

## Annexes du Chapitre 2

### Rappels et les relations utiles

#### Table de matières

Équations de Maxwell. Propagation des ondes électromagnétiques	9
Relations de continuité à une interface entre deux milieux	9
Formules utiles sur le régime de réflexion totale	10
Rappel sur les relations de Fresnel	12
Relation de dispersion : <i>une interface entre deux milieux semi-infinis</i>	14
Couplage optique par un réseau métallique en relief	16
Rappels sur la fonction de Lorentz	17
Rappel sur la règle de « $5\tau$ » de la loi décroissance en proportion de l'exposant	20
Caractéristiques de la performance de détecteurs thermiques conventionnels	21
Performance d'un capteur à effet SPR	22
Rappel sur la notion du contraste	23
Présentation du modèle numériques du capteur à SPR	24
Rappels utiles sur la théorie de solides	29
Énergie de Fermi des métaux	29
Vitesse de Fermi	29
Équation de mouvement d'un électron de conduction dans modèle de Drude	29
Conductivité électrique des métaux en hautes fréquences	29
Conductivité électrique $\sigma_0$ des métaux dans le modèle de Drude-Sommerfeld	30
Définition de la permittivité diélectrique d'un milieu métallique	31
Conductivité thermique d'une couche mince de gaz dans le régime du transfert thermique moléculaire	32
Transfer thermique par le champ évanescence : <i>cas de deux surfaces planes</i>	34
Forces mises en jeu à l'intérieure d'un gap de faible épaisseur	35
Approche d'un cantilever mécaniquement équivalent	37
Équation différentielle des modes propres de vibration d'un cantilever	39
Rappel sur le facteur de qualité de la résonance	41
Fréquence de résonance d'un cantilever immergé dans un liquide incompressible	42
Absorption du rayonnement par matière	43
Cantilever non-uniforme	47

## Équations de Maxwell. Propagation des ondes électromagnétiques

La théorie électromagnétique de Maxwell est maîtrisée depuis longtemps, sa base est bien détaillée dans les sources bibliographiques largement répandues. Afin de ne pas alourdir la partie principale de la thèse par les relations de base de la théorie d'électromagnétisme, il est utile de les mettre en annexe.

Objet	Relation correspondante	
Milieu non magnétique	$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$	
Milieu linéaire	$\vec{D} = [\varepsilon(\vec{r}, \omega)]\vec{E}$	
Milieu homogène	$\vec{D} = [\varepsilon(\omega)]\vec{E}$	
Milieu isotrope	$\vec{D} = \varepsilon(\omega)\vec{E}$	
Milieu sans des charges libres	$\varepsilon_{rel}(\omega) > 0$	
Onde plane progressive monochromatique	$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i(\omega.t - \vec{k}.\vec{r})}$	
1 <sup>e</sup> forme des équations de Maxwell	$div\vec{D} = 0$ $\vec{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$	$div\vec{B} = 0$ $\vec{rot}\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$
2 <sup>e</sup> forme des équations de Maxwell	$div\vec{E}_\omega = 0$ $\vec{rot}\vec{E}_\omega - i\omega\vec{B}_\omega = 0$	$div\vec{B}_\omega = 0$ $\vec{rot}\vec{B}_\omega + i\omega.\varepsilon.\mu_0\vec{E}_\omega = 0$
Équation de propagation d'une onde électromagnétique	$\Delta\vec{E}_\omega + \omega^2 \varepsilon\mu_0\vec{E}_\omega = \vec{0}$	

## Relations de continuité à une interface entre deux milieux

D'une forme généralisée, les relations de continuité (ou les conditions aux frontières) à une interface **S** séparant deux milieux s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{n} \times [\vec{E}]_S = -\vec{M}_S \\ \vec{n} \times [\vec{H}]_S = \vec{J}_S \\ \vec{n} \times [\vec{B}]_S = \rho_{mS} \\ \vec{n} \times [\vec{D}]_S = \rho_S \end{array} \right. \quad (1)$$

### Cas particuliers :

- Continuité de la composante tangentielle du champ électrique :

$$\vec{t} \cdot [\vec{E}_1 - \vec{E}_2] = 0, \text{ soit } E_{t1} = E_{t2} \quad (2)$$

- Continuité de la composante normale de l'induction magnétique :

$$\vec{n} \cdot [\vec{B}_1 - \vec{B}_2] = 0, \text{ soit } B_{n1} = B_{n2} \quad (3)$$

- Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique **D** :

$$\vec{D}_1 \cdot \vec{n}_{21} + \vec{D}_2 \cdot \vec{n}_{12} = \sigma \quad (4)$$

- Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique **H** :

$$\vec{t} \cdot [\vec{H}_1 - \vec{H}_2] = J_s \quad (5)$$

De ces relations on retient la continuité de la composante tangentielle du vecteur d'onde :

$$k_{x1} = k_{x2} = k_x \quad (6)$$

, où  $\sigma$  et  $J_s$  sont respectivement une densité surfacique de charges statiques et une densité de courant en surface ;  $\vec{n}_{12}$  et  $\vec{n}_{21} = -\vec{n}_{12}$  désignent des vecteurs unitaires normaux.

**Remarque** : si  $\sigma=0^1$ , la composante normale du vecteur déplacement **D** doit être alors continue :

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (7)$$

Par conséquent :

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \quad (8)$$

### Formules utiles sur le régime de réflexion totale

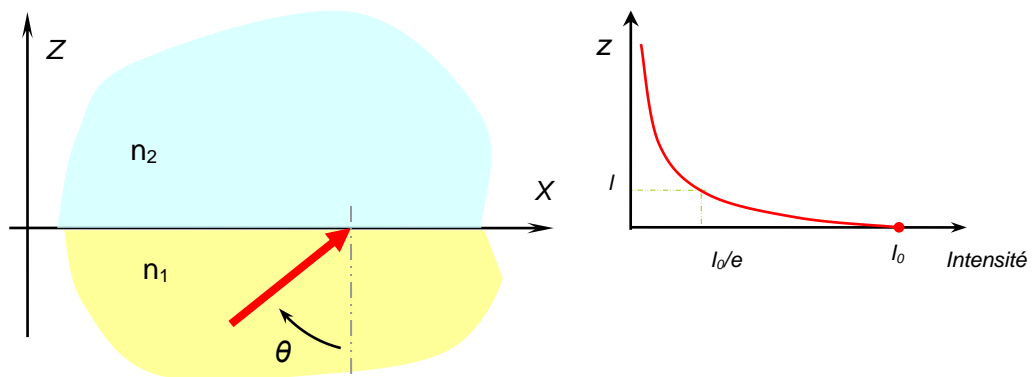


Fig. 1

<sup>1</sup> Rappelons qu'un plasma (gaz électronique) est globalement neutre.

1. Le champ électrique dans le milieu 2 diminue exponentiellement selon  $z$  (*mode évanescente*) :

$$E_2 \propto \exp \left[ - \frac{n_2 \omega \cdot \sqrt{(n_1/n_2)^2 \cdot \sin^2 \theta - 1}}{c} \cdot z \right] \quad (9)$$

2. La profondeur de pénétration du champ optique dans le milieu d'indice  $n_2$  vaut :

$$l = \frac{\lambda}{2\pi \sqrt{(n_1 \sin \theta)^2 - 1}} \quad \theta > \theta_{\text{Critique}} \quad (10)$$

Par exemple, pour  $\theta = 43^\circ$  ;  $n_{12} = n_1/n_2 = 1.5$  et  $\lambda = 633 \text{ nm}$ , on obtient :  
 $l \approx 467 \text{ nm}$

3. Si  $\theta \geq \theta_{\text{Critique}}$ , le flux d'énergie dans le milieu 2 tend vers zéro. En effet, dans ce milieu la composante  $z$  du vecteur de Poynting s'écrit :

$$\begin{aligned} S_z &= \vec{z} \cdot \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2\mu_0\mu} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{B}_2^*) \cdot \vec{z} = \frac{1}{2\mu_0\mu\omega} \text{Re}(\vec{E} \times (\vec{k}_2 \times \vec{E}_2)^*) \cdot \vec{z} = \\ &= \frac{1}{2\mu_0\mu\omega} \text{Re} \left( \vec{k}_2 |\vec{E}_2|^2 - \vec{E}_2^* (\underbrace{\vec{k}_2 \times \vec{E}_2}_{=0}) \right) \cdot \vec{z} = \frac{1}{2\mu_0\mu\omega} \text{Re} \left( \underbrace{\vec{z} \cdot \vec{k}_2}_{k_2 \cos \theta - \text{imaginaire}} |\vec{E}_2|^2 \right) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

4. Les changements de phase  $\delta$  pour les polarisations p et s ( $\delta_p$  et  $\delta_s$ ) s'écrivent comme suit :

$$\text{tg}(\delta_p) = \frac{2ab}{a^2 - b^2} \quad \text{et} \quad \text{tg}(\delta_s) = \frac{2cd}{c^2 - d^2} \quad (12)$$

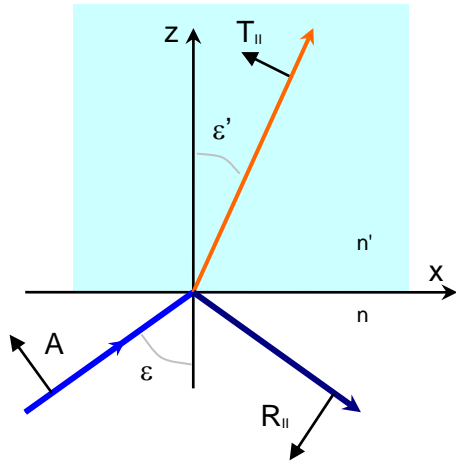
où

$$\left\{ \begin{array}{ll} a = n_2 \cos \theta & \text{et} \quad b = n_1 \sqrt{\left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta \right)^2 - 1} \\ c = n_1 \cos \theta & \text{et} \quad d = n_2 \sqrt{\left( \frac{n_1}{n_2} \sin \theta \right)^2 - 1} \end{array} \right. \quad (13)$$

## Rappel sur les relations de Fresnel

- pour la polarisation p (TM) :

(14)



1. En amplitude :

$$T_{||} = \frac{2n \cdot \cos \varepsilon}{n' \cdot \cos \varepsilon + n \cdot \cos \varepsilon'} = \frac{2 \sin \varepsilon' \cdot \cos \varepsilon}{\sin(\varepsilon + \varepsilon') \cdot \cos(\varepsilon - \varepsilon')}$$

$$R_{||} = \frac{n' \cdot \cos \varepsilon - n \cdot \cos \varepsilon'}{n' \cdot \cos \varepsilon + n \cdot \cos \varepsilon'} = \frac{\operatorname{tg}(\varepsilon - \varepsilon')}{\operatorname{tg}(\varepsilon + \varepsilon')}$$

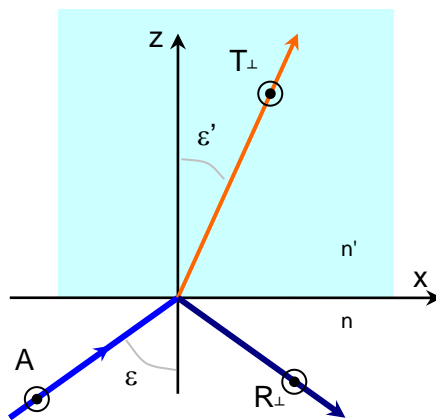
2. En énergie :

$$\rho = \frac{\operatorname{tg}^2(\varepsilon - \varepsilon')}{\operatorname{tg}^2(\varepsilon + \varepsilon')}$$

Fig. 2

- pour la polarisation s (TE) :

(15)



1. En amplitude :

$$T_{\perp} = \frac{2n \cdot \cos \varepsilon}{n \cdot \cos \varepsilon + n' \cdot \cos \varepsilon'}$$

$$R_{\perp} = \frac{n \cdot \cos \varepsilon - n' \cdot \cos \varepsilon'}{n \cdot \cos \varepsilon + n' \cdot \cos \varepsilon'}$$

2. En énergie :

$$\rho = R_{\perp} \text{ et } \tau = 1 - \rho$$

Fig. 3

-réflectivité d'une couche mince déposée sur un substrat transparent :

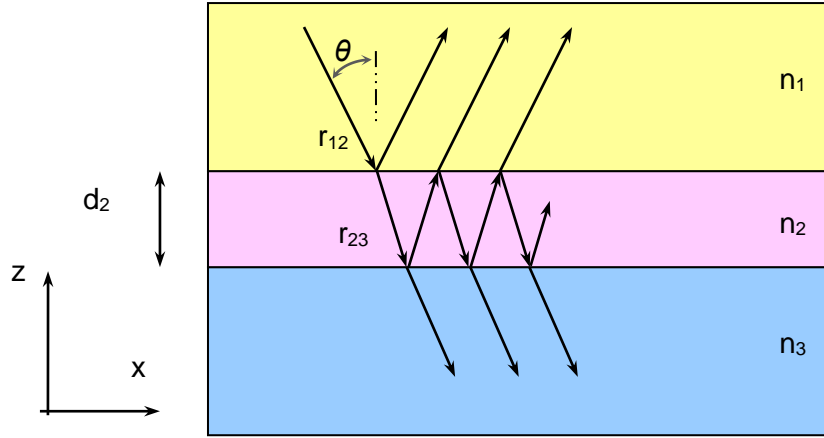


Fig. 4

$$R = \frac{r_{12} + r_{23} \exp(2ik_{2z}d_2)}{1 + r_{12}r_{23} \exp(2ik_{2z}d_2)} \quad (16)$$

, où  $r_{12}$  et  $r_{23}$  sont les coefficients de réflexion des interfaces 1-2 et 2-3, respectivement,  $d_2$  est l'épaisseur de la couche. La composante z du vecteur d'onde  $k_2$  s'écrit :

$$k_{2z} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta} \quad (17)$$

Les coefficients de réflexion pour l'onde **TM** (polarisation **p**) s'écrivent :

$$r_{12} = \frac{\varepsilon_2 k_{1z} - \varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 k_{1z} + \varepsilon_1 k_{2z}} \quad r_{23} = \frac{\varepsilon_3 k_{2z} - \varepsilon_2 k_{3z}}{\varepsilon_3 k_{2z} + \varepsilon_2 k_{3z}} \quad (18)$$

Les coefficients de réflexion pour l'onde **TE** (polarisation **s**) s'écrivent :

$$r_{12} = \frac{k_{1z} - k_{2z}}{k_{1z} + k_{2z}} \quad r_{23} = \frac{k_{2z} - k_{3z}}{k_{2z} + k_{3z}} \quad (19)$$

Si  $\text{Re}\{\varepsilon_2\} < 0$ ;  $|\text{Re}\{\varepsilon_2\}| \gg 1$  et  $\text{Im}\{\varepsilon_2\} \approx 0$ , la relation (16) au voisinage de l'angle de SPR devient :

$$R = 1 - \frac{4\Gamma_i \Gamma_r}{(k_x - k_{xr}^m)^2 + (\Gamma_i + \Gamma_r)^2} \quad (20)$$

Avec :

$$k_x = \frac{2\pi}{\lambda} n_1 \sin \theta \quad \text{et} \quad k_{xr}^m = k_x^0 + \Delta k_x = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_3}{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}} + \Delta k_x \quad (21)$$

Les termes  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_r$  spécifient, respectivement, l'atténuation du plasmons de surface par l'effet joule et par la réémission.

$$\text{À noter : } \Gamma_i = \text{Im}\{k_x^0\} \quad \text{et} \quad \Gamma_r = \text{Im}\{\Delta k_x\}$$

### Relation de dispersion : une interface entre deux milieux semi-infinis

Considérons une interface entre deux milieux semi-infinis diélectrique (1)/métal (2)<sup>2</sup> :

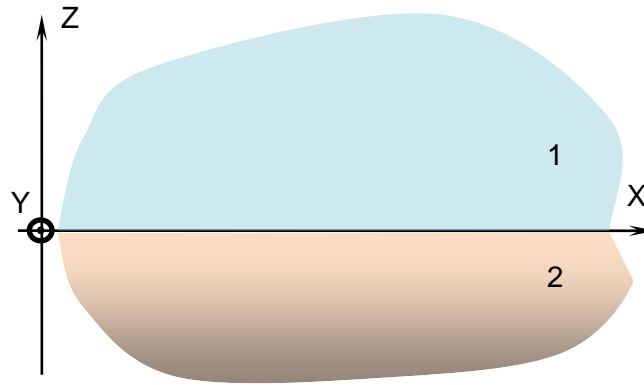


Fig. 5

Pour une faible densité surfacique de charges statiques et de courants en surface de l'interface, les relations de continuité (voir ci-dessus) s'écrivent :

$$H_{y1} = H_{y2} \quad (22)$$

$$E_{x1} = E_{x2} \quad (23)$$

$$D_{z1} = D_{z2} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 E_{z1} = \varepsilon_2 E_{z2} \quad (24)$$

Par ailleurs :

$$\text{rot} \mathbf{H} = \partial_t \mathbf{D} \quad (25)$$

Soit :

---

<sup>2</sup> Dans le cas d'un capteur micromécanique, le milieu 1 est l'air ( $\varepsilon=1$ ) et le milieu 2 est une couche d'un métal noble.

$$ik_{z1}H_{y1} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_1E_{x1} \quad \text{et} \quad -ik_{z2}H_{y2} = -i\omega\epsilon_0\epsilon_2E_{x2} \quad (26)$$

Ce qui donne avec la relation (23) :

$$\frac{k_{z1}}{\omega\epsilon_0\epsilon_1}H_{y1} + \frac{k_{z2}}{\omega\epsilon_0\epsilon_2}H_{y2} = 0 \quad (27)$$

Alors (voir la relation (22)) :

$$\frac{k_{z1}}{\epsilon_1} + \frac{k_{z2}}{\epsilon_2} = 0 \quad (28)$$

Par conséquent, un mode SP ne peut exister que si les signes de parties réelles de permittivités diélectriques sont opposés (*par exemple, le milieu 1 est un diélectrique, dont  $\epsilon_1 > 0$  et le milieu 2 est un métal avec  $\epsilon_2 < 0$* ).

Dans un milieu diélectrique :  $k_x^2 + k_{z1}^2 = \epsilon_1 k_0^2$  et dans un métal :  $k_x^2 + k_{z2}^2 = \epsilon_2 k_0^2$

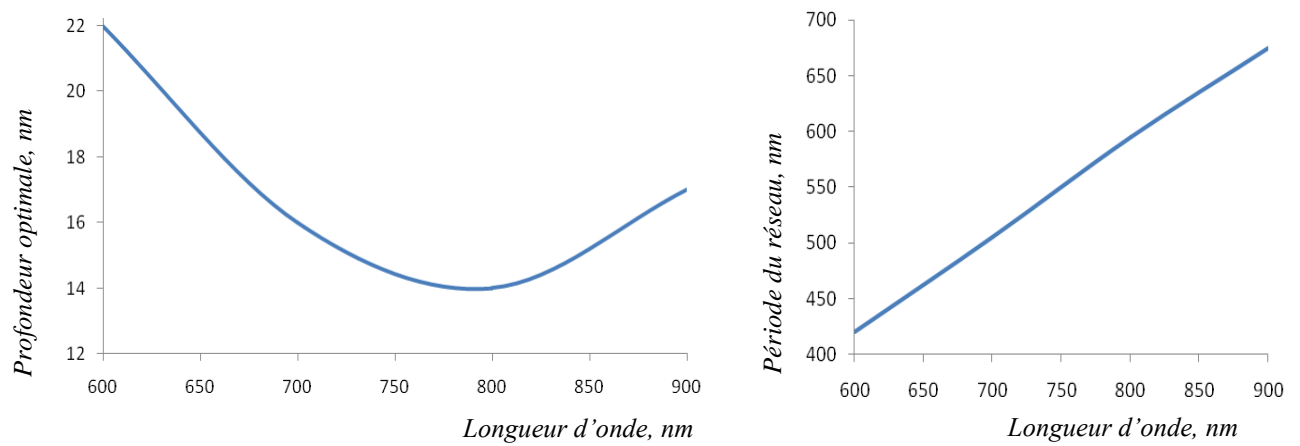
Finalement, on obtient une *relation de dispersion reliant le vecteur d'onde et la pulsation de l'onde* :

$$k_x = k_{sp} = k_0 \cdot \sqrt{\frac{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}} \quad (29)$$



## Couplage optique par un réseau métallique en relief

Les SPs peuvent être excités de manière très efficace par un faisceau en incidence normale de gamme de longueurs d'onde [600 ; 900] nm, si le période du réseau est entre 430nm et 680nm (données de calculs pour l'interface « or/eau »), [93].

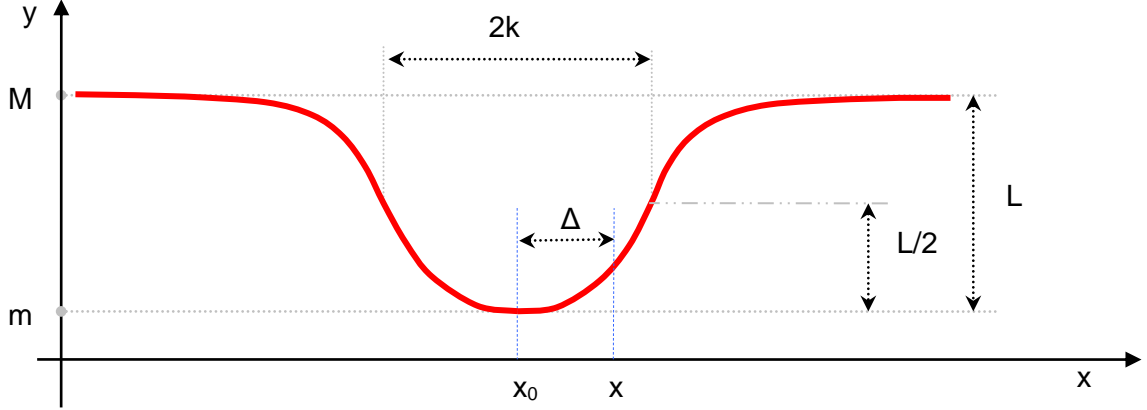


**Fig. 6.**

La forme optimale de ce réseau est sinusoïdale et la profondeur optimale varie dans la gamme [14 ; 22] nm.

## Rappels sur la fonction de Lorentz<sup>3</sup>

Cette fonction est illustrée sur la figure suivante.



$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = M - \frac{k^2 \cdot L}{\Delta^2 + k^2} \quad (30) \\ f'(x) = \frac{df}{dx} = 2 \cdot k^2 \cdot L \cdot \frac{\Delta}{(\Delta^2 + k^2)^2} \quad (31) \\ f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = 2 \cdot k^2 \cdot L \cdot \frac{k^2 - 3 \cdot \Delta^2}{(\Delta^2 + k^2)^3} \quad (32) \end{array} \right.$$

**Fig. 7**

1. La première dérivée de la fonction de Lorentz sera maximale si :

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \Delta^2 = \Delta_{\max}^2 = \frac{k^2}{3} \quad (33)$$

Alors :

$$f'(x)_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{8} \frac{L}{k} \quad (34)$$

Dans ce cas :

$$f(x) = M - \frac{3}{4} L \quad (35)$$

<sup>3</sup> Cette fonction spécifie le modèle du pic d'absorption, le plus utilisé dans les approches analytiques relatives à l'effet SPR (nous l'avons utilisée dans l'approche par faibles perturbations).

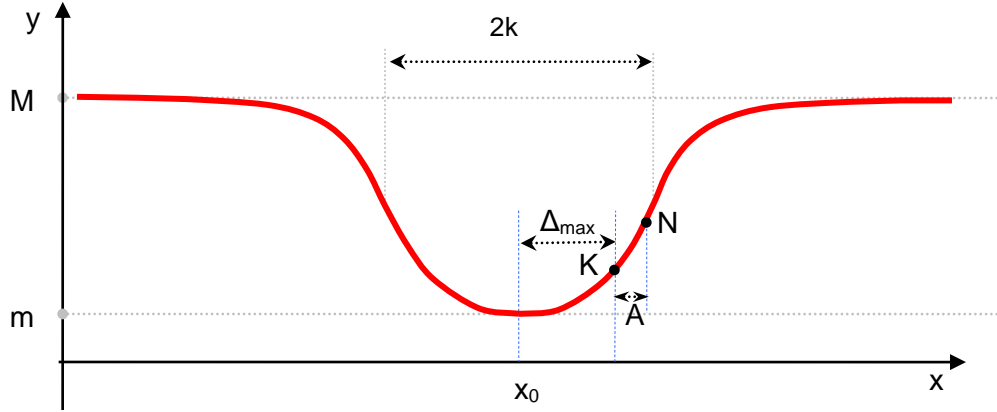


Fig. 8

En un point K, où la dérivée première est maximale ( $\Delta^2 = k^2/3$ ), la fonction de Lorentz peut être approximée (*série de Taylor*) comme suit :

$$f(x) = f(\Delta_K) + f'(\Delta_K) A \quad (36)$$

Le segment A représente une distance entre le point K et un point N, où cette approximation est faite.

En posant  $L=M=1$ , on obtient :

$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{8k} A \quad (37)$$

Le contraste défini comme le rapport  $c = \frac{f(\Delta + A) - f(\Delta)}{f(\Delta + A) + f(\Delta)}$  s'écrit, alors :

$$c = \frac{f(\Delta_K) + f'(\Delta_K) A - f(\Delta_K)}{f(\Delta_K) + f'(\Delta_K) A + f(\Delta_K)} = \frac{f'(\Delta_K) A}{2f(\Delta_K) + f'(\Delta_K) A} \quad (38)$$

Soit :

$$c = \frac{A}{\frac{4}{3\sqrt{3}}k + A} \quad (39)$$

La plus petite valeur de A qu'on peut mesurer (*la résolution*) sera, par conséquent :

$$A_{\min} \approx \frac{4}{3\sqrt{3}}k \frac{c_0}{1 - c_0} \quad (40)$$

où  $c_0$  dénote un seuil de contraste.

**Remarque :** dans la bibliographie relative à SPR, une autre forme d'écriture de la fonction de Lorentz est couramment utilisée :

$$f(x) = 1 - \frac{4\Gamma_i \Gamma_r}{(k_x - k_{xr}^m)^2 + (\Gamma_i + \Gamma_r)^2} \quad (41)$$

Afin de la convertir en une forme classique, on utilise les substitutions suivantes :

$$\begin{cases} M = 1 \\ k = \Gamma_i + \Gamma_r \\ L = \frac{4\Gamma_i \Gamma_r}{(\Gamma_i + \Gamma_r)^2} \\ \Delta = k_x - k_{xr}^m \end{cases} \quad (42)$$

Alors, l'équation (34) s'écrit comme :

$$f'(x)_{MAX} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{\Gamma_i \Gamma_r}{(\Gamma_i + \Gamma_r)^3} \quad (43)$$

Une dérivation de cette expression par  $\Gamma_r$  permet de la maximiser :

$$\begin{aligned} (f'(x))'_{\Gamma_r} &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \Gamma_i \cdot \left( \frac{\Gamma_r}{(\Gamma_i + \Gamma_r)^3} \right)' = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \Gamma_i \cdot \frac{(\Gamma_i + \Gamma_r)^3 - \Gamma_r \cdot 3(\Gamma_i + \Gamma_r)^2}{((\Gamma_i + \Gamma_r)^3)^2} = \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \Gamma_i \cdot \frac{\Gamma_i - 2\Gamma_r}{(\Gamma_i + \Gamma_r)^4} \end{aligned} \quad (44)$$

Alors,  $f'(x)_{MAX}$  sera maximale si :

$$\Gamma_r = \frac{\Gamma_i}{2} \quad (45)$$

Dans ce cas, la relation (43) s'écrit comme :

$$MAX_{\Gamma_r} \left( \frac{df(x)}{dx} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \cdot \frac{1}{\Gamma_i} \quad (46)$$

Finalement, en injectant la relation (45) dans la relation (40), on obtient la fonction de Lorentz « optimisée » pour l'imagerie à effet SPR :

$$f(k_x) = 1 - \frac{2\Gamma_i^2}{(k_x - k_{xr}^m)^2 + 2.25 \Gamma_i^2} \quad (47)$$

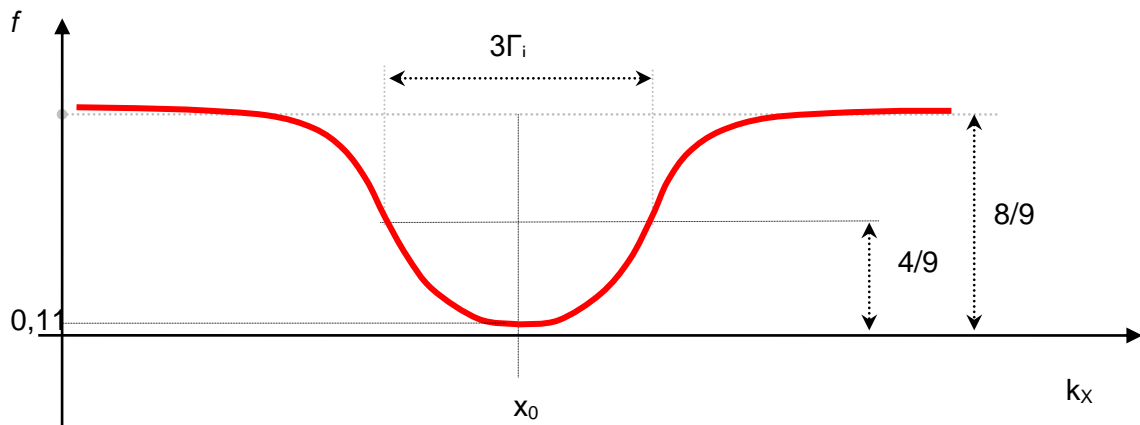
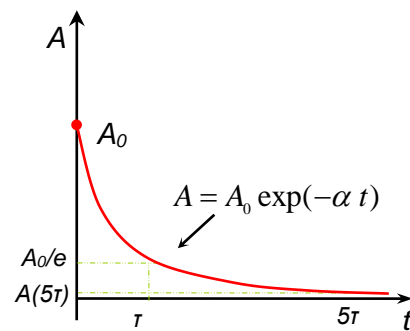


Fig. 9

### Rappel sur la règle de « $5\tau$ » de la loi décroissance en proportion de l'exposant

La Fig.10 donne l'interprétation graphique de cette loi.



$$\tau = 1/\alpha$$

$$A(5\tau) \approx 6 \cdot 10^{-3} A_0 \ll A_0 \Rightarrow A(t > 5\tau) \approx 0$$

Fig. 10

## Caractéristiques de la performance de détecteurs thermiques conventionnels

1. Réponse d'un détecteur	
<b>Sensibilité (Réponse) spectrale, <math>S_\lambda</math></b>	Le signal (courant électrique) à la sortie du détecteur par unité de puissance incidente à une longueur d'onde particulière.
<b>Longueur d'onde de coupure (cutoff wavelength)</b>	<p>La longueur d'onde la plus grande où la réponse du détecteur ou sa détectivité tombe à un pourcentage spécifié (par exemple, 1/e) de la réponse crête.</p> $\lambda_c = \frac{1.24 \cdot 10^3}{E_g \text{ (eV)}} \text{ nm} \quad (48)$ <p>où <math>E_g</math> est la largeur de la bande interdite du matériau photosensible du détecteur.</p>
<b>Constante de Temps</b>	Le temps nécessaire pour que le signal sur la sortie de détecteur atteigne le niveau prédéfini (couramment, 0.707) de sa valeur maximale après le début d'une puissance incidente fixée. Le temps caractéristique de réponse d'un bolomètre est typiquement 1-20 ms
2. Bruits propres du détecteur	
<b>Courant d'obscurité</b>	Courant électrique en sortie en absence du rayonnement incident, $i_B$
3. Rapport entre les bruits propres/la sensibilité d'un seul détecteur	
<b>Puissance équivalente de bruit, <math>NEP_\lambda</math> ; [W Hz<sup>-1/2</sup>]</b>	<p>La puissance du flux de rayonnement incident monochromatique, modulé sinusoïdalement, qui produit en sortie du détecteur un photocourant égal au courant d'obscurité à une longueur d'onde <math>\lambda</math> :</p> $NEP_\lambda = \frac{\text{Bruit}}{\text{Réponse}} = \frac{i_{\text{Bruit}}}{S_\lambda} \quad (49)$ <p>Autrement dit, c'est une puissance radiante, qui produit un rapport Signal sur Bruit de <b>un</b> à la sortie du détecteur.</p>
<b>Détectivité spectral, <math>D_\lambda</math>, W<sup>-1</sup></b>	$D_\lambda = (NEP_\lambda)^{-1} \quad (50)$
<b>D-Star, <math>D^*</math> ; W<sup>-1</sup>cm Hz<sup>1/2</sup></b>	<p>Le rapport signal-sur-bruit à une fréquence particulière et dans une bande passante de 1 Hz, quand un faisceau lumineux de 1 Watt tombe sur un détecteur de surface active 1 cm<sup>2</sup> :</p> $D^* = \frac{\sqrt{A}}{NEP} = D \cdot \sqrt{A} \quad (51)$ <p>où <math>A</math> est la surface sensible du détecteur. Plus la valeur <math>D^*</math> est élevée, meilleur est le détecteur.</p>
4. Performance d'un détecteur matriciel	
<b>NETD (Noise Equivalent Temperature Difference)</b>	$NETD = \frac{\sqrt{A_{\text{pixel}} \cdot \Delta f}}{D^* \cdot (dP_{\text{pixel}}/dT)} \text{ avec } \frac{dP_{\text{pixel}}}{dT} = \frac{A_{\text{pixel}} \cdot \tau}{4 \cdot FN^2} \cdot \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{dM}{dT} d\lambda \quad (52)$ <p><math>A_{\text{pixel}}</math> est l'aire d'un pixel ; <math>F</math> est le rapport F/D de l'objectif photo ; <math>\tau</math> est la transparence du système optique ; <math>M</math> est l'émittance de la source.</p>

## Performance d'un capteur à effet SPR

Le critère de performance d'un capteur à effet SPR, le plus utilisé par des chercheurs est donné dans [23, 40]. D'après ce critère, la crédibilité de mesure est caractérisée par un **facteur de bruit**, défini comme un rapport (**N**) entre la puissance équivalente du bruit du photodétecteur ( $NEP_{ph}$ )<sup>4</sup> et la puissance de l'onde incidente ( $P_{inc}$ ) à multicouche plasmonique :

$$N = \frac{NEP_{ph}}{P_{inc}} \quad (53)$$

En injectant le facteur de bruit dans l'équation (46) écrite en termes d'angle d'incidence, on obtient :

$$\lim(d\theta) = \frac{9N}{2\sqrt{3}} \Gamma \approx 2,6N\Gamma \quad (54)$$

La valeur **N** rapportée dans la bibliographie s'étend, typiquement, sur une plage de  $10^{-3}$  à  $10^{-2}$ . Notons qu'en règle générale, dans la bibliographie, son choix est fait de façon très arbitraire<sup>5</sup>, [23, 40].

Alors, la résolution angulaire typique vaut :

$$\lim(d\theta) \approx 0,026\Gamma \quad (55)$$

Considérons, à titre d'exemple, un dispositif de Kretschmann-Raether, où la couche plasmonique est faite d'argent ( $\epsilon = -18 + 0,5i$ ) d'épaisseur 50nm ; l'indice du prisme est  $n_p = 1.515$ . La largeur du pic SPR, dans ce cas, est d'environ  $0,1^\circ$ . Alors, la limite théorique de la résolution angulaire de ce capteur vaut  $0,003^\circ$  environ.

En ce qui concerne la résolution de lecture à effet SPR sur l'épaisseur (l'indice de réfraction) d'une couche, elle peut être écrite, tout simplement, comme un produit de la dérivée première de l'angle SPR par rapport à cette épaisseur (l'indice de réfraction) et la limite théorique de la résolution angulaire.

Il est évident que ce critère, similairement au notre, implique un seuil du contraste.

Par ailleurs, ce critère ne concerne que les capteurs « idéaux », où on remplace le pic SPR réel par une courbe de Lorentz et on suppose que ce pic se déplace en conservant sa forme initiale. Finalement, dans ce critère, on se limite à l'analyse de problème pour *un seul angle* d'incidence de l'onde lumineuse. Par conséquent, ce critère n'est pas adapté pour caractériser un système d'imagerie à effet de SPR. Cependant, on peut utiliser l'idée de base de ce critère (le concept du « seuil de contraste »).

---

<sup>4</sup> Ainsi, ce critère ne tient compte que le bruit du photo- détecteur.

<sup>5</sup> C'est pourquoi lors d'une étude bibliographique, on rencontre toujours une divergence entre les estimations de la résolution des capteurs à l'effet SPR.

## Rappel sur la notion du contraste

Le contraste d'une image quantifie la capacité de distinguer deux régions de l'image, par exemple, un objet sur le fond de l'image. Il est défini par un rapport de **Michelson**, [45-46] :

$$C = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}} \quad (56)$$

, où  $L_{\max}$  et  $L_{\min}$  sont respectivement la luminance maximale et minimale (celle de l'objet et du fond de l'image).

Pour une faible variation de la luminosité, cette expression s'écrit :

$$C = \frac{L_{\max} - L_{\min}}{L_{\max} + L_{\min}} \approx \frac{\Delta L}{2L_{\text{fond}}} \quad (57)$$

Dans le cas d'un capteur micromécanique, par exemple,  $\Delta L$  et  $L_{\text{fond}}$  sont respectivement un changement de la luminance causé par un fléchissement du cantilever et la luminosité du fond de l'image (soit de l'image d'un cantilever de référence).



## Présentation du modèle numériques du capteur à SPR

Dans ce paragraphe, on présente le logiciel de modélisation numérique développé dans le cadre de notre étude. Ce modèle numérique réalise l'algorithme de calcul matriciel du coefficient de réflexion du multicouche plasmonique du capteur proposé.

**Remarque :** on ne détaille pas ici des algorithmes auxiliaires (*comme, par exemple, l'interpolation directe et inverse etc.*) encapsulés au logiciel développé puisqu'ils sont bien connus dans d'autres domaines.

La figure suivante présente l'architecture des multicouches modélisées par ce logiciel : a) d'Otto ; b) de Kretschmann-Raether.

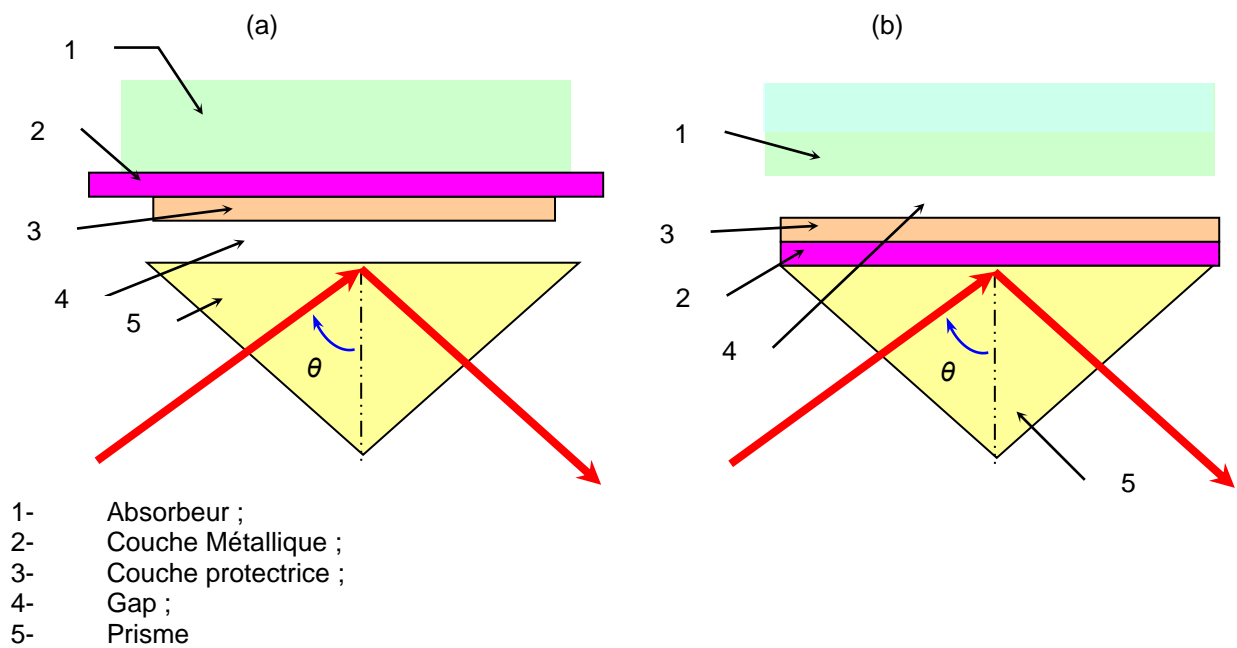


Fig. 11.

## Fenêtres de dialogue :

**1. Fenêtre Principale** : permet de définir des paramètres optiques du système de couplage optique, ainsi que du multicouche plasmonique. Dans cette fenêtre :

1- on calcule le coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence du faisceau de lecture (et l'angle de SPR) ;

2- on peut optimiser les indices de réfraction du système plasmonique ;

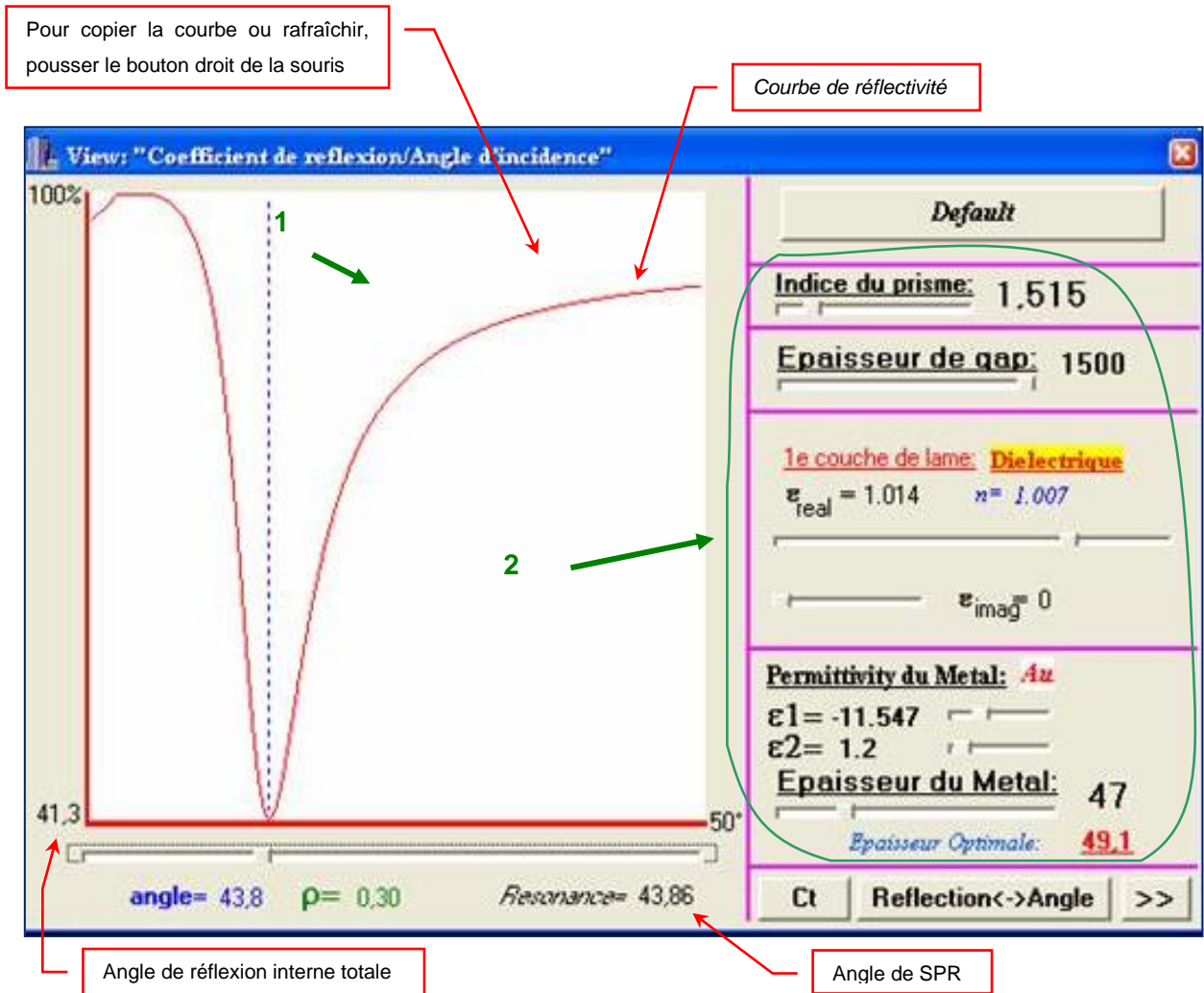
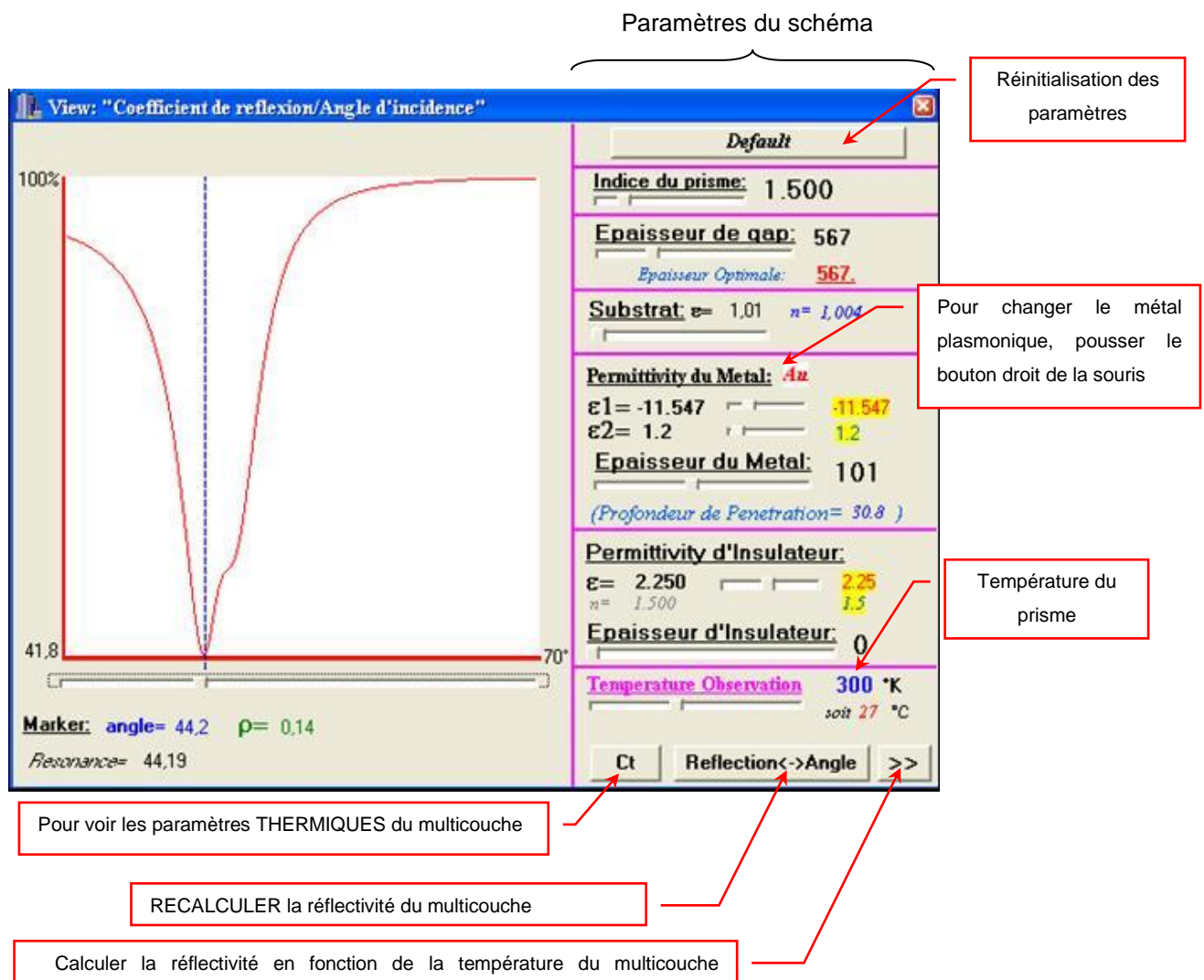


Fig. 12. Fenêtre principale (configuration de Kretschmann-Raether)



**Fig. 13.** Fenêtre principale (configuration d'Otto)

**2. Fenêtre « Paramètres thermiques » :** définit les paramètres thermiques (les capacités calorifiques et les conductivités thermiques des couches minces) de la partie thermosensible/micromécanique du détecteur.

Configuration de Kretschmann-Raether

Par défaut : d'or

Configuration d'Otto

Minimum détectable de l'énergie absorbée

Par défaut : du verre crown

**Notation/Remarque :**

- $C_v$  est la capacité calorifique volumique du matériau
- $C_{Total} = Volume \times C_v$
- $C_{Pixel}$  est la capacité calorifique du pixel
- Bilame par défaut = « Au / SiO<sub>2</sub> »

**Fig. 14. Fenêtre « Paramètres thermiques »**

**3. Fenêtre « Performance du capteur » :** donne les résultats de la simulation numérique : la réponse thermique et micromécanique du détecteur à SPR.

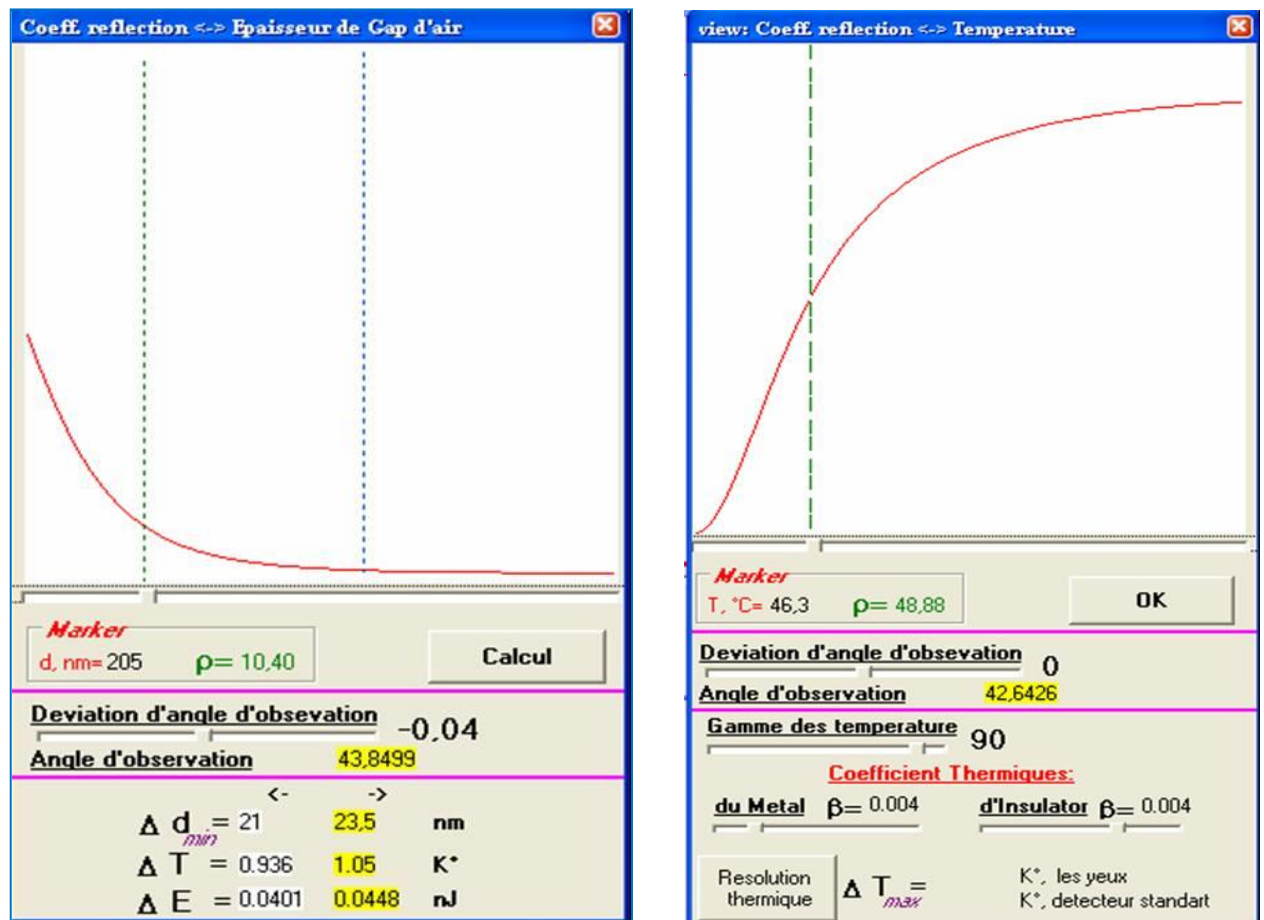


Fig. 15 Fenêtre « Performance du capteur »

## Rappels utiles sur la théorie de solides

### Énergie de Fermi des métaux

$$E_F(T) \approx E_F(0) \cdot \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \cdot \left( \frac{k \cdot T}{E_F(0)} \right)^2 \right] \quad (58)$$

où  $E_F(0) = \frac{\hbar^2}{2 \cdot m_e} \cdot (3 \cdot \pi^2 \cdot n_e)^{2/3}$ ,  $n_e$  et  $m_e$  sont respectivement la densité des électrons libre ( $\approx 10^{28}$ - $10^{29} \text{ m}^{-3}$ ) et la masse d'un électron ( $\approx 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$ ).

Dans le cas des métaux solides,  $k \cdot T \ll E_F(0)$  dans toute la gamme de températures ( $T \ll T_{\text{Fusion}}$ ). Par conséquent,  $E_F \approx \text{Const}(T) \approx E_F(0) \approx (5 - 12) \text{ eV}$

<b>Métal</b>	<b><math>E_F(0)</math>, eV</b>
Al	11,7
Ag	5,5
Au	5,53
Cu	7,04
Sn	10,2
Zn	9,46

### Vitesse de Fermi

$$v_F = \sqrt{\frac{E_F(T)}{m_e}} \quad (59)$$

### Équation différentielle de mouvement d'un électron de conduction dans le modèle de Drude

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_c \frac{dx}{dt} = -\frac{e}{m} E_0 \exp(i\omega t) \quad (60)$$

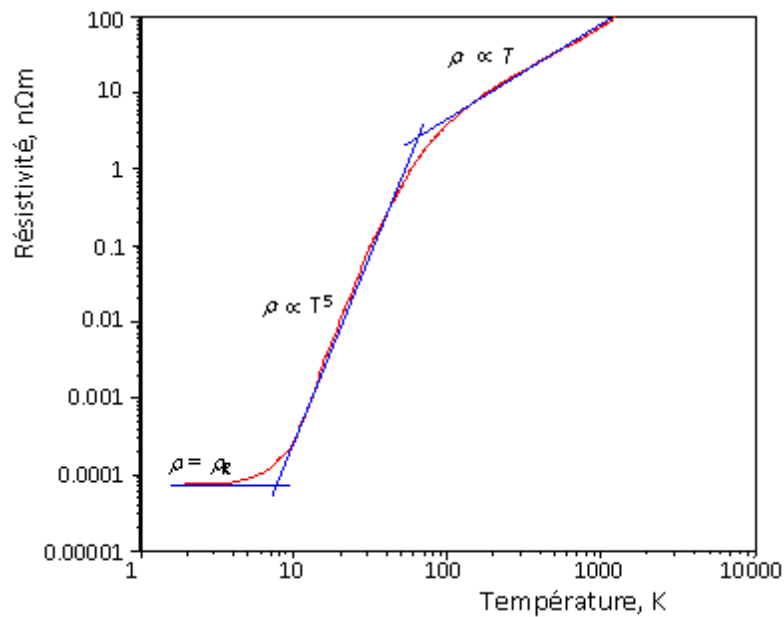
### Conductivité électrique des métaux en hautes fréquences, $\sigma(\omega)$

$$\sigma(\omega) = \frac{\sigma_0}{(1 - i \cdot \omega \cdot \tau)} = \frac{\sigma_0}{1 + \omega^2 \tau^2} + \frac{\sigma_0 \omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2} i \quad (61)$$

où  $\sigma_0 = \frac{n \cdot e^2 \cdot \tau}{m}$  est la conductivité du courant continu.

### Conductivité électrique $\sigma_0$ des métaux dans le modèle de Drude-Sommerfeld

<b>À très basse température</b> <i>-la loi de Mathiessen</i>	$\sigma = Const(T) \sim (n_i \cdot S_{eff})^{-1}$ <p>où <math>n_i</math> est la concentration des impuretés ; <math>S_{eff}</math> est la section efficace de dispersion d'un électron libre sur une molécule d'impureté.</p>
<b>A température ambiante</b> <i>-la formule de Sommerfeld</i>	$\sigma \propto T^{-1}$
<b>A température intermédiaire</b> <i>-La contribution des collisions du type « électron -phonons » dans la résistivité est prépondérante</i>	$\sigma_0(T) \sim T^{-5}$



**Fig. 16.** Exemple : la variation de la résistivité électrique ( $\rho = 1/\sigma$ ) du cuivre en fonction de la température

### Définition de la permittivité diélectrique $\varepsilon(\omega)$ d'un milieu métallique

La **permittivité diélectrique** est définie comme :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_{\infty} \left[ 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}} \right] \quad (62)$$

Rappelons que cette définition provient de l'équation d'une onde électromagnétique propagée dans un milieu diélectrique (**Helmholtz**) :

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) = -\underbrace{\mu_0 \varepsilon_0 \omega^2 \varepsilon_{\infty} \left[ 1 + \frac{i\sigma(\omega)}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\infty}} \right]}_{\varepsilon(\omega)} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \omega) \quad (63)$$

où  $\sigma(\omega) = E(\omega) / j(\omega)$  est sa conductivité en hautes fréquences.



## Conductivité thermique d'une couche mince de gaz dans le régime du transfert thermique moléculaire

Considérons deux plans parallèles séparés d'une distance  $L$  faible par rapport au libre parcours des molécules du gaz et maintenus à des températures  $T_1$  et  $T_2$ .

Lorsqu'une molécule de gaz entre en collision avec la surface froide à  $T_1$ , elle échange avec celle-ci une certaine quantité d'énergie. Étant donné qu'en général la durée du contact molécule-paroi n'est pas suffisante pour que s'établisse l'équilibre thermique, la molécule quittera la surface à une température  $T'_1$  supérieure à  $T_1$ . Sur la surface chaude à  $T_2$  pareillement, la durée du contact molécule-paroi n'est pas suffisante pour atteindre l'équilibre thermique. La molécule quittera donc la surface à une température  $T'_2$  inférieure à  $T_2$ . Afin de quantifier cet écart à l'équilibre thermique, on définit le coefficient d'accommodation :

$$a = \frac{E_r}{E_{\max}} = \begin{cases} = \frac{T'_2 - T'_1}{T_2 - T_1} & \text{pour la surface froide} \\ = \frac{T'_1 - T'_2}{T_1 - T_2} & \text{pour la surface chaude} \end{cases} \quad (64)$$

où  $E_r$  est énergie réellement échangée lors de la collision,  $E_{\max}$  est l'énergie maximum théoriquement échangeable.

Les coefficients d'accommodation dépendent à la fois de la nature du gaz, de la nature de la paroi et de la température. Le Tableau suivant donne des valeurs approximatives pour quelques gaz.

Tableau 1 : Coefficients d'accommodation des gaz différents, [82]

Température	Hélium	Hydrogène	Néon	Air
<b>300</b>	0,29	0,29	0,66	0,7-0,9
<b>78</b>	0,42	0,53	0,83	1,00

Lors d'un choc, le changement d'énergie totale de la molécule est égal au changement d'énergie interne, à laquelle s'ajoute un terme d'énergie cinétique :

$$\Delta \varepsilon = c_v (T'_2 - T'_1) + \frac{k_B}{2} (T'_2 - T'_1) \quad (65)$$

D'après la relation de Mayer,  $c_v$  s'exprime comme :

$$c_v = \frac{k}{\gamma - 1}, \text{ avec : } \gamma = c_p / c_v \quad \text{et} \quad c_p - c_v = R \quad (66)$$

Rappelons que si le mouvement des molécules possède  $l$  degré de liberté :

$$\gamma = \frac{l + 2}{l} \quad (67)$$

Alors :

$$\Delta \varepsilon = \frac{k_B}{2} \cdot \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (T'_2 - T'_1) \quad (68)$$

Pour un gaz diatomique ( $l=5$ ), on obtient  $\gamma=7/5=1,4$  et, par conséquent :

$$\Delta \varepsilon = 3 k_B (T'_2 - T'_1) \quad (69)$$

Le nombre de molécules heurtant l'unité de surface pendant l'unité de temps :

$$n_h = n \sqrt{\frac{RT}{2\pi M}} \quad (70)$$

Alors, la puissance transmise entre les deux parois par unité de surface :

$$q_{fm} = n_h \Delta \varepsilon = \frac{n k_B}{2} \cdot \sqrt{\frac{RT}{2\pi M}} \cdot \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (T'_2 - T'_1) \quad (71)$$

En rappelant que la pression du gaz s'exprime comme  $p = n k_B T$ , on déduit :

$$q_{fm} = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{2\pi M T}} \cdot \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (T'_2 - T'_1) \quad (72)$$

où  $T$  est la température du détecteur.

De l'équation (1) on déduit :

$$(T'_2 - T'_1) = (T_2 - T_1) \cdot \frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2 - a_1 a_2} \quad (73)$$

En supposant que les coefficients d'accommodation thermique des parois sont identiques  $a_1 = a_2 = a$ , on obtient :

$$(T'_2 - T'_1) = (T_2 - T_1) \cdot \frac{a}{2 - a} \quad (74)$$

Finalement, la puissance transmise entre les deux parois s'écrit comme :

$$q_{fm} = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{2\pi M T}} \cdot \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) \cdot \frac{a}{2 - a} \quad (75)$$

Le coefficient d'échange thermique en régime des molécules libres vaut :

$$\kappa_{fm} = \frac{p}{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{2\pi M T}} \cdot \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{a}{2-a} \quad (W.m^2.K^{-1}) \quad (76)$$

Afin d'estimer la conductivité thermique de l'air ( $\gamma=1,4$  ;  $a=0,755$  ;  $M=29 \cdot 10^{-3}$  kg) en régime moléculaire, on peut utiliser ainsi l'équation suivante :

$$\kappa_{fm} \approx 19,18 \cdot \frac{p}{\sqrt{T}} \stackrel{T=300K}{\approx} 1,1 p \stackrel{p=1atm}{\approx} 10^5 (W.m^2.K^{-1}) \quad (77)$$

Dans ce cas, la puissance transmise d'une paroi à l'autre vaut :

$$q_{fm} = G \cdot (T_2 - T_1) = \kappa_{fm} \cdot S \cdot (T_2 - T_1) \quad (78)$$

Pour un pixel  $300\mu m \times 50\mu m$  on obtient, par exemple :

$$G = \kappa_{fm} \cdot S \approx 1,1 \cdot 10^{-3} W / K \quad (79)$$

### Transfert thermique par le champ électromagnétique évanescent : cas de deux surfaces planes

Si l'épaisseur du gap est supérieure à **20** nm, la contribution du composant **p** de l'onde évanescente au transfert thermique peut être complètement ignorée, [83, 84]. Cela permet de simplifier considérablement le modèle du transfert thermique réalisé par les ondes évanescentes. Le flux de la chaleur échangée entre deux plaques, dans ce cas, vaut, [83, 84] :

$$\begin{aligned} S_z = & \frac{\hbar}{8\pi^3} \int_0^\omega d\omega \omega \int_{q < \omega/c} d^2 q \frac{\left\{1 - |R_{1s}(\omega)|^2\right\} \left\{1 - |R_{2s}(\omega)|^2\right\}}{\left|1 - e^{2ipd} R_{1s}(\omega) R_{2s}(\omega)\right|^2} \{n_1(\omega) - n_2(\omega)\} + \\ & + \frac{\hbar}{2\pi^3} \int_0^\omega d\omega \omega \int_{q > \omega/c} d^2 q e^{-2|p|d} \frac{\text{Im} R_{1s}(\omega) \text{Im} R_{2s}(\omega)}{\left|1 - e^{2|p|d} R_{1s}(\omega) R_{2s}(\omega)\right|^2} \{n_1(\omega) - n_2(\omega)\} + \underbrace{[s \rightarrow p]}_{\approx 0} \end{aligned} \quad (80)$$

Avec :

$$\begin{cases} n_1(\omega) = \left(e^{\hbar\omega/k_B T_1} - 1\right)^{-1} \text{ et } n_2(\omega) = \left(e^{\hbar\omega/k_B T_2} - 1\right)^{-1} \\ I_\omega^0 = \frac{\omega^2}{4\pi^3 c^2} \frac{\hbar\omega}{\left(e^{\hbar\omega/k_B T} - 1\right)} \quad (\text{Distribution statistique de Boltzmann}) \\ \begin{cases} R_{is} = \frac{p - s_i}{p + s_i} \\ s_i = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon_i - q^2} \end{cases} \end{cases}$$

où  $\epsilon_i$  est la permittivité diélectrique du milieu  $i$  ;  $q$  dénote la composante du vecteur d'onde parallèle à la surface et  $p = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - q^2}$

## Forces mises en jeu à l'intérieure d'un gap de faible épaisseur

Les forces agissant à l'intérieure du gap d'air les plus importantes sont :

1. **Les forces de capillarités ;**
2. **Les forces électrostatiques ;**
3. **Les forces attractives de Van der Waals.**

### Force de van der Waals :

Il s'agit d'une interaction de faible intensité entre atomes, molécules, ou une molécule et un cristal. A l'origine de ce phénomène quantique, on retrouve des fluctuations de la distribution électronique auxquelles s'associent des moments dipolaires instantanés. L'interaction de Van der Waals comporte trois composants principaux :

Effet de 1 <sup>e</sup> ordre	Type de liaison	Ordre de grandeur de l'énergie de liaison
Forces de Keesom ou effets d'orientation	entre molécules polaires	0,5 à 3 kJ/mol
Forces de Debye ou effets d'induction	entre molécules polaires et dipôles induits	0,02 à 0,5 kJ/mol
Forces de London ou effets de dispersion	entre dipôles instantanés	0,5 à 30 kJ/mol

Habituellement, on écrit l'énergie de la liaison de van der Waals sous la forme :

$$E_{tot} = E_{Keesom} + E_{Debye} + E_{London} = -\frac{1}{R^6} \cdot (W_{Keesom} + W_{Debye} + W_{London}) \quad (81)$$

Avec :

$$\begin{cases} W_{Keesom} = \frac{\mu_1 \cdot \mu_2}{3(4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon) \cdot k \cdot T} \\ W_{Debye} = \frac{\mu_1^2 \cdot \alpha_2 + \mu_2^2 \cdot \alpha_1}{(4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon)^2} \\ W_{London} = \frac{3}{4} \cdot \frac{h \cdot \nu \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2}{(4\pi \cdot \epsilon_0)^2} \end{cases}$$

, où  $\epsilon_0$ ,  $k$ ,  $T$ ,  $R$ ,  $\mu$ ,  $\alpha$ ,  $h$  et  $\nu$  sont respectivement la permittivité diélectrique du vide, la constante de Boltzmann, la température absolue, la distance moyenne entre les molécules considérées, moments

dipolaires des molécules considérées, la polarisabilité électrique, la constante de Plank et la fréquence électronique d'absorption

Pour calculer les forces de Van der Waals on doit dériver cette expression par rapport à R. Par conséquent, ces forces varient en  $R^{-7}$  : elles diminuent très vite avec la distance.

Notons que l'expression des forces de Van der Waals (81) peut être modifiée selon la nature des corps mis en interaction. Dans notre cas, l'une des couches est métallique (bon conducteur électrique) et le cantilever peut être fabriqué d'un matériau conducteur. Alors, on doit prendre en considération l'effet de la force de Casimir.

## Force de Casimir

Cette force agit entre deux plaques **conductrices** séparées par un très faible gap. A l'origine de ce phénomène, on retrouve des « fluctuations quantiques du vide »<sup>6</sup>.

La densité d'énergie du vide dans le résonateur formé par ces deux plaques est fonction du nombre de photons qui peuvent y exister. Plus les plaques sont proches, moins de photons peuvent exister dans le gap<sup>7</sup>, donc moins d'énergie peut être associée à l'état du vide. La force agissant entre ces deux plaques (*étant la dérivée de l'énergie par rapport à l'épaisseur du gap*) est donc **attractive**.

On peut montrer que la force de Casimir, pour les plaques des conducteurs parfaits, à la température nulle, vaut, [90] :

$$\frac{dF}{dA} = -\frac{\pi^2}{240} \cdot \frac{\hbar c}{L^4} \quad (82)$$

, où A et L sont respectivement, l'aire de surface des plaques et l'épaisseur du gap ( $A \gg L^2$ ). Soit, en unités SI :

$$F_{Casimir} = 10^{-27} \cdot \frac{A}{L^4} \quad (83)$$

Notons qu'en pratique, cette expression peut être utilisée sans être modifiée pour une température de 0K à 300 K, [90].

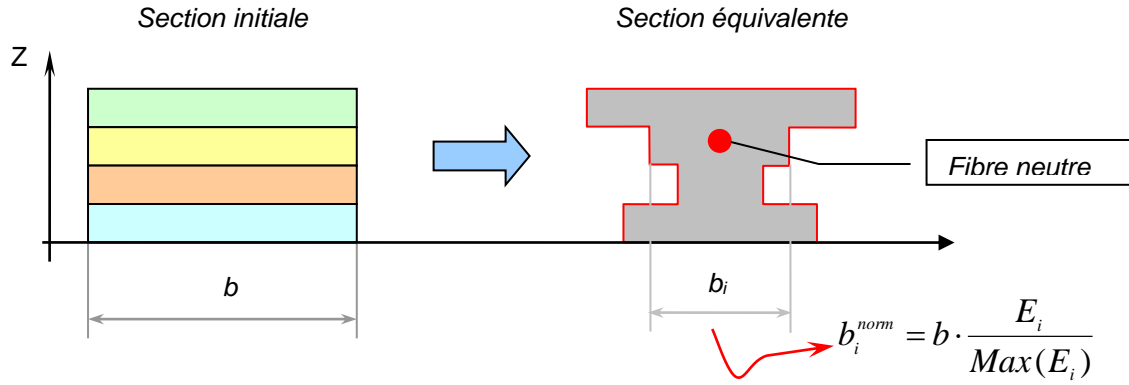
---

<sup>6</sup> Il s'agit des fluctuations du champ électromagnétique prévues par la théorie de l'électrodynamique quantique.

<sup>7</sup> En effet, en réduisant le gap, on exclut les photons, dont la longueur d'onde est supérieure à son épaisseur.

## Approche d'un cantilever mécaniquement équivalent

Dans un cas général, un micro- cantilever comporte des matériaux différents. Pour construire une section homogène équivalente à la section initiale, on normalise les largeurs de chaque couche mince par le module de Young :



**Fig. 17.** Section homogène mécaniquement équivalent ( $E_i$  est le module de Young de la  $i^{\text{e}}$  couche mince).

- a. La position de la fibre neutre  $Z_n$  (associée au barycentre des surfaces de la section équivalente) est donnée par la relation suivante :

$$Z_n = \frac{\sum_i S_i \cdot Z_i}{\sum_i S_i} \quad (84)$$

où  $S_i$  la section de la  $i^{\text{e}}$  couche mince.

- b. Le module de Young équivalent (associé au barycentre des modules de Young des différents matériaux) :

$$E_{Total} = \frac{\sum_i E_i \cdot V_i}{\sum_i V_i} \quad (85)$$

où  $V_i$  est le volume de la couche équivalente.

Notons que cette approche offre une autre façon d'obtenir la formule de la déflexion d'un bilame :

- le moment de flexion, incité par les contraintes  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  agissant aux sections des couches minces s'écrit :

$$M = b \cdot \int_{h_1} \sigma_1 z dz + b \cdot \int_{h_2} \sigma_2 z dz = - \left( \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) \cdot E_1 \cdot b \cdot h_1 \cdot \frac{h}{2} \cdot (1 + E_{12} \cdot h_{12})^{-1} \quad (86)$$

En équilibre mécanique, il doit être égal à :

$$M = - \frac{1}{R} \cdot (E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2) \quad (87)$$

où  $I_1$  et  $I_2$  sont les moments quadratique d'inertie des sections de couches minces 1 et 2 par rapport à l'axe passant par la fibre neutre. D'après le *théorème des axes parallèles* ces moments d'inertie s'écrivent comme :

$$\begin{cases} I_1 = \frac{b \cdot h_1^3}{12} + b \cdot h_1 \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot (1 + E_{12} \cdot h_{12})^{-2} \\ I_2 = \frac{b \cdot h_2^3}{12} + b \cdot h_2 \cdot (E_{12} \cdot h_{12})^2 \cdot \left( \frac{h}{2} \right)^2 \cdot (1 + E_{12} \cdot h_{12})^{-2} \end{cases} \quad (88)$$

Alors, la déflexion du cantilever vaut :

$$\Delta Z = \frac{L^2}{2 \cdot R} = \left( \frac{\sigma_1}{E_1} - \frac{\sigma_2}{E_2} \right) \cdot \frac{3L^2}{h_1} \cdot (h_{12} + h_{12}^2) \cdot \left[ 3 \cdot (1 + h_{12})^2 + (E_{21} \cdot h_{21} + h_{12}^2) \cdot (1 + E_{12} \cdot h_{12}) \right]^{-1} \quad (89)$$

### Équation différentielle des modes propres de vibration d'un cantilever

L'équation des vibrations d'un cantilever de masse linéique  $m$ , de modules d'Young  $E$  et de moment quadratique d'inertie  $I$  s'écrit :

$$\frac{d^4 z}{dx^4} + \frac{m}{EI} \frac{d^2 z}{dt^2} = 0 \quad (90)$$

En posant  $k^4 = \frac{m\omega^2}{EI}$  et  $Z(x,t) = Z(x) \cdot \exp(i\omega t)$ , on obtient :

$$\frac{d^4 Z}{dx^4} + k^4 Z = 0 \quad (91)$$

La solution de cette équation, dans le cadre de l'hypothèse de flexion faible, s'écrit sous la forme :

$$Z(x) = a \cdot \sin(kx) + b \cdot \cos(kx) + c \cdot sh(kx) + d \cdot ch(kx) \quad (92)$$

Pour un cantilever encasté à une de ses extrémités, les conditions aux limites s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z(0) = 0 = b + d \\ \frac{dZ}{dx}(0) = 0 = a + c \\ \frac{d^2 Z}{dx^2}(L) = 0 = k^2(-a \cdot \sin(kL) - b \cdot \cos(kL) + c \cdot sh(kL) + d \cdot ch(kL)) \\ \frac{d^3 Z}{dx^3}(L) = 0 = k^3(-a \cdot \cos(kL) + b \cdot \sin(kL) + c \cdot ch(kL) + d \cdot sh(kL)) \end{array} \right.$$

Ce système n'admet une seule solution ( $a, b, c, d$ ) que si son déterminant est nul.

Alors, l'équation aux pulsations propres définies par ces conditions aux limites :

$$ch(k_i L) \cdot \cos(k_i L) = -1 \quad (93)$$

Avec les racines :  $\alpha_0=1.875$  ;  $\alpha_1=4.695$  etc. qui définissent les modes et fréquences propres de vibration libre d'un cantilever (*autrement, les fréquences de vibration autorisée*).

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \alpha_i^2 \cdot \sqrt{\frac{EI}{m}} \cdot \frac{1}{L^2} \quad (94)$$

Dans le cas du cantilever de section rectangulaire, on obtient :



$$f_i^{rect.} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{12}} \alpha_i^2 \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{h}{L^2} \quad (95)$$

Par exemple, la fréquence du mode fondamental ( $i=0$  et  $\alpha_0=1,875$ ) vaut :

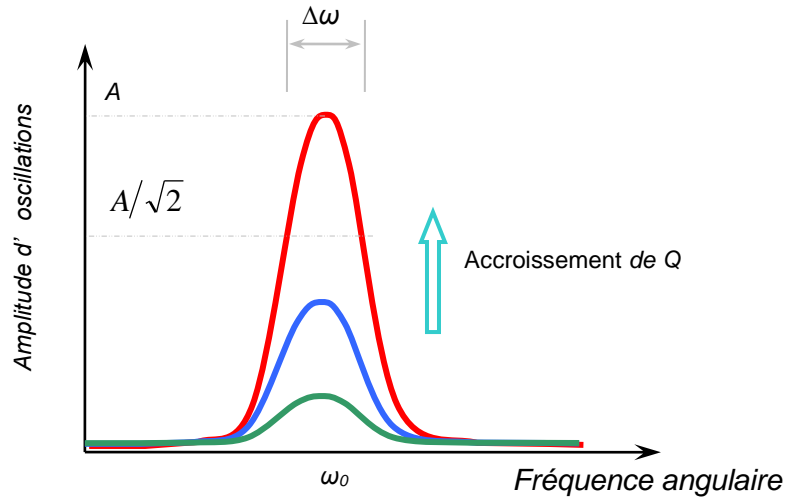
$$f_0^{rect.} = 0,161 \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho}} \cdot \frac{h}{L^2} \quad (96)$$

Le profil d'amplitude de déformée associé à chacune des fréquences propres (appelé mode propre de vibration) s'écrit sous la forme :

$$Z_i(x) = -Z_i(L) \frac{1}{2 \sin \alpha_i \operatorname{sh} \alpha_i} \cdot \left\{ (\sin \alpha_i - \operatorname{sh} \alpha_i) \cdot \left( \sin \left( \alpha_i \cdot \frac{x}{L} \right) - \operatorname{sh} \left( \alpha_i \cdot \frac{x}{L} \right) \right) + \right. \\ \left. + (\cos \alpha_i + \operatorname{ch} \alpha_i) \cdot \left( \cos \left( \alpha_i \cdot \frac{x}{L} \right) - \operatorname{ch} \left( \alpha_i \cdot \frac{x}{L} \right) \right) \right\} \quad (97)$$

## Rappel sur le facteur de qualité de la résonance

Le facteur de qualité de la résonance caractérise les pertes totales d'énergie mécanique par un oscillateur.



**Fig. 18** Facteur de qualité

Étant donné que le système « cantilever-substrat » possède un seul degré mécanique de liberté, le spectre de vibration mécanique obéit à une loi Lorentz (voir Fig.18).

$$|A(\omega)|^2 \propto \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega_0 \omega}{Q}\right)^2} \quad (98)$$

Dans cette relation, Q dénote le facteur de qualité de la résonance défini comme :

$$Q = \omega_0 / \Delta\omega \quad (99)$$

où  $\Delta\omega$  est la largeur du pic de résonance (correspondant à l'amplitude :  $A/\sqrt{2}$ )

Dans le cas d'un oscillateur de Lorentz :  $\Delta\omega = 2\pi \cdot \beta$ , où  $\beta$  est sa constante d'amortissement.

### Fréquence de résonance d'un cantilever immergé dans un liquide incompressible

$$f_{\text{liquide}} = \frac{f}{\sqrt{1 + \frac{\pi \rho_{\text{liquide}} b}{4 \rho_{\text{cantilever}} h}}} \quad (100)$$

où :  $b$ ,  $h$ ,  $f$ ,  $\rho_{\text{liquide}}$ ,  $\rho_{\text{cantilever}}$  sont respectivement la largeur, l'épaisseur du cantilever, sa fréquence de résonance mécanique, la densité du liquide et du matériau de cantilever, [92].

Dans le cas d'un cantilever rectangulaire, on obtient, alors :

$$f_i^{\text{rect.}} = \frac{1}{2\pi \cdot \sqrt{12}} \alpha_i^2 \cdot \sqrt{\frac{E}{\rho_{\text{cantilever}}}} \cdot \frac{h}{L^2} \cdot \left[ 1 + \frac{\pi \rho_{\text{liquide}} b}{4 \rho_{\text{cantilever}} h} \right]^{-1/2} \quad (101)$$

Soit :

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \alpha_i^2 \cdot \sqrt{\frac{k}{3m}} \cdot \left[ 1 + \frac{\pi \rho_{\text{liquide}} b}{4 \rho_{\text{cantilever}} h} \right]^{-1/2} \quad (102)$$

En dérivant cette formule par rapport à  $m$ , on déduit la fréquence de résonance du cantilever en fonction de la masse  $\Delta m$  ( $\Delta m \ll m$ ) absorbée par sa surface :

$$f_i^{\text{new}} = f_i - \Delta f_i = f_i - \frac{f_i}{2m} \cdot \Delta m_i = f_i \left( 1 - \frac{\Delta m_i}{2m} \right) \quad (103)$$

Ainsi, on constate que la sensibilité du cantilever augmente avec sa raideur.

## Absorption du rayonnement par la matière

### Équation de conduction de la chaleur

Dans cette étude, on se limite à la considération de l'interaction du rayonnement avec un matériau absorbant et isotrope. De plus, on suppose que le transfert thermique par convection soit négligeable. Dans ce cas, l'équation de conduction de la chaleur s'écrit comme :

$$\nabla^2 \cdot T(\vec{r}, t) - \kappa^{-1} \cdot \partial_t T(\vec{r}, t) = -K^{-1} \cdot A(\vec{r}, t) \quad (104)$$

Rappelons que cette équation peut être déduite de l'équation de conservation de la chaleur en tenant compte de la loi de Fourier sur le transfert de chaleur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{r}, t) + C_p \cdot \partial_t T(\vec{r}, t) = A(\vec{r}, t) \\ \vec{J}(\vec{r}, t) = -K \cdot \vec{\nabla} T(\vec{r}, t) \end{array} \right. \quad (105)$$

Dans ces relations, les notations utilisées ont la signification suivante :

$A(\vec{r}, t)$	Densité volumique de la puissance déposée au point $\vec{r}$
$T(\vec{r}, t)$	Température locale [K]
$\vec{J}(\vec{r}, t)$	Flux de chaleur par unité de surface
$C_p$	Capacité thermique par unité de volume [ $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]
$K$	Conductivité thermique du matériau [ $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ]
$\overline{\overline{K}}$	Tenseur de conductivité thermique
$\kappa = K/C_p$	Diffusivité thermique [ $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ]

La solution analytique généralisée de l'équation de conduction de la chaleur, dans le formalisme de fonctions de Green, s'écrit comme :

$$\Delta T(r, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_{r'} G(r, t | r', t') \cdot A(r, t) \cdot K^{-1} \cdot \kappa dr' \quad (107)$$

où  $G(r, t | r', t')$  est la fonction de Green associée aux **conditions aux limites** qui sont définies par la géométrie du problème.

Ainsi, pour trouver les solutions de l'équation de la chaleur, on doit spécifier, tout d'abord, les **conditions aux limites** associées au problème (*il s'agit du champ de température à l'instant initial aux frontières du corps solide*).

**Remarque :** *il est très important de noter que la forme analytique de ces solutions est excessivement complexe, même pour les corps solides de géométrie primitive. Pour cette raison, généralement, elle ne représente qu'un intérêt purement « académique », illustratif. Notons, par ailleurs, que la seule méthode efficace de modélisation du problème (107) est l'approche numérique (par les calculs en éléments finis).*

Dans cette étude sur l'interaction entre le rayonnement et le matériau, on se limite à l'analyse d'une géométrie la plus simple : une plaque semi infinie ( $z > 0$ ) :

En fonction de l'efficacité d'absorption du rayonnement par le matériau, on peut distinguer trois cas généraux :

A Génération volumique de la chaleur, qui correspond à une faible absorption du rayonnement en  $z = 0$  ;

B Génération surfacique de la chaleur. Dans ce cas, le rayonnement est absorbé dans une couche d'épaisseur infiniment mince.

C Chaleur induite par un faisceau atténué exponentiellement le long de l'axe **Z**.

**A.** Dans le premier cas, le flux de chaleur à travers la surface compense les pertes par rayonnement thermique. Alors, en admettant que la température de surface est très proche de la température du milieu environnant (*la condition de Dirichlet*), on peut formuler la condition aux limites de manière suivante :

$$\partial_z T(r, t) = 0 \quad (108)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \partial_z T(r, t) & \stackrel{\text{Loi de Stefan- Boltzmann}}{=} \frac{\sigma \cdot \varepsilon_{\text{surface}}}{K} \cdot \left( T^4(r, t) \Big|_{z=0} - T_e^4 \right) \stackrel{\text{Série de Taylor}}{\approx} \\ & \approx 4 \cdot \frac{\sigma \cdot \varepsilon_{\text{surface}}}{K} \cdot T_e^3 \cdot \left( T(r, t) \Big|_{z=0} - T_e \right) = 0 \end{aligned}$$

Dans ces relations, les notations utilisées ont la signification suivante :

$T_e$	Température du milieu environnant
$\sigma$	Constante de Stefan- Boltzmann
$\varepsilon_{\text{surface}}$	Émissivité de la surface

La fonction de Green correspondant à cette condition aux limites s'écrit :

$$G(r, t | r', t') = [4\kappa\pi(t-t')]^{-3/2} \cdot \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4\kappa(t-t')} - \frac{(y-y')^2}{4\kappa(t-t')}\right] \times \left[ \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\kappa(t-t')}\right] + \exp\left[-\frac{(z+z')^2}{4\kappa(t-t')}\right] \right] \quad (109)$$

**B.** Dans le deuxième cas (*la génération surfacique de la chaleur*), l'énergie générée en volume est nulle ( $\vec{A}(r, t)$ ). La condition aux limites s'écrit, alors :

$$\partial_z T(r, t) = \underbrace{\frac{\sigma \cdot \varepsilon_{\text{surface}}}{K} \cdot \left( T^4(r, t) \Big|_{z=0} - T_e^4 \right)}_{=0} - \frac{1-R}{K} \cdot I(r, t) \Big|_{z=0} \approx -\frac{1-R}{K} \cdot I(r, t) \Big|_{z=0} \quad (110)$$

où R est le coefficient de réflexion de la surface.

La solution de l'équation de la chaleur, dans ce cas, s'écrit :

$$\Delta T(r, z, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_0^{\infty} r' dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{2\kappa f(r)q(t')}{[4\kappa\pi(t-t')]^{3/2}} \times \exp\left\{-\frac{r^2 + r'^2 + z^2 + 2rr'\cos\varphi'}{4\kappa\pi(t-t')}\right\} \frac{I_{\max} \cdot (1-R)}{K} \quad (111)$$

C. Enfin, dans le troisième cas, le terme décrivant la source peut s'écrire :

$$A(r, t) = I_{\max} \cdot (1-R) \cdot \alpha \cdot e^{-\alpha \cdot z} \cdot f(r) \cdot q(t), \quad (112)$$

où :

$I_{\max}$	Intensité maximale du rayonnement incident
$\alpha$	Coefficient d'absorption
$f(r)$ et $q(t)$	Distributions spatiale et temporelle du rayonnement incident

La solution de l'équation de la chaleur, dans ce cas, s'écrit :

$$\Delta T(r, z, t) = \int_{-\infty}^t dt' \int_0^{\infty} r' dr' \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\infty} dz' \frac{\kappa f(r)q(t')}{[4\kappa\pi(t-t')]^{3/2}} \times \exp\left\{-\frac{r^2 + r'^2 + z^2 + 2rr'\cos\varphi'}{4\kappa\pi(t-t')}\right\} \times \left[ \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4\kappa(t-t')}\right] + \exp\left[-\frac{(z+z')^2}{4\kappa(t-t')}\right] \right] \times \frac{I_{\max} \cdot (1-R)\alpha \exp(-\alpha z')}{K} \quad (113)$$

⇒ Pour extraire de ce modèle les conclusions utiles en pratique, étudions la réponse thermique d'un absorbeur massif dont le coefficient d'absorption  $\alpha \rightarrow \infty$ . Ce qui corresponde au modèle de génération en surface (voir ci-dessus, le deuxième cas). Admettons, de plus, que le faisceau incident est un pulse de durée  $\tau$ , uniforme sur toute la surface de l'absorbeur :

$$\begin{cases} f(r') = 1 \\ q(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

Cette configuration permet de simuler un pixel thermique avec une précision admissible en pratique. Dans ce cas, la solution (113) de l'équation de la chaleur devient :

$0 \leq t \leq \tau$	$\Delta T(z, t) = \frac{2 \cdot I_{\max} \cdot (1-R)}{K} \cdot (\kappa\tau)^{1/2} \cdot \text{ierfc}\left[\frac{z}{2 \cdot (\kappa t)^{1/2}}\right]$
$t > \tau$	$\Delta T(z, t) = \frac{2 \cdot I_{\max} \cdot (1-R)}{K} \cdot (\kappa\tau)^{1/2} \cdot \left\{ (t\tau^{-1})^{1/2} \cdot \text{ierfc}\left[\frac{z}{2 \cdot (\kappa t)^{1/2}}\right] - (t\tau^{-1} - 1)^{1/2} \cdot \text{ierfc}\left[\frac{z}{2 \cdot (\kappa(t-\tau))^{1/2}}\right] \right\}$

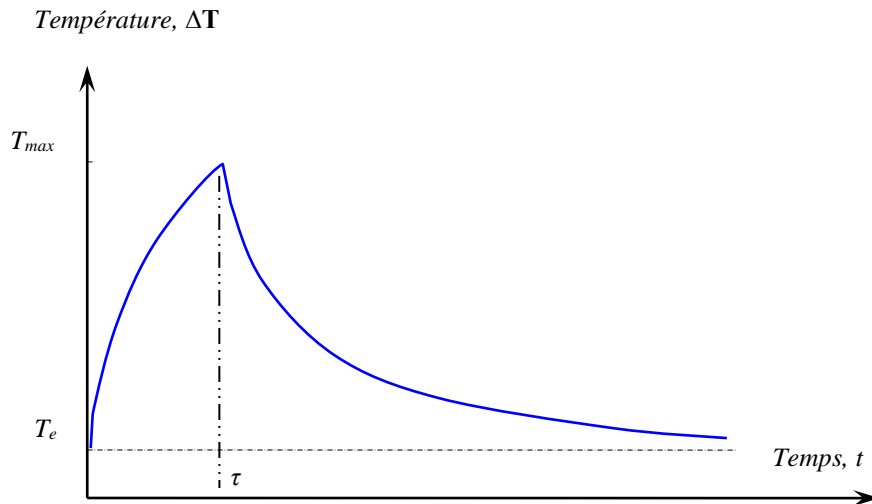
Dans ces relations, les notations utilisées ont la signification suivante :

$ierf(x)$	$\int_x^{\infty} erf(y)dy$
$erfc(x)$	$1 - erf(x)$
$erf(x)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi$

Ainsi, la variation de température en surface ( $z=0$ ) s'écrit comme :

$0 \leq t \leq \tau$	$\Delta T(0, t) = \frac{2 \cdot I_{\max} \cdot (1 - R)}{K} \cdot \left( \frac{\kappa t}{\pi} \right)^{1/2}$
$t > \tau$	$\Delta T(0, t) = \frac{2 \cdot I_{\max} \cdot (1 - R)}{K} \cdot \left( \frac{\kappa \tau}{\pi} \right)^{1/2} \cdot \left\{ (t \tau^{-1})^{1/2} - (t \tau^{-1} - 1)^{1/2} \right\}$

La Figure suivante donne l'illustration simplifiée de cette équation :

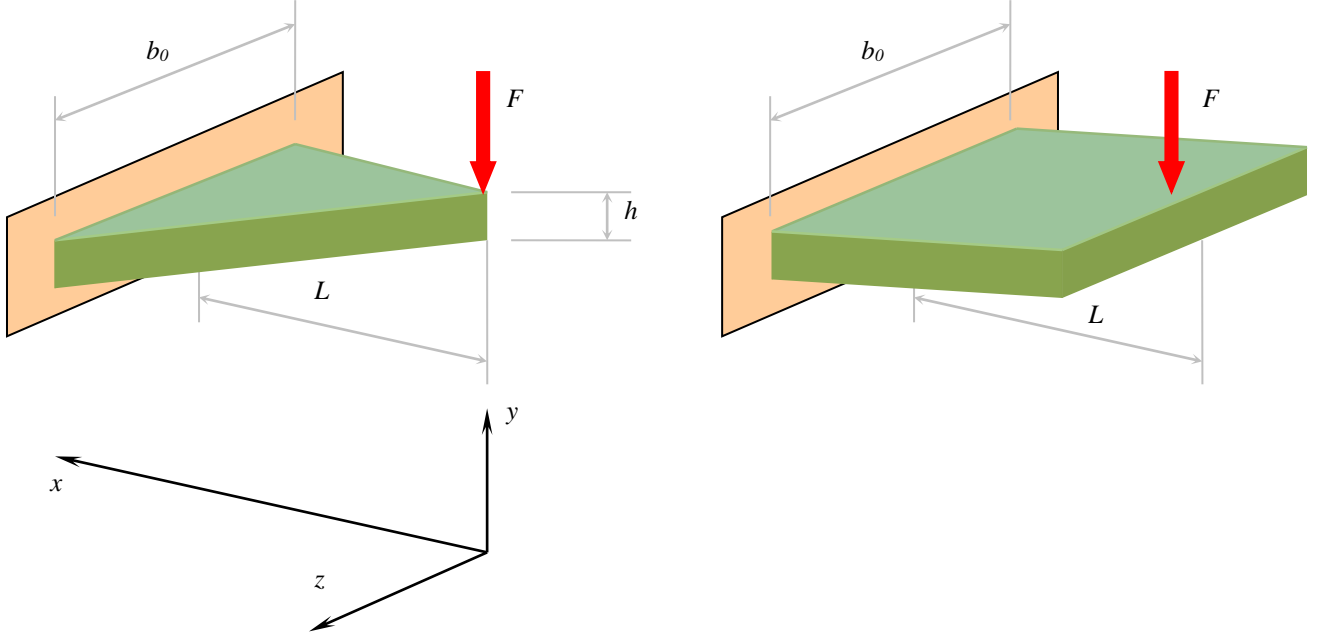


**Fig. 19.** Variation de la température (*réponse thermique*) en surface de plaque semi infinie déclenchée par un pulse du rayonnement incident de durée  $\tau$ ).

On peut constater que la montée de température des corps se déroule généralement plus vite que la relaxation vers l'environnement froid. Par conséquent, en pratique, le temps de montée peut être complètement ignoré.

## Cantilever non-uniforme

Un cantilever, dont la section et/ou le module d'élasticité diminuent lorsque l'on se rapproche de l'extrémité libre, montre une flèche plus importante que celui de section et/ou de module d'élasticité constante. On se limitera ici au cas d'un cantilever triangulaire contraint par une force  $F$  appliquée sur l'extrémité libre, exemple simpliste, mais suffisant pour illustrer cette règle générale.



**Fig. 20 :** Comparaison d'un cantilever triangulaire et celui rectangulaire.

L'équation différentielle d'un tel cantilever s'écrit :

$$EI(x) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = M(x) = -F \cdot x \quad (114)$$

où  $I$  et  $I(x)$  sont le moment d'inertie de section, respectivement d'un cantilever rectangulaire et celui triangulaire (Fig.20).

$$I(x) = \frac{h^3 \cdot b(x)}{12} = \frac{h^3 \cdot b_0}{12} \cdot \frac{x}{L} = I \cdot \frac{x}{L} \quad (115)$$

Alors, l'équation précédente s'écrit :

$$EI \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -F \cdot L \quad (116)$$

Il est facile de vérifier que sa solution est :

$$y(x) = -\frac{FL^3}{2EI} \cdot \left[ 1 - 2\frac{x}{L} + \frac{x^2}{L^2} \right] \quad (117)$$



Alors, la flèche de l'extrémité libre du cantilever triangulaire sera :

$$y^{triang}(0) = -\frac{FL^3}{2EI} \quad (118)$$

En ce qui concerne la flèche de l'extrémité libre d'un cantilever rectangulaire, comme dans le cas précédent, on l'évalue de l'équation (114), mais avec  $I(x) = Const$ . Ce qui nous donne :

$$y^{rect}(0) = -\frac{FL^3}{3EI} \quad (119)$$

Ainsi, un cantilever triangulaire offre une plus grande sensibilité que celui rectangulaire :

$$\frac{S^{triang}}{S^{rect}} = \frac{y^{triang}(0)}{y^{rect}(0)} = 1,5 \quad (120)$$

Cela explique l'intérêt particulier d'une conception du cantilever en couches minces d'épaisseurs variables et de la technologie du dépôt à travers un masque mobile (voir Chapitre consacré à la fabrication du détecteur).