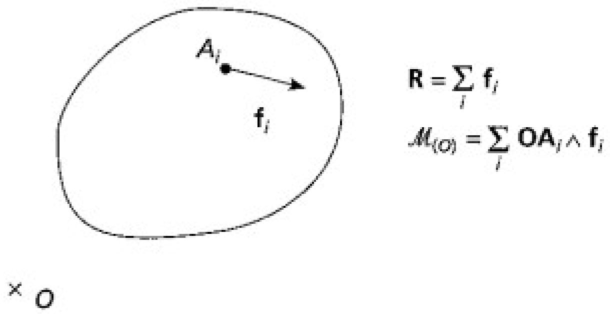
Torseur des actions mécaniques

Action mécanique : toute cause pouvant modifier le mouvement d'un système ou provoquer sa déformation (dans le cas non solide).

Dans le cas des points matériels, les actions mécaniques sont représentées par des forces (grandeurs vectorielles) dont l'origine physique provient in fine des quatre interactions fondamentales :

- gravitation → pesanteur
- électromagnétique → toute la cohésion de la matière solide !
- forte et faible → concerne plutôt la cohésion du noyau, donc hors-sujet !

Résultante et moment résultant en O d'une action mécanique pour un **système de points matériels** :



On voit que $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{R}$, i.e. $[\mathbf{R}, \mathbf{M}_O]$ forme un **torseur**.

Dans le cas des systèmes matériels, modélisable par une répartition continue de matière, chaque élément de volume $d\tau$ est soumis à une force élémentaire $d\mathbf{f}_A = \mathbf{f}_v \, d\tau$ et à un moment élémentaire $d\mathbf{M}_A = \boldsymbol{\mu}_v \, d\tau$. On peut penser à un ensemble de dipôles magnétiques plongés dans un champ **B** : l'action de **B** est de faire tourner les dipôles et de les déplacer vers les zones de champ fort.

L'action mécanique est alors modélisée par le **torseur**

de résultante $$\boldsymbol{R} = \iiint \boldsymbol{f}_v(A)\, d\tau$$ et de moment résultant

$$\boldsymbol{M} = \iiint \boldsymbol{\mu}_v(A)\, d\tau + \iiint \boldsymbol{OA} \wedge \boldsymbol{f}_v(A)\, d\tau$$

Exemples d’actions mécaniques

- **Pesanteur** : si le champ de pesanteur est uniforme sur l’échelle du système, on a

$$\mathbf{R} = M\,\mathbf{g} \qquad \mathbf{M}_O = \mathbf{OG} \times M\,\mathbf{g}$$

Autrement dit $\mathbf{M}_G = 0 \Rightarrow$ **le poids est réductible à une force unique de moment nul appliquée au centre de masse**

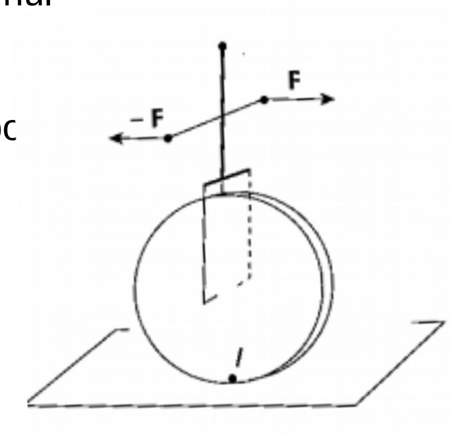
- La même conclusion peut être tirée pour la force d’inertie d’entraînement dans le référentiel du centre de masse : $\mathbf{R} = -M\,\mathbf{a}_{G/R}$. Résultat important pour la suite…

- **Forces de pression** : l’action d’un fluide au repos sur un solide se modélise par un ensemble de forces réparties en surface : $d\mathbf{f} = -P\,dS\,\mathbf{n}$ (normale à la surface)

  Un célèbre théorème nous dit que la résultante **R** de cette action est ascendante et s’oppose au poids du volume de fluide « déplacé ». Son point d’application (là où le moment des forces de pression est nul) s’appelle le centre de poussée, il est souvent différent du centre de masse.

- **Couple** : action mécanique dont la résultante est nulle mais le moment non nul

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{O'O} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O = \mathbf{\Gamma}$$



  - Un couple est équivalent à n’importe quel système de deux forces oppo d’action disjoints.
  - Utile pour les moteurs par exemple…

  De manière générale, un torseur d’action mécanique dont les composantes sont **R** et $\mathbf{M}_O$ se décompose en un :

    - Torseur de moment nul <=> force unique **R** appliquée en O
    - Couple de résultante nulle, de moment $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{M}_O$

Théorèmes généraux de la mécanique des systèmes

Etant donné un système matériel **fermé** dont le mouvement est caractérisé dans un référentiel *R* par le torseur dynamique de composantes :

- Résultante dynamique **S** ;
- Moment dynamique $\boldsymbol{\delta}_O$ en un point quelconque O (fixe ou non dans *R*)

Ce système est soumis à des actions extérieures de résultante $\mathbf{R}_{ext}$ et de moment $\mathbf{M}_{O,ext}$.
Alors, si *R* est un référentiel **galiléen**, on a les égalités :

$$\boxed{d\mathbf{P}/dt = \mathbf{S} = \mathbf{R}_{ext} \qquad \boldsymbol{\delta}_O = \mathbf{M}_{O,ext} = d\mathbf{L}_O/dt + \mathbf{v}_O \times \mathbf{P}}$$

Ceci constitue le **principe fondamental de la dynamique des systèmes matériels**. C'est une extension des théorèmes de la quantité de mouvement et du moment cinétique valables pour les systèmes de points matériels à tout type de systèmes matériels qu'ils soient réductibles à un ensemble de points ou non (exemple : substance aimantée, diélectrique… modélisable par un ensemble de dipôles).

Remarques :

- Si le référentiel R n'est pas galiléen, il convient de rajouter dans le bilan des forces extérieures les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis…

- Dans le cas d'un solide décrit par au plus 6 degrés de liberté, ces deux égalités vectorielles suffisent à déterminer complètement le mouvement du solide dans le cas où les actions extérieures sont parfaitement connues.

- Il est facile de démontrer que si deux systèmes (S_1) et (S_2) sont en interaction, leur union formant un système isolé ($\mathbf{R}_{ext} = 0$, $\mathbf{M}_{O,ext} = 0$) alors

  $$\mathbf{R}_{12} + \mathbf{R}_{21} = 0 \qquad \mathbf{M}_{O,12} + \mathbf{M}_{O,21} = 0$$

  où $\mathbf{R}_{12}$ et $\mathbf{M}_{O,12}$ représente le torseur des actions exercées par le système (S_1) sur (S_2). Ce résultat constitue le **théorème des actions réciproques**.
- En conséquence, la résultante et le moment résultant des actions intérieures à un système sont nuls :

  $$\mathbf{R}_{int} = 0 \qquad \mathbf{M}_{O,int} = 0$$

Théorème du centre d'inertie – Conservation de la quantité de mouvement

Puisque, de manière très générale, $\mathbf{P} = M\,\mathbf{v}_G$ la première égalité du PFD devient :

$$\boxed{M\,\mathbf{a}_G = \mathbf{R}_{ext}}$$

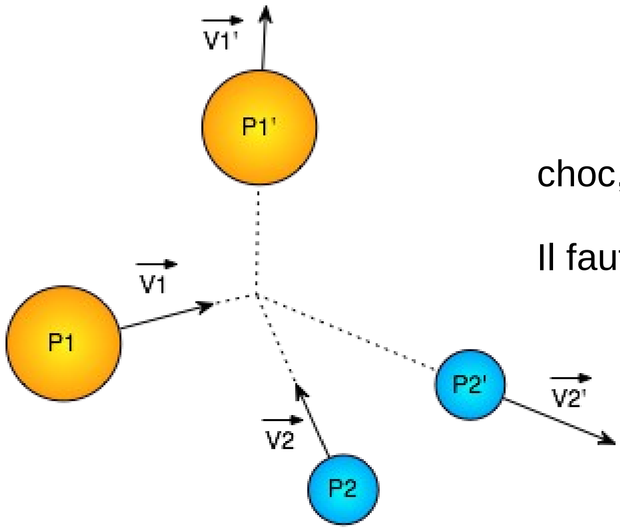
Ce résultat, analogue à celui de la mécanique du point, justifie l'introduction du centre de masse et toute la mécanique du point !

Conservation de la quantité de mouvement :

Lorsqu'un système est isolé, ie soumis à aucune action mécanique extérieure, ou pseudo-isolé ($\mathbf{R}_{ext} = 0$), sa quantité de mouvement **P** se conserve au cours du temps.

Le centre de masse a donc un mouvement rectiligne et uniforme

Exemple : collision entre deux billes



$$M_1\,\mathbf{v}_1 + M_2\,\mathbf{v}_2 = M_1\,\mathbf{v'}_1 + M_2\,\mathbf{v'}_2$$

Cette relation ne suffit pas à déterminer les vitesses après le choc, même si celui-ci a lieu à 1 dimension.

Il faut faire une hypothèse supplémentaire sur la nature de la collision :
conservation de l'énergie cinétique (**choc élastique**)
ou 1 seule vitesse après collision (**choc parfaitement mou**).

La conservation de la quantité de mouvement se généralise pour les particules relativistes et même les photons
⇒ **effet Compton** = collision élastique électron – photon.

Théorème du moment cinétique par rapport à un point fixe

Le plus souvent, on choisit un point O fixe dans le référentiel R. Dans ce cas, le théorème du moment cinétique s'écrit

$$d\mathbf{L}_O/dt = \mathbf{M}_{O,ext}$$

Théorème du moment cinétique dans le référentiel du centre de masse :

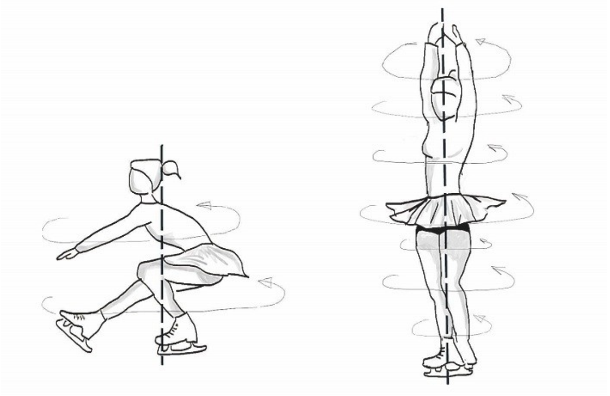
Un cas particulièrement utile et important est l'application du TMC dans le référentiel *R** en translation par rapport à R et dans lequel le point G est fixe.

On montre que $d\mathbf{L}^*/dt = \mathbf{M}_{G,ext}$

Il n'est pas question ici de prendre en compte les forces d'inertie même si *R** n'est pas galiléen car la force de Coriolis est nulle (translation) et la force d'inertie d'entraînement est réductible à une force unique appliquée en G.

Conservation du moment cinétique :

Pour un système isolé, $\mathbf{M}_{O,ext} = 0$ et le moment cinétique $\mathbf{L}_O$ (ou $\mathbf{L}^*$) se conserve au cours du temps.



Application

- **Rupture d'une cheminée d'usine** : extrait du Pérez de Mécanique (exercice 18.11)

- On modélise une cheminée d'usine par une tige de masse m et de longueur ℓ fixée au sol en un point O. Le torseur des actions de contact en O se réduit à une force unique **R** (pas de moment en O). On repère la tige dans le plan Oxy par l'angle θ qu'elle fait avec la verticale descendante (cf. figure).

  En appliquant les théorèmes généraux à la tige, trouver l'expression de la réaction **R** en fonction de m, g et θ.

- Initialement la tige est dans sa position d'équilibre θ = π mais est légèrement déstabilisée (coup de vent, tremblement de terre…). On cherche à évaluer la répartition des efforts qui s'exercent en un point quelconque K de la tige, situé à une distance r de O, pour savoir où est le point faible de rupture potentielle de la structure.

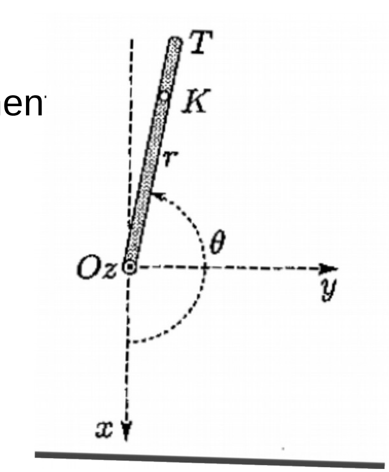
- On s'intéresse alors au système S_1 = {portion de tige OK} et on modélise les actions exercées sur S_1 par le reste de la tige KT par le torseur [$\mathbf{R}_{21}$, $\mathbf{M}_{21}$].

  Calculer le moment cinétique $\mathbf{L}_K$ du système S_1 par rapport au point K. On utilisera astucieusement la définition d'un torseur.

  Déduire du théorème du moment cinétique au point K que le momen

$$\mathbf{M}_{21} = (1/4)\, m\, g\, \ell \sin\theta\, u\, (1-u)^2\, \mathbf{e}_z$$

  où u = r/ℓ.



- Où la cheminée va-t-elle préférentiellement se rompre ?