

Permettez moi de mettre en exergue cette citation de Sidney Coleman, immense théoricien assez facétieux (on lui doit une conférence célèbre qui a impressionné jusqu'à Alain Connes intitulée Quantum mechanics in your face):

"The career of a young theoretical physicist consists of treating the harmonic oscillator in ever-increasing levels of abstraction."


LP 24 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Nicolas Chastrette

Avril 2020

Pour nous

Rapport du jury

- **2010** : L'analyse du seul circuit RLC est très insuffisante pour cette leçon. Le phénomène de résonance ne se limite pas aux oscillateurs à un degré de liberté. 
- **2009**: L'analyse du seul circuit RLC est très insuffisante pour cette leçon.
- **2008, 2007**: Le jury regrette que les cavités résonnantes soient rarement présentées.
- **2006**: L'aspect énergétique de la résonance est ignoré la plupart du temps. Trop souvent, la notion même de résonance n'est liée qu'à l'existence d'un maximum d'amplitude. Les applications dans le domaine microscopique sont rarement abordées.
- **2003**: La leçon porte sur l'étude de phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique. Le candidat ne doit pas se limiter à l'électricité et à la mécanique. Il doit prendre soin de dégager les propriétés communes aux différents exemples présentés. Quel lien y a-t-il entre le circuit RLC et la résonance du sodium ?
- *Jusqu'en 2001, le titre était : Phénomènes de résonance dans les systèmes linéaires. Exemples*
- **1998**: Il est bien entendu nécessaire d'insister sur la généralité du phénomène de résonance en physique et de ne pas cantonner l'exposé à un domaine unique (mécanique ou électricité). Les relations entre le comportement des systèmes forcés et les propriétés des mêmes systèmes, libres, doivent être soulignées, de même que les aspects énergétiques des phénomènes de résonance

biblio

- PCSI tout en un
- cours de mathevet (il est scanné)

0.1 prérequis

- électrocinétique
- meca

toute la physique: il s'agit d'une des plus vastes leçons de synthèse...

Introduction

Le terme de résonance est un terme fréquemment utilisé dans tous les domaines de la physique. Il est souvent associé à des images de la culture populaire : le pont de Tacoma rentré en résonance forcée par le vent, la Castafiore cassant un verre par sa voix, la balançoire oscillant de plus en plus haut.

Dans cette leçon nous allons étudier le phénomène de résonance d'un oscillateur simple par l'exemple d'un circuit RLC puis d'un ensemble d'oscillateur couplé et pour finir étudier une cavité acoustique.

1 Oscillateur à un seul degré de liberté

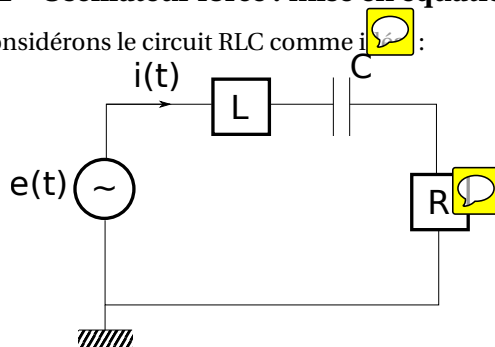
1.1 Mise en évidence expérimentale d'un phénomène de résonance

Circuit RLC prévoir GBF avec sortie. Prendre L pas trop grand car R supplémentaire. Fixer C tel que f_c soit vers 1 kHz. Oscillo regressi.

Tracer $i = f(\omega)$ et $\Delta\phi = f(\omega)$. Mesurer Q et ω_0 avec incertitudes.

1.2 Oscillateur forcé : mise en équation

Considérons le circuit RLC comme ici :




$$e(t) = L \frac{di}{dt} + \frac{q(t)}{C} + Ri(t)$$

cette partie est un rappel: il faut aller au plus vite au résultat et utiliser/mettre en place un vocabulaire général:


- 1) Système linéaire d'ordre à coefficients constants: deux paramètres Q et $\omega_0 \Rightarrow$ équation canonique, on passe en complexes
- 2) entrée=tension=excitation notée e, sortie=courant=réponse notée s
- 3) $H=S/E$ s'interprète ici comme une admittance. Il vient (aller directement à l'équation 3)

d'où

$$\frac{1}{L} \frac{de(t)}{dt} = \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{\tau} \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 i \quad (1)$$

C'est une équation  second ordre car dérivé seconde de i $\tau = L/R$. C'est le terme d'amortissement, il est d'autant plus faible que la dissipation est importante. et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ fréquence propre du système.

Le système est linéaire donc si dire e = entré et s = sortie du système linéaire

$\mathcal{R}e(e) \rightarrow \mathcal{R}e(s)$ Alors $e \rightarrow s$. C'est à dire que si l'excitation est $e(t) = e_m \cos(\omega t + \phi_e)$ ,
 $j e_m \sin(\omega t + \phi_e) = e_m e^{j(\omega t + \phi_e)}$, alors la réponse du système sera $i = i_m \cos(\omega t + \phi_s)$
 $j i_m \sin(\omega t + \phi_s) = i_m e^{j(\omega t + \phi_s)}$ ce qui autorise l'analyse en complexe pour résoudre l'équation 1. On trouve donc une solution qui s'écrit comme

$$\underline{s} \left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j\omega}{\tau} \right) = \underline{e} \frac{j\omega}{L}$$

. On peut réécrire cette équation comme

$$\underline{Z_e} = \frac{\underline{e}}{\underline{i}} = R + j \left(L\omega + \frac{1}{C\omega} \right) \quad (2)$$


qui est l'impédance du système, soit la somme des impédances des 3 éléments composant le système, on peut aussi réécrire cette équation comme

$$\underline{Z_e} = L \frac{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{\tau}$$

. Où $Q = \omega_0 \tau = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \propto 1/R$ facteur de qualité de la résonance. Plus R est faible (donc la dissipation est faible) plus la résonance est marquée. d'où

$$\underline{Z_e} = R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \exp \left[j \text{Arctan} \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \right]$$


d'où

$$i_m = \frac{e_m}{|\underline{Z_e}|} = \frac{e_m \text{  } }{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}. \quad (3)$$

D'où quelque soit Q, i_m passe par un maximum et $\phi_m = \phi_e - \phi_i$ passe par zéro quand $\omega = \omega_0$: à la résonance la réponse et l'excitation sont en phase.

Là il faut une transition. On a choisi le courant comme réponse. On aurait pu choisir la tension aux bornes de C qui donne des résultats différents (ce qui permet de glisser qu'on en sait plus). Mais tension et courant sont spécifiques à l'élec: la puissance au contraire est une notion transversale.

1.3 Aspect énergétique

Puissance fournie par le générateur $\mathcal{P}_f = e_m i_m \cos(\omega t + \phi_e) \cos(\omega t + \phi_i)$  Donc la

puissance efficace : $\tilde{\mathcal{P}}_f = \langle \cos(\omega t + \phi_e) \cos(\omega t + \phi_i) \rangle \frac{e_m^2}{R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{e_m^2}{2R \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \cos(\phi_m) \cos(\phi_m)$

avec $\cos(\phi_m) = \frac{\text{Re}(\underline{Z_c})}{|\underline{Z_c}|} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}.$

La puissance dissipée par la résistance vaut $\tilde{\mathcal{P}}_d = R \frac{i_m^2}{2} = \frac{e_m^2}{2R} \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \tilde{\mathcal{P}}_f$

Donc la puissance fournie par le générateur est intégralement dissipée par la résistance du circuit. La puissance fournie est maximale en $\omega = \omega_0$ et minimale quand $\omega \rightarrow 0$ ou $\omega \rightarrow \infty$.

La résonance est obtenue lorsqu'on excite un système à sa fréquence propre. Dans ce cas sa réponse est maximale et la réponse du système est en phase avec l'excitation, ce qui permet un échange d'énergie maximum vers le système.

il manque une transition et la présentation que tu fais me semble maladroite. On pourrait mieux introduire l'approximation harmonique. Par exemple: Le cas du RLC est quelque peu artificiel et modélisé à l'extrême: pourquoi est-il si important en physique?

1.4) Modèle de Drude-Lorentz

Approximation harmonique: tout mouvement autour d'une position d'équilibre est (sauf cas exceptionnel) en première approximation harmonique aux petites amplitudes. Faire un schéma de potentiel typique et son approximation parabolique. On développe le potentiel autour de x_0 . Le terme d'ordre 1 est nul (équilibre, flèche horizontale sur le schéma) et on peut choisir le terme d'ordre 0 nul comme origine des potentiels.

Le développement commence à l'ordre 2 en $u = x - x_0$: $V(u) = \frac{1}{2} k u^2$. $E_c = \frac{1}{2} \mu v^2$. On écrit l'énergie (et pas le Lagrangien) on dérive et on a l'équation du mouvement. On rajoute la force associée à E de l'onde et un amortissement car l'électron est accéléré, il rayonne donc perd de l'énergie.

Conclusion: à résonance, la puissance diffusée par l'atome est maximale. Montrer des spectres de raies.

1.4 oscillateur mécanique

Nous avons ici étudié une résonance à travers le cas particulier d'un circuit RLC, système linéaire du second ordre. Si la dissipation devient nulle alors ce système peut être modélisé par un oscillateur harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Ce concept d'oscillateur harmonique est primordial en physique car pour tout système oscillant, on peut approximer le potentiel, proche de la position d'équilibre par un oscillateur harmonique. Étudions rapidement le cas d'un système masse-ressort.

On peut écrire le potentiel $V(r) = V(r_{eq}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V}{dr^2} \right|_{r_{eq}} (r - r_{eq})^2 = V(r_{eq}) + \frac{1}{2} k (r - r_{eq})^2$ au premier ordre non nul. Le Lagrangien du système s'écrit donc $\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{1}{2} k (r - r_{eq})^2$, d'où l'équation du mouvement s'écrit $\left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} \right) = 0$,

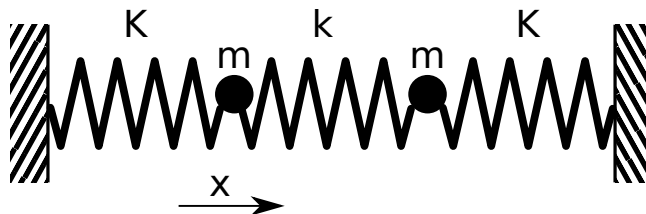
$$\ddot{r} - \omega_0^2 (r - r_{eq}) = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. On a bien une équation d'oscillateur harmonique à un seul degré de liberté.

Que ce passe-t'il si on couple deux oscillateurs harmoniques et ainsi rajoute des degrés de liberté? transition faible... On peut enrichir avec un truc du genre: l'exemple précédent rend compte des transitions électroniques et des spectres UV-visible des atomes. La spectro IR est riche d'enseignements pour les molécules mais un peu plus subtile car plusieurs deg de lib sont en jeu. Voyons ça de plus près...

2 Oscillateur à N degrés de liberté

2.1 Système à deux degrés de liberté



En notant $x_{0,i}$ la position d'équilibre de chacune des masses et $\eta_i = x_i - x_{0,i}$ le déplacement par rapport à l'équilibre de chaque masse,

$$\ddot{\eta}_1 = -K\eta_1 + k(\eta_2 - \eta_1) \quad (4)$$

$$\ddot{\eta}_2 = -K\eta_2 + k(\eta_1 - \eta_2) \quad (5)$$

En posant $\vec{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ et $\epsilon = k/K$, on peut réécrire les équations comme

$$\ddot{\vec{\eta}} = \frac{K}{m} \begin{pmatrix} -(1+\epsilon) & \epsilon \\ \epsilon & -(1+\epsilon) \end{pmatrix} \vec{\eta}$$

Il faut donc résoudre l'équation

$$-\omega_0^2 M \vec{\eta} = \vec{0} \quad (6)$$

avec $M = \begin{pmatrix} -(1+\epsilon) & \epsilon \\ \epsilon & -(1+\epsilon) \end{pmatrix}$. Diagonalisons cette matrice :
 $\det(M - \lambda I) = 0$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 1 + 2\epsilon$$

, d'où les fréquences propres du système sont $\omega_1^2 = \omega_0^2$ et $\omega_2^2 = \omega_0^2(1 + 2k/K)$. Il nous

reste à trouver les valeurs propres de cette matrice. On trouve alors $\vec{y}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ et

$\vec{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ -\eta_2 \end{pmatrix}$. On peut alors réécrire les équations 4 et 5 comme étant

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \omega_0^2 y_1 &= 0 \\ \ddot{y}_2 + \omega_0^2 \left(1 + 2\frac{k}{K}\right) y_2 &= 0 \end{aligned}$$

*

$$\begin{aligned} y_1 &= y_{1,0} \cos(\omega_0 t + \phi_1) \\ y_2 &= y_{2,0} \cos\left(\omega_0 \sqrt{1 + 2\frac{k}{K}} t + \phi_2\right) \end{aligned}$$

* Les coordonnées y_i sont appelées coordonnées normales. Les équations du mouvement dans le système des coordonnées normales sont deux oscillateurs harmoniques indépendants.

- $y_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$ les deux masses bougent en phase avec la même amplitude. On parle de mode symétrique.
- $y_1 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2$ les deux masses bougent en opposition de phase avec la même amplitude. On parle de mode antisymétrique.

Si on excite le système à une de ces fréquences propres, il rentre alors en résonance.

transition: l'immense intérêt de la méthode présentée ci-dessus est qu'elle se généralise à un nombre quelconque N fini de degrés de liberté.

Montrer le spectre IR d'une grosse molécule. Le cas où N tend vers l'infini, c'est à dire un modèle simplifié de cristal sans tenir compte des bords est particulièrement intéressant.

2.2 Vers le continu

Considérons un système de N degré de liberté. On peut alors faire le même type de raisonnement que précédemment, diagonaliser la matrice de transition, trouver les valeurs et vecteur propres, soit le spectre du système et la phase entre chaque élément pour chaque mode. Considérons par exemple un cristal unidimensionnel : par invariance par translation pour un mode i fixé, tous les atomes ont la même amplitude A_i et la différence de phase entre deux atomes successifs $\phi_{n+1}(\omega_i) - \phi_n(\omega_i) = \phi_i^0 = k_i(\omega_i)a$. La phase du $n^{\text{ième}}$ atome est donc $\phi_n(\omega_i) = nk_i(\omega_i)a$. Le système est linéaire donc on cherche les solutions sous la forme $x_n^i = A_i \exp(j(\omega_i t - k_i n a))$, solution de

$$m\ddot{x}_n = -K(x_{n+1} - x_n) - K(x_n - x_{n-1})$$

, d'où

$$\omega_i^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\left(\frac{k_i a}{2}\right)$$

et conclure: on a alors un continuum de fréquences de vibration possible. Le spectre est alors une spectre de bande#spectre de raies des atomes et molécules. Transition:

si $\lambda \gg a$ la structure discrète de la matière n'est plus sensible.

c'est la relation de dispersion. Si $|k_i| \ll \frac{\pi}{a}$ on peut linéariser la relation de dispersion : $\omega_i = \underbrace{(a\omega_0)}_{c} k_i$. On peut alors introduire une fonction $\Psi_i(x, t)$ continue

2.3) Approximation du continu

dérivable qui interpole les $x_n^i(t)$ pour chaque mode. On impose donc que $\Psi_i(X = na, t) = x_n^i(t)$. L'équation du mouvement devient donc

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} = 0$$

. C'est une équation de D'Alembert. Par linéarité on trouve donc comme relation de dispersion $\omega^2 = c^2 k^2$. On a donc un continuum de modes acoustiques : il y a résonance pour toutes les fréquences. Cette modélisation est valable si $\lambda \gg a$ correctement le système, c'est à dire si $\lambda \gg a$

On vient d'étudier la relation de dispersion à travers une équation de d'Alembert. On peut maintenant se demander ce qui se passe si on impose des conditions aux limites à une onde.

bof: transition un peu artificielle... Essayer par exemple: bien sûr en pratique un milieu n'est jamais infini et possède une géométrie particulière. Cela influe naturellement sur sa réponse à une excitation donnée.

3 résonance et conditions aux limites

3.1 goutte sphérique et une onde acoustique

L'interface eau/air de la goutte présente un contraste d'impédance si important ($Z_{\text{air}}/Z \simeq 2.10^{-4}$) que la surpression acoustique dans l'eau est nulle le long de cette interface. En effet, une onde incidente i (de surpression p_i) se réfléchissant sur une interface donne une onde réfléchie r (de surpression acoustique p_r) et une onde transmise t (de surpression acoustique p_t). Le coefficient de réflexion en pression vaut alors $r = \frac{p_r}{p_i} = (Z_{\text{air}} - Z)/(Z_{\text{air}} + Z) = -0,98$. La surpression acoustique dans l'eau au niveau de l'interface eau/air vaut alors $p = p_i + p_r = p_i(1 + r) = 0,02p_i \ll p_i$. Pour déterminer les modes propres de la goutte hémisphérique, on peut déterminer les modes propres acoustiques d'une goutte sphérique tels que la surface de la goutte

Je comprends que ce paragraphe te tienne singulièrement à coeur, il est bien rédigé et tout à fait pertinent... Toutefois, ses vertus pédagogiques sont faibles car il y a des difficultés techniques: 3D + géométrie sphérique (Bessels). Je pense que la bête corde de Melde (1D cartésien) serait mieux adaptée. Mais tu gardes sous le coude cet exemple que tu maîtrises particulièrement bien pour la conclusion :).

Le message est le suivant: le milieu infini peut vibrer à toutes les fréquences on vient de le voir mais les conditions aux limites vont sélectionner certaines d'entre elles. Voir la diapo corde1: interprétation en terme d'onde stationnaire. Mais on peut réinterpréter la condition de résonance en terme de condition d'interférence d'ondes progressives: diapo corde2 (et ton dernier paragraphe). D'où ça s'adapte à toutes les géométries (et plus ou moins à ta goutte si elle n'est pas trop petite).

est un nœud de pression. La surpression acoustique p dans l'eau vérifie l'équation de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2 \Delta p = 0 \quad (7)$$

En se restreignant à des solutions harmoniques de pulsation et en notant $p = \underline{p} e^{i\omega t}$, \underline{p} vérifie l'équation de Helmholtz:

$$\Delta \underline{p} + k^2 \underline{p} = 0$$

où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$

En coordonnées sphériques (définies sur la figure

$$\Delta \underline{p} = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{\frac{1}{r^2} \Delta_r} \underline{p} + \underbrace{\left[\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]}_{\frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\phi}} \underline{p}$$

En cherchant \underline{p} sous une forme à variables séparées : $p = R(r)Y(\theta, \phi)$ puis en divisant par RY et en multipliant par r^2 , on peut séparer les variables :

$$\frac{1}{R} \Delta_r R + k^2 = -\frac{1}{Y} \Delta_{\theta\phi} Y = \ell(\ell + 1) \quad (8)$$

avec ℓ entier naturel.

Donc R vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) R = 0$$

Qui se réécrit en posant $x = kr$:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\ell(\ell + 1)}{x^2} \right) R = 0$$

Les solutions de cette équation sont les familles de fonctions de Bessel sphériques j_ℓ et y_ℓ . Les zéros de j_ℓ et y_ℓ sont les mêmes que ceux des fonctions de Bessel $J_{\ell+\frac{1}{2}}$ et $N_{\ell+\frac{1}{2}}$. D'autre part, la pression s'annule à la surface de la goutte. $R = j_\ell$ vérifie

$$j_\ell \left(\frac{kD}{2} \right) = 0$$

Soit

$$\frac{kD}{2} = z_{\ell,q}, \quad q \in \mathbb{N}$$

où $z_{\ell,q}$ est le $q^{\text{ème}}$ zéro positif par ordre croissant de la fonction j_ℓ , ce qui est équivalent à :

$$f_{\ell,q} = \frac{cz_{\ell,q}}{\pi D} \quad (9)$$

où $f_{\ell,q}$ sont les fréquences propres de la goutte sphérique. Pour la valeur de D mesurée expérimentalement $D = 3,36 \text{ mm}$ et $c = 1500 \text{ ms}^{-1}$, les premières fréquences propres sont $f_{0,1} = 446 \text{ kHz}$, $f_{1,1} = 639 \text{ kHz}$, $f_{2,1} = 817 \text{ kHz}$ et $f_{0,2} = 893 \text{ kHz}$.

Ici comme dans la corde de Melde, en introduisant des conditions aux limites, on impose des conditions de discrétisation de k . On peut comprendre cette périodicité en disant qu'il faut que l'onde soit en phase avec elle-même quand elle revient au niveau de l'interface. On peut alors caractériser ces modes propres à l'aide d'une vibration autour de chaque fréquence de résonance. (Pour info le facteur de qualité est de 100 pour une goutte hémisphérique).

Conclusion

Dans cette leçon nous avons vu qu'il y a résonance lorsque l'excitation et la réponse du système sont en phase. Nous avons montré que pour les systèmes discrets il y a une fréquence propre de réponse par degré de liberté, le transfert d'énergie vers le système est maximal à résonance. Nous avons vu que pour les systèmes continus, que les conditions aux limites imposent une discrétisation du spectre.

Le couplage de deux résonateurs est encore beaucoup étudié en particulier ceux qui couplent une résonance de volume liée à une cavité et une résonance de surface qui peut conduire à une instabilité d'oscillation observée à travers la physique comme dans les oscillations des miroirs des détecteurs d'onde gravitationnels, de tiges d'AFM ou des oscillations de la surface de gouttes d'eau, sous le fait d'un forçage retardé (dus à une variation de la longueur de la cavité) faisant apparaître une dissipation effective négative au-delà d'un seuil en énergie.

là, ce qui manque à mon sens c'est le lien entre les parties: résonance d'un OH ou d'ondes stationnaires sont qualitativement différentes, au moins en apparence... On peut soit le traiter dans un 3.2 bien identifié après la corde de Melde soit en ouverture après la conclusion si vous l'êtes moins.

On peut en effet revenir sur le modèle de Drude Lorentz et le spectre de raie des atomes. En effet, dans sa thèse (1924) de Broglie postule la dualité onde-corpuscule et associe à un électron d'impulsion p une onde de $\lambda = h/p$. Pourquoi a-t-on des raies atomiques distinctes? Parce que l'électron n'a que certaines orbites... lesquelles? celles qui satisfont la condition de résonance! sur l'orbite de rayon r il y a $n \lambda$. Le calcul est très simple: d'après le théorème du viriel l'énergie cinétique $E_c = p^2/2m$ est la moitié de la valeur absolue de l'énergie potentielle E_p soit $e^2/2r$. D'où $\lambda^2 = (h/p)^2 = h^2 m r / e^2 = (2\pi r)^2$; d'après la condition de résonance $r = n \lambda$. Les orbites possibles ont pour rayon $r = n^2 m \hbar^2 / e^2$ et l'énergie totale qui vaut $E_p + E_c = -E_c = 1/2 E_p (<0) = -e^2/4r = -e^4/m \hbar^2 / n^2$.

Conclusion: dans les modèles de Drude et de Bohr on postule l'existence d'orbites stables. L'apport de la mécanique ondulatoire est de justifier ces orbites stables comme condition de résonance de l'onde de de Broglie dans les conditions aux limites imposées par le potentiel ($-e^2/r$). A résonance, il y a un transfert d'énergie maximal de l'onde vers l'atome que l'on interprète comme la diffusion de la lumière.

Il manque encore un trait essentiel au modèle Q: dans le modèle classique (Drude Lorentz) on comprend bien que l'électron est accéléré, rayonne et dissipe de l'énergie. Mais il devrait tomber sur le noyau: en classique les atomes sont instables. En MQ on retrouve des configurations stables mais... plus de dissipation. Pour cela il faut introduire l'émission spontanée (Einstein 1915 pour une description phénoménologique) qui ne se comprend qu'avec la seconde quantification (années 30-40) et clarifier la notion de photon. De façon très métaphorique (à la Maxwell des années 1860) on a une densité d'énergie électromagnétique qui comporte deux termes. Un en E^2 qui est comme une énergie potentielle (sur une molécule ça étire les liaisons analogue à $1/2 k x^2$). Un autre en B^2 qui est comme une énergie cinétique (ça met les électrons en mouvement de rotation cyclotron par exemple, donc analogue à $1/2 m v^2$). En tout point de l'espace le champ électromagnétique se comporte comme un oscillateur harmonique!!! On peut rendre rigoureux tout ça et quantifier le champ EM: pour chaque mode (défini par son vecteur k et sa polarisation) l'énergie est $(n+1/2)\hbar \omega$ que l'on interprète comme n excitations élémentaires (les photons) et le $1/2$ sont les fluctuations du vide. L'interaction d'une onde avec un atome revient à celle de 2 OH qui n'est efficace que lorsque les deux fréquences sont égales... L'émission spontanée est le couplage de l'atome excité vers un mode vide ($n=0$) du champ. C'est le 3ème étage de la fusée de M. Coleman. Après on peut considérer que les électrons eux-mêmes sont les excitations élémentaires d'un champ... 4ème étage... Rq: ça marche pour tout champ qui obéit à l'éq d'Alembert: phonons...