Université de Toulouse
Préparation à l'agrégation de Physique
Phénomènes ondulatoires

G. Fruit - gfruit@irap.omp.eu

Plan du cours

1. Vibrations sur une chaîne infinie d'oscillateurs couplés
2. Equation classique de propagation – exemples
3. Equation classique de propagation – solutions
4. Propagation en milieu dispersif
5. Notions sur la propagation guidée
6. Ondes à la surface d'un liquide

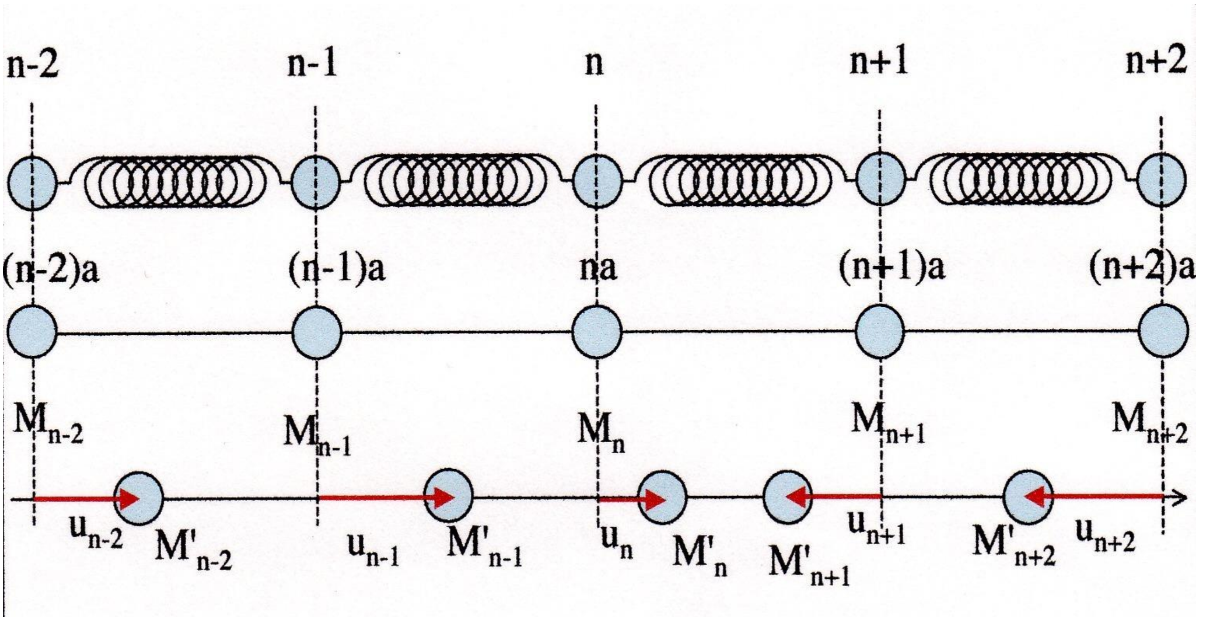
Bibliographie (succincte):

Bouquins de prépa : Faroux-Renault (Dunod)
Cours de Berkeley : tome 3 (Dunod)
Soutif : Vibrations, propagation, diffusion (Dunod)
Bechawarry : Ondes mécanique – tome 2 (?)
Garing : exo corrigés sur les ondes (Ellipses)

Définition (non universelle !) d'une onde :

Phénomène au cours duquel les variations spatiales et temporelles d'une grandeur physique s($\mathbf{r}$,t) sont telles qu'un transport réversible d'énergie s'effectue de proche en proche sans déplacement global de matière.

Chaîne infinie d'oscillateurs harmoniques



- Force exercé par le ressort (n-1) -(n) sur la masse (n)

$$\mathbf{F}_{n-1\to n} = -K\left(\overline{M'_{n-1}M'_n} - \overline{M_{n-1}M_n}\right)\mathbf{e}_x = -K(a+u_n-u_{n-1}-a)\,\mathbf{e}_x = K(u_{n-1}-u_n)\,\mathbf{e}_x$$

- Force exercé par le ressort (n)-(n+1) sur la masse (n)

$$\mathbf{F}_{n+1\to n} = K\left(\overline{M'_nM'_{n+1}} - \overline{M_nM_{n+1}}\right)\mathbf{e}_x = K\left(a+u_{n+1}-u_n-a\right)\mathbf{e}_x = K\left(u_{n+1}-u_n\right)\mathbf{e}_x$$

- Equation du mouvement de la masse (n)

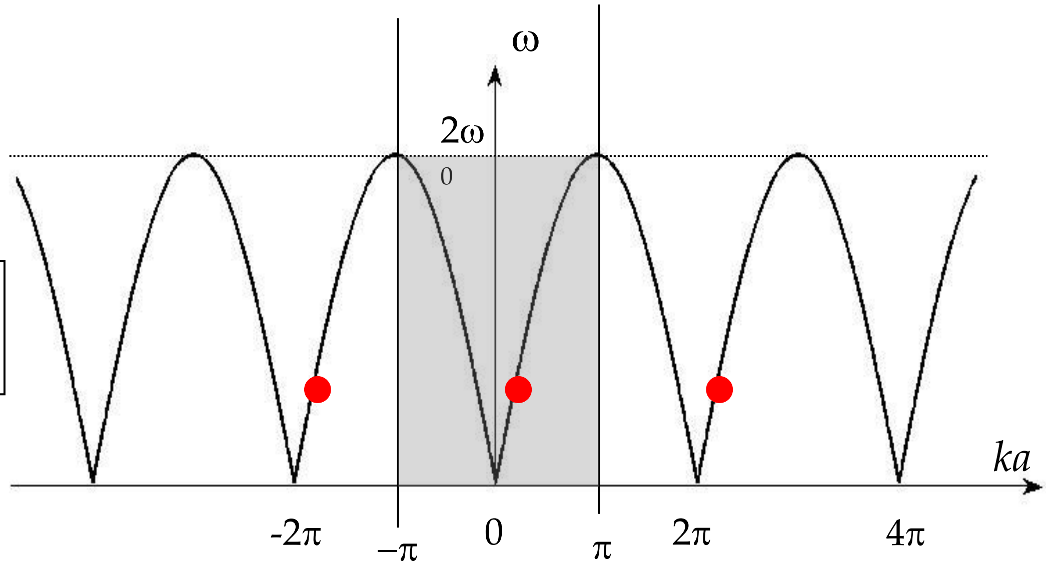
$$m\ddot{u}_n = K\left(u_{n+1}-u_n+u_{n-1}-u_n\right)$$

$$\boxed{\ddot{u}_n + 2\omega_0^2\,u_n = \omega_0^2\left(u_{n+1}+u_{n-1}\right) \qquad \omega_0^2 = \frac{K}{m}}$$

- Chaque atome (n) peut être vu comme un oscillateur de pulsation propre ω_0 et forcé par ses plus proche voisins.

Relation de dispersion

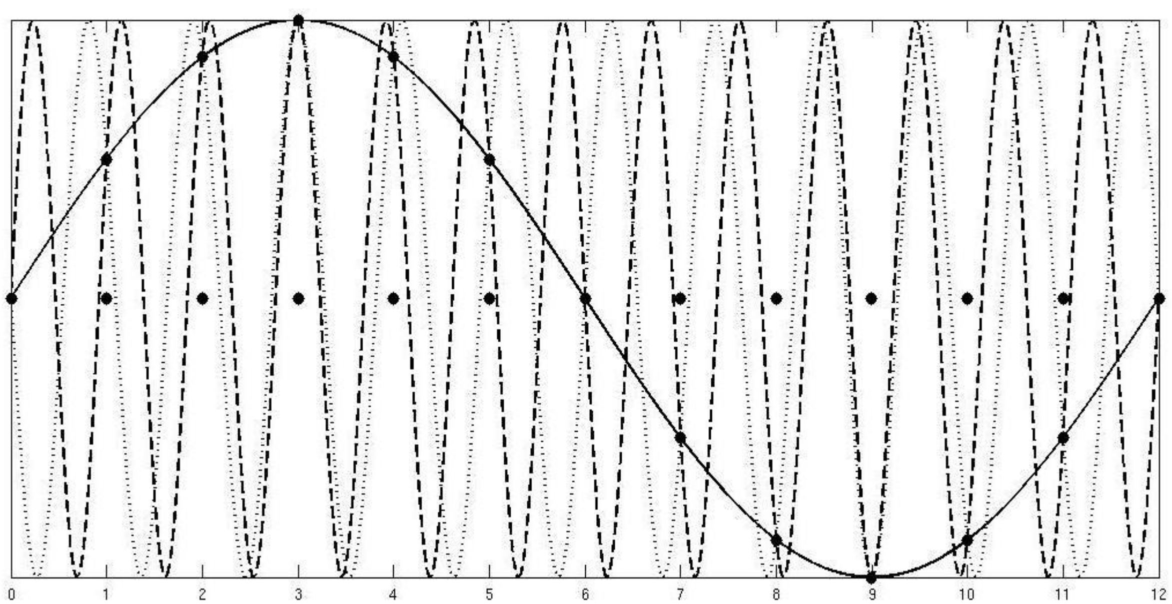
$$\boxed{\omega = 2\omega_0 \left|\sin\frac{ka}{2}\right|}$$



Périodicité de la relation de dispersion :

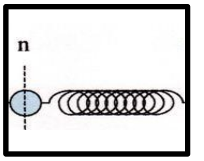
- Trait plein : $\lambda = 12\,a \Rightarrow k = \pi/6a$
- Trait pointillés larges : $13\,\lambda = 12a \Rightarrow k = 13\pi/6a = \pi/6a + 2\pi/a$
- Trait pointillés fins : $k = \pi/6a - 2\pi/a = -11\pi/6a \Rightarrow 11\,\lambda = 12a$

- Toutes les valeurs de k séparées de $2\pi/a$ conduisent au **même déplacement** des masses
- Ceci est lié à la **répartition discrète** des atomes dans la chaîne



Aspects énergétiques

- Le système {atome (n) + ressort (n)-(n+1)} est un réservoir
  - D'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m \dot{u}_n^2$
  - D'énergie potentielle élastique $E_p = \frac{1}{2} K (u_{n+1} - u_n)^2$



- Par unité de longueur, la densité d'énergie mécanique de la cellule vaut

$$e_m = \frac{m}{2a} \dot{u}_n^2 + \frac{K}{2a} (u_{n+1} - u_n)^2$$

- On suppose $u_n(t) = A\cos(\omega t - nka) = \Re\left(A e^{j(\omega t - nka)}\right)$ et on calcule la moyenne de l'énergie mécanique sur une période:
  - Energie cinétique moyenne

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2} \Re\left(\frac{m}{2a} \dot{\underline{u}}_n \dot{\underline{u}}_n^* \right) = \frac{m\omega^2}{4a} A^2$$

  Energie potentielle moyenne

$$\langle e_p \rangle = \frac{1}{2} \Re\left(\frac{K}{2a} (\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n)(\underline{u}_{n+1} - \underline{u}_n)^* \right) = \frac{K}{a} A^2 \sin^2 \frac{ka}{2}$$

  - De la relation de dispersion, on déduit **l'équipartition de l'énergie** entre les deux réservoirs:

$$\boxed{\langle e_c \rangle = \langle e_p \rangle \qquad \langle e_m \rangle = \frac{2K}{a} A^2 \sin^2 \frac{ka}{2}}$$

- Puissance transmise de l'atome (n) vers l'atome (n+1) :

$$P_{n\to n+1} = F_{n\to n+1}\, \dot{u}_{n+1} = -K\left(u_{n+1} - u_n\right) \dot{u}_{n+1}$$

  - En moyenne sur une période

$$\langle P_{n\to n+1} \rangle = \frac{1}{2} K\omega\, A^2 \sin ka$$

  - De l'énergie est donc transférée le long de la chaîne. A quelle vitesse ?
  - Dans un modèle « fluide » où l'énergie est répartie **de manière continue** le long de la chaîne avec une densité $<e_m>$, la quantité d'énergie <P>dt transférée de la cellule (n) à la cellule (n+1) pendant dt s'écrit aussi $<e_m> v_E\, dt$, où v_E est la vitesse d'écoulement de l'énergie. D'où

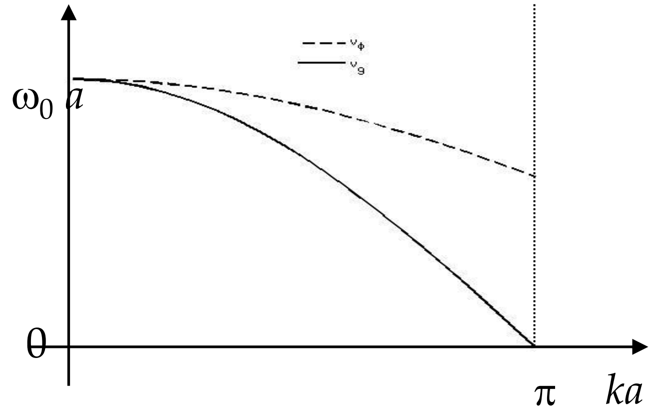
$$\boxed{v_E = \frac{\langle P_{n\to n+1} \rangle}{\langle e_m \rangle} = \omega_0\, a \cos\frac{ka}{2} = \frac{d\omega}{dk} = v_g}$$

- On constate ici que ***la vitesse de propagation de l'énergie s'identifie à la vitesse de groupe***. C'est un des exemples non triviaux où cette démonstration est facile à mener.

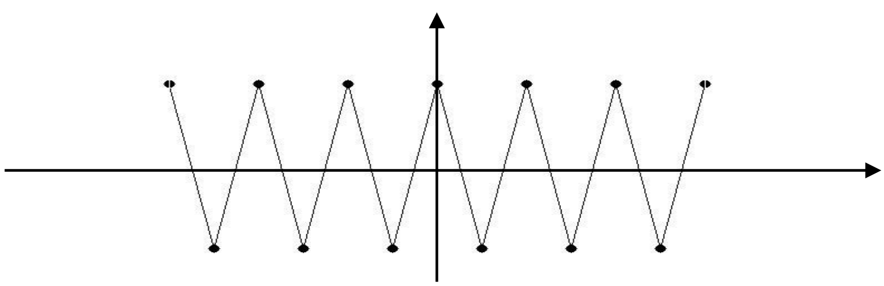
Vitesses de phase, de groupe…

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{2\omega_0}{k}\sin\frac{ka}{2}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \omega_0\, a\cos\frac{ka}{2}$$



- Lorsque $ka = \pi$ ($\lambda = 2a$), la chaîne oscille à $\omega = 2\omega_0$ et $v_g = 0$
  => **Onde stationnaire** : les atomes oscillent en phase ou en opposition de phase



- Lorsque $ka \ll 1$, vitesses de phase et de groupe s'identifient à $\omega_0 a$
  => cf. plus loin : approximation des milieux continus

- Si on force la chaîne à osciller à $\omega > 2\omega_0$, la relation de dispersion impose un *k imaginaire pur* => **onde évanescente**, il n'y a plus de propagation