Notes physiques quantiques

- En classique, ce qui distingue 2 états : grandeurs physiques propres ou grandeurs d'interaction ex : thermomètre ...
ex : $m\ \vec{x}, \vec{v}$

état $\longleftrightarrow$ jeu de grandeur φ mesurable

- superposit° des longueurs $\longleftrightarrow$ addition

- **En quantique :** on attribue pas de grandeur physique ! il n'y en a pas.

Distinguer les états $\rightarrow$ caractérisé par une $\boxed{f^{\circ} \text{ d'onde}}$ ou un vecteur dans un espace de Hilbert.
si on connaît un état cela suffit à connaître son comportement
état : ce qui caractérise la manière dont le système se comporte interagit de manière totale

- Principe de superposition : combinaison : $\rightarrow$ si 2 états sont possibles être la combinaison linéaire de 2 états
↳ toutes ses conséquences se vérifient

- Espace des vecteurs d'états espace vectoriel Hilbertien, $\mathbb{C}$

Il y a des états qui n'ont pas de grandeur φ bien définies.

- **Mesure :** Système $\mathcal{S}$
instrument de mesure $\mathcal{M}$ } interaction

$\mathcal{S} \cup \mathcal{M}$

$\mathcal{S}$ état $|g_i\rangle$ → interaction → $|g_i\rangle'$
$\mathcal{M}$ " $|\mathcal{M}_0\rangle$ → interaction → $|\mathcal{M}(g_i)\rangle$

$\mathcal{S} \cup \mathcal{M} \longrightarrow |g_i\rangle \otimes |\mathcal{M}(g_i)\rangle$

$|\varphi\rangle \longrightarrow |\varphi\rangle \otimes |\mathcal{M}_0\rangle$

$$U\left(\sum \alpha_i |g_i\rangle \otimes |\mathcal{M}_0\rangle\right) = \sum_i \alpha_i |g_i\rangle \otimes |\mathcal{M}(g_i)\rangle$$

5-) Prise de connaissance

$\mathcal{S} \cup \mathcal{M} \cup O$

$|g_i\rangle \otimes |\mathcal{M}(g_i)\rangle \otimes |O(g_i)\rangle$

$\sum \alpha_i |g_i\rangle \otimes |\mathcal{M}(g_i)\rangle \otimes |O(g_i)\rangle$

6) Résultat effectif d'une mesure

Règle de Born : $|\Psi\rangle = \sum \alpha_i |g_i\rangle$

État final perçu est aléatoirement $|g_i\rangle \otimes |\mathcal{J}b(g_i)\rangle \otimes |\mathcal{O}(g_i)\rangle$
avec la proba $|\alpha_i|^2$

7) Simplification de Copenhague / Interprétation de Copenhague

Dès qu'on a perçu un truc

Everett dit que c'est toujours combinaison linéaire
A Copenhague, on dit qu'il faut oublier les autres composantes avec lesquels on interagit plus. Le système global est dans l'état $|g_i\rangle$

$$\sum \alpha_i |g_i\rangle \otimes |\text{Univers}(g_i)\rangle$$

Problème de la perception : → simplification de Copenhague
↳ correspond à une réelle valeur
→ on suppose que toutes les composantes disparaissent.

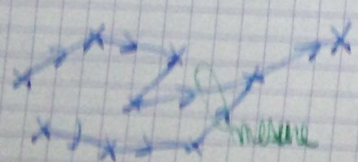
Irréversibilité (apparente fondamentale)

$$\sum \alpha_i |g_i\rangle \rightarrow \sum \alpha_i |g_i\rangle \otimes \mathcal{J}b(g_i) \longrightarrow |g_k\rangle \otimes |\mathcal{J}b(g_k)\rangle \qquad P(g_k) = \frac{|\alpha_k|^2}{\sum |\alpha_i|^2}$$

Indétermination de Heisenberg : Il y a des états qui n'ont pas de valeurs bien définies
Si système à une valeur précise de vitesse alors il n'a pas de valeur précise de l'impulsion.

Simplification de Copenhague → Irréversibilité

Everett
1957
multi-monde



Dès qu'on fait une mesure, on intrique le sujet avec l'instrument de mesure.

Continuité de la Ψ

On peut passer de $|g_1\rangle$ à $|g_2\rangle$ continuement
$$\alpha(t)|g_1\rangle + \beta(t)|g_2\rangle$$
$\mathcal{P}(g_1)(t)$ et $\mathcal{P}(g_2)(t)$ sont continues

Th de Représentation de Riesz

forme linéaire : $\lambda_1 \langle e_1| + \lambda_2 \langle e_2| + \dots \lambda_n \langle e_n|$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} e_1 & e_2 & e_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \end{array} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\langle e_2 | \hat{A} | e_1 \rangle = a_{21} = 4$$

$\boxed{A^{\dagger} \text{ : transposée conjuguée}}$ opérateur adjoint de $\hat{A}$

Définition adjoint $\langle u | (\hat{A} v) \rangle = \langle \hat{A}^{\dagger} u | v \rangle$

$$\hat{A}^{\dagger} = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{21}^* \\ a_{12}^* & a_{22}^* \end{pmatrix}$$

Un opérateur autoadjoint est diagonalisable en base orthonormée

Les états $|\Psi\rangle$ et $\lambda|\Psi\rangle$ sont indistinguables

$$\langle \hat{G} \rangle = \frac{\langle \Psi | \hat{G} | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\lambda^* \lambda \langle \Psi | \hat{G} | \Psi \rangle}{\lambda^* \lambda \langle \Psi | \Psi \rangle} = \frac{\langle \lambda\Psi | \hat{G} | \lambda\Psi \rangle}{\langle \lambda\Psi | \lambda\Psi \rangle}$$

$\boxed{\text{indistinguable}}$

Ensemble complet d'opérateurs qui commutent ECOC
Il existe une base de l'espace des états dont chaque vecteur a un

Chapitre 2. Systèmes quantiques élémentaires qubit, spin ½

I – Expérience de Stern et Gerlach (1922)

↳ Assistant de Born → matière expérimentation.

1) Rappel moment magnétique

$$\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \qquad \vec{\mu} = \gamma \vec{L}$$

Prendre une particule neutre, force de Lorentz

$$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$$

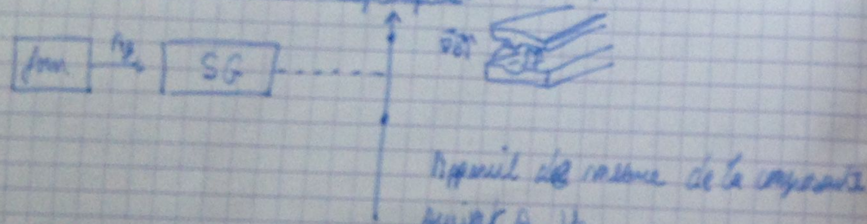
$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla})\vec{B}$$

? $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$ si $\vec{rot}\,\vec{B} = 0$

Le moment magnétique subit une force qui dépend de la composante de $\vec{\mu}$ suivant $\vec{B}$

2) Dispositif expérimental

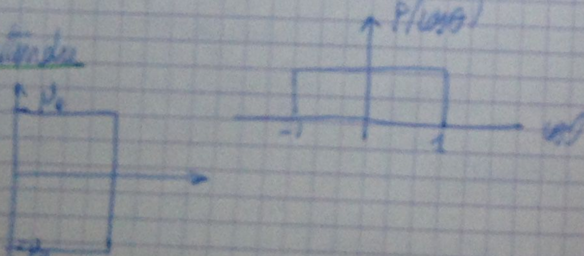
- Atome d'argent, neutre avec moment magnétique
- un é célib. → moment magnétique.



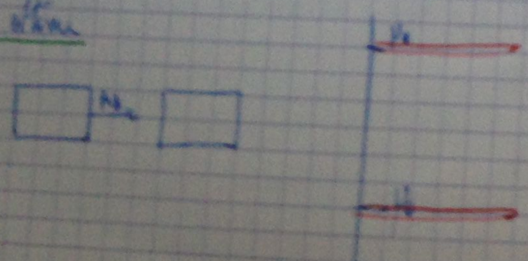
Appareil de mesure de la composante suivant O_z μ_z

$$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{u}$$

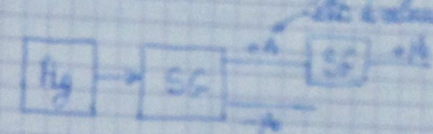
3) Résultat attendu



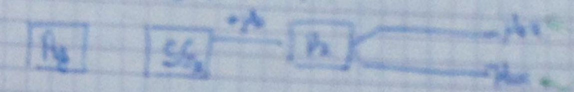
4) Résultat obtenu



b) Etat à valeur bien défini



c) Mesure de μ_y puis de μ_z

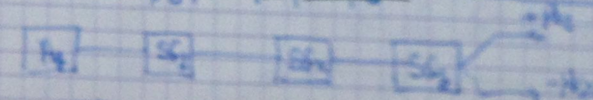


Interprétation :

$$\begin{cases}\mu_y = \mu_0 \\ \mu_z = \mu_0\end{cases} \qquad \begin{matrix}\mu_z = \mu_0 \\ \mu_z = -\mu_0\end{matrix}$$

des grandeurs μ_y et μ_z ne sont pas compatibles. On vient perturber l'état préparé $|\mu_0\rangle$

d) Mesure de μ_z puis μ_y puis μ_z



$$|\mu_0\rangle_y = \lambda |\mu_0\rangle_z + \beta |\mu_0\rangle_z$$

5) Analyse dans le cadre du formalisme quantique

- $\mu_z \to$ ∃ état à valeur bien définie $|\mu_0\rangle_z$ et $|-\mu_0\rangle_z$

  ∃ une infinité d'états $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z$

  $\hat{\mu}_z$ tel que $\hat{\mu}_z|+\rangle_z = \mu_0|+\rangle_z$

  $\hat{\mu}_z|-\rangle_z = -\mu_0|-\rangle_z$

  Base de l'espace des états $\{|+\mu_0\rangle, |-\mu_0\rangle\}$

- $\mu_x \to \hat{\mu}_x$ $\quad \hat{\mu}_x \; \{|+\mu_0\rangle_x, |-\mu_0\rangle_x\}$

  Comment s'exprime $|\mu_0\rangle_x$ dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$

$$|+\rangle_x = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1 \; ; \; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$|+\rangle_x \to |+\rangle_x e^{i\varphi}$$

Chapitre 2. Systèmes quantiques élémentaires qubit, spin 1/2

I- Expérience de Stern et Gerlach (1922)

↳ Assistant de Born → assistant expérimentateur.

1) Rappel moment magnétique

$\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ $\qquad \vec{\mu} = \gamma \vec{L}$

Prendre une particule neutre ⇒ pas de force de Lorentz

$\vec{\Gamma} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}$

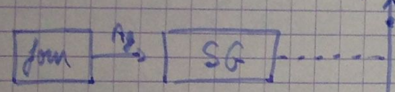
$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B}$

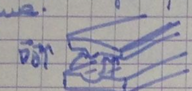
? ↳ $\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{B})$ si $\vec{rot}\,\vec{B} = 0$

Le moment magnétique subit une force qui dépend de la composante de $\vec{\mu}$ suivant $\vec{B}$

2) Dispositif expérimental

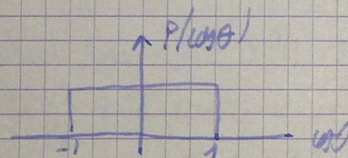
- Atome d'argent neutre avec moment magnétique
- un e⁻ célib → moment magnétique.



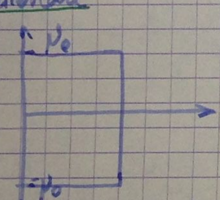


Appareil de mesure de la composante suivant Oz μ_z

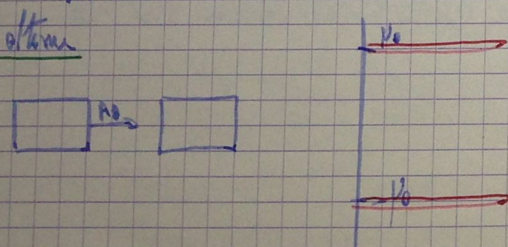
$\vec{\mu} = \mu_0 \vec{u}$



3) Résultat attendu

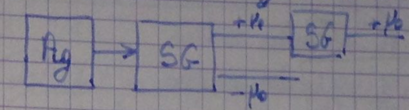


4) Résultat obtenu

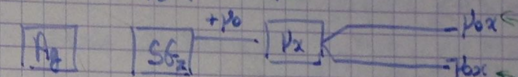


B) États à valeurs bien définies.

états à valeurs bien définis.



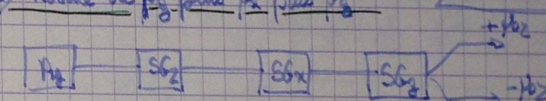
c) Mesure de μ_z puis de μ_x



Interprétation : $\begin{cases} \mu_z = \mu_0 \\ \mu_x = \mu_0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} \mu_z = \mu_0 \\ \mu_x = -\mu_0 \end{cases}$

les grandeurs μ_z et μ_x ne sont pas compatibles (il n'existe pas d'état $|+\mu_{0x}, +\mu_{0z}\rangle$)

d) Mesure de μ_z puis μ_x puis μ_z



$|\mu_0\rangle_z = \lambda |\mu_0\rangle_x + \beta |{-\mu_0}\rangle_x$

5) Analyse dans le cadre du formalisme quantique

- $\mu_z \rightarrow$ ∃ états à valeurs bien définis $|\mu_0\rangle_z$ et $|{-\mu_0}\rangle_z$

  ∃ une infinité d'états $|\psi\rangle = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z$

  $\hat{\mu}_z$ tel que $\hat{\mu}_z|+\rangle_z = \mu_0|+\rangle_z$

  $\hat{\mu}_z|-\rangle_z = -\mu_0|-\rangle_z$

  Base de l'espace des états $\{|+\mu_0\rangle, |-\mu_0\rangle\}$

- $\mu_x \rightarrow \hat{\mu}_x$ $\qquad \hat{\mu}_x$ $\{|+\mu_0\rangle_x, |-\mu_0\rangle_x\}$

  Comment s'exprime $|\mu_0\rangle_x$ dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$

  $|+\rangle_x = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z$ $\qquad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$

  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$|+\rangle_x \longrightarrow |+\rangle_x e^{i\varphi}$

Règle de Born : $|\alpha|^2 = \frac{1}{2}$ $\quad |\beta|^2 = \frac{1}{2}$

$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}|-\rangle_z$

$$\boxed{|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z'}$$ nouvelle base

$|-\rangle_x = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z$

$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta'}|-\rangle_z$ on ne peut plus absorber $e^{i\theta'}$!

$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{i\theta'} = 0$

$e^{i\theta'} = -1$

$\theta' = \pi$

$$\boxed{|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_z}$$

$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

$|+\rangle_y = \alpha|+\rangle_z + \beta|-\rangle_z \qquad |+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}|-\rangle_z$

$|{}_x\langle+|+\rangle_y|^2 = \frac{1}{2} \qquad \left(\frac{1}{2}+\frac{e^{i\varphi}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{e^{-i\varphi}}{2}\right) =$

$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\right|^2 = \left|\frac{1}{2} + \frac{e^{i\varphi}}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{i\varphi} + \frac{1}{4}e^{-i\varphi} = \frac{1}{2} + \frac{\cos\varphi}{2} \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

$$\boxed{|+\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \qquad |-\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}}$$

II- Quantum binary digit

1.- Rappel : bit classique

0 ou 1

distinction élémentaire entre "ceci" et "cela"

2.- Syst quantique élémentaire

Système tel que l'espace des états a 2 dimensions.

$\longrightarrow$ qubit

$|1\rangle \quad , |0\rangle$

3.- Représentation des états, sphère de Bloch

$|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|0\rangle$

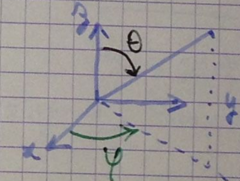
$\rightarrow$ sans perte de généralité $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$

$\exists \lambda \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \alpha = \cos\lambda$

$|\beta| = \sin\lambda$

$|\psi\rangle = \cos\lambda|1\rangle + \sin\lambda\, e^{i\varphi}|0\rangle$

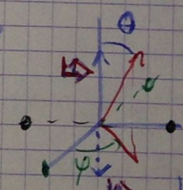
$$\boxed{\begin{array}{l}\exists\theta \in [0,\pi] \text{ et } \varphi \in [0, 2\pi] \\ |\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|0\rangle\end{array}}$$ $\Longleftrightarrow$ géométrie sphérique



$x = \sin\theta\cos\varphi$
$y = \sin\theta\sin\varphi$
$z = \cos\theta$

$|1\rangle : \cos\frac{\theta}{2} = 1 \quad \Rightarrow \theta = 0$
$\sin\frac{\theta}{2} = 0$

$|0\rangle : \quad \Rightarrow \theta = \pi$



$|u\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|0\rangle$

$|-u\rangle = \cos\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right)|1\rangle \ldots$
$= \sin\frac{\theta}{2}|1\rangle - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|0\rangle$

$\langle u|u\rangle = 0$

$\vec{u_x} : \frac{\theta}{2} \qquad |u_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle$

$-\vec{u_x} : \frac{\theta}{2} \qquad |\overline{u_x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle$

$\vec{u_y} : \theta = \frac{\pi}{2} \qquad |u_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle$
$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad |\overline{u_y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|0\rangle$

4) Représentation dans la base $\{|1\rangle, |0\rangle\}$

a)

$$|\vec{u}\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\langle u| = \left(\cos\frac{\theta}{2}, \sin\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}\right)$$

b) Opérateur linéaire

$$\hat{A}|1\rangle = a_{11}|1\rangle + a_{22}|0\rangle$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{|1\rangle, |0\rangle}$$

$\hat{A}^{+} = \hat{A}$ $\qquad a_{11} = a_{11}^{*} \to a_{11} \in \mathbb{R}$

$\qquad a_{21} = a_{12}^{*}$

5) Matrice de Pauli

$\to$ Vp 1 et -1

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \alpha + i\beta \\ \alpha - i\beta & a_{22} \end{pmatrix} = \lambda \hat{I} + \alpha \hat{\sigma}_1 + \beta \hat{\sigma}_2 + \mu \hat{\sigma}_3$$

$$= \frac{a_{11} + a_{22}}{2} I + \alpha \hat{\sigma}_1 + \beta \hat{\sigma}_2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \sigma_3$$

$\hat{\sigma}_i^2 = Id$

$\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 = i \hat{\sigma}_3$ $\qquad \hat{\sigma} \cdot \vec{u} = \alpha \hat{\sigma}_1 + \beta \hat{\sigma}_2 + \gamma \hat{\sigma}_3$

$[\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2] = \frac{i}{2} \hat{\sigma}_3 \to$ spin $\frac{1}{2}$

$$(\vec{u} \cdot \vec{\sigma})(\vec{v} \cdot \vec{\sigma}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) I + i (\vec{u} \wedge \vec{v}) \vec{\sigma}$$

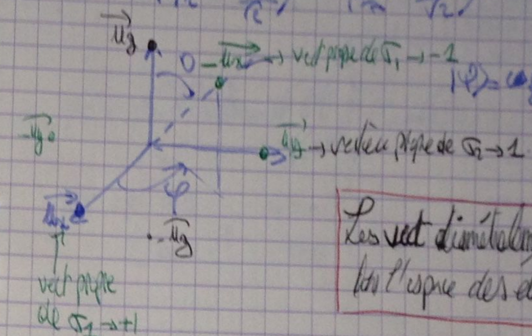
$$\hat{\sigma}_1 = \vec{u_x} \cdot \hat{\sigma} = \hat{\sigma}_x$$

$\hat{\sigma}_1 |1\rangle = |0\rangle$ $\qquad \hat{\sigma}_2 |1\rangle = i|0\rangle$ $\qquad \hat{\sigma}_3 |1\rangle = |1\rangle$

$\hat{\sigma}_1 |0\rangle = |1\rangle$ $\qquad \hat{\sigma}_2 |0\rangle = -i|0\rangle$ $\qquad \hat{\sigma}_3 |0\rangle = -|0\rangle$

$$\hat{\sigma}_1 \left(\frac{|1\rangle + |0\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{|1\rangle + |0\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\hat{\sigma}_1 \left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}\right) = -\left(\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$



$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |1\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |0\rangle$$

$$\boxed{\text{Les vect diamétralement opposés sont orthogonaux dans l'espace des états.}}$$

$$\hat{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_x = \hat{\sigma} \cdot \vec{u_x} = \hat{\sigma}_1$$

III- Retour sur Stern et Gerlach

1) États à valeur bien définie

- $|+\rangle_{u_z}$ $\quad |-\rangle_{u_z}$ $\qquad |u_z\rangle_B \quad |-u_z\rangle_B$
- $|+\rangle_{u_x}$ $\quad |-\rangle_{u_x}$ $\qquad |+\rangle_{u_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_{u_z}$ $\;\hookrightarrow |u_x\rangle_B$
- $|+\rangle_{u_y}$ $\quad |-\rangle_{u_y}$

$$|-\rangle_{u_x} = \frac{1}{\sqrt{2}}|u_z\rangle_B - \frac{1}{\sqrt{2}}|u_z\rangle = |-u_x\rangle_B$$

$$|+\rangle_{u_z} \longleftrightarrow |u_z\rangle_B$$

$$|-\rangle_{u_z} \longleftrightarrow |-u_z\rangle_B$$

Pour une direct° $\vec{u}$ qq ?

Comment s'exprime $|+\mu_0\rangle_{\vec{u}}$ de la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$

2) Opérateurs composante de $\vec{\mu}$ suivant $\vec{u}$

- $\mu_z = \vec{\mu}\cdot\vec{u_z} \longrightarrow \hat{\mu}_z = \begin{pmatrix} \mu_0 & 0 \\ 0 & -\mu_0 \end{pmatrix} = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

  Dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$: $\hat{\mu}_z = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

- $\mu_x = \vec{\mu}\cdot\vec{u_x} \longrightarrow \hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- $\mu_y = \vec{\mu}\cdot\vec{u_y} \longrightarrow \hat{\mu}_y = \mu_0 \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$

NB : $\hat{\mu}_z = \mu_0\left(|+\rangle_z\langle +| + |-\rangle_z\langle -|_z\right)$

$$\hat{\mu}_z = \mu_0\,\hat{\sigma}_z$$

$$\hat{\mu}_x = \mu_0\,\hat{\sigma}_x$$

$$\hat{\mu}_y = \mu_0\,\hat{\sigma}_y$$

$$\mu_{\vec{u}} = \mu\,\vec{\sigma}\cdot\vec{u} \qquad \vec{u}\,\begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\mu_{\vec{u}} = \mu_0\left[\sin\theta\cos\varphi\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} + \cos\theta\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right]$$

$$\mu_{\vec{u}} = \mu_0\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$|\vec{u}\rangle_B = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle_{u_z} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

A présent, je place le Stern et Gerlach dans la direction $\vec{u}$.

- Quelle est l'expression de $\mu_{\vec{u}}$ dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$?
- Méthode : je projette $\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{pmatrix}$ sur le $\vec{u}$: géométrique de la sphère de Bloch

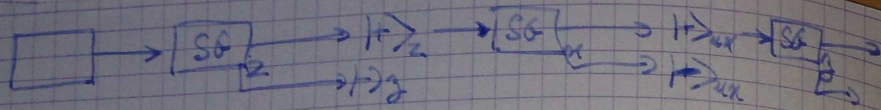
  $\hookrightarrow \vec{u} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{vmatrix}$

$$\hat{\mu} = \mu_0\left[\sin\theta\cos\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

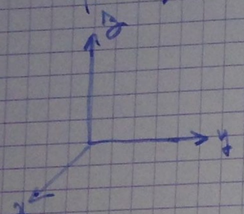
$$\hat{\mu} = \mu_0\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\cos\varphi - i\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\cos\varphi + i\sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mu} = \mu_0\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta\, e^{-i\varphi} \\ \sin\theta\, e^{i\varphi} & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

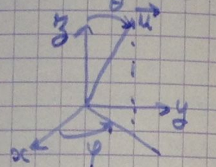
- Quelles sont l'expression des vecteurs propres ? $|+\rangle_u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi} \end{pmatrix}$



$$\hat{\mu}_x = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mu}_y = \mu_0 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{\mu}_z = \mu_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Signification physique d'un état



- $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|1\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}|0\rangle$

- Comportement / mesure
  mesures au sens quantique du terme.

$$\hat{\mu}_{\vec{u}} = +\mu_0 |+\rangle_{\vec{u}}\,{}_{\vec{u}}\langle +| - \mu_0 |-\rangle_{\vec{u}}\,{}_{\vec{u}}\langle -|$$

Ecrire $|+\rangle_{\vec{u}} = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}|-\rangle_z$

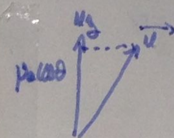
$$|-\rangle_{\vec{u}} = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right)|+\rangle_z + \sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2}\right) e^{i\varphi + \pi}|-\rangle_z$$

$$|-\rangle_{\vec{u}} = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle_z - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi}|-\rangle_z$$

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{vmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_u = \hat{\sigma}\cdot\vec{u} = \sin\theta\cos\varphi \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \sin\theta\sin\varphi \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \cos\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\sigma}_u = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi} \\ \sin\theta e^{i\varphi} & \cos\theta \end{pmatrix}$$



B- Mesure d'une composante qq d'un état qq

a) Mesure de μ_z sur l'état $|+\rangle_{\vec{u}}$
on obtient $+\mu_0$ avec P : $\cos^2\frac{\theta}{2}$
$-\mu_0$ avec P $\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$P_+ = {}_{\vec{u}}\langle +|\,\mathcal{P}_{+u_z}\,|+\rangle_{\vec{u}}$$

$$P_+ = {}_{\vec{u}}\langle +|+\rangle_{u_z}\;{}_{u_z}\langle +|+\rangle_{\vec{u}} = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

En moyenne : $\mu_0\left(\cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}\right) = \mu_0\cos\theta$

b) Mesure de $\mu_{\vec{u}}$ sur l'état $|+\rangle_{u_z}$

$$|+\rangle_u = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \qquad |-\rangle_u = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}$$

$$\text{Prob}(+,\vec{u}) = {}_{u_z}\langle +|+\rangle_{\vec{u}}\;{}_{\vec{u}}\langle +|+\rangle_{u_z}$$

$$\text{Prob}(+,\vec{u}) = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\text{Prob}(-,\vec{u}) = {}_{u_z}\langle +|-\rangle_u\;{}_u\langle -|+\rangle_{u_z} = \cancel{-\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}\,\times -\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & -\cos\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \sin^2\frac{\theta}{2}$$

En moyenne $\langle \mu_{\vec{u}} \rangle = \mu_0\cos\theta$

IV Spin 1/2

1) Notion de Spin

quantification : → espace vect de dimension 2

$\gamma = \frac{q}{2m}$

$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}$ moment cinétique → moment magnétique

· moment angulaire intrinsèque non lié à un mouvement orbital auquel est associé un moment magnétique

$\vec{\mu} = g\frac{q}{2m}\vec{S}$ pour e^- $g=2$

pour proton $g = 5.586$

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}$ $\quad\vec{\mu} = \mu_0 \hat{\sigma}$

2) Action de l'opérateur $\hat{S}$

Composante suivant $\vec{u}$

θ, φ

$$\hat{S}_u = \hat{S}\cdot\vec{u} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}$$ dans la base $|+\rangle_z, |-\rangle_z$

$|+\rangle_u = \cos\frac{\theta}{2}|+\rangle_z + \sin\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle_z$

$|-\rangle_u = \sin\frac{\theta}{2}|+\rangle_z - \cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}|-\rangle_z$

$$\hat{S}_u|-\rangle_u = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta e^{-i\varphi}\\ \sin\theta e^{i\varphi} & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\end{pmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta\sin\frac{\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2}\sin\theta e^{-i\varphi}e^{i\varphi}\\ (\sin\theta\sin\frac{\theta}{2} + \cos\theta\cos\frac{\theta}{2})e^{i\varphi}\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\sin\theta/2\\ -\cos\frac{\theta}{2}\,e^{i\varphi}\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{\hbar}{2}\,|$$

$\hat{S}_x|+\rangle_z = \frac{\hbar}{2}|-\rangle_z$

$\hat{S}_x|-\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle_z$

3) Ptés

$$[\hat{S}_x\ \hat{S}_y] = \cancel{\frac{\hbar^2}{4}}\left[\frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x, \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y\right]$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}\, i\hat{\sigma}_z \qquad [\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = 2i\hat{\sigma}_z$$

$$\boxed{[\hat{S}_x, \hat{S}_y] = i\hbar\hat{S}_z}$$ Très important

→ il n'existe pas d'états ayant une valeur bien définie de $\hat{S}_x$ et de $\hat{S}_y$

Relation de commutation caractéristique d'un moment angulaire.

Calculons

$$\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \frac{\hbar^2}{4}\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}^2\right)$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}(Id + Id + Id)$$

$$= \frac{3}{4}\hbar^2\hat{I}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\hbar^2\hat{I}$$

$$= s(s+1)\hbar^2\hat{I} \qquad s = \frac{1}{2}$$

une particule de spin s a un espace des états de dimension $2s+1$ et est caractérisé par $\hat{S}^2 = s(s+1)\hbar^2 Id$ et les valeurs propres d'une composante

$-s\hbar, (-s+1)\hbar, \ldots, (s-1)\hbar, s\hbar$

spin $s = \frac{1}{2}$

$$\boxed{[\hat{S}^2, \hat{S}_z] = 0}$$

→ il y a des particules avec des valeurs bien définie de $\hat{S}^2$ et $\hat{S}_z$.

Récapitulatif Spin

$\vec{\mu} = g\frac{q}{2m}\vec{S}$ → moment cinétique

- s : spin $\frac{1}{2}$ espace des états $n = 2s+1$
- Il existe des valeurs états de spin $-s\hbar, (-s+1)\hbar, \ldots\ s\hbar$

$\vec{S} = \frac{\hbar}{2}\hat{\vec{\sigma}} = \frac{\hbar}{2}\left|\begin{matrix}\hat{\sigma}_1\\ \hat{\sigma}_2\\ \hat{\sigma}_3\end{matrix}\right.$

$\hat{\vec{S}}^2 = \frac{3}{4}\hbar^2\hat{I}$

$\vec{L} = I\vec{\Omega}$ moment cinétique vrai vecteur

Chaque composante du spin, $\hat{\vec{S}}\cdot\vec{n}$ est une valeur physique (ie il existe des états bien définis $+\frac{\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}$)

Mais $\hat{\vec{S}}$ n'est pas une grandeur physique car aucun état n'a une valeur bien défini pour les 3 composantes

$\left|\begin{matrix}\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_x\\ \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_y\\ \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\hat{\sigma}_z\end{matrix}\right|$ il n'existe pas d'état avec valeur bien défini pour S_x et S_y en même temps car $[\hat{S}_x \hat{S}_y] \neq 0$ (grandeur incompatible)

~~[illegible]~~

$\hat{\vec{S}}^2$ est une grandeur mesurable → observable

$\vec{S}^2 = \hbar^2 s(s+1)\hat{I}$

V- Système de 2 qubits, intrication

1) Espace des états du système : une approche intuitive

qubit 1. $|+\rangle^{(1)}$ $|-\rangle^{(1)}$ $|\varphi\rangle = \alpha_1|+\rangle^{(1)} + \beta_1|-\rangle^{(1)}$

qubit 2. $|+\rangle^{(2)}$ $|-\rangle^{(2)}$ $|\psi\rangle^{(2)} = \alpha_2|+\rangle^{(2)} + \beta_2|-\rangle^{(2)}$

qubit 1 ds l'état $|+\rangle^{(1)}$ et qubit 2 ds l'état $|+\rangle^{(2)}$:

$|+\rangle^{(1)} \otimes |+\rangle^{(2)}$

$|+\rangle^{(1)} \otimes |-\rangle^{(2)}$

$|-\rangle^{(1)} \otimes |+\rangle^{(2)}$

$|-\rangle^{(1)} \otimes |-\rangle^{(2)}$

$(\alpha_1|+\rangle^{(1)}+\beta_1|-\rangle^{(1)})\otimes(\alpha_2|+\rangle^{(2)}+\beta_2|-\rangle^{(2)})$

1

$\alpha_1\alpha_2|+\rangle^{(1)}\otimes|+\rangle^{(2)}+\alpha_1\beta_2|+\rangle^{(1)}\otimes|-\rangle^{(2)}+\beta_1\alpha_2|-\rangle^{(1)}\otimes|+\rangle^{(2)}$
$+\beta_1\beta_2|-\rangle^{(1)}\otimes|-\rangle^{(2)}$

$\forall \alpha,\beta,\gamma$ $\quad \alpha|+\rangle\otimes|+\rangle+\beta|+\rangle\otimes|-\rangle+\gamma|-\rangle\otimes|+\rangle+\delta|-\rangle\otimes|-\rangle$
est état possible

. Or si je prend $\alpha\delta \neq \beta\gamma$ alors on ne peut pas mettre sous la forme 1

Il existe donc des états du système de 2 qubits qui ne sont pas associés à des états bien définis du 1^{er} qubit
Cela veut dire qu'il n'y a plus 2 qubits
C'est un système intriqué

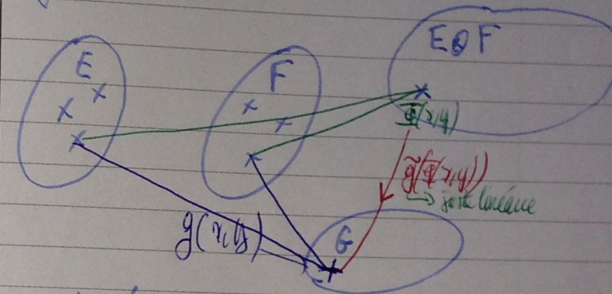
Il y a des états qui manifeste 2 qubits
Il y a des états qui ne manifestent pas 2 qubits.
On ne peut pas distinguer 2 parties.
On ne peut plus décomposer les 2 sous parties.

On appelle état intriqué état du biqubit qui ne sont pas 2 qubits superposés.

3) Produit tensoriel
Construit mathématiques naturelle
a) Théorème et défini°

Th: Soient E, F deux espaces vectoriel sur un corps commutatif K
$\exists$ 1 espace vectoriel noté $E\otimes F$ et une applica° bilinéaire
$\phi: E\times F \longrightarrow E\otimes F$
$x, y \longmapsto \phi(x,y)$
ayant la pté suivante (dite pté universelle)
Pour toute applica° bilinéaire $g: E\times F\to G$ où G est un espace qq

Il existe une unique applica° bilinéaire $\tilde{g}$ tq
$g=\tilde{g}\circ\phi$
$\tilde{g}: E\otimes F \longrightarrow G$



$\dim(E\otimes F)=\dim E \times \dim F$
Si $\{e_i\}$ est une base de E
$\{f_j\}$ ——— F
$\{e_i\otimes f_j\}_{ij}$ est une base de $E\otimes F$
Tous les vecteurs de $E\otimes F$ s'écrivent
$|\psi\rangle=\sum \alpha_{ij}|e_i\rangle\otimes|g_j\rangle$
Parmi ces vecteurs de $E\otimes F$ certains s'écrivent comme
$|\psi\rangle^{(1)}\otimes|\varphi\rangle^{(2)}$
et d'autres non.
Ceux pour qui c'est pas possible est appelé état intriqué.

$E\otimes F$ le produit tensoriel de E et F
$|\varphi\rangle\otimes|\psi\rangle$ ——— de $|\varphi\rangle$ et $|\psi\rangle$

$$\mathcal{H}_1 \quad \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$$

$$\downarrow h_1 \qquad \downarrow h_2$$

$$h_1(|h\rangle^{(1)}, |l\rangle^{(1)}) = {}^{(1)}\langle l|h\rangle^{(1)}$$

$$h(|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle, |e_k\rangle \otimes |f_l\rangle) = \delta_{ik} \times \delta_{jl}$$

$$= h_1(|e_i\rangle, |e_k\rangle) \times h_2(|e_k\rangle, |f_l\rangle)$$

Le produit hermitien dans $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ est le produit des $h_1 \times h_2$

$$|\psi\rangle = \sum_{ij} \alpha_{ij} \, |e_i\rangle \otimes |f_j\rangle$$

$$|\psi'\rangle = \sum_{kl} \alpha'_{kl} \, |e_k\rangle \otimes |f_l\rangle$$

$$h(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) = \sum_{ij} \alpha_{ij}^* \alpha'_{kl} \, \delta_{ik} \delta_{jl} =$$

$$= \alpha_{ij}^* \alpha'_{ij}$$

$$h(|\psi\rangle, |\psi\rangle) = \sum_{ij} |\alpha_{ij}|^2$$

Si

$$|\psi\rangle^{(1)\otimes(2)} = |u\rangle^{(1)} \otimes |v\rangle^{(2)}$$

$$|\psi'\rangle = |u'\rangle^{(1)} \otimes |v'\rangle^{(2)}$$

$$h(|\psi\rangle, |\psi'\rangle) = \langle \psi | \psi' \rangle = h_1(|u\rangle, |u'\rangle) \times h_2(|v\rangle, |v'\rangle)$$

4) Action dans l'espace produit tensoriel

a) Produit tensoriel d'applicat° linéaire

$\mathcal{G}, \mathcal{F}$ $\quad f : \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ linéaire

$\mathcal{G}', \mathcal{F}'$ $\quad g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ linéaire

$$\left.\begin{array}{l} \mathcal{G} \times \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}' \otimes \mathcal{F}' \\ x, y \longmapsto f(x) \otimes g(y) \end{array}\right\} \text{bilinéaire}$$

$\exists\,!$ l'applic $\quad \mathcal{G} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}' \otimes \mathcal{F}'$

$$x \otimes y \longmapsto f(x) \otimes g(y)$$

on la note $f \otimes g$

b) Action sur les états d'un système quantique composé

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$

$\hat{G}$, $\hat{F}$ agissant sur syst 1, 2

Comment agissent $\hat{G}$ et $\hat{F}$ sur les états de $\mathcal{H}$

$\hat{G}|\psi\rangle^{(1)} = \hat{G}\sum \alpha_i |g_i\rangle = \sum \alpha_i \hat{G}|g_i\rangle$

$\hat{F}|\varphi\rangle^{(2)} = \hat{F}\sum_j \beta_j |f_j\rangle^{(2)} = \sum_j \beta_j \hat{F}|f_j\rangle^{(1)}$

→ On promeut $\hat{G}$ en l'opérateur $\boxed{\hat{G}' = \hat{G}\otimes\hat{I}_2}$

De même, $\hat{F} \longrightarrow \hat{F}' = \hat{I}_1 \otimes \hat{F}$

Action de $\hat{G}' = \hat{G}\otimes\hat{I}_2$ sur $|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle$

$\hat{G}'|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle = \hat{G}\otimes\hat{I}_2\,(|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle)$

$= \hat{G}|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle$

$\hat{G}\otimes\hat{F}\,(|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle) = \hat{G}|e_i\rangle\otimes\hat{F}|f_j\rangle$

Soit un état propre de $\hat{G}$ pour la vp g $|g\rangle$

$\hat{F}$ $\qquad |f\rangle$

$|g\rangle\otimes|f\rangle$ état du système global $\in \mathcal{H}$

$(\hat{G}\otimes\hat{F})|g\rangle\otimes|f\rangle = \hat{G}|g\rangle\otimes\hat{F}|f\rangle = gf\,|g\rangle\otimes|f\rangle$

- Action sur 1 état qq. $|\psi\rangle \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$

$|\psi\rangle = \sum_{ij} \alpha_{ij}|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle$

$\hat{G}\otimes\hat{F}|\psi\rangle = \sum_{ij}\alpha_{ij}\,\hat{G}\otimes\hat{F}|e_i\rangle\otimes|f_j\rangle$

$= \sum_{ij}\alpha_{ij}\,\hat{G}|e_i\rangle\otimes\hat{F}|f_j\rangle$

5-) Action dans 1 syst de 2 qubits

a) Action de $S_z^{(1)}$

$|+\rangle_z^{(1)}$, $|-\rangle_z^{(1)}$ $\qquad$ $|+\rangle_z^{(2)}$ $\quad$ $|-\rangle_z^{(2)}$

$S_z^{(1)}|+\rangle^{(1)} = \frac{\hbar}{2}|+\rangle^{(1)}$

$S_z^{(1)}|-\rangle^{(1)} = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle^{(1)}$

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2 : \{|+\rangle\otimes|+\rangle,\ |+\rangle\otimes|-\rangle,\ |-\rangle\otimes|+\rangle,\ |-\rangle\otimes|-\rangle\}$

$\hat{S}_z'^{(1)} = \hat{S}_z^{(1)}\otimes\hat{I}_2$

$\hat{S}_z'^{(1)}|+\rangle\otimes|+\rangle = \hat{S}_z|+\rangle\otimes I_2|+\rangle$

$= \frac{\hbar}{2}|+\rangle\otimes|+\rangle$ $\qquad$ $|+\rangle\otimes|+\rangle$ est vect propre de $\hat{S}_z'$

$\hat{S}_z'^{(1)}|+\rangle\otimes|-\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle\otimes|-\rangle$ $\qquad$ vect propre

$\hat{S}_z'^{(1)}|-\rangle\otimes|+\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle\otimes|+\rangle$

$\hat{S}_z'^{(1)}|-\rangle\otimes|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle\otimes|-\rangle$

$$\hat{S}_z'^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{\hbar}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar}{2} \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & 0 & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{S}_z\otimes\hat{I}_2 = \begin{pmatrix} S_{z11}\times I_2 & S_{z12} I_2 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Action sur $\alpha|++\rangle + \beta|+-\rangle + \gamma|-+\rangle + \delta|--\rangle$

$\hat{S}_z'^{(1)}(\qquad) = \alpha\frac{\hbar}{2}|++\rangle + \beta\frac{\hbar}{2}|+-\rangle$
$- \gamma\frac{\hbar}{2}|-+\rangle - \delta\frac{\hbar}{2}|--\rangle$

$\hat{S}_z'^{(2)} = \hat{I}_1\otimes\hat{S}_z^{(2)} \Rightarrow \hat{S}_z'^{(2)}|++\rangle = \frac{\hbar}{2}|++\rangle$

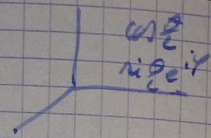
$S_z'^{(2)}|+-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|+-\rangle$

$S'^{(2)}|-+\rangle = \frac{\hbar}{2}|-+\rangle$

$$\hat{S}_z^{(2)} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$|+\rangle(t) = e^{+i\frac{\mu_0 B_0}{\hbar}t}\,|+\rangle(0)$

$|-\rangle(t) = e^{-i\frac{\mu_0 B_0}{\hbar}t}\,|-\rangle(0)$



$|\varphi\rangle = \alpha|+\rangle_0 + \beta|-\rangle_0$

$|\varphi(t)\rangle = \alpha\, e^{i\frac{\mu_0 B_0 t}{\hbar}}|+\rangle_0 + \beta\, e^{-i\frac{\mu_0 B_0 t}{\hbar}}|-\rangle_0$

Soit $\omega = \frac{\mu_0 B_0}{\hbar}$ $\qquad |\varphi(t)\rangle = \alpha e^{i\omega t}|+\rangle_0 + \beta e^{-i\omega t}|-\rangle_0$

On part de $|+\rangle_x(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$

$$|+\rangle_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|-\rangle_0$$

$|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_0$

${}_x\langle -_0|\cancel{+(t)}\rangle_x = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,{}_0\langle +| - \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}_0\langle -|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|+\rangle_0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|-\rangle_0\right)$

$= i\sin\omega t$

${}_x\langle +_0|+(t)\rangle_x = \frac{1}{2}e^{i\omega t} + \frac{1}{2}e^{-i\omega t} = \cos\omega t$

Précession des états

Chapitre 4 : ESPACES DES ETAT DE POSITION ET OPERATEURS ASSOCIÉS

→ état instantané $|\varphi(t)\rangle$

→ espace d'état → espace vectoriel

U, linéaire, unitaire
↳ car physique réversible

I- Etat de position et espace associé

1) états de position

2) Etats à position bien définie

à 1D état à valeur bien définie de la position X : $d(M, Oyz)$
valeur x_0

$$|x_0\rangle, |x_1\rangle, |x_2\rangle, |x_n\rangle$$

$\hat{X}|x_i\rangle = x_i|x_i\rangle$ $\qquad$ l'espace est un continuum
↳ pb

$\{|g_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}}$ $\qquad \langle g_i|g_j\rangle = \delta_{ij}$

$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i|g_i\rangle$

$|x\rangle$ où $x \in \mathbb{R}$

$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$ $\qquad |\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)|x\rangle\,dx$
↳ f° d'onde

3) Etats de position bien définie ???

Grandeur physique X → observable $\hat{X}$

$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$

$|y\rangle$ → mesure de $\hat{X}$ donne y à proba 1 et x avec proba 0

$|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)|x\rangle\,dx$ → fonction qui caractérise l'état $|\varphi\rangle$

Que vaut $\langle x_0|\varphi\rangle$?

$\langle x_0|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\underbrace{\langle x_0|x\rangle}_{=0 \text{ si } x\neq 0}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}$

$\langle x_0|x\rangle$ n'est pas une f° c'est une distribution.

II

4) Définition : Soit la fonction $\omega_p : x \mapsto \omega_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$

$\omega_p \notin L^2(\mathbb{R})$ $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\right| dx \longrightarrow +\infty$

mais ω_p définit une forme linéaire sur $L^1 \cap L^2$

$\Omega_p : L^1 \cap L^2 \longrightarrow \mathbb{C}$
$\varphi \longmapsto \Omega_p(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_p^*(x)\varphi(x)\,dx$ $\tilde{\varphi}(p)$

Position continuum :

Dim finie : $\{|e_i\rangle\}_{i\in 1,\dots,n}$ $|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |e_i\rangle$ $\|\varphi\| = \sum|\alpha_i|^2$
$\langle\varphi|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* \beta_i$

dim infini dénombrable $\{|e_i\rangle\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ base de Hilbert
$|\varphi\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i|e_i\rangle$ $|\varphi\rangle = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_i \\ \vdots\end{pmatrix}$ $\||\varphi\rangle\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|\alpha_i|^2$

$|x\rangle$: infinité indénombrable. Comment étendre

$|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\underbrace{|x\rangle}\,dx$ → ne peut

$|\varphi\rangle = $ fonction de x → $-\infty$ $+\infty$

vecteur colonne continue

→ espace $L^2(\mathbb{R})$ espace des f° de carrés sommables $w(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^* g\,dx$

$\langle x_0|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\langle x_0|x\rangle\,dx$ $\|\varphi\| = \int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi|^2 dx$
$= 0$???

↳ forme linéaire à chaque $\varphi \longrightarrow \varphi(x_0)$
↳ prend f° → nombre $\mathbb{C}$

$\delta(x-x_0)$: déf $\int \varphi(x)\delta(x-x_0)\,dx = \varphi(x_0)$

↳ bras généralisé

$\langle\varphi|x_0\rangle = \langle x_0|\varphi\rangle^*$
↳ f_{x_0} f° généralisé

$\langle\varphi|x_0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^*(x) f_{x_0}(x)\,dx = \varphi(x_0)^*$
↳ $\delta(x_0-x)$

$\delta(x-x_0)$ → forme linéaire non continue $\langle x_0|$
→ f° généralisé $|x_0\rangle$ ↳ ket généralisé
$\langle x|x_0\rangle = \delta(x_0-x)$

Les vrais états sont $|\varphi\rangle \in \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ → espace vectoriel de dim dénombrable
$|\varphi\rangle : x \longmapsto \varphi(x)$

On travail dans l'espace de Hilbert $L_2(\mathbb{R})$ car on peut y associer une norme. Les états bien défini pour la position ne sont pas des f° mais des distributions. On parle de kets généralisé et bras généralisé.

$|\varphi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)|x\rangle\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|\varphi\rangle|x\rangle\,dx$
$\varphi(x)$
$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle\langle x|\varphi\rangle\,dx}_{\mathbb{1}}$

6) Bases généralisées

a) Rappel base o.n $\{|e_n\rangle\}$ complet $\langle e_n|x\rangle = 0\ \forall n \Rightarrow |x\rangle = 0$
$\||x\rangle\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\langle e_n|x\rangle|^2 = \langle x|\sum_{n=1}^{\infty} |e_n\rangle\langle e_n|x\rangle$

b) Base généralisée : La famille de distribution $\{T_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

$\forall|\varphi\rangle \in \mathcal{S}$, $\||\varphi\rangle\|_2^2 = \langle\varphi|\varphi\rangle = \int_\Lambda |\langle T_\lambda|\varphi\rangle|^2 d\lambda$

Système total $\langle T_\lambda,\varphi\rangle = 0,\ \forall\lambda\in\Lambda \Rightarrow |\varphi\rangle = 0$

c) Théorème $\{\langle x|\}_{x\in\mathbb{R}}$ est 1 base généralisée de $L^2(\mathbb{R})$

d) Th : La famille des $\{\langle p|\}_{p\in\mathbb{R}}$ est 1 base généralisée
Dém $\varphi \in \mathcal{S}$
$\langle p|$ est le bra généralisé correspondant à la distribution régulière
Ω_p : $\omega \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{\frac{ipx}{\hbar}}$
$|p\rangle$ n'est pas une f° de carré sommable

$$\langle p|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u_p^*(x)\,\psi(x)\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\,\psi(x)\,dx = \tilde{\psi}(p)$$

$$\langle x_0|\psi\rangle = \psi(x_0)$$

$$\langle p_0|\psi\rangle = \tilde{\psi}(p_0)$$

Bases généralisée n'appartient pas à l'espace mais on connait l'action de $\langle x|$ et $\langle p|$ sur la base $|\psi\rangle$

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \langle x|\psi\rangle\,|x\rangle\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,|x\rangle\,dx \to \text{représentation position}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle p|\psi\rangle\,|p\rangle\,dp = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p)\,|p\rangle\,dp \to \text{représentation impulsion}$$

$L^2(\mathbb{R}) \to$ on peut l'écrire de l'écrire sur une base de Hilbert : polynôme de Hermite.

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\langle p|\psi\rangle}_{\tilde{\psi}(p)}\,\underbrace{\langle x|p\rangle}_{u_p(x)}\,dp = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p)\,\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,e^{\frac{ipx}{\hbar}}\,dp}_{\text{Transfo de Fourier inverse}}$$

On a introduit des objets qui ne sont pas dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ mais qui permettent d'écrire les choses simplement. et d'avoir une intuition physique de $|\psi\rangle$ en un x précis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x\rangle\langle x|\,dx = \hat{\mathbb{1}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |p\rangle\langle p|\,dp = \hat{\mathbb{1}}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi|\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|x\rangle\langle x|\right)|\psi\rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle\psi|x\rangle\,\langle x|\psi\rangle\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,\psi(x)\,dx$$

7. Fonction d'onde

a) Représentation $\vec{r}$, $\vec{p}$

- généralisation en 3D : $|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,|x\rangle\,dx$

$$|\psi\rangle = \iiint \psi(\vec{r})\,|\vec{r}\rangle\,d^3\vec{r}$$

$$\langle\vec{r}\,|\psi\rangle = \psi(\vec{r})$$

- $|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p)\,|p\rangle\,dp_x$ $\qquad \vec{p} = \begin{vmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{vmatrix}$

$$|\psi\rangle = \iiint \langle\vec{p}\,|\psi\rangle\,|\vec{p}\rangle\,d^3\vec{p}$$

$$\langle\vec{p}\,|\psi\rangle = \tilde{\psi}(\vec{p})$$

b) Fonction d'onde

$\vec{r} \to \psi(\vec{r})$ est appelé f° d'onde.

↳ n'est pas une onde.

c) "Signification"

grandeur physique quelconque G ayant des états $|g_i\rangle$ à valeur bien définie.

$$|\psi\rangle = \sum \alpha_i\,|g_i\rangle \longleftrightarrow |\psi\rangle = \int \psi(x)\,|x\rangle\,dx$$

si on mesure G, on obtient g_i avec la proba $|\alpha_i|^2$ Règle de Born

avec $\alpha_i = \langle g_i|\psi\rangle$

De même $\langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle = |\psi(x)|^2$: Proba de trouver x

il n'y a pas d'état $|x\rangle$ car $\notin L^2(\mathbb{R})$

un état entre x_0 et $x_0 + \Delta x_0$

↳ précision de mesure

$$\langle\psi|\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} |x\rangle\langle x|\,dx\,|\psi\rangle = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0} |\psi(x)|^2\,dx$$

Proba de trouver la particule entre $|\psi(x_0)|^2\,\Delta x_0$

↳ densité de proba

→ Ce n'est pas l'amplitude de la densité de probabilité que l'onde soit là-bas

C'est qd je fais une mesure que je passe en proba.

Il n'y a pas de point spécial.

- Il n'y a pas de point associé à $|\psi\rangle$

  ↳ le chat n'est pas mort vivant.

- L'attribut position n'est pas un ingrédient de la réalité physique.

III - Opérateurs dans l'espace des états de position

1.) Opérateur position

a) à 1D

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle$$

$$\hat{X}|\psi\rangle = \hat{X}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\,|x\rangle\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x\psi(x)\,|x\rangle\,dx$$

$$\langle x|\psi'\rangle = \psi'(x) = x\psi(x)$$

En représentation position $\hat{X}$ correspond à la multiplication par x

$$\langle x|\hat{X}|\psi\rangle = x\langle x|\psi\rangle$$

En représentation impulsion

$$\langle p|\hat{X}|\psi\rangle \overset{?}{=} \tilde{\psi}'(p) = \widetilde{x\psi(x)}\,(p)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\frac{px}{\hbar}}\, x\psi(x)\,dx$$

$$\frac{\partial}{\partial p}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{-i\frac{px}{\hbar}}\,\psi(x)\,dx}_{\tilde{\psi}(p)} \times i\hbar = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p)$$

$$\langle p|\hat{X}|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\langle p|\psi\rangle$$

b) à 3D

$$\hat{\vec{R}}$$

$$\hat{T}_a|x\rangle = |x+a\rangle$$