LP4-Précession dans les domaines macroscopiques et microscopiques

2017 :

Leçon 4 : *Précession dans les domaines macroscopique et microscopique.*
L'étude de l'un des domaines, macroscopique ou microscopique, ne doit pas conduire au sacrifice de l'autre : un certain équilibre est attendu. Il est nécessaire d'avoir suffisamment de recul en mécanique des solides pour préciser l'origine des formules avancées.

2016 : Pas passer trop de temps sur les aspects cinématiques

2015 : La leçon « Précession dans les domaines macroscopique et microscopique » remplace la leçon « Approximation gyroscopique. Effets dans les domaines macroscopique et microscopique », dont l'énoncé pouvait conduire les candidats à des confusions.

Leçon 3 : *Approximation gyroscopique. Effets dans les domaines macroscopique et microscopique.* L'exposé doit être équilibré entre la description des effets macroscopiques et microscopiques. Il n'est pas souhaitable de faire un catalogue exhaustif des applications mais plutôt d'en traiter quelques-unes de manière complète. Le/la candidat(e) doit être capable de trouver l'orientation et le sens des effets gyroscopiques sur des exemples simples.

2011, 2012, 2013,2014 : Les candidats ignorent trop souvent les principes de fonctionnement et les performances des gyroscopes modernes.

2009, 2010 : Les hypothèses de l'approximation sont très rarement énoncées clairement et encore plus rarement vérifiées dans le traitement des applications. L'équation de précession est un concept utile.

2008 : Une illustration expérimentale aide à faire passer le message de cette leçon. Il faut prévoir assez de temps pour traiter le domaine microscopique. Le lien avec l'approche quantique peut être évoqué en évitant de sombrer dans le détail des calculs. Il est rappelé que le moment cinétique et le vecteur rotation ne sont a priori pas colinéaires.

2006 : Une illustration expérimentale aide à la compréhension de cette leçon. Un temps suffisant doit être consacré au domaine microscopique. Les équations d'évolution du moment magnétique en présence d'un champ magnétique tournant doivent être clairement établies dans le repère tournant. Les conditions de résonance et les applications de la résonance magnétique doivent être discutées. Le lien avec l'approche quantique peut être évoqué mais il faut éviter de sombrer dans le détail des calculs.

2005 : La réalisation d'expériences est toujours appréciée dans cette leçon, surtout si elles sont mises clairement en relation avec les résultats théoriques. Comme dans toute leçon de mécanique, les référentiels doivent être correctement définis. La notion de référentiel barycentique, quand elle est introduite, est souvent confuse. Le temps imparti au domaine microscopique est trop court.

2002 : Les applications citées ou les expériences présentées pour illustrer la notion de couple gyroscopique sont souvent très mal comprises. L'aspect *paradoxal* peut être évoqué [17].

1997 : Montrer l'unité de la leçon ; l'aspect microscopique (incluant en particulier la résonance magnétique nucléaire et ses applications médicales) est trop souvent négligé. Les gyroscopes employés pour l'illustration expérimentale du sujet sont souvent sous-utilisés et ne sont pas lancés suffisamment fort pour qu'effectivement l'approximation gyroscopique soit valable !

Références :

- **Taylor, Classical Mechanics Section 10 :** Pour réviser les bases de mécaniques : précession et la nutation. Explication pas à pas
- **BUP 587, page 85 intitulé *Aspects modernes des gyroscopes* :** Intéressant pour comprendre l'approximation gyroscopique et des détails techniques sur les gyroscopes. Les notations sont encore plus pourries que le :
- **Pérez, Mécanique : p437.** Applications multiples mais expliquées de manière aride.

Introduction :

- Peut-être que vous avez vu passer sur youtube cette vidéo du youtubeur Dr Nozman https://www.youtube.com/watch?v=hgjcPnI5qF4 . Il présente un objet qu'il appelle gyroscope. On constate qu'il s'agit en gros (on définira plus formellement ce que c'est dans I-A) d'un rotor qui tourne à grande vitesse (12 000 tours par minutes). Cette rotation rapide permet de faire des expériences dont les effets sont à première vue contre-intuitifs :
- A 45s : on remarque que si on lâche cet objet (solidaire d'une tige), qu'il ne tombe pas mais il tourne (c'est exactement ce qu'il se passe pour les toupies). Nozman dit : « **il se met en mode précession**, **c'est-à-dire le changement d'orientation de son axe de rotation** ».
- A 2'45 : Nozman fait tester son gyroscope à Squeezie. Ce dernier est impressionné car l'objet lui oppose un couple résistant (c'est ce que nous appellerons couple gyroscopique). Il dit même cette phrase : « **c'est ma main qui tourne autour !** » (on y reviendra dans le I-A). Il remarque ensuite qu'il n'y a pas de résistance s'il lui impose un couple suivant son axe de rotation mais **dès qu'il essaie de faire bouger son axe de rotation, un couple résistant s'oppose au mouvement**.
- Cette petite vidéo pose les problématiques que nous allons aborder dans cette leçon : Pourquoi le gyroscope précesse[1] ? Pourquoi il y a un couple résistant ? Au-delà de l'aspect étonnant de l'objet, nous allons comprendre son intérêt pratique du concept de précession : En quoi cela est utilisé pour repérer les angles de gite, roulis… des sous marins, ou des avions.
- Cette présentation s'articulera en 2 temps : **Dans une première partie**, nous partirons de l'objet concret gyroscope que nous avons vu dans la vidéo pour tenter de le modéliser son mouvement grâce aux outils de la mécanique Newtonienne. Nous allons constater qu'une approximation simple (l'approximation gyroscopique) permet de simplifier le problème tout en conservant les caractéristiques « importantes » du mouvement. Nous pourrons ainsi comprendre en quoi cet objet peut se réveler utile pour mettre en évidence la rotation de la terre mais aussi plein d'autres applications mécaniques macroscopiques. **Dans un second temps**, nous verrons qu'on retrouve les mêmes équations pour modéliser le Spin (aspect microscopique) soumis à un champ magnétique, on pourra ainsi à la lumière de nos connaissances que nous aurons construite dans la première partie comprendre le phénomène de Résonance Magnétique Nucléaire.

[1] Il semblerait que le verbe « précesser » ne soit pas dans le dictionnaire, nous l'utiliserons quand même afin de simplifier notre discours.

I- Précession dans le cadre de l'Approximation gyroscopique

A- Qu'est-ce qu'un gyroscope vs un volant d'inertie

- **Définition de Foucault[2] :** Le gyroscope est un appareil comportant un rotor tournant à grande vitesse et capable de mettre en évidence la rotation de son boîtier. Cette définition fonctionnelle mérite d'être discutée en comprenant comment le rotor est lié au boitier.
- **Liaison rotule entre le boitier et le rotor[3] :** Sur le schéma ci-dessus, 3 liaisons pivots indépendantes sont réalisés techniquements par deux anneaux. C'est ce qu'on appelle une

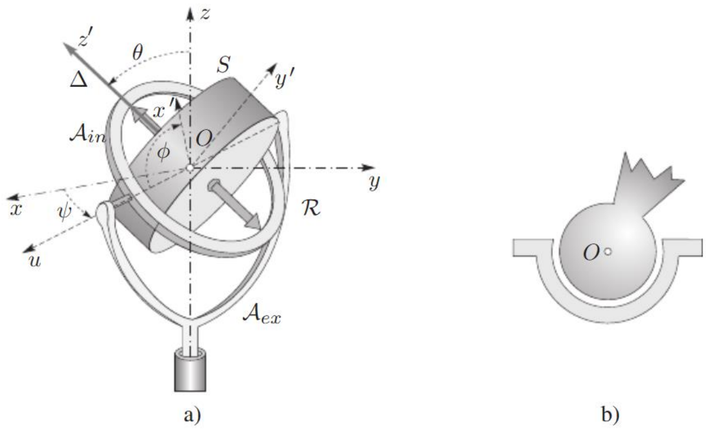


FIG. 26.1.

suspension à la Cardan : Le point O est fixe dans le référentiel du boitier et il y a 3 degrés de liberté qui sont les 3 angles de rotations. Si l'on néglige les frottements la **liaison rotule est parfaite**. Cela veut dire concrètement que si un opérateur extérieur exerce un couple sur le boitier, ce dernier n'est pas transmis au rotor car il n'y a pas de frottement. C'est pour cela que Squeezie a dit : « c'est ma main qui tourne autour ! » à 2'43.
- En pratique, un moteur entretient le mouvement de rotation suivant l'axe z'.
- Dans cette présentation, on appelera **volant d'inertie** un rotor dont la liaison avec le boitier n'est une rotule mais possède des degrés de liberté en moins. C'est le cas du jouet de Nozman qui n'est relié au boitier par une liaison pivot dont l'axe est le mèle que l'axe de rotation du rotor.

B- Approximation gyroscopique :

- Pour fixer les idées, on dispose d'un gyroscope et on travaille dans le référentiel terrestre supposé galiléen (dans un premier temps).
- **Moment cinétique par rapport à un point fixe :** $\overrightarrow{L_O} = \bar{\bar{I}}\,\vec{\omega}$. Si on projette ces grandeurs dans un repère constitué des axes principaux du rotor : $\overrightarrow{L_O} = \begin{pmatrix} \lambda_1\omega_1 \\ \lambda_1\omega_2 \\ \lambda_3\omega_3 \end{pmatrix}$ avec $\lambda_{1,3}$, les moments principaux du rotor.
- **Voici la fameuse Approximation Gyroscopique :**

---

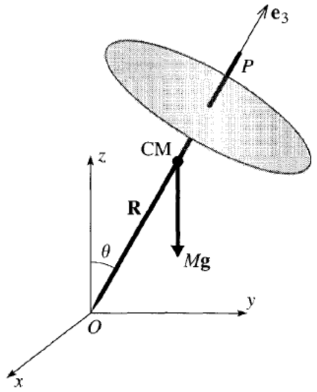
[2] Léon Foucault (1819-1868) Astronome et physicien français

[3] Attention, le « gyroscope » de Nozman n'est pas relié au boitier par une liaison rotule mais par une simple liaison pivot. Ce qui permis à Squeezie de ressentir un couple résistant lorsqu'il transmet un couple selon une direction différente de l'axe du pivot… Le gyroscope de Nozman est plutôt un volant d'inertie.

(i) $\lambda_1 \sim \lambda_3$ (ceci est obtenu par le caractère « trapu » du rotor[4])
(ii) $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_3$ [angle $(\vec{\omega}, z')$ petit] $\omega_3 \sim 100 \frac{tr}{s} = 36000\ degré/s$ et $\omega_{1,2} \sim 1 degré/s$
Donc $\overrightarrow{L_0}$ est parallèle à z'. **C'est comme si le moment cinétique « est accroché à l'axe z' lié au rotor »**.

C- Précession Gyroscopique

- **Précession gyroscopique :** Pour mettre en évidence l'effet dit de *précession.* Travaillons directement sur un exemple. On imagine un gyroscope placé dont le centre de masse est situé sur l'axe de rotation mais est différent du centre de la liaison rotule comme sur le schéma ci-dessous. C'est la configuration de précession que nous avons vu dans la vidéo à 45's.



Le rotor est soumis à un couple provoqué par les forces de pesanteurs. Ce couple est orthogonal à l'axe de rotation et est dirigé vers l'intérieur de la feuille (règle des 3 doigts). Dans l'approximation gyroscopique (toujours valable pour des faibles moments de force (on verra pourquoi plus bas)), le moment cinétique est et restera selon $\overrightarrow{e_3}$. De plus, étant donné que le moment du poids en $O\ \overrightarrow{C_O} = OG\ \overrightarrow{e_3} \times M\vec{g}$ est par définition orthogonal à $\vec{e}_3$, le moment cinétique a une norme constante ($\left\|\overrightarrow{L_O}\right\| = L_O = \lambda_3\omega_3$) d'après le théorème du moment cinétique : $\left.\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}\right|_{R_g} = \overrightarrow{C_O}$ [5] . En explicitant cette équation[6], on obtient : $\dot{\overrightarrow{e_3}} = \frac{MgR}{L_O}\overrightarrow{e_z} \times \overrightarrow{e_3} = \overrightarrow{\Omega_\mathrm{p}} \times \overrightarrow{e_3}$avec

$$\overrightarrow{\Omega_\mathrm{p}} = \frac{MgR}{L_O}\overrightarrow{e_z} \tag{0}$$

.

On peut réécrire les équations précédentes avec les moments cinétiques :

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{\Omega_\mathrm{p}} \times \overrightarrow{L_O} \tag{1}$$

---

[4] $\lambda_1 = \frac{m}{4}(R^2 + \frac{h^2}{3})$ et $\lambda_3 = \frac{1}{2}mR^2$ pour un cylindre de rayon R et de hauteur h.
[5] Il est important de préciser les hypothèses permettant d'écrire le théorème du moment cinétique : Ici on est dans un Référentiel galiléen avec un point O fixe dans ce repère. S'il n'y a pas de point fixe dans le référentiel galiléen, on peut tout de même écrire le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique : $\frac{d\vec{L}^*}{dt} = \vec{C}$. En effet, aussi étonnant que cela puisse paraître, le théorème du moment cinétique est valable dans le référentiel barycentrique qui n'est pas galiléen en général !
[6] On est passé vite sur la conservation de la norme de $\overrightarrow{L_0}$ qui s'obtient en multipliant scalairement le théorème du moment cinétique par $\overrightarrow{L_O}$ et en se rappelant de l'expression de la dérivée de $\frac{d\vec{L}_0^2}{dt}$.

Ces équations expriment que l'axe $\overrightarrow{e_3}$ de la toupie tourne autour de la direction verticale $\overrightarrow{e_z}$ avec un vecteur rotation $\vec{\Omega}$. C'est le mouvement de précession. On peut résumer l'effet en une phrase : Le moment cinétique essaie de suivre le couple.

- **Conclusion :** Un couple orthogonal à l'axe de rotation ➔ Mouvement de précession (« rotation de l'axe de rotation » caractérisé par la vitesse de précession $\overrightarrow{\Omega_p}$).
- **Retour sur l'approximation gyroscopique :** On a dit qu'on travaillait avec des moments de forces faibles pour rester dans l'approximation gyroscopique. Mais « faibles » devant quoi ? Divisons l'équation (0) par la vitesse de rotation du rotor. On obtient que le rapport entre la vitesse de précession et la vitesse angulaire est lié au moment des efforts de pesanteurs.

$$\frac{\Omega_p}{\omega} = \frac{MgR}{L_O\omega}$$

Ainsi, on travaillera avec $MgR \ll L_O\omega$ ce qui est équivalent à $\frac{\Omega_p}{\omega} \ll 1$.

- **Application : https://www.youtube.com/watch?v=Wp2TMG2zSMQ à 2'37** Si le centre de masse est confondu avec le point fixe, le couple des efforts de pesanteur est nul. Si on rajoute une petite masselotte sur l'axe, le couple n'est plus nul. Dans quel sens va tourner le gyroscope ? Estimation du temps de rotation : $T_p = \frac{2\pi\lambda_3\omega}{mgr}$ avec $\omega = 137\ tr/min$ la vitesse de rotation du rotor, λ_3 le moment d'inertie par rapport à l'axe z (Attention on ne prend pas en compte la masselotte car elle ne tourne pas regardez bien !), r la distance entre le point fixe et la masse m. AN : $T_{p_{att}} = 22s$ $T_{p_{exp}} = 26s$.
- **Application qualitative :** La précession des équinoxes. De manière qualitative, on comprend que de par son caractère aplati aux pôles et rebondi à l'équateur, la lune (et le soleil) exercent un couple sur la terre (faire schéma). Applique le même raisonnement que pour l'application précédente : Le couple tendrait (intuitivement) à faire basculer la terre dans une direction. Grâce à la rotation (et au théorème du moment cinétique), c'est une précession qui a lieu. L'axe de rotation la terre précesse. On l'appelle précession des équinoxes parce que les 12 constellations semblent bouger au moment de l'équinoxe. https://www.youtube.com/watch?v=5My_CrhOOjM

D- Couple Gyroscopique

- Jusqu'à présent, nous avons vu qu'un moment de force entrainait un mouvement de précession (ie rotation de l'axe de rotation)
- Par la loi des actions et des réactions, si un opérateur impose une rotation au rotor (ie. Cas du volant d'inertie avec une liaison pivot), ce dernier va résister et transmettre un couple résistant à l'opérateur : $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{\Omega_{ex\to rot}} \times \overrightarrow{L_O} = -\vec{\Gamma}_{O,g\to ex}$.
- **Application :**

II- Précession appliquée au Spin : La Résonance Magnétique Nucléaire

Nous savons qu'un proton a un spin $s = \frac{1}{2}$.

A- Quel est le lien entre le Spin et la Précession ?

- **Le Spin, c'est juste un moment cinétique[7] :** Le Spin que nous noterons $\overrightarrow{L_s}$ est un moment cinétique intrinsèque ! Nous allons lui appliquer le théorème du moment cinétique. Il peut sembler étonnant d'appliquer des lois de la mécanique classique à des objets quantiques. Cela n'a d'intérêt que si l'on raisonne sur des valeurs moyennes des grandeurs quantiques[8]. Le nombre de protons étant gigantesque dans un échantillon analysé, cette démarche est justifiée.
- **Théorème du moment cinétique pour un échantillon soumis à un champ magnétique permanent $\overrightarrow{B_0} = B_0\overrightarrow{u_z}$:** Nous savons qu'un Spin est lié à un moment magnétique ($\vec{\mu} = \gamma\overrightarrow{L_s}$) qui, couplé à un champ magnétique, engendre un moment de force $\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \times \overrightarrow{B_0}$. On applique le théorème du moment cinétique : $\frac{d\overrightarrow{L_s}}{dt} = \vec{\mu} \times \overrightarrow{B_0} = -\gamma\overrightarrow{B_0} \times \overrightarrow{L_s}$, que l'on peut réécrire avec $\overrightarrow{\Omega_L} = -\gamma\overrightarrow{B_0}$:

$$\frac{d\overrightarrow{L_s}}{dt} = \overrightarrow{\Omega_L} \times \overrightarrow{L_s} \qquad (2)$$

Nous voyons réapparaître l'équation (1), c'est-à-dire celle qui régissait la précession d'un gyroscope soumis à un moment de pesanteur. Par conséquent, nous pouvons visualiser le spin $\overrightarrow{L_s}$, comme un vecteur qui précesse autour du champ magnétique $\overrightarrow{B_0}$. C'est ce que nous appelons, la **précession de Larmor [9].** Ω_L est la pulsation de Larmor.

B- Passage d'un Spin up à un Spin down

- Raisonnons pour fixer les idées sur un des 2 états stationnaires propres de l'opérateur $\widehat{L_z}$, l'état $|->_z$. Cet état correspond à un niveau d'énergie

$$E_- = -\mu_z B_0 = -\gamma\, s\, \hbar\, \mathrm{B_0} = -\frac{\mathrm{ge}}{2\mathrm{m_p}} \times \frac{1}{2} \times \hbar \times \mathrm{B_0}.$$

On désire faire passer cet état stationnaire au niveau E_+ (on verra pourquoi après). Le spin va alors absorber $\Delta E = 2\mu_z B_0 = \hbar\omega_0$ où nous avons introduit une pulsation caractéristique ω_0.
- Comment passer de l'état + à l'état - ? Pour l'instant, nous avons un spin qui tourne « la tête en bas » (car spin down) autour de $\overrightarrow{B_0}$. Une première idée pour modifier l'orientation du spin, serait de basculer le champ $\overrightarrow{B_0} \to -\overrightarrow{B_0}$. Cependant, étant donné que les ordres de grandeur de B_0 sont de l'ordre de $1\,Tesla$, faire varier un tel champ rapidement est impossible et produirait de la dissipation joule énorme. La RMN contourne le problème avec l'astuce suivante :
- Si j'impose un petit champ fixe $\overrightarrow{B_1}$ dans le plan xy, le spin $\overrightarrow{L_s}$ ne va rien voir car il tourne très vite autour de $-u_z$. Si maintenant, j'impose un champ $\overrightarrow{B_1}$ **tournant à la même pulsation** $\overrightarrow{\Omega_L}$, alors le spin va voir ce petit champ et va se mettre à précesser autour. C'est ça la résonance magnétique nucléaire. Cette précession va faire tourner le spin et donc permet le passage de l'état down à l'état up.

---

[7] D'ailleurs, on devrait dire moment cinétique de Spin $\overrightarrow{L_s}$, pour ne pas le confondre avec le nombre quantique de spin $s = \frac{1}{2}$ pour le proton.

[8] Nous avons vu par exemple dans le cours de mécanique quantique que les valeurs moyennes de l'impulsion suivaient les mêmes lois que la mécanique classique en appliquant le théorème d'Ehrenfest.

[9] **Joseph Larmor (1857-1942), physicien Irlandais**

- Démontrons ce résultat qualitatif par le calcul : (cf. feuille). Il est nécessaire de se placer dans le référentiel du champ tournant R' pour voir le spin tourner.
- Ordre de grandeur des ondes émises : Pour un champ magnétique $B_0 = 1T$,

$$\nu = \frac{\Omega_L}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{\mathrm{ge}}{2\mathrm{m_p}} \mathrm{B_0} = \frac{1}{2\pi} \times \ 5.6 \times 1.6\ 10^{-19} \times \frac{1}{2\ 1.67\ 10^{-27}} = 43\ \mathrm{MHz}$$

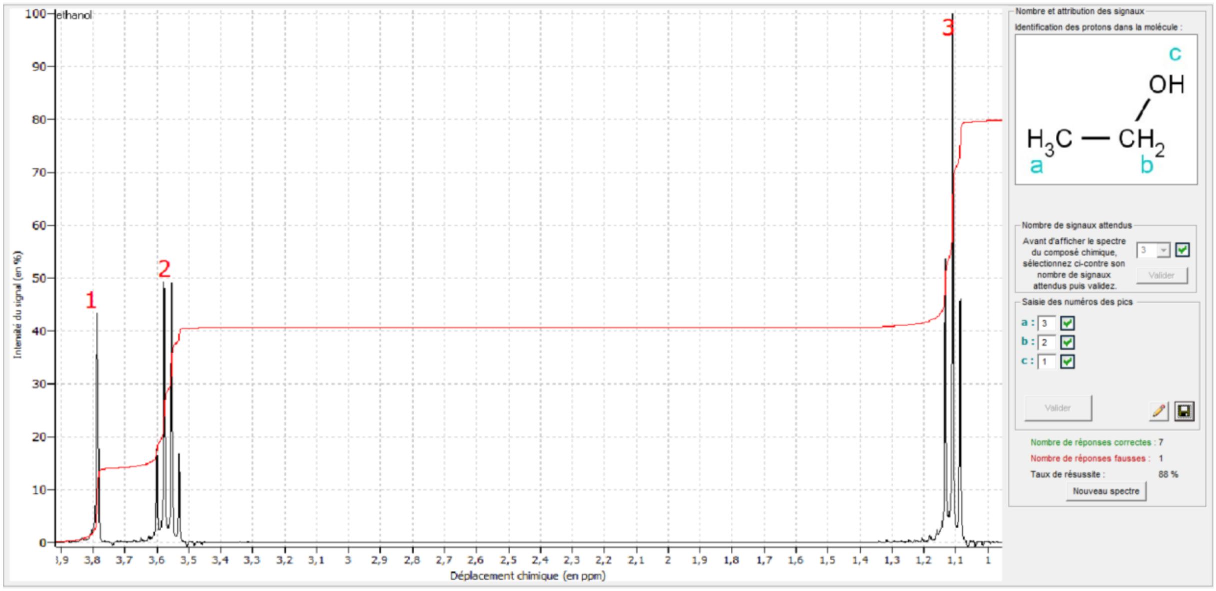
$\lambda = 7m$

Il s'agit d'une onde dans le domaine radiofréquence.

C- Intérêt de la Résonance Magnétique Nucléaire : Spectroscopie

- Nous venons de démontrer qu'en introduisant un champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ tournant à la pulsation de Larmor, nous modifions la direction de précession du Spin et forçons les transitions d'un état d'énergie à un autre. On pourrait penser qu'il y a autant d'absorption de photon que d'émissions ce qui serait indétectable.
- Heureusement, les deux niveaux d'énergie ont une différence de population très faible de l'ordre de 10^{-6} (Calculable à partir du facteur de Boltzmann : $\pi^+ - \pi^- = \frac{1}{1+\exp\left(-\frac{\Delta E}{k_b T}\right)}\left(\exp\left(-\frac{\Delta E}{k_b T}\right) - 1\right) \sim -3{,}4\ 10^{-6}$(avec $\Delta E = 2\mu_z B_0 = \hbar\ \Omega_\mathrm{L} = 1.8\ 10^{-7}\mathrm{eV}$ et $\mathrm{k_b T} = 26\mathrm{meV}$, EN FAISANT DES DVT LIMITES SINON LA CALCULATRICE SATURE.) Cette faible différence est compensée par le très grand nombre macroscopique de spin : 10^{23} . Donc, on est capable de mesurer une absorption de l'onde radiofréquence (ie signal $\mathrm{B_1}$).
- Ce que nous venons de décrire ne représente pas d'intérêt pour l'instant car dans notre modèle, tous les spins possèdent la même fréquence de résonance (ie fréquence de Larmor). On peut ajouter un degré supplémentaire de complexité en prenant en compte l'influence des électrons sur le champ magnétique ressenti par le proton. En effet, le champ magnétique B_0 induit des courants dans les nuages électroniques voisins qui (d'après la loi de Lenz) vont produire un champ $\overrightarrow{B_{induit}} = -\sigma\overrightarrow{B_0}$. Ainsi, $\overrightarrow{B_{ressenti}} = \overrightarrow{B_0}(1-\sigma)$. On dit que les électrons « blindent » le protons. Ainsi la fréquence de résonance est « déplacé », c'est ce que les physiciens ont appelé « déplacement chimique » : $\nu = \frac{\gamma B_0}{2\pi} \times (1-\sigma_i) \rightarrow \delta = \frac{(\nu - \nu_{ref})}{\nu_{ref}} \times 10^6$.

- Ainsi, chaque proton d'une molécule raisonne différemment selon son environnement électronique, il est ainsi possible de différencier de retrouver la structure d'une molécule exemple de l'éthanol.



Conclusion

- Dans cette leçon, nous avons montré différent aspect du phénomène de précession d'abord en considérant un objet macroscopique qu'est le gyroscope. **Le point important à retenir est que le moment cinétique du rotor, solidaire de l'axe de rotation va « suivre » le couple imposé**. C'est juste la traduction du théorème du moment cinétique dans l'approximation gyroscopique. Ce phénomène nous a permis de comprendre la précession de la toupie mais aussi la précession des équinoxes
- Ensuite, nous avons pu comprendre que l'interaction entre Spin et champ magnétique était formellement similaire à l'équation de précession d'une toupie. Nous avons compris que le phénomène de résonance magnétique s'obtenait en imposant un champ B_1 tournant à la même vitesse de précession pour provoquer des transitions up-down. La fréquence de résonance étant lié à l'environnement électronique, il est possible de déduire des spectres RMN la structure des molécules.
-

III- Notes Taylor : Mécanique Classique Chapitre 10

- Pour la mécanique des corps : La **quantité de mouvement** est égale à la quantité de mouvement du centre de masse auquel on attribue la masse totale du système. Le **taux de variation** de la quantité de mouvement est égal aux forces extérieures s'exerçant sur le système.
- En ce qui concerne le **moment cinétique**, il est la somme d'un **moment cinétique orbital** (moment cinétique du centre de masse auquel on attribue la masse totale du système) + d'un **moment cinétique propre** (moment cinétique du système dans le référentiel du centre de masse)

$$\vec{L} = \vec{L}_{orb} + \vec{L}_{pr} \qquad (Théorème\ de\ Koenig)$$

- Le **taux de variation du moment cinétique** orbital est égal aux moments des forces extérieures s'exerçant sur le centre de masse. **Le taux de variation** du moment cinétique propre est égal au moment des forces extérieures dans le référentiel barycentrique. *Cette propriété est étonnante car le référentiel lié au centre d'inertie est souvent non galiléen*…
- La vitesse d'un point du système se définit facilement par rapport à l'axe de rotation : $\vec{v}(M) = \vec{\omega} \times \vec{r}$. $\vec{r}$ est le vecteur reliant M à un point situé sur l'axe instantané de rotation. On suppose que le centre de masse du système est immobile sinon, il faut l'ajouter.
- On se ramène toujours à un **moment cinétique par rapport à un point fixe** du système. (si on ne trouve pas de point fixe, on utilise le Théorème de Koenig pour se placer dans le référentiel du centre de masse du système. Le centre de masse est par définition immobile dans ce référentiel.)
- Dans ce cas, le moment cinétique n'est pas toujours parallèle au vecteur rotation. En revanche, on utilise la matrice d'inertie qui est un tenseur d'ordre 2 pour aboutir à la relation : $\vec{L} = I\vec{\omega}$. I **est matrice d'inertie** qui est symétrique. Les composantes de cette matrice sont appelées **moment d'inertie** si ce sont les éléments diagonaux ou **produit d'inertie** si ce sont les éléments non diagonaux. Pour les système possédant un plan de symétrie z=0, on remarque que les produits de symétrie intégrant sur la composante z s'annulent. Donc, un solide avec une symétrie de rotation a tous ses produits d'inertie nuls.
- Comme la matrice d'inertie est symétrique, il est possible de trouver une base orthogonale (solidaire du point fixe ie origine du repère) dans lequel on ne garde que les éléments diagonaux. Ces axes sont appelés **axes principaux**. Si le vecteur rotation $\vec{\omega}$ est parallèle à un de ces axes principaux, alors le moment cinétique est parallèle à $\vec{\omega}$.
- **Résultat important pour l'énergie cinétique :** $\boldsymbol{T = \frac{1}{2}(\lambda_1\omega_1^2 + \lambda_2\omega_2^2 + \lambda_3\omega_3^2)}$ avec les valeurs propres (ie moment d'inertie selon les axes principaux).
- **Précession d'une toupie soumise à un moment de force faible :** On suppose que la toupie tourne autour de son axe de symétrie qui est un axe principal. Donc le moment cinétique est parallèle à l'axe principal. Si il n'y a pas de moment de force, il n'y a pas de variation du moment cinétique donc pas de variation du vecteur rotation. En revanche, les forces de pesanteurs induisent un moment non nul si la toupie fait un angle θ avec la verticale et donc une variation du vecteur rotation a lieu. Si le moment des forces est faible, on peut faire une approximation et considérer que les composantes ω_1 et ω_2 restent négligeable : Le moment cinétique continu à être parallèle à $\vec{e}_3$. Le théorème du moment cinétique permet d'exprimer dans cette approximation la variation du vecteur $\vec{e}_3$. On remarque qu'il tourne autour de $\vec{e}_z$ avec une vitesse de rotation $\vec{\Omega} = \frac{MgR}{\lambda_3\omega}\vec{e}_z$. (R étant la distance du point fixe au centre de masse. Ce mouvement s'appelle **précession**.
- **Equation d'Euler :** Il y a deux référentiels. Le référentiel inertiel et le référentiel lié au corps en mouvement. On choisit comme origine un point fixe ou le centre de masse. Pour appliquer le théorème du moment cinétique, nous avons vu qu'il faut soit se placer dans le référentiel d'inertie (terrestre). Ou le référentiel du centre de masse (on s'est d'ailleurs étonné que ce référentiel présente une forme similaire du théorème du

moment cinétique cf plus haut). Attention, le référentiel du centre de masse n'est pas un référentiel tournant !!!! C'est juste le référentiel en translation par rapport au référentiel inertiel centré sur centre de masse ! En utilisant les formules de dérivations de vecteur, on a :

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{inertiel} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{tournant} + \vec{\omega} \times \vec{L}$$

Donc par application du théorème du moment cinétique : $\dot{\vec{L}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{\Gamma}$ où la dérivée est prise dans le référentiel tournant qui est le référentiel d'axe principaux !

Donc $\vec{L} = \begin{pmatrix} \lambda_1\omega_1 \\ \lambda_2\omega_2 \\ \lambda_3\omega_3 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\dot{\omega}_1 - (\lambda_2 - \lambda_3)\omega_2\omega_3 &= \Gamma_1 \\ \lambda_2\dot{\omega}_2 - (\lambda_3 - \lambda_1)\omega_3\omega_1 &= \Gamma_2 \\ \lambda_3\dot{\omega}_3 - (\lambda_1 - \lambda_2)\omega_1\omega_2 &= \Gamma_3 \end{aligned}\right\} \quad \text{[Euler's equations]}$$

Dans le cas de la toupie, $\vec{\Gamma_3}$ est nul car le moment de pesanteur est orthogonal à $\vec{e_3}$. De plus, la géométrie de la toupie fait que $\lambda_1 = \lambda_2$. Donc, $\lambda_3\dot{\omega}_3 = 0$. En revanche, ω_1 et ω_2 oscillent rapidement car Γ_1 et Γ_2 oscillent rapidement. Ils ont aussi une amplitude faible (Justification ?)

- **Equations d'Euler + moment de forces nuls (mouvement à la *Poinsot*)**
  Cas où $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$: En observant les équations d'Euler, on remarque que si l'on commence à tourner autour d'un axe principal, on continue à tourner autour de cet axe principal. En effet, si $\omega_1 = \omega_2 = 0$, alors le vecteur rotation reste constant. En revanche, il est intéressant de se demander si ces « positions de stabilité » sont stables. On montre qu'une petite perturbation est contrôlée si la rotation a lieu suivant l'axe de plus fort ou de plus faible moment d'inertie. Les solutions sont alors sinusoïdales pour les petites composantes du vecteur rotation.
  Cas où $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$: Des équations d'euler, on en déduit que ω_3 est constant. Et que ω_1 et ω_2 sont sinusoïdales de pulsation. Les vecteurs $\vec{e}_3, \vec{L}\ et\ \vec{\omega}$ sont dans un même plan. Si on se place dans le référentiel du corps, $\vec{L}\ et\ \vec{\omega}$ tournent autour de $\vec{e_3}$ avec la pulsation $\Omega_c = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_1}\omega_3$. Si on se place dans le *référentiel de l'espace* (ie pas le référentiel tournant), alors $\vec{L}$ est constant (théorème du moment d'inertie [valable aussi dans le ref barycentrique]) et $\vec{e_3}$, $\vec{\omega}$ tournent autour à la pulsation $\Omega_s = \frac{L}{\lambda_1}$.
- **Angles d'Euler : Comment comprendre les 3 angles d'euler ?** Dans la convention du Taylor (différente mais plus intuitive que celle du pérez), 3 opérations sont nécessaires pour repérer la toupie. La première rotation (ϕ) permet de définir la direction vers laquelle la toupie va se pencher. La deuxième rotation (θ), définit l'angle d'inclinaison de la toupie. Ces deux angles ne sont rien du plus que les fameux angles des coordonnées cylindriques. Enfin, le dernier angle (ψ) permet de décrire la « rotation de la toupie sur elle-même ». A chaque rotation, on passe d'un repère à un autre. Cela permet de faciliter l'expression du vecteur rotation total par addition (propriété des vecteurs rotation).
- **Expression du vecteur rotation : $\boldsymbol{\vec{\omega}} = \boldsymbol{\dot{\phi}\vec{e_z}} + \dot{\theta}\vec{e_2'} + \dot{\psi}\vec{e_3}$**
- On vient d'exprimer le vecteur rotation suivant 3 axes principaux, donc on est capable de calculer l'énergie cinétique et le moment cinétique. Donc le lagrangien. Les

équations de Lagrange nous donnent 3 équations qui mènent à 2 invariants $p_\phi = L_z$ et $p_\psi = L_3$!

- **Gyroscope définition de Foucault** : « Le gyroscope est un appareil comportant un rotor tournant à grande vitesse et capable de mettre en évidence la rotation de son boitier ».
- **Roue à inertie :** Générateur de couple
-