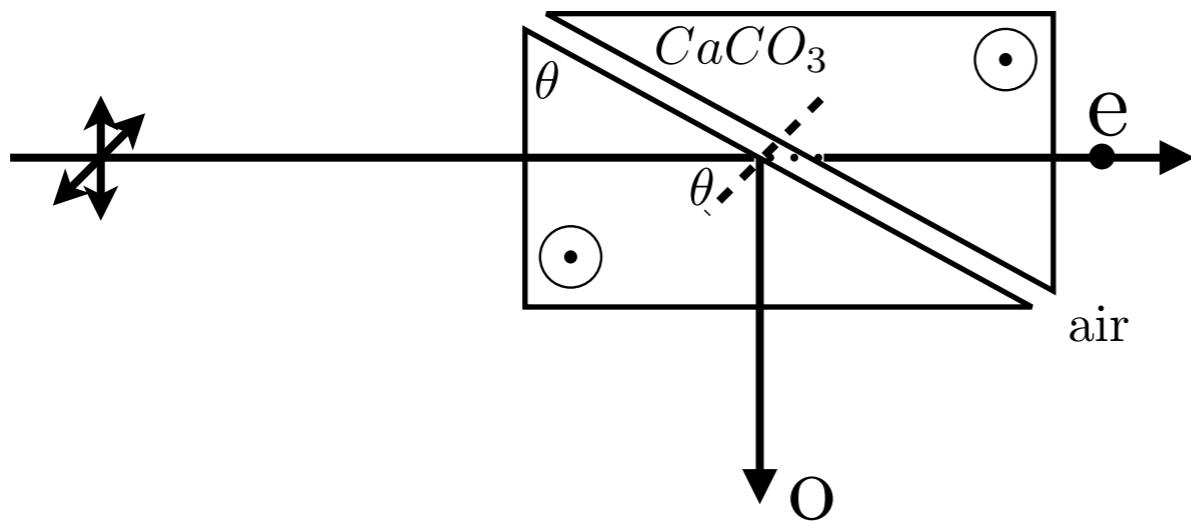
# Quelques exemples

## Prisme de Rochon



# Polariseur biréfringent

$$n_e \sin \theta < 1 < n_o \sin \theta$$



$$n_o = 1,658$$

$$n_e = 1,486$$

A l'interface, l'angle limite de réflexion totale vaut :  $n \sin \theta_{lim} = 1 \sin i_2$

donc  $\theta_{lim} = \arcsin(1/n_{o,e})$      $= 37,08^\circ$  valeur de l'angle limite pour o  
 $= 42,28^\circ$  valeur de l'angle limite pour e

Pour  $\theta \simeq 40^\circ$

onde e transmise (car  $\theta < \theta_{lim}^e$ )

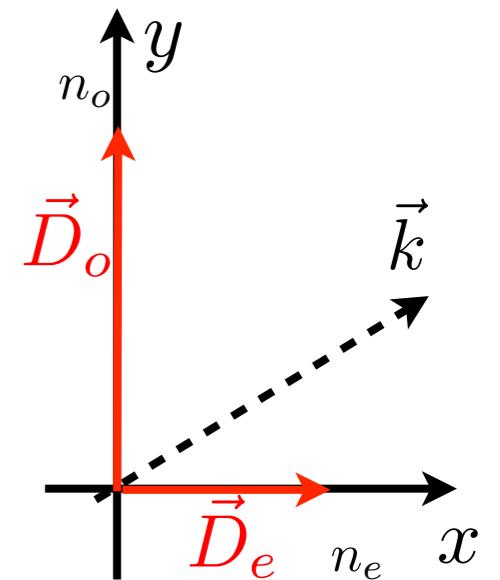
onde o réflexion totale (car  $\theta > \theta_{lim}^o$ )

# Lames cristallines parallèles à l'axe optique

- milieu uniaxe
- incidence normale
- lignes neutres : axe o (Oy), axe e (Ox)

- $\vec{D}_{inc} \parallel \text{ligne neutre}$

⇒ propagation sans modification de l'onde suivant l'indice associé à la ligne neutre



*NB : dans cet exemple, si les indices vus par l'onde sont égaux à  $n_e$  et  $n_o$ , cela signifie que l'axe optique est suivant l'axe (Ox)...*

• Cas  $(\vec{Ox}, \vec{D}_{inc}) = \alpha$

entrée lame

$$\begin{cases} \underline{D}_e = D \cos \alpha e^{-i\omega t} \\ \underline{D}_o = D \sin \alpha e^{-i\omega t} \end{cases}$$

sortie lame

$$\begin{cases} \underline{D}_e = D \cos \alpha e^{-i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} e n_e)} \\ \underline{D}_o = D \sin \alpha e^{-i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} e n_o)} \end{cases}$$

changement origine  
des temps

$$\begin{cases} \underline{D}_e = D \cos \alpha e^{-i\omega t} \\ \underline{D}_o = D \sin \alpha e^{-i(\omega t - \delta)} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{2\pi}{\lambda} e(n_o - n_e)$$

$(\delta > 0 \Rightarrow \text{axe lent sur } (Oy))$

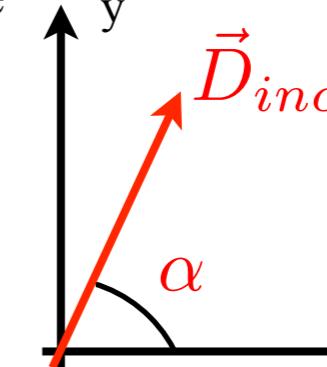
soit en notation réelle,

$$D_e = D \cos \alpha \cos \omega t$$

$$D_o = D \sin \alpha \cos(\omega t - \delta)$$

vibration elliptique

direction de l'onde  
ordinaire



direction de l'onde extraordinaire

$$\frac{D_e^2}{D^2 \cos^2 \alpha} + \frac{D_o^2}{D^2 \sin^2 \alpha} - \frac{2D_e D_o \cos \delta}{D^2 \cos \alpha \sin \alpha} = \sin^2 \delta$$

D'une manière générale, on obtient une polarisation elliptique en sortie d'une lame biréfringente.

L'orientation des axes de l'ellipse et l'ellipticité (définie par le rapport b/a) dépendent :

- du déphasage  $\delta$  de la lame
- de l'orientation des axes de la lame avec la polarisation incidente (angle  $\alpha$ )

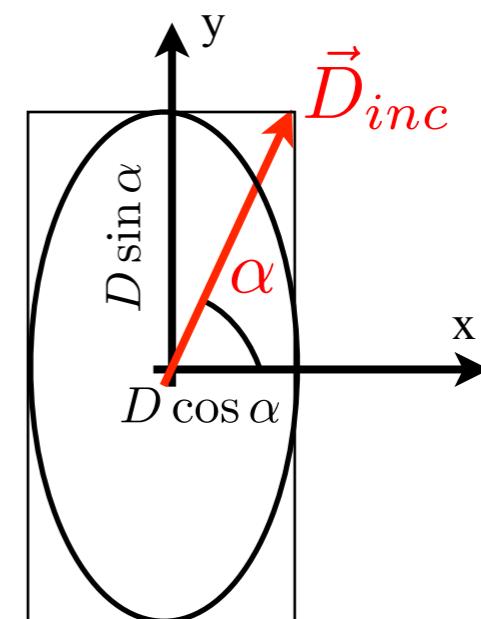
### Cas particuliers

$$\bullet \quad \delta = \pm \frac{\pi}{2}$$

$$e(n_o - n_e) = \pm \frac{\lambda}{4} \quad \text{"lame quart d'onde"}$$

$$\bullet \quad \underline{\alpha \text{ quelconque}} : \quad \frac{D_e^2}{D^2 \cos^2 \alpha} + \frac{D_o^2}{D^2 \sin^2 \alpha} = 1$$

$$\delta = +\frac{\pi}{2} \text{ (AL sur (Oy))} \Rightarrow \text{elliptique gauche}$$



**rectiligne +  $\lambda/4$**

=

**vibration elliptique dont les axes sont les lignes neutres de la lame.**

## Cas particuliers

•  $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{4}$        $e(n_o - n_e) = \pm \frac{\lambda}{4}$       "lame quart d'onde"  
 $\Rightarrow D_e^2 + D_o^2 = D^2/2$       polarisation circulaire

- En général,

$$\begin{cases} \delta = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ e\Delta n = \frac{\lambda}{4} + k\frac{\lambda}{2} \end{cases}$$

**rectiligne +  $\lambda/4$  à  $45^\circ$**   
=   
**circulaire**

•  $\delta = 2k\pi$        $e\Delta n = k\lambda$       "lame onde"       $\Rightarrow \frac{D_o}{D_e} = \tan \alpha$

polarisation émergente : rectiligne et  $\parallel$  à la polarisation incidente

•  $\delta = (2k + 1)\pi$        $e\Delta n = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}$       "lame demi onde"       $\Rightarrow \frac{D_o}{D_e} = -\tan \alpha$

→ polarisation émergente symétrique par rapport aux lignes neutres

**Une lame  $\lambda/2$  fait tourner une polarisation rectiligne**

# Utilisation du formalisme de Jones :

voir par exemple A.Yariv et P. Yeh, *Photonics*, Oxford University Press ou *Polarisation de la lumière* de S. Huard, Masson.

Faisceau incident :

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad \text{où les composantes sont des nombres complexes.}$$

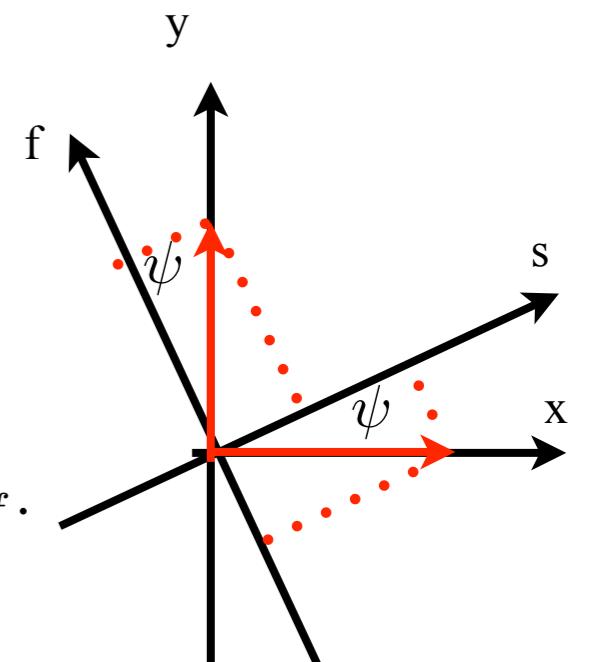
$x$  et  $y$  sont des axes fixes du laboratoire

On décompose le champ incident suivant les 2 axes propres de la lame

$$\begin{bmatrix} V_s \\ V_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \equiv R(\psi) \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix}$$

Dans la lame :

les 2 composantes se propagent suivant les 2 indices propres  $n_s$  et  $n_f$ .



En sortie de lame, on obtient :

$$\begin{bmatrix} V'_s \\ V'_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \exp(-in_s \frac{2\pi}{\lambda} d) & 0 \\ 0 & \exp(-in_f \frac{2\pi}{\lambda} d) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_f \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V'_s \\ V'_f \end{bmatrix} = e^{-i\phi} \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_s \\ V_f \end{bmatrix} \quad \text{avec } \Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_f)d$$

et  $\phi = \frac{1}{2}(n_s + n_f)\frac{2\pi}{\lambda}d$

Puis on recombine les 2 composantes pour les exprimer suivant  $x$  et  $y$  :

coordonnées suivant x et y en sortie de la lame  $\longrightarrow \begin{bmatrix} V'_x \\ V'_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi \\ \sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V'_s \\ V'_f \end{bmatrix}$

soit encore

$$\begin{bmatrix} V'_x \\ V'_y \end{bmatrix} = R(-\psi)W_0R(\psi) \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad R(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix}$$

$$W_0 = e^{-i\phi} \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} & 0 \\ 0 & e^{i\Gamma/2} \end{bmatrix}$$

On obtient la matrice générale  $W = R(-\psi)W_0R(\psi)$  qui décrit une lame biréfringente avec un retard de phase  $\Gamma$  et dont l'axe lent fait un angle  $\psi$  avec l'axe  $x$ :

$$W = \begin{bmatrix} e^{-i\Gamma/2} \cos^2 \psi + e^{i\Gamma/2} \sin^2 \psi & -i \sin(\Gamma/2) \sin(2\psi) \\ -i \sin(\Gamma/2) \sin(2\psi) & e^{-i\Gamma/2} \sin^2 \psi + e^{i\Gamma/2} \cos^2 \psi \end{bmatrix}$$

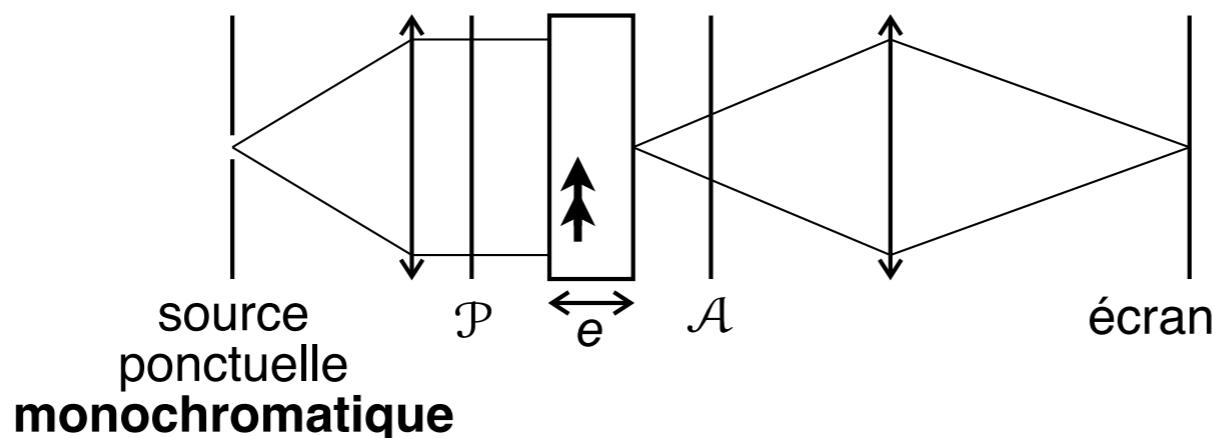
avec  $\Gamma = \frac{2\pi}{\lambda}(n_s - n_f)d$

Retrouver les matrices de Jones des lames quart d'onde et demi onde...

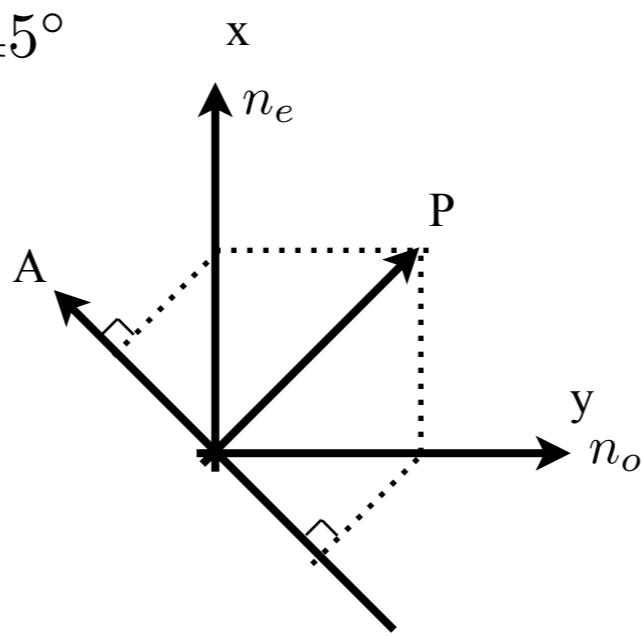
# Interférences en lumière polarisée

Conditions d'observations :

- recouvrement spatial des 2 faisceaux  $\Rightarrow$  lame pas trop épaisse
- polarisations des 2 faisceaux pas orthogonales entre elles  $\Rightarrow$  nécessité de recombiner les 2 polarisations avec un analyseur



- Cas (P, lignes neutres)= $45^\circ$



Dans notre exemple, nous avons une lame biréfringente entre 2 polariseurs parallèles ou croisés.

---

$$P \parallel A, \quad \psi = \pi/4$$

$$W = \begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) & -i \sin(\Gamma/2) \\ -i \sin(\Gamma/2) & \cos(\Gamma/2) \end{bmatrix}$$

Après le polariseur, on a le vecteur de Jones  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

La matrice de Jones d'un polariseur orienté suivant  $x$  s'écrit :  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Après l'analyseur, on obtient  $D_{out} =$

$$I_{P \parallel A} =$$

---

$$P \perp A, \quad \psi = \pi/4$$

Après l'analyseur, on obtient  $D_{out} =$

$$I_{P \perp A} =$$

Dans notre exemple, nous avons une lame biréfringente entre 2 polariseurs parallèles ou croisés.

$$P \parallel A, \quad \psi = \pi/4$$


---

$$W = \begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) & -i \sin(\Gamma/2) \\ -i \sin(\Gamma/2) & \cos(\Gamma/2) \end{bmatrix}$$

Après le polariseur, on a le vecteur de Jones  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

La matrice de Jones d'un polariseur orienté suivant  $x$  s'écrit :  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Après l'analyseur, on obtient  $D_{out} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_{\text{analyseur}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{lame}} W \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{polar. inc}} = \begin{bmatrix} \cos(\Gamma/2) \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{birefringente}}$

Et l'intensité vaut  $I_{P \parallel A} = D_{out}^\dagger D_{out} = \cos^2(\Gamma/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos \Gamma)$

$$P \perp A, \quad \psi = \pi/4$$

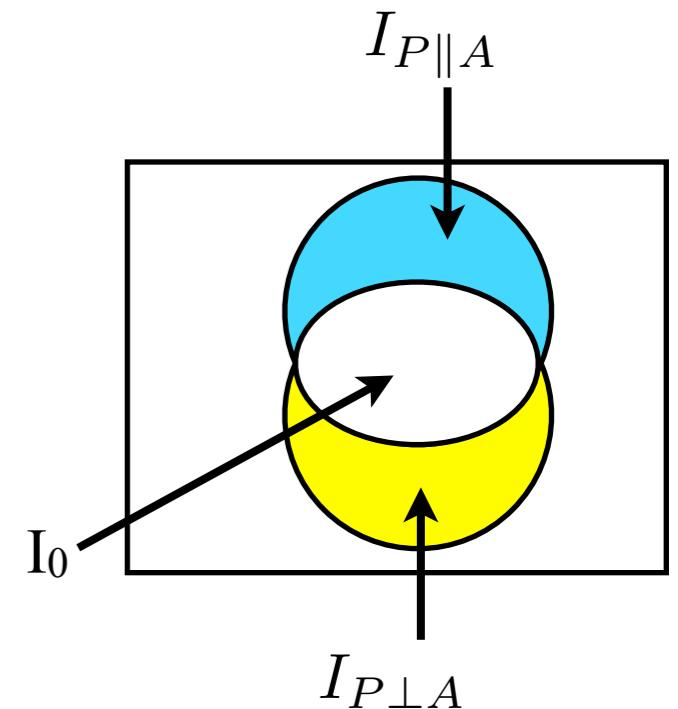
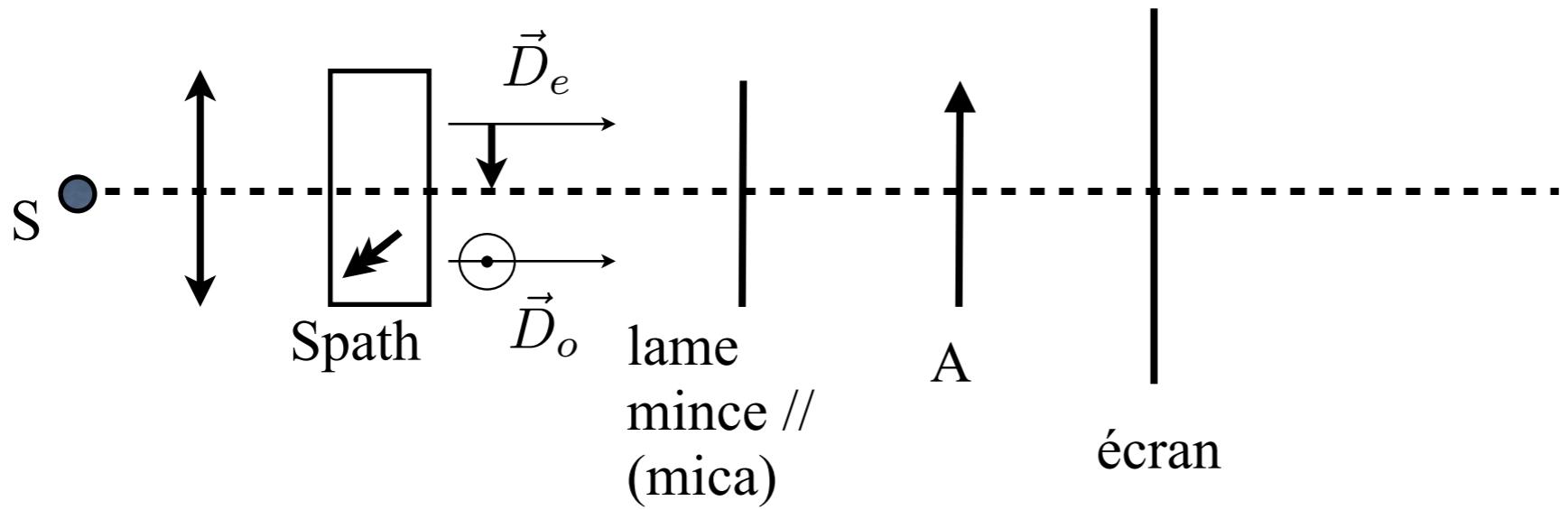

---

Après l'analyseur, on obtient  $D_{out} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{\text{analyseur}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{lame}} W \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}_{\text{polar. inc}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \sin(\Gamma/2) \end{bmatrix}_{\text{birefringente}}$

Et l'intensité vaut  $I_{P \perp A} = D_{out}^\dagger D_{out} = \sin^2(\Gamma/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos \Gamma)$

## Applications

Teintes complémentaires



(lignes neutres mica,  $A=45^\circ$ )

$$I_{P\perp A} = \sin^2(\Gamma/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos \Gamma)$$

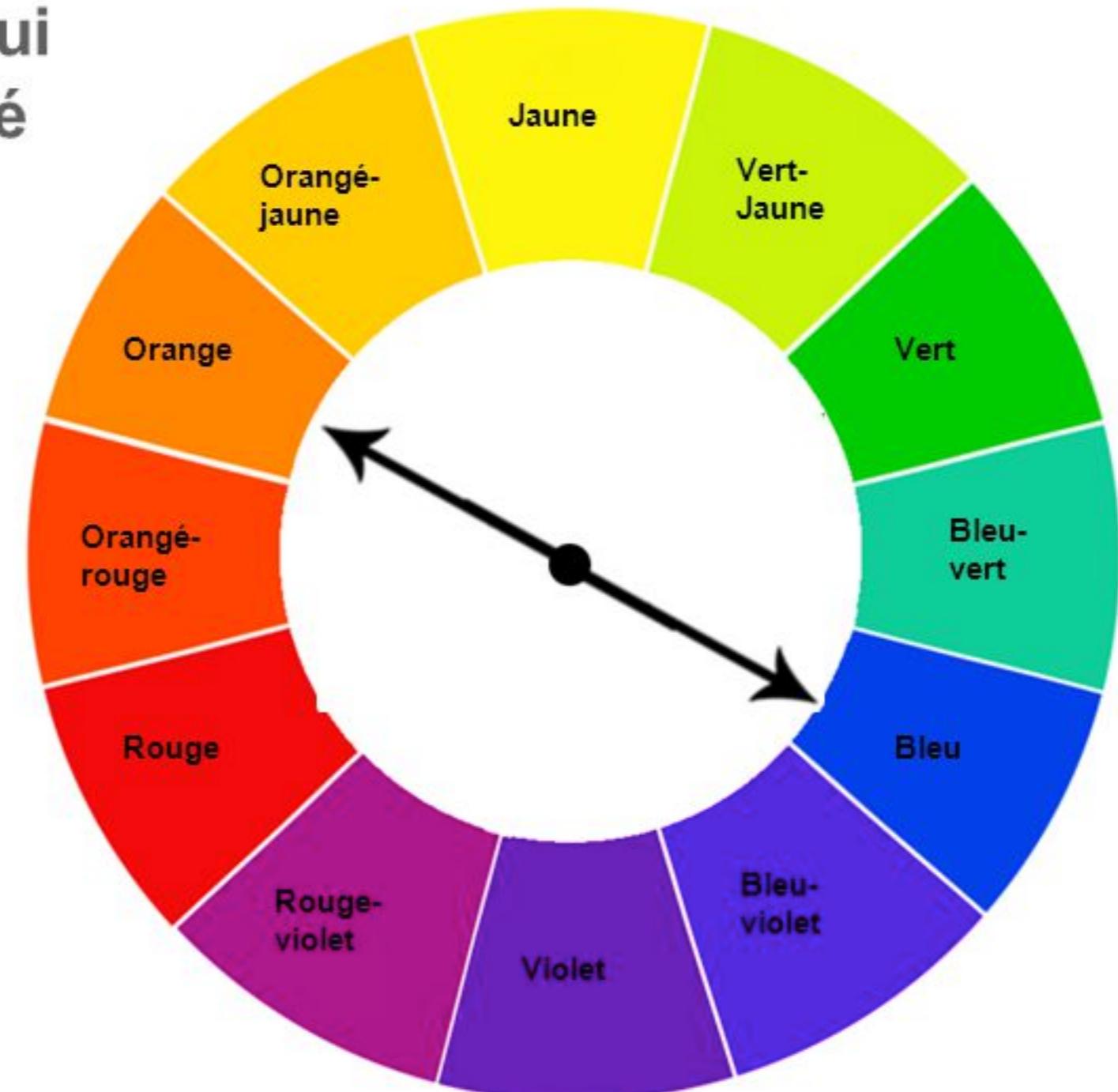
$$I_{P\parallel A} = \cos^2(\Gamma/2) = \frac{1}{2}(1 + \cos \Gamma)$$

$$\left. \begin{array}{l} \Gamma(\lambda_0) = 2\pi \\ \frac{e\Delta n}{\lambda_0} = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} P \parallel A : \lambda_0 \text{ domine} \\ P \perp A : \lambda_0 \text{ manque} \end{array}$$

$\Rightarrow$  teintes complémentaires

# Des couleurs complémentaires:

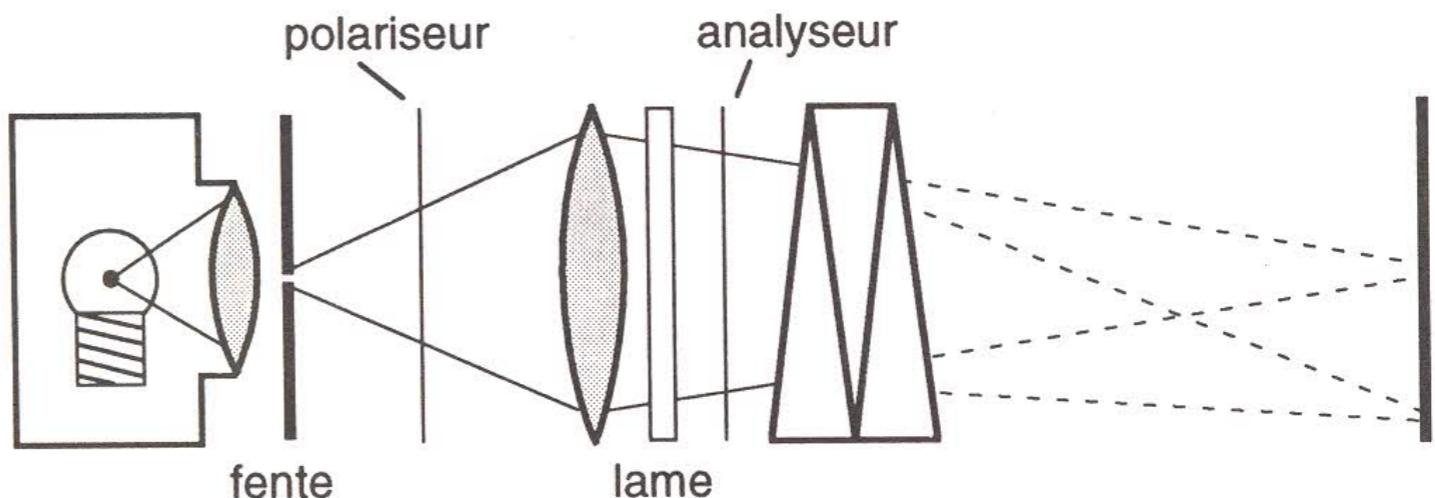
Utiliser deux couleurs qui sont directement opposé dans la roue de couleur



# Mesures de biréfringence

# Mesures de biréfringence

## a) Spectre cannelé



On observe des cannelures car certaines longueur d'onde sont éteintes :

$$P \perp A : \begin{cases} \Gamma = 2m\pi \text{ pour } e\Delta n = m\lambda \\ I_{\perp} = 0 \end{cases} \quad I_{P \perp A} = \sin^2(\Gamma/2) = \frac{1}{2}(1 - \cos \Gamma)$$

Utiliser le prisme à vision directe. On observe p cannelures

Spectre visible : cannelures extrêmes du spectre ( rang 1 et rang m )

$$e\Delta n = m_1 \lambda_{rouge} \quad \text{et} \quad e\Delta n = (m_1 + m - 1) \lambda_{bleu}$$

$$\text{soit} \quad m_1 = \frac{(m - 1)\lambda_{bleu}}{\lambda_{rouge} - \lambda_{bleu}} \quad \text{et} \quad \Delta n = \frac{m - 1}{e} \frac{\lambda_r \lambda_b}{\lambda_r - \lambda_b}$$

En mesurant l'épaisseur de la lame et en mesurant le nombre d'intervalle ( $m-1$ ) entre les cannelures, on peut en déduire la biréfringence  $\Delta n$ .

Attention, penser à calculer l'épaisseur nécessaire pour tourner de  $2\pi$ .

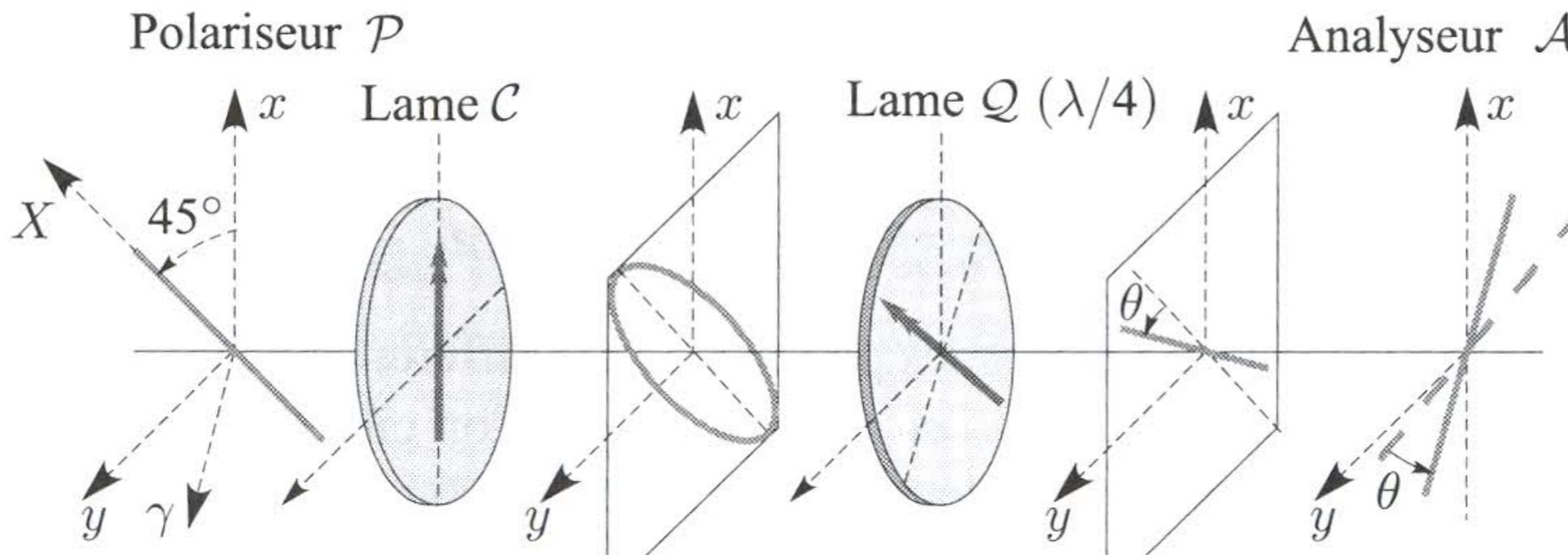
Pour le Quartz, on tourne de  $2\pi$  pour  $e = 62 \mu\text{m}$ .

## b) Méthode de la lame $\lambda/4$ :

### Méthode de mesure

Attention, il faut que l'épaisseur  $e$  soit inférieure à celle qui fait tourner le plan de polarisation de  $2\pi$ .

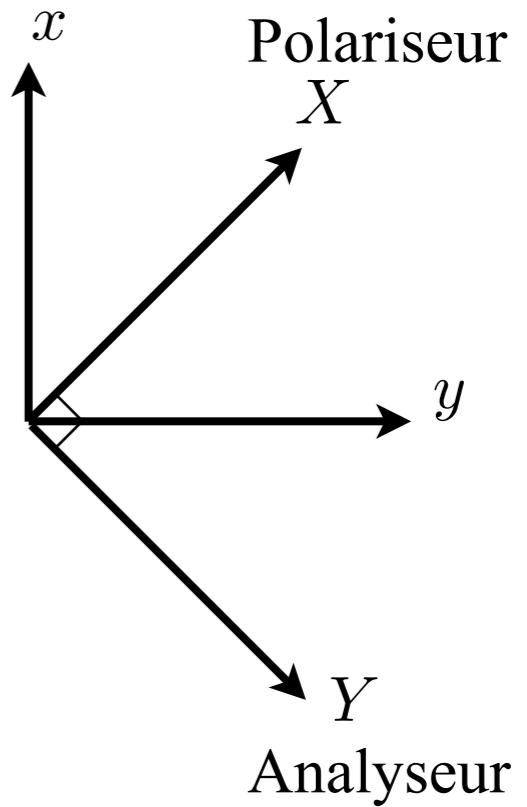
- $P \perp A$
- On place entre  $P$  et  $A$  la lame inconnue (taillée  $\parallel$  a.o)
- On cherche l'extinction en tournant la lame puis on la tourne de  $\pi/4$ .
- On enlève provisoirement la lame pour placer la  $\lambda/4$  suivant les axes de  $P$  et  $A$  (extinction entre  $P$  et  $A$ )
- On remet la lame : il n'y a plus extinction
- On tourne  $A$  d'un angle  $\theta = \delta/2$  pour retrouver l'extinction



b) Méthode de la lame  $\lambda/4$  :

$$P \perp A$$

Lame à faces parallèles. Lignes neutres à  $45^\circ$  de P



sortie lame

$$\begin{cases} D_x = \frac{D}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} \\ D_y = \frac{D}{\sqrt{2}} e^{-i(\omega t - \delta)} \end{cases}$$

On projette de nouveau sur P et A :

$$D_X = \frac{D_x + D_y}{\sqrt{2}} = \frac{D}{2} e^{-i\omega t} (1 + e^{i\delta}) = D e^{i\frac{\delta}{2}} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{-i\omega t}$$

$$D_Y = \frac{-D_x + D_y}{\sqrt{2}} = \frac{D}{2} e^{-i\omega t} (-1 + e^{i\delta}) = D \cancel{i} e^{i\frac{\delta}{2}} \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{-i\omega t}$$

On obtient une vibration rectiligne si on multiplie par  $i$ , quelque soit  $\delta$

Obtention d'une vibration rectiligne :

⇒ utilisation d'une lame quart d'onde avec ses axes propres suivant  $P$  et  $A$

⇒ multiplication par  $e^{\pm i\pi/2} = \pm i$

Considérons que l'on place l'axe lent de la  $\lambda/4$  suivant ( $OY$ ) (déphasage  $= +\pi/2$ ):

On obtient une vibration rectiligne d'angle  $\delta/2$  par rapport à  $P$

$$D_X = D \cos(\delta/2) \cos(\omega t')$$

$$D_Y = -D \sin(\delta/2) \cos(\omega t')$$

Cas  $\delta \in [0, \pi]$  :

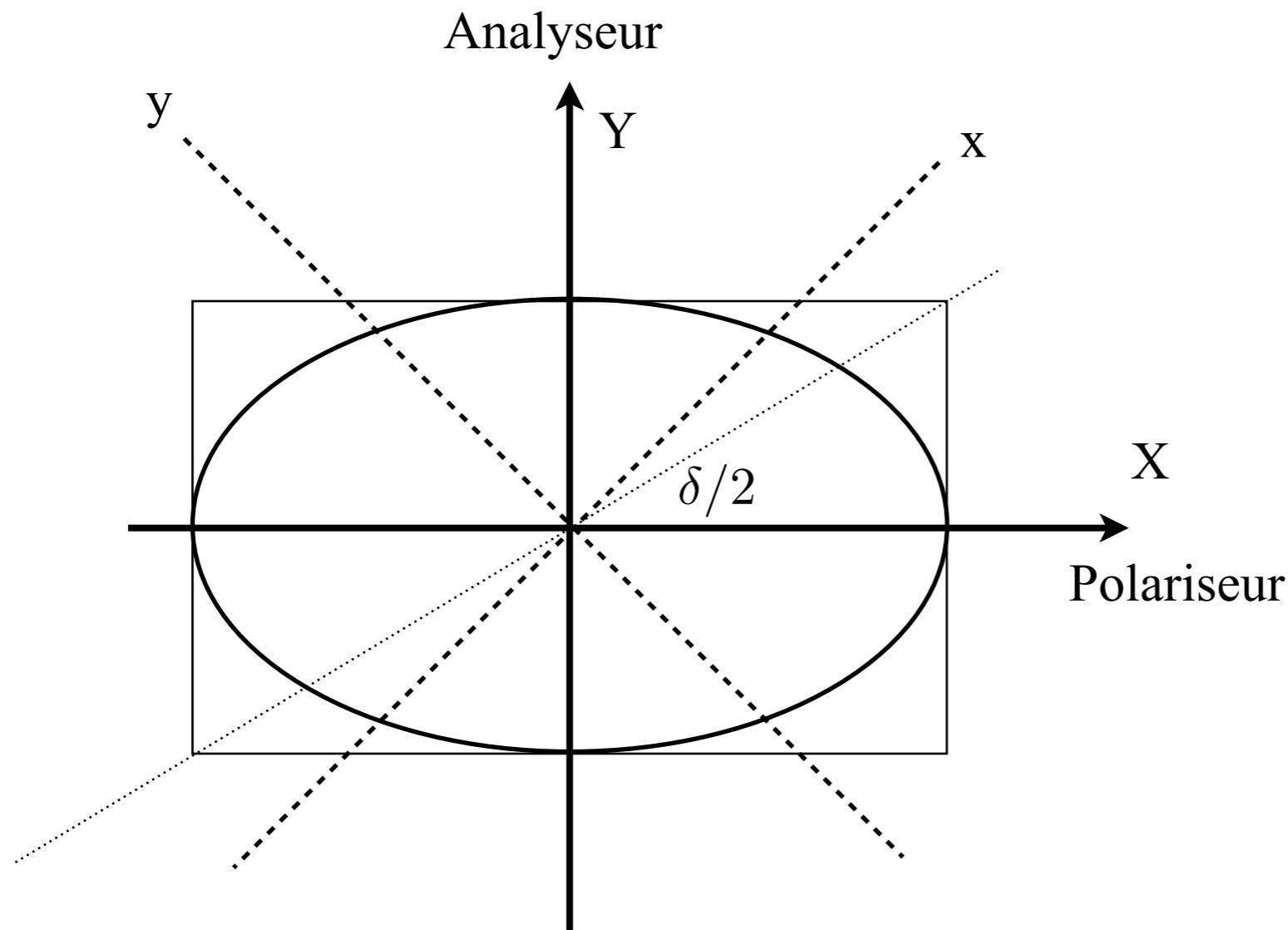
- Ellipse gauche avant introduction de la  $\lambda/4$
- Rotation de l'analyseur d'un angle  $\theta = -\delta/2$  pour éteindre la vibration lumineuse

Cas  $\delta \in [-\pi, 0]$  :

- Ellipse droite avant introduction de la  $\lambda/4$
- Rotation de l'analyseur d'un angle  $\theta = -\delta/2$  pour éteindre la vibration lumineuse

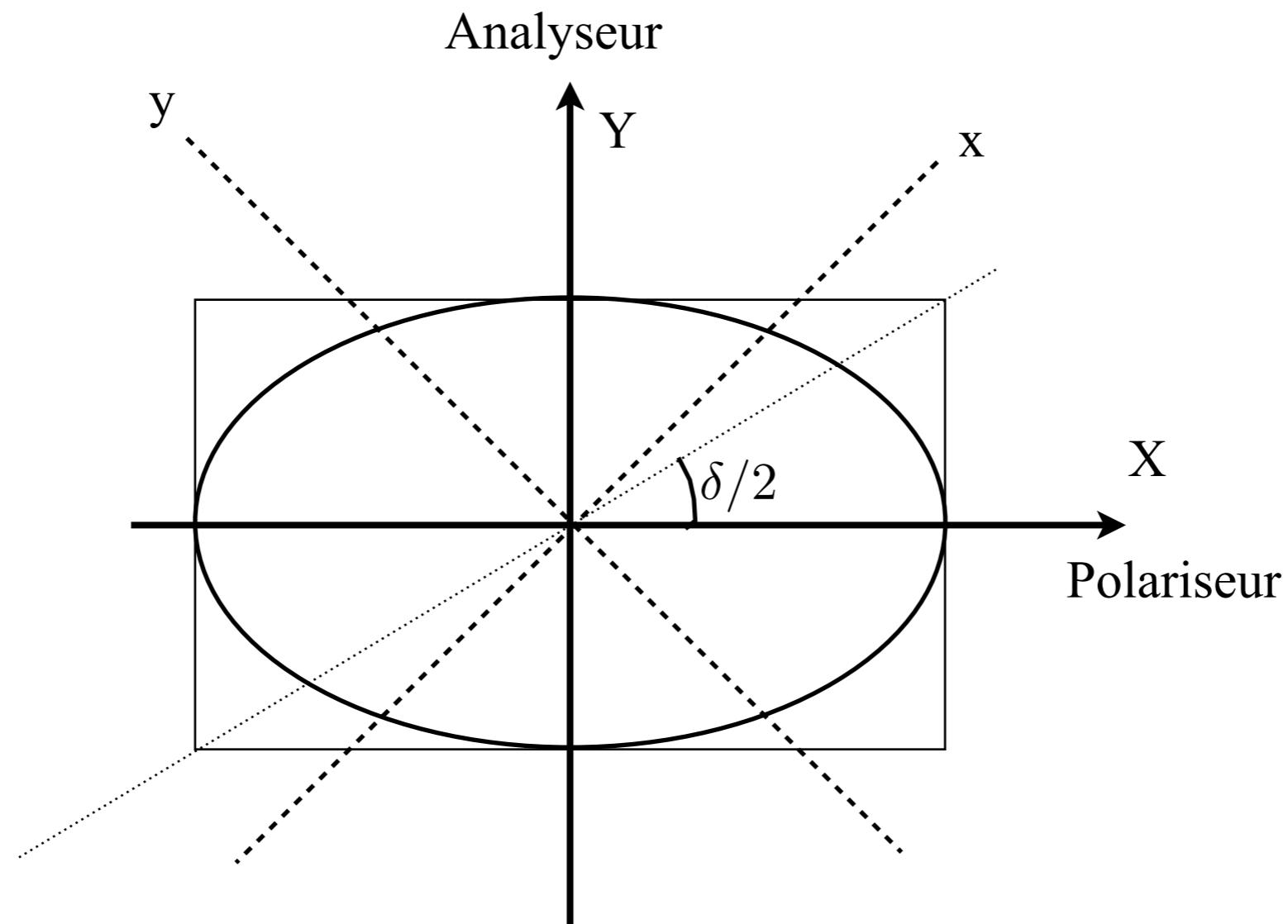
Partie réelle  $\Rightarrow$  équation d'une ellipse d'axes  $(OX)$  et  $(OY)$  ie ceux des polariseurs  $P$  et  $A$  :

$$\left( \frac{D_X}{D \cos(\delta/2)} \right)^2 + \left( \frac{D_Y}{D \sin(\delta/2)} \right)^2 = 1$$



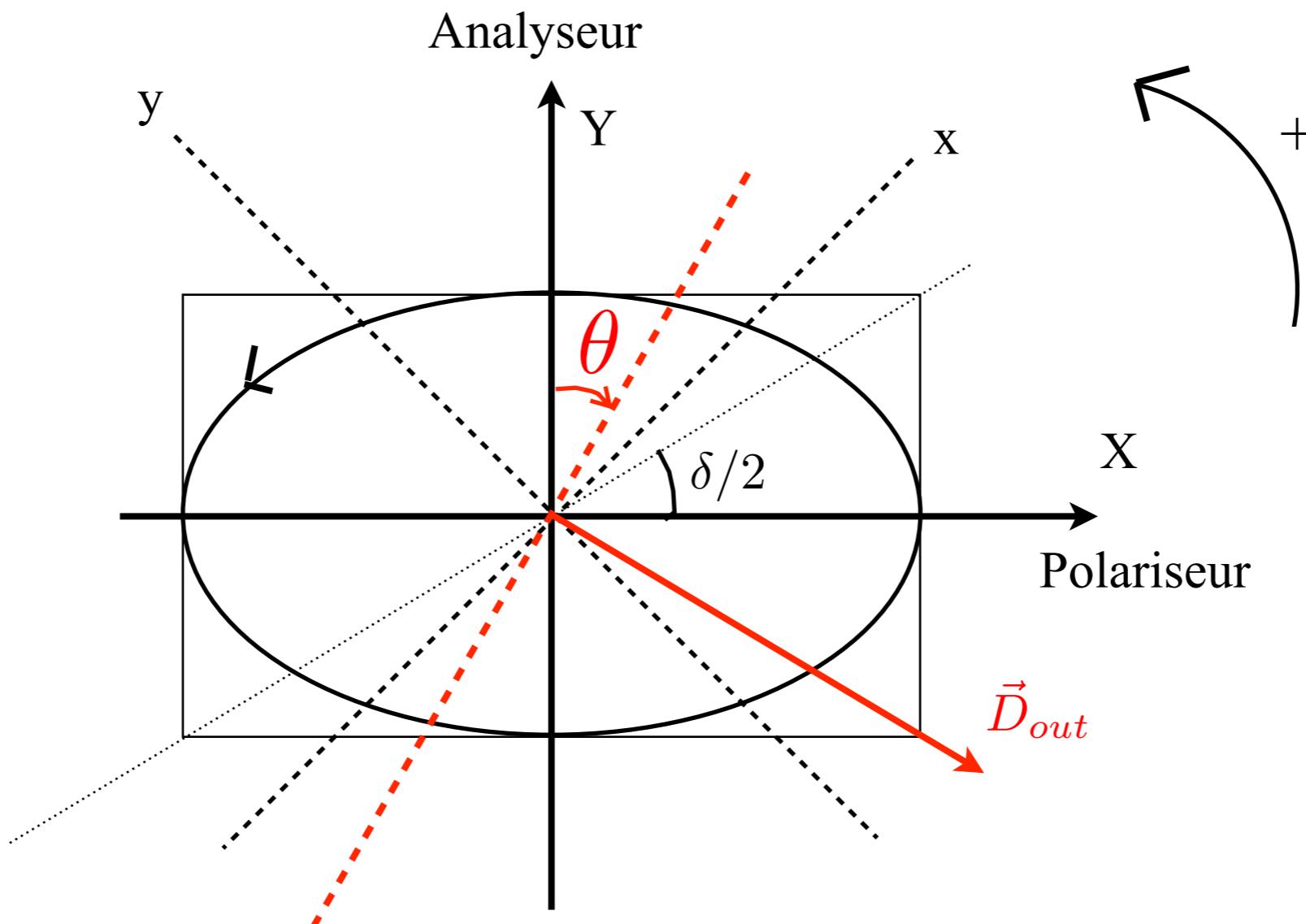
Si  $\delta \in [0, \pi]$ , l'ellipse est gauche

Si  $\delta \in [-\pi, 0]$ , l'ellipse est droite



Si  $\delta \in [0, \pi]$ , l'ellipse est gauche

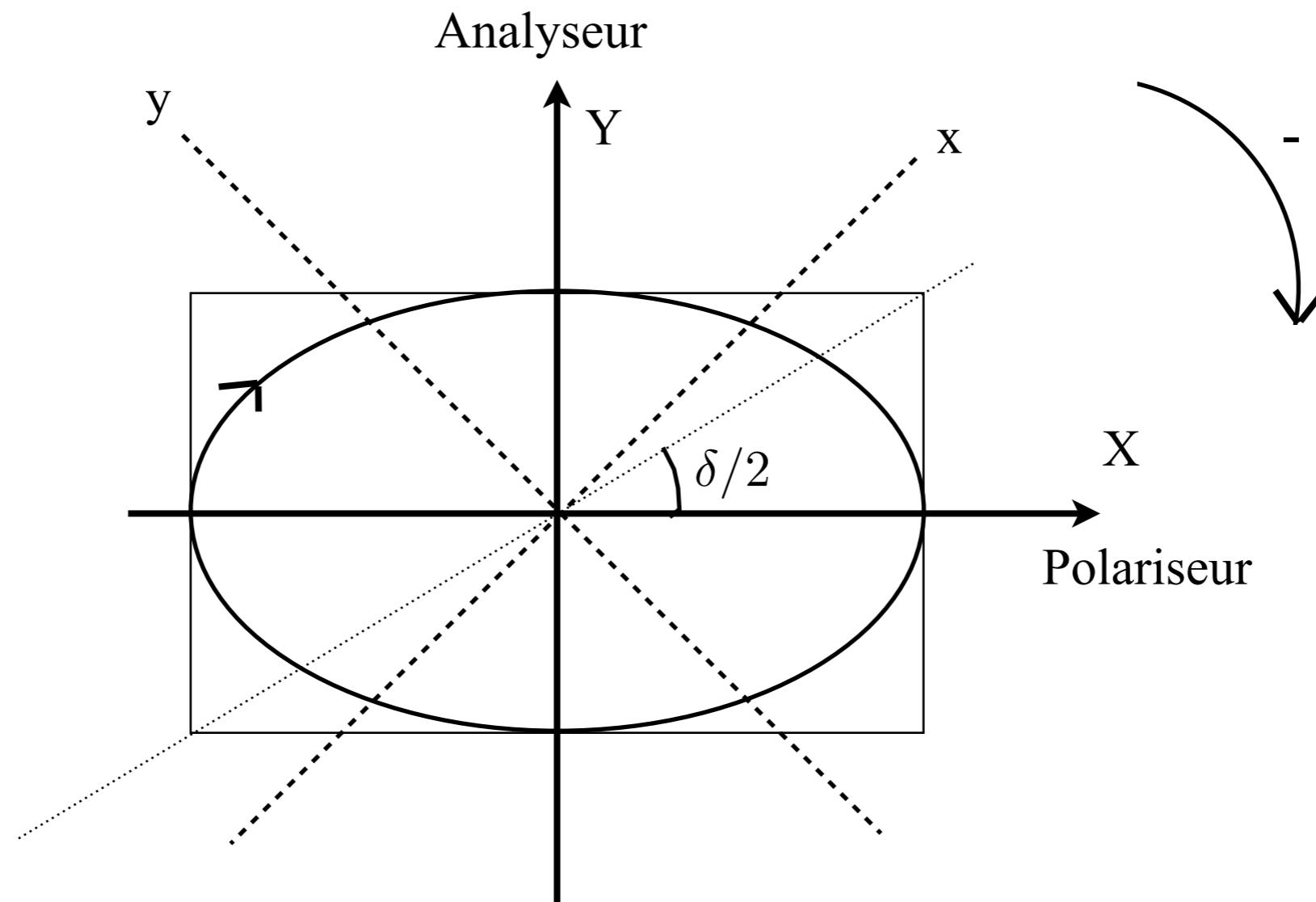
Si  $\delta \in [-\pi, 0]$ , l'ellipse est droite



Cas  $\delta \in [0, \pi]$  : ellipse gauche,  $\theta < 0$

On tourne l'analyseur vers la droite pour éteindre la lumière  
Attention, on mesure  $\delta$  à  $k\pi$  près avec cette méthode....

Pour s'entraîner...



Cas  $\delta \in [-\pi, 0]$  : ellipse droite

On tourne l'analyseur vers la

pour éteindre la lumière

Attention, si on ne met pas les axes neutres de la lame à  $45^\circ$  du polariseur, on obtient une ellipse dont les axes ont une orientation qui dépend du retard de phase  $\delta$  (voir l'équation générale d'une onde elliptique).

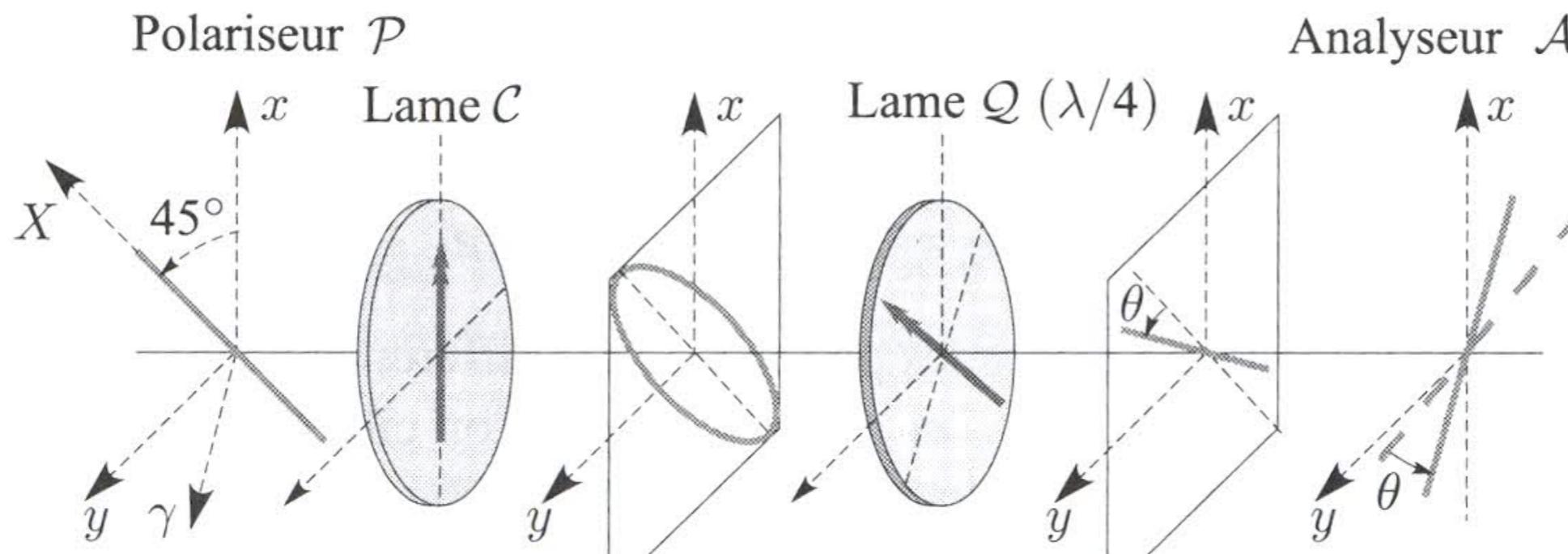
Le fait de se mettre à  $45^\circ$  permet de séparer le problème des axes de l'ellipse et celui de l'ellipticité que l'on souhaite mesurer. En effet, l'angle étant de  $45^\circ$ , les axes de l'ellipses sont suivant P et A quelque soit le retard de phase  $\delta$  introduit par la lame.

Toutefois, on peut ne pas mettre les axes à  $45^\circ$ . Dans ce cas, il faudra mettre l'analyseur suivant les axes de l'ellipse en tournant ce dernier pour maximiser ou minimiser l'intensité derrière lui. En revanche les conclusions sont différentes en ce qui concerne la mesure de l'ellipticité.

## Méthode de mesure

- $P \perp A$
- On place entre  $P$  et  $A$  la lame inconnue (taillée  $\parallel$  a.o)
- On cherche l'extinction puis on le tourne de  $\pi/4$ .
- On enlève provisoirement la lame pour placer la  $\lambda/4$  suivant les axes de  $P$  et  $A$  (extinction entre  $P$  et  $A$ )
- On remet la lame : il n'y a plus extinction
- On tourne  $A$  d'un angle  $\theta = \delta/2$  pour retrouver l'extinction

Attention, on mesure  $\delta$  à  $k\pi$  près avec cette méthode....



Pbe : dans le montage on ne se met pas à  $45^\circ$  de P et A

Qu'obtient-on ?

On aligne une lambda sur 4 avec P et A puis on la tourne d'un petit angle pour faire une elliptique. On obtient sur les axes x et y de la lambda sur 4 :

$$Dx = D \cos \alpha$$

$$Dy = D \sin \alpha e^{i\delta}$$

DANS CE CAS PRECIS, avec une lambda sur 4, delta vaut  $\pi/2$ . Du coup nous avons :

$$Dx = D \cos \alpha$$

$$Dy = Di \sin \alpha$$

Donc dans les axes de la lambda sur 4 on a une ellipse dont le grand axe est orienté de alpha avec l'axe du polariseur et dont l'ellipticité e est égale à  $b/a=\tan(\alpha)$ .

Ensuite on tourne l'analyseur pour se mettre suivant les axes précédents. On place l'analyseur suivant le petit ou le grand axe de l'ellipse.

On place une seconde lambda sur 4 avec ses axes suivant x et y pour transformer la vibration elliptique en rectiligne (on déphase de  $\pi/2$  les 2 composantes).

En sortie, on obtient une vibration rectiligne orientée d'un angle  $\pm\alpha$  avec l'axe x.

On tourne l'analyseur de  $\pm\alpha$  pour trouver l'ellipticité.

# Biréfringence circulaire

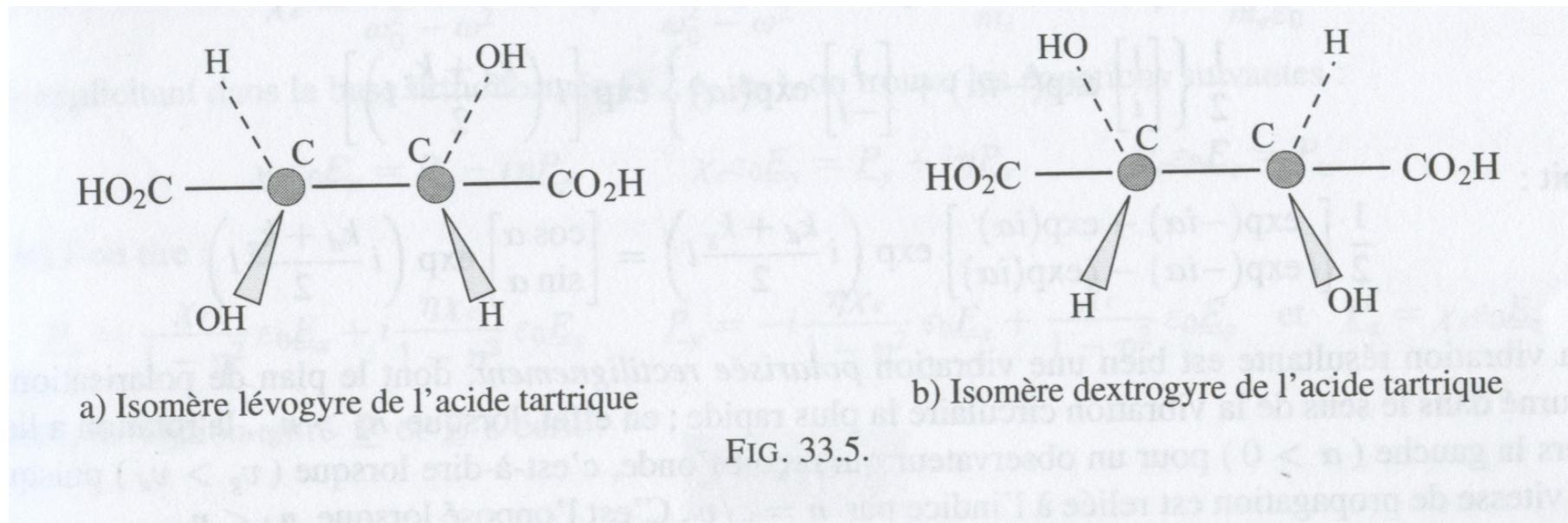
Propriétés qu'ont certains corps de faire tourner la polarisation

On parle d'activité optique, de pouvoir rotatoire, de biréfringence circulaire

exemples :

Quartz ( $\vec{k} \parallel$  a.o)      Groupement de  $SiO_2$  en hélice gauche ou droite

Molécules organiques (saccharose, acide tartrique...)



En regardant dans la direction de la source :



levogyre



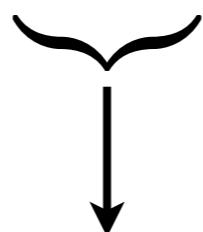
dextrogyre

Il existe dans certains matériaux une dispersion spatiale

$\vec{D}(\vec{r}, t)$  dépend de  $\vec{E}$  en des points  $\vec{r}'$  voisins de  $\vec{r}$

On peut effectuer un DL de  $\vec{D}(E)$  :

$$D_j = \epsilon_0 \left( [\epsilon_r]_{jl} E_l + \gamma_{jlm} \frac{\partial E_L}{\partial x_m} + \dots \right)$$



dispersion spatiale

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \longrightarrow i\epsilon_0 k_m \gamma_{jlm} E_l$$

$[\gamma]$  est un tenseur d'ordre 3.

C'est un tenseur intrinsèque du matériau et des ses propriétés cristallines

Apparition de termes non diagonaux dans le tenseur permittivité diélectrique.

On a  $[\epsilon] = \epsilon_0 [\epsilon_r] = \epsilon_0 (1 + [\chi])$ , avec

$$\chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}$$

tenseur susceptibilité électrique

Propagation d'une onde avec  $\vec{k} \parallel (Oz)$

$$\vec{k} \wedge (\vec{k} \wedge \vec{E}) = \vec{k}(\vec{k} \cdot \vec{E}) - k^2 \vec{E} = -\mu_0 \omega^2 \vec{D}$$

$$(\vec{k} \cdot \vec{E} = 0) \quad ? \quad \chi = \begin{bmatrix} \chi_{11} & i\chi_{12} & 0 \\ -i\chi_{12} & \chi_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{33} \end{bmatrix}$$

d'où :  $\mu_0 \omega^2 \vec{D} = k^2 \vec{E}$       avec     $\vec{D} = [\epsilon] \vec{E} = \epsilon_0 [\epsilon_r] \vec{E} = \epsilon_0 (1 + [\chi]) \vec{E}$

d'où l'équation aux valeurs propres :  $([\epsilon_r] - n^2) \vec{E} = \vec{0}$

Cette équation admet des solutions non nulles si son déterminant est nul soit si :  $n^2 = 1 + \chi_{11} \pm \chi_{12}$

On reporte ensuite ces valeurs dans l'équation précédente et on obtient :  $E_x = \pm i E_y$

$\Rightarrow$  L'onde est donc polarisée circulairement en sortie du milieu

$$n_d = \sqrt{1 + \chi_{11} + \chi_{12}}$$

$$E_x = +i E_y$$

$$n_g = \sqrt{1 + \chi_{11} - \chi_{12}}$$

$$E_x = -i E_y$$

Ce sont les 2 états propres de polarisation qui se propagent dans le milieu aux vitesses  $v_{g,d} = \frac{c}{n_{g,d}}$

Généralement,  $\chi_{12} \ll (1 + \chi_{11})$ , donc  $n_d - n_g \simeq \frac{\chi_{12}}{\sqrt{1 + \chi_{11}}} \simeq \frac{\chi_{12}}{n_0}$        $\chi_{12} \propto \frac{1}{\lambda}$

## Action sur une polarisation rectiligne

On considère une polarisation incidente selon (Ox) :  $\vec{E}_{inc} = E e^{-i\omega t} \vec{e}_x$

On décompose cette polarisation suivant les 2 polarisations propres (circulaires d et g) :

$$\vec{E}_{inc} = E e^{-i\omega t} \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{e}_g + \vec{e}_d)$$

Après la lame :  $\vec{E}^{out} = \frac{E}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t} \left( \vec{e}_g e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} n_g e} + \vec{e}_d e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} n_d e} \right)$

$$\vec{E}^{out} = \frac{E}{2} e^{-i\omega t} \left( (\vec{e}_x + i\vec{e}_y) e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} n_g e} + (\vec{e}_x - i\vec{e}_y) e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} n_d e} \right)$$

$$\begin{cases} E_x^{out} = E e^{-i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} (n_g + n_d)e/2} \cos(\delta/2) \\ E_y^{out} = -E e^{-i\omega t} e^{i\frac{2\pi}{\lambda_0} (n_g + n_d)e/2} \sin(\delta/2) \end{cases} \quad \text{avec } \delta = \frac{2\pi}{\lambda} (n_g - n_d) e$$

la polarisation a donc tourné d'un angle  $\theta = \frac{\pi}{\lambda} (n_g - n_d) e \propto \frac{1}{\lambda^2}$

dans le sens de la vibration circulaire la plus rapide

Le bleu tourne plus que le rouge

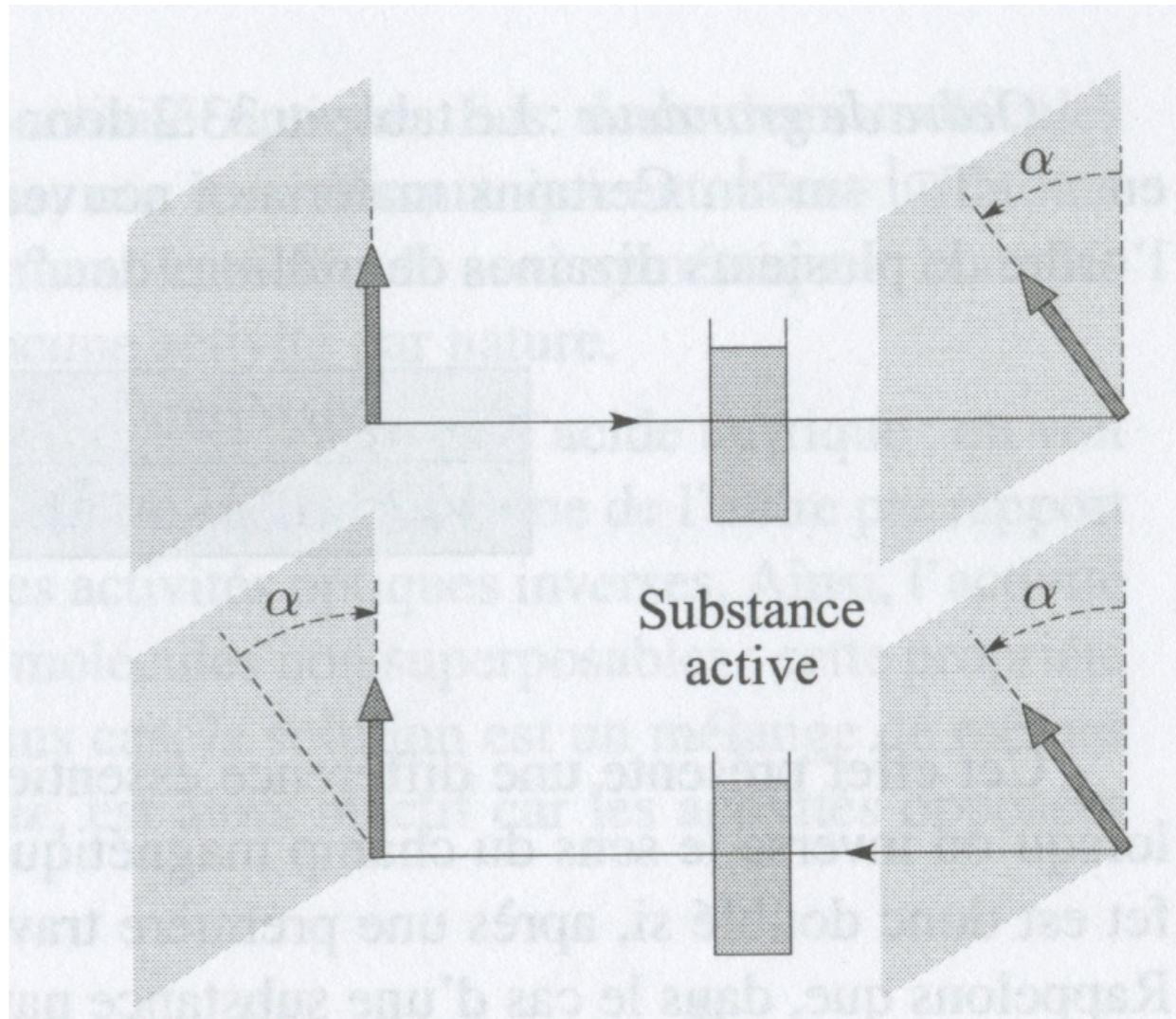
On retrouve les lois expérimentales de Biot

Si  $n_g > n_d$  : le milieu est dextrogyre

Si  $n_g < n_d$  : le milieu est lévogyre

Biréfringence circulaire :  $\Delta n_c = (n_g - n_d)$

$$\text{Pouvoir rotatoire : } \rho = \frac{\pi \Delta n_c}{\lambda_0}$$



L'angle de rotation suit une loi approchée de type  $\theta \propto 1/\lambda^2$

Le sens de rotation ne dépend pas du sens de propagation de la lumière  
(caractéristique de l'activité optique naturelle)

exemples :

Quartz  $\perp$ , épaisseur  $e$  : rotation d'un angle  $\theta = \rho e$

$$\Delta n_c = 7.1 \times 10^{-5} \text{ @ } 589 \text{ nm} \quad (\text{effet en } 1/\lambda^2)$$

La rotation reste inférieure à  $\pi$  si  $e < 8,3 \text{ mm}$

Mesure de la biréfringence circulaire.

---

Spectre cannelé : lumière blanche,  $P \perp A$ ,  $\vec{k} \parallel \text{a.o}$

$$\text{cannelures pour } \frac{\pi e}{\lambda} \Delta n_c = m\pi$$

## Teinte *lie de vin*

---

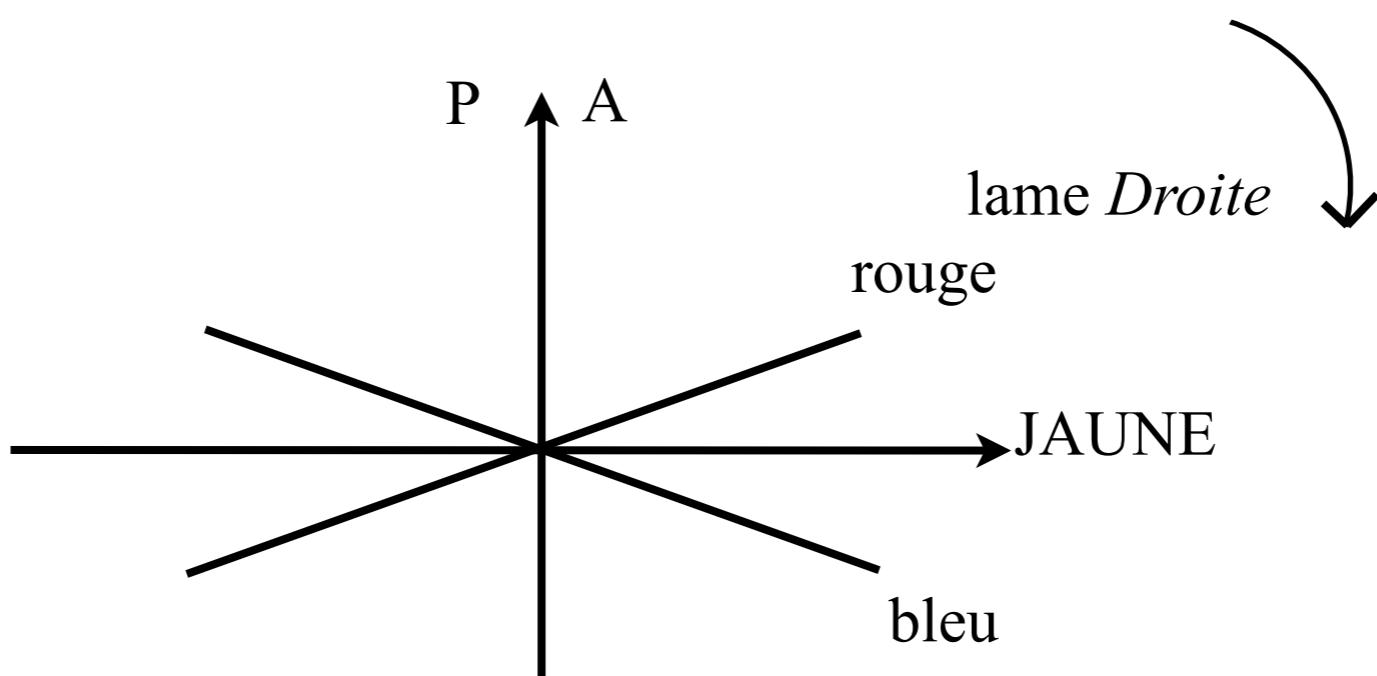
$$P \parallel A, e = 3,75 \text{ mm}, \lambda_0 = 560 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow \theta(\lambda_0) = \pi/2$$

donc la lame éteint le jaune ( $\lambda_0$ ) et la coloration qui apparaît s'appelle teinte *teinte lie de vin*

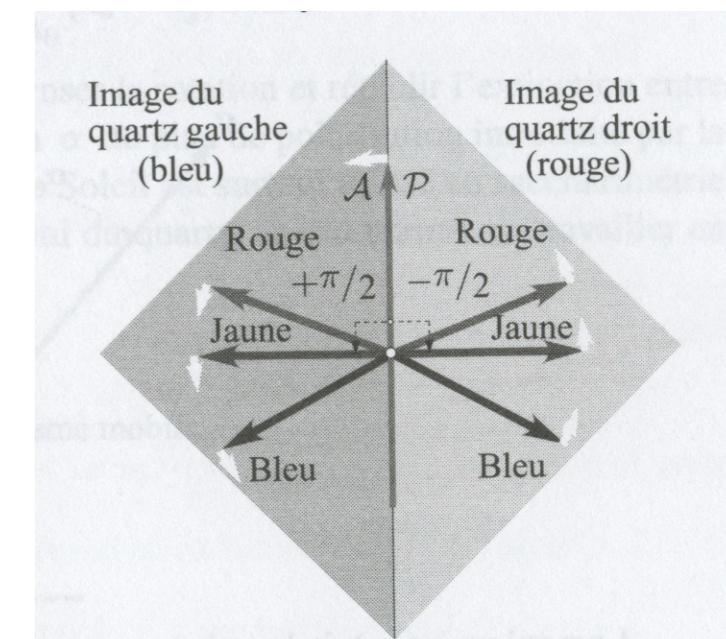
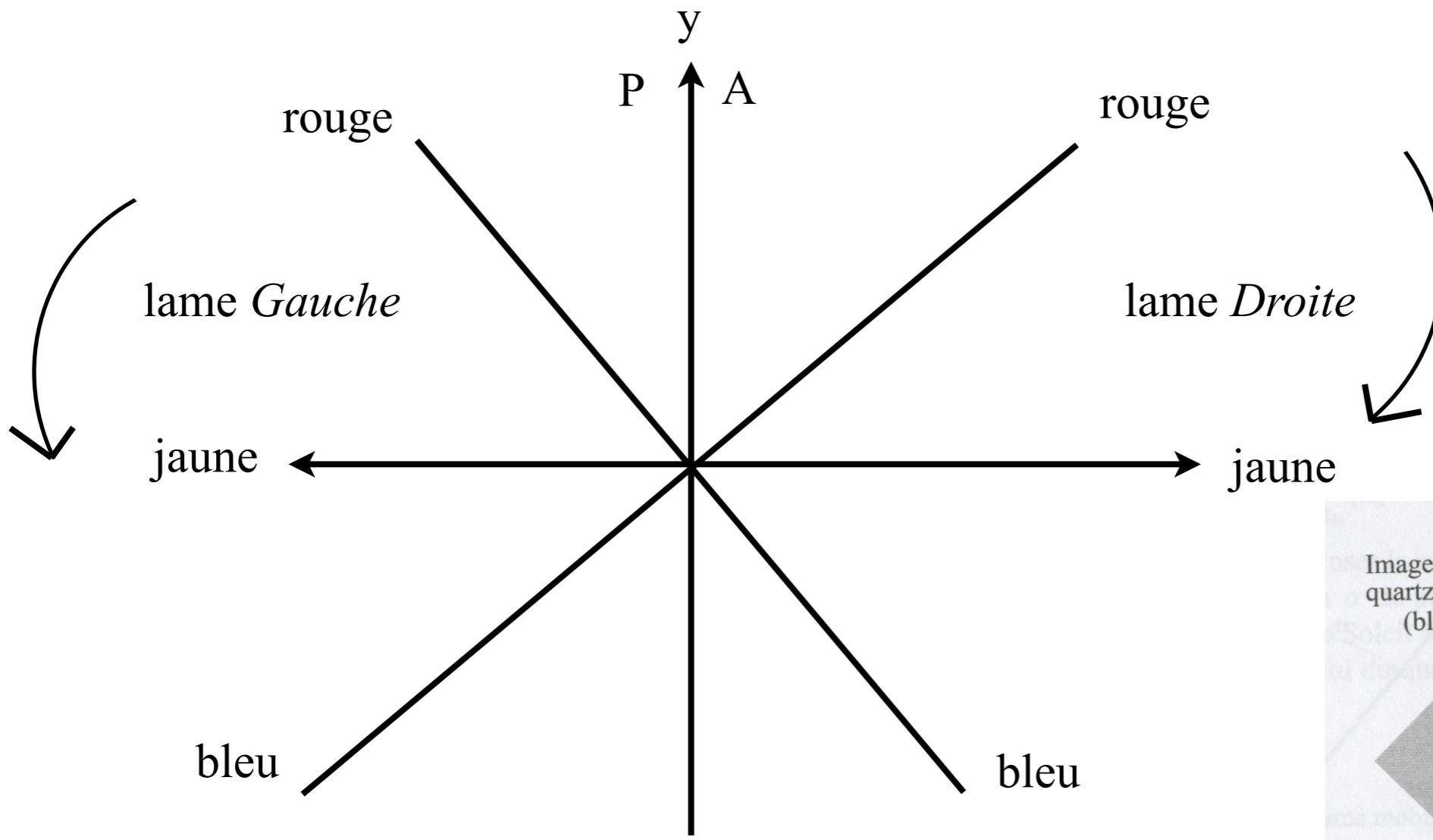
Détermination du sens d'une lame :

- On part de la teinte lie de vin pour une lame quelconque (tourner A pour la trouver)
- On tourne A vers la droite.
- Si la teinte vire au rouge, la lame est *Droite*. Si elle vire au bleu, la lame est *gauche*



Biquartz de Soleil : sert à pointer précisément une vibration retiligne.

- 2 demi disques de quartz, l'un droite, l'autre gauche entre P et A parallèles.
- épaisseur  $e=3,75$  mm (teinte *lie de vin*)
- On tourne A et on compare les 2 demi disques pour avoir la même coloration des 2 côtés. Lorsque c'est le cas, l'analyseur est parfaitement aligné avec la polarisation incidente.



# Effet Faraday

exemple TRES classique...voir par exemple Perez Optique

- Milieu isotrope + champ magnétique  $\vec{B}$
- Modèle de l'électron élastiquement lié

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - e\vec{E} - e \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B} \right)$$

$$\vec{P} = -Ne\vec{r} = \epsilon_0[\chi]\vec{E}$$

Onde incidente :  $\vec{E} = \vec{E}_{inc} e^{-i\omega t}$

$$\Rightarrow \text{Tenseur susceptibilité : } \chi_{11} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \right] \quad \text{avec } \omega_c = \frac{eB}{m}$$

$$\chi_{33} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$

$$\chi_{12} = \frac{Ne^2}{m\epsilon_0} \left[ \frac{\omega_c \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2\omega_c^2} \right] \neq 0 \text{ si } B \neq 0$$

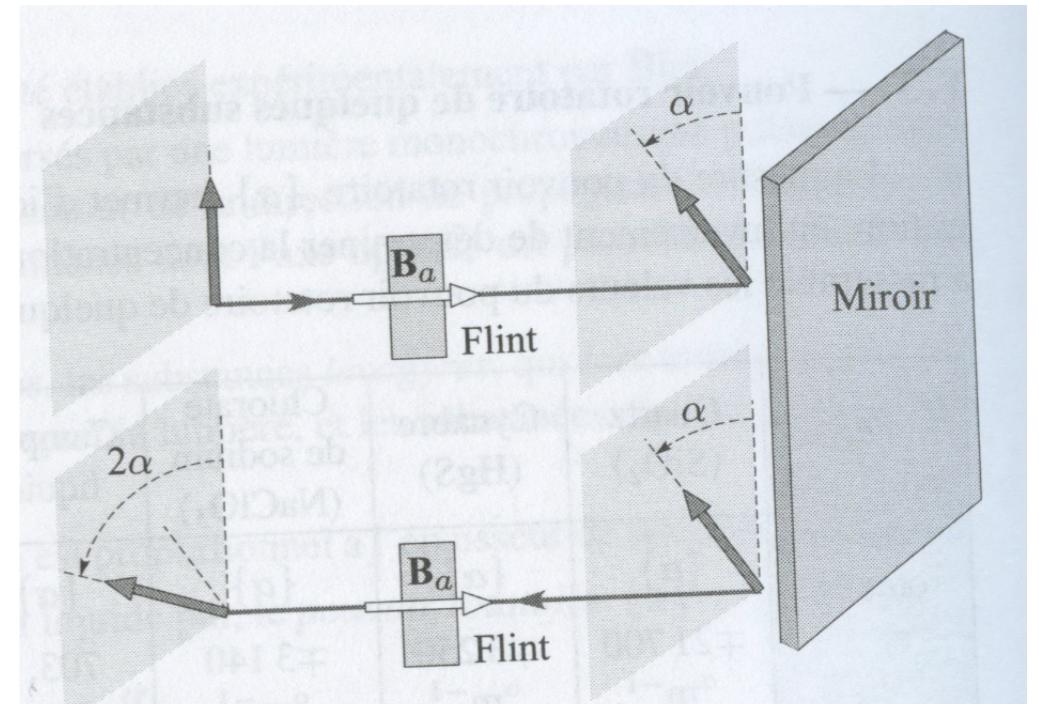
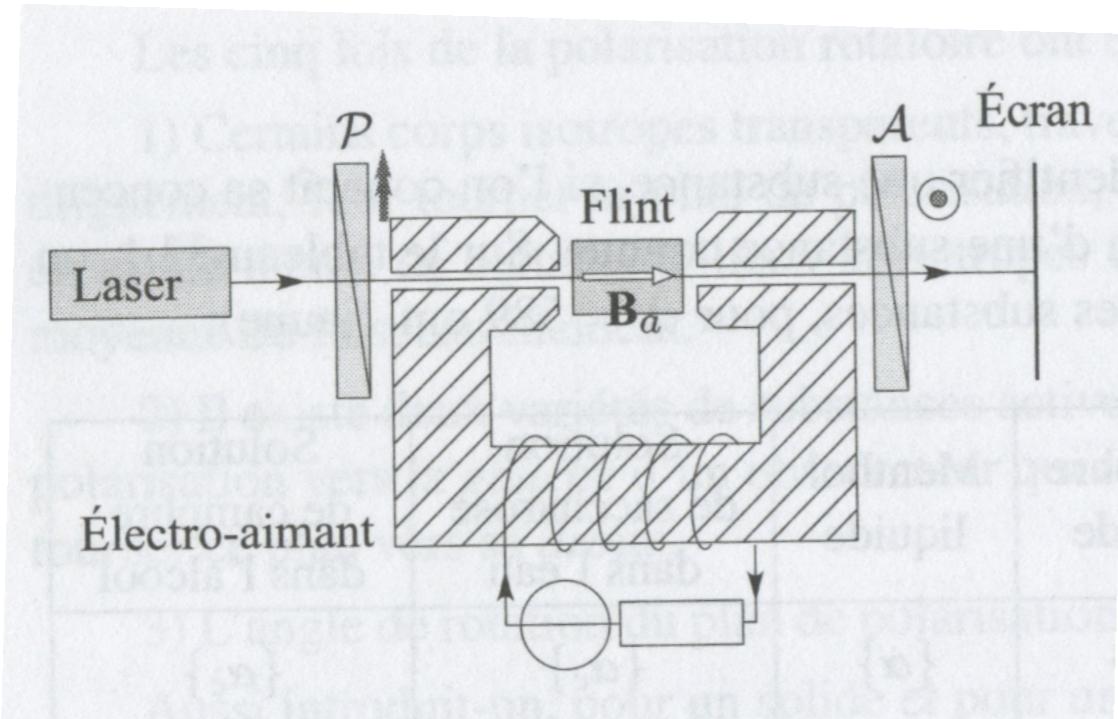
- $\mathbf{B}$  induit une activité optique dans le milieu isotrope
- Généralement  $\omega\omega_c \ll \omega_0^2 - \omega^2$ , d'où  $n_d - n_g \simeq \frac{\chi_{12}}{n_0} \simeq \frac{Ne^2}{n_0 m \epsilon_0} \frac{\omega\omega_c}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$

Pouvoir rotatoire :  $\rho = \frac{\pi \Delta n_c}{\lambda} = \frac{\pi Ne^2}{n_0 m^2 \epsilon_0 \lambda} \frac{\omega B}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$

L'effet dépend du sens de  $\vec{B}$  par rapport à  $\vec{k}$  !!

L'effet est doublé lors d'un AR de la lumière  $\neq$  activité optique naturelle

L'angle dont a tourné la polarisation s'écrit :  $\alpha = V \times l \times B$  avec :  $V = \frac{\pi Ne^2}{n_0 m^2 \epsilon_0 \lambda} \frac{\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$   
constante de Verdet



# Biréfringence provoquée

Anisotropie optique de matériaux isotropes provoquée par un champ électrique, magnétique ou mécanique

## Effet Kerr

Alignement de molécules polaires avec le champ électrique

Le milieu devient alors anisotrope (milieu uniaxial) avec l'a.o suivant  $\vec{E}$

$$n_e - n_o = K \lambda_0 E^2$$

$K$  est la constante de Kerr  $\lesssim 10^{-12} \text{ m.V}^{-2}$

Différence de phase :  $\phi = 2\pi K e \left( \frac{V^2}{d^2} \right)$

Exemple : nitrobenzène. La tension pour que la cellule se comporte comme une lame 1/2 onde vaut :

$$V_\pi = d \left( \frac{1}{2K_e} \right)^{1/2} \simeq 25 \text{ kV}$$

NOMBREUSES APPLICATIONS :  
obturateurs rapides, modulateurs optiques, Q-switch

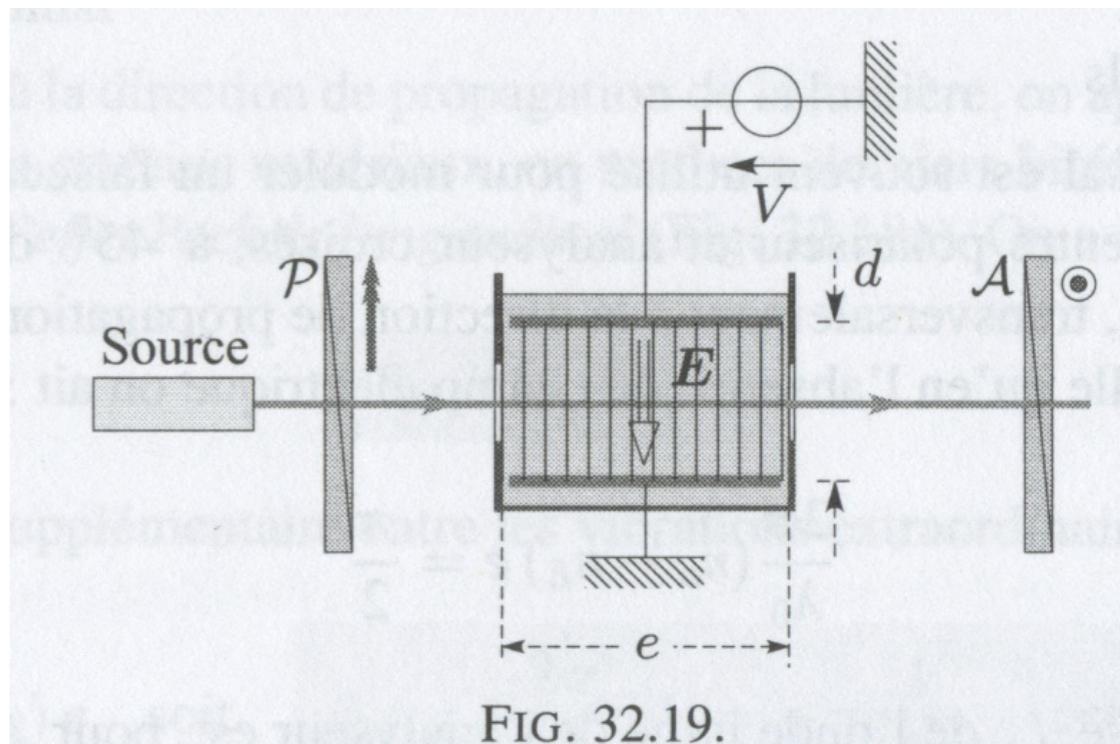


FIG. 32.19.

## Effet Pockels

Effet électro optique linéaire

Cristaux sans centre de symétrie

Effet longitudinal ou transverse ( $\vec{E} \parallel \vec{k}$  ou  $\vec{E} \perp \vec{k}$ )

biréfringence telle que :  $(n_e - n_o) = \alpha E$

## Effet Cotton Mouton

Biréfringence induite par un champ magnétique tq  $\vec{B} \perp \vec{k}$

Milieu uniaxe avec  $\vec{B} \parallel$  a.o

Effet magnéto optique quadratique :  $\Delta n \propto B^2$

NB : cet effet existe même dans le vide quantique (théorie de l'électrodynamique quantique, voir expérience BMV sur le site <http://www.lncmi.cnrs.fr>)

# Photoélasticité

Contrainte dans un matériau transparent (plexiglass, scotch...)

Matériau devient biréfringent uniaxe positif ou négatif

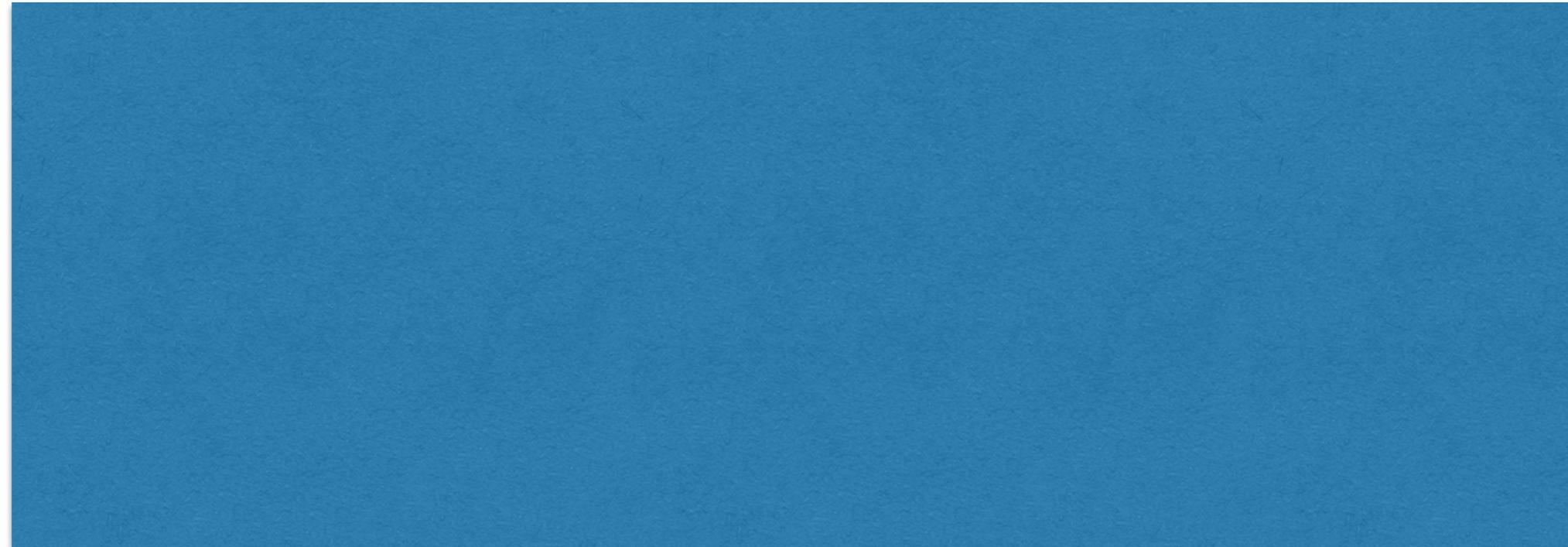
a.o  $\parallel$  contrainte locale

Manip : placer un matériau constraint entre 2 polaroïds

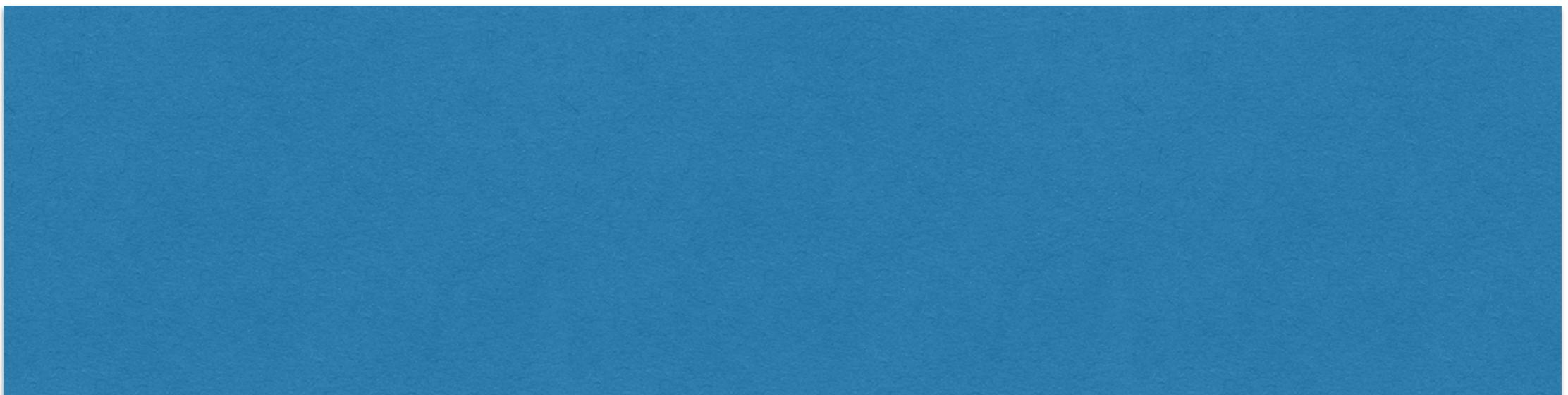
Manip : placer un matériau constraint entre 2 polariseurs

Pour s'entraîner....

A l'aide des matrices de Jones, expliciter l'action d'une lame  $\lambda/2$  sur une polarisation rectiligne quelconque



A l'aide des matrices de Jones, expliciter l'action d'une lame  $\lambda/4$  sur une polarisation rectiligne quelconque



A l'aide des matrices de Jones, expliciter l'action d'une lame quelconque sur une polarisation rectiligne avec les axes de la lame à  $45^\circ$  de la polarisation incidente.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} & -i \sin \frac{\delta}{2} \\ -i \sin \frac{\delta}{2} & \cos \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{\delta}{2} \\ -i \sin \frac{\delta}{2} \end{pmatrix} \quad \text{Vibration elliptique d'axes } \cos(\delta/2) \text{ et } \sin(\delta/2)$$

$$Dx = D \cos(\delta/2) \cos(\omega t)$$

$$Dy = D \sin(\delta/2) \sin(\omega t)$$

$$\frac{D_x^2}{D^2 \cos^2(\delta/2)} + \frac{D_y^2}{D^2 \sin^2(\delta/2)} = 1$$

A Une lame quart d'onde ajoute un déphasage de :

- 1)  $\pi$
- 2)  $\pi/2$
- 3)  $\pi/4$
- 4) aucune réponse

B Une lame demi onde ajoute un déphasage de :

- 1)  $\pi$
- 2)  $\pi/2$
- 3)  $\pi/4$
- 4) aucune réponse

C Quel est le déphasage entre les 2 composantes d'une vibration elliptique ?

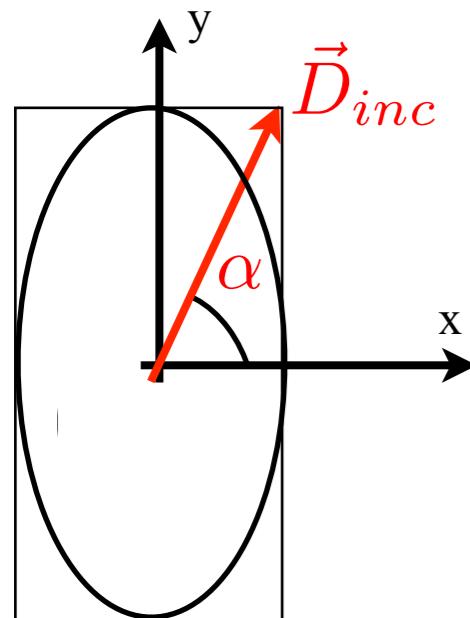
- 1)  $\pi$
- 2)  $\pi/2$
- 3)  $\pi/4$
- 4) on ne peut pas savoir, cela dépend

D Quel est le déphasage entre les 2 composantes d'une vibration rectiligne ?

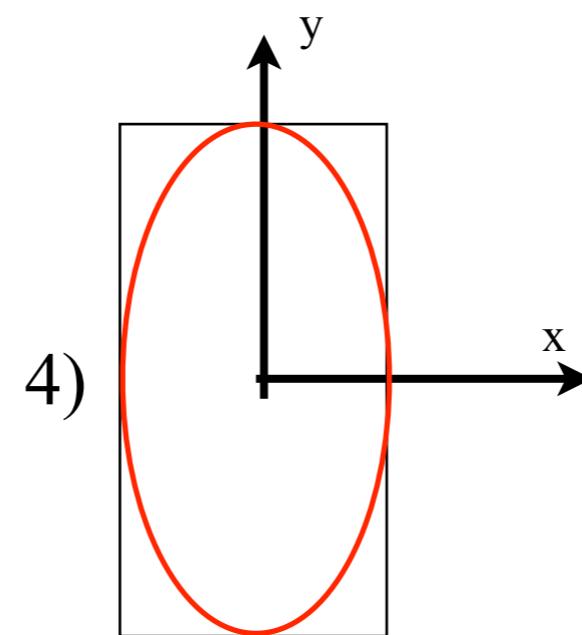
- 1)  $\pi$
- 2)  $\pi/2$
- 3)  $\pi/4$
- 4) on ne peut pas savoir, cela dépend

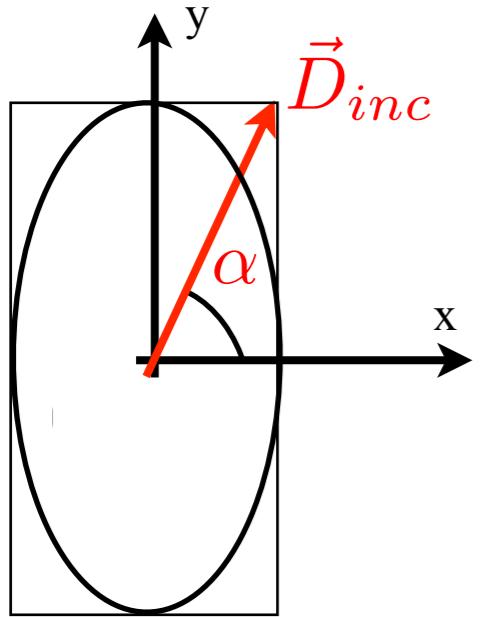
E

On place un lame demi onde avec ses axes suivants x et y. Que devient la polarisation après la lame ?

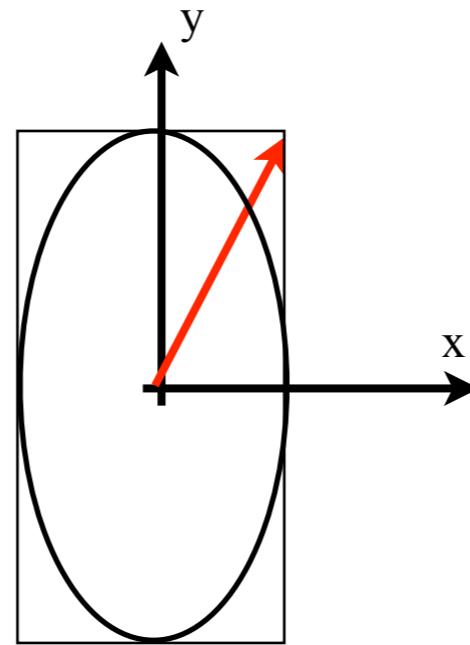


- 1)   
2)   
3)

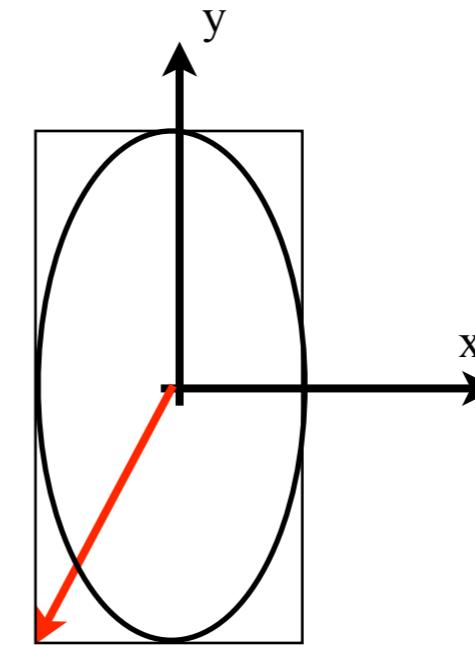




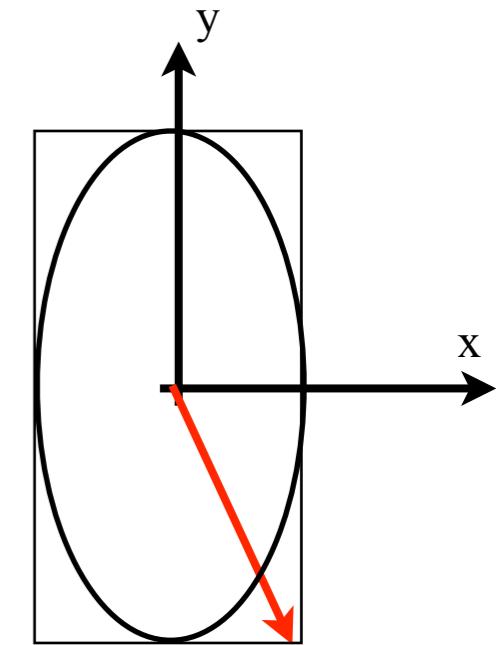
F On place un lame quart d'onde avec ses axes suivants x et y. Que devient la polarisation après la lame ?



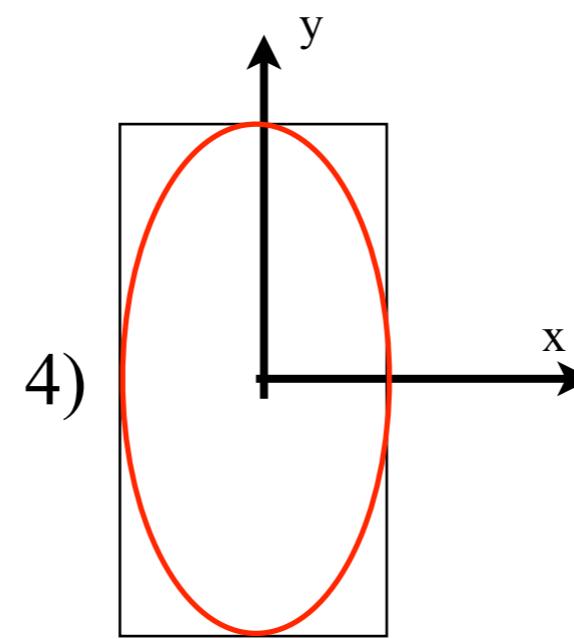
1)



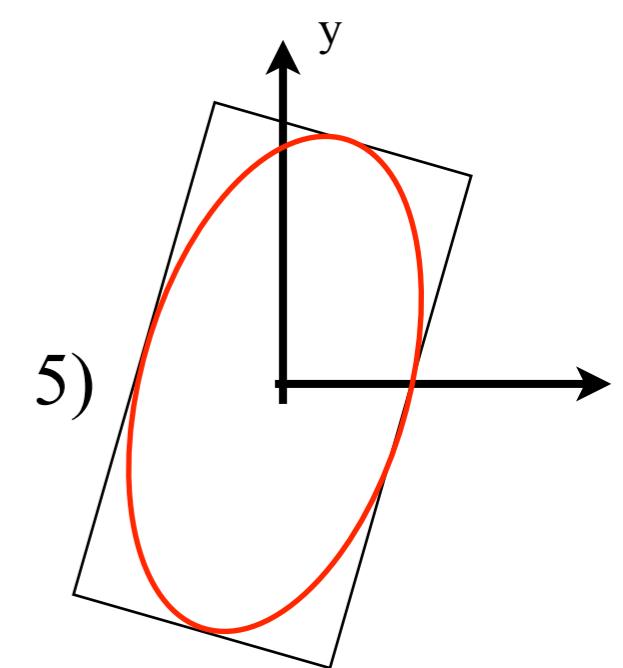
2)



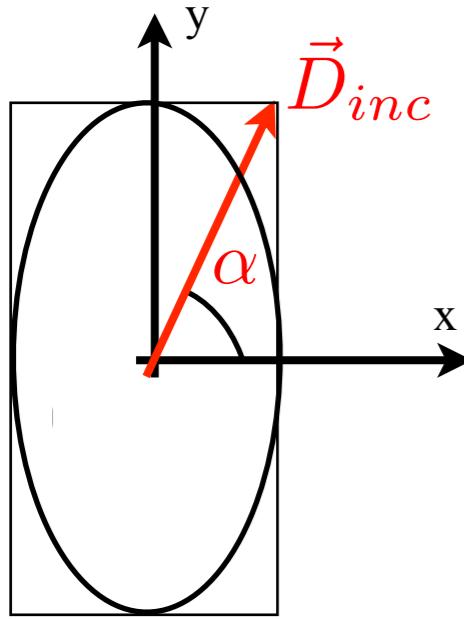
3)



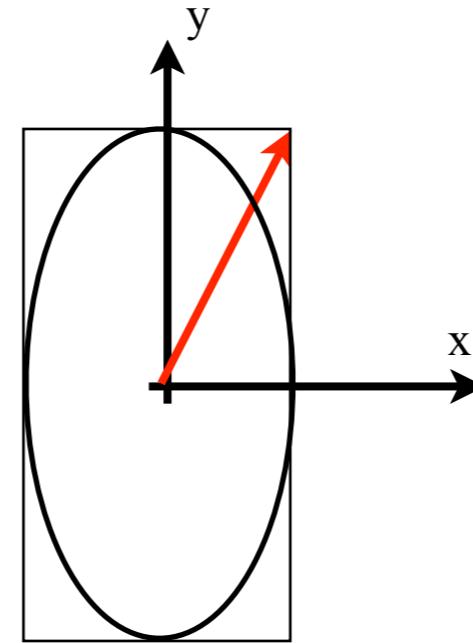
4)



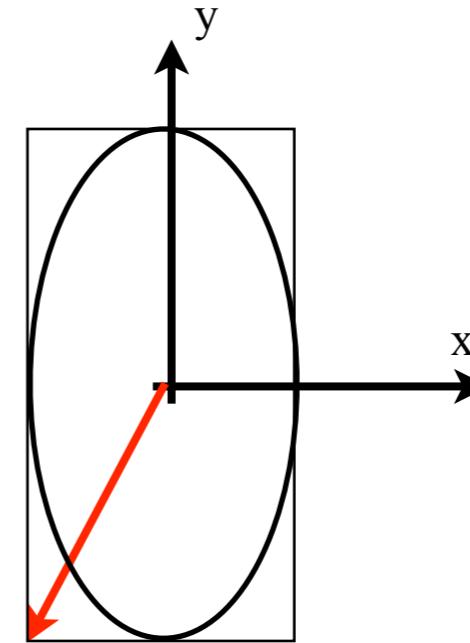
5)



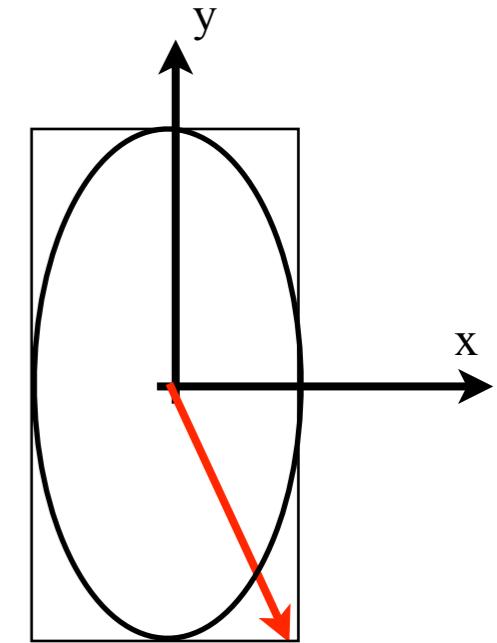
On place un lame demi onde avec ses axes suivants Dinc. Que devient la polarisation après la lame ?



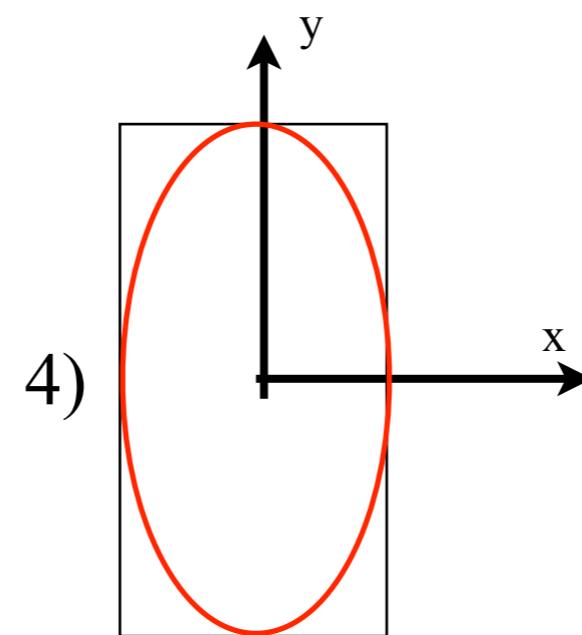
1)



2)

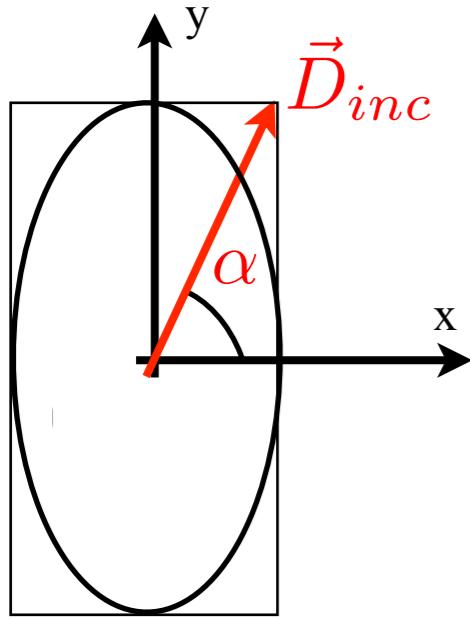


3)

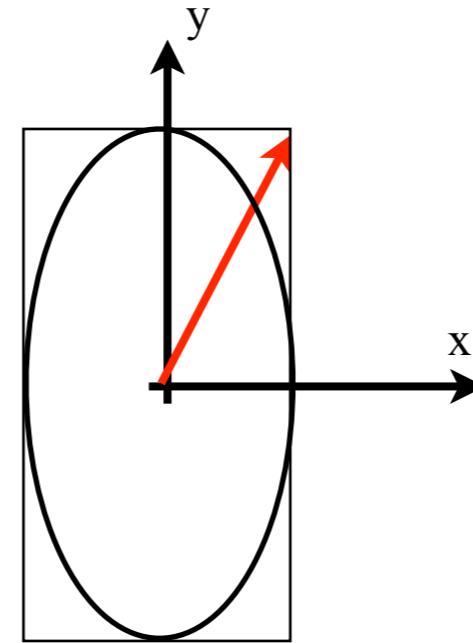


4)

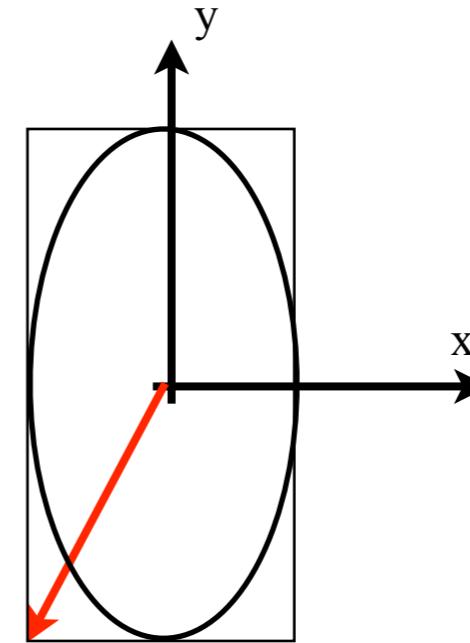
5) Aucun



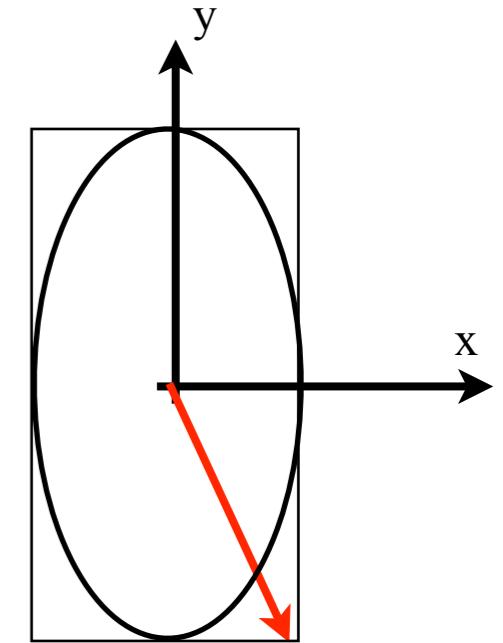
On place un lame quart d'onde avec ses axes suivants Dinc. Que devient la polarisation après la lame ?



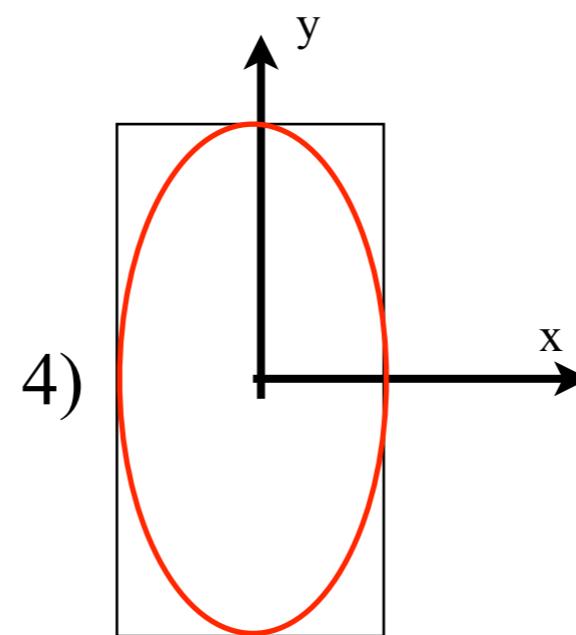
1)



2)



3)



4)

5) Aucun

I On fait tourner un polariseur devant un faisceau lumineux. L'intensité transmise reste constante.  
La polarisation de l'onde lumineuse est :

- 1) linéaire
- 2) elliptique
- 3) aléatoire
- 4) elliptique partielle
- 5) on ne peut pas conclure

J On fait tourner un polariseur devant un faisceau lumineux. L'intensité transmise passe par un minimum non nul. La polarisation de l'onde lumineuse est :

- 1) circulaire
- 2) elliptique
- 3) aléatoire
- 4) elliptique partielle
- 5) on ne peut pas conclure

I Soit une lame de quartz (cristal uniaxe) à faces parallèles taillée parallèlement à l'axe optique. Si on arrive en incidence normale sur la lame avec une polarisation linéaire quelconque :

- 1) On n'est pas sensible à la biréfringence linéaire du quartz
- 2) Il n'y a qu'un seul mode qui se propage dans la lame car le faisceau va tout droit
- 3) Le faisceau va tout droit mais il y a 2 modes qui se propagent à 2 vitesses différentes
- 4) Les indices vus par l'onde sont  $n_O$  et  $n_E$
- 5) En sortie la vibration reste linéaire.

K Soit une lame de quartz (cristal uniaxe) à faces parallèles taillée perpendiculairement à l'axe optique. Si on arrive en incidence normale sur la lame avec une polarisation linéaire quelconque :

- 1) On n'est pas sensible à la biréfringence linéaire du quartz
- 2) Il n'y a qu'un seul mode qui se propage dans la lame car le faisceau va tout droit
- 3) Le faisceau va tout droit mais il y a 2 modes qui se propagent à 2 vitesses différentes
- 4) Les indices vus par l'onde sont  $n_O$  et  $n_E$
- 5) En sortie la vibration reste linéaire.

L Pour transformer une vibration elliptique en vibration linéaire, on doit :

- 1) Placer une lame demi onde avec ses axes sur ceux de l'ellipse
- 2) Placer une lame quart d'onde avec ses axes sur ceux de l'ellipse
- 3) Tourner une quart d'onde et regarder quand on a l'extinction
- 4) Chercher le maximum puis le minimum d'intensité et tourner la lame de  $45^\circ$
- 5) il faut plus d'élément qu'une simple lame