# Chapitre 10. Dynamique des écoulements parfaits

## I- Écoulement parfait

- Couche limite. En dehors de la couche limite effet visqueux négligé.

Définition : Écoulement parfait :

- Un écoulement est dit parfait si on peut négliger les 4 de diffusion (viscosité, thermique)

- ⚠ fluide parfait $\Longrightarrow$ écoulement parfait.
  $\not\Longleftarrow$

  hélium IV pour $T < 2{,}17\,K$ est superfluide (ie viscosité est nulle)
  ↳ absence totale de pertes de charge. (1937 effets quantiques)

- L'approximat° des écoulements parfaits ≠ fluide parfait

  Le nombre de Reynolds est suffisamment grand pour négliger la viscosité en dehors des couches limites : on Rapporte $\boxed{\frac{\delta}{L} = \frac{1}{\sqrt{Re}}}$

  On travaille en dehors des couches de diffusion

  → Pas diffusion thermique
  → Pas diffusion viscosité $\Longrightarrow$ écoulement ~~i~~réversible

$$\frac{Ds}{Dt} = 0$$

## II- Dynamique des écoulements parfaits

### II.1 Équat° d'Euler (1755)

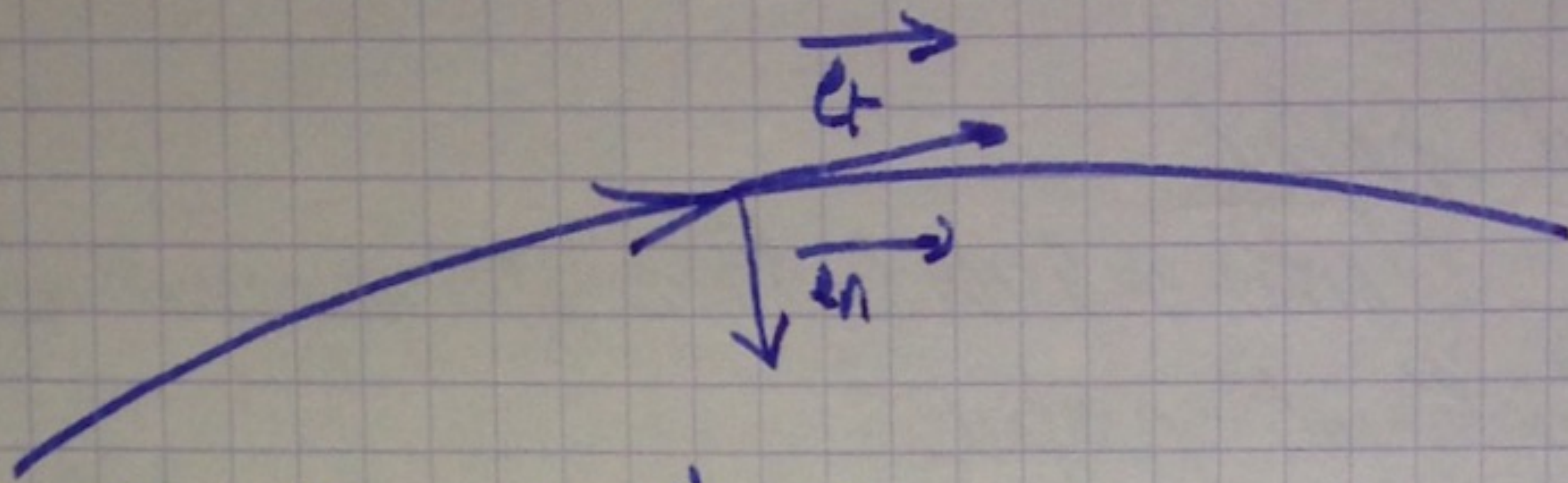
Démonstration : • Théorème de Reynolds → conservat° de la qté de mvt au niveau local volumique

• On oublie les termes de viscosité dans le tenseur des contraintes $[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} -P & & \\ & -P & \\ & & -P \end{pmatrix} + 0$

• On aboutit à l'équat° d'Euler.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \rho\vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho g y)$$

Dans la base de Frenet :




$$\frac{D\vec v}{Dt} = \frac{Dv}{Dt}\vec{e_t} + \frac{v^2}{R}\vec{e_n}$$

rayon du cercle osculateur

$$\frac{d\vec{e_t}}{ds} = \gamma(s)\,\vec{e_n}$$

s : abscisse curviligne.

↳ courbure $R = \frac{1}{\gamma(s)}$

$$\vec v = v\vec T$$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \frac{dv}{dt}\vec T + v\frac{d\vec T}{dt}$$

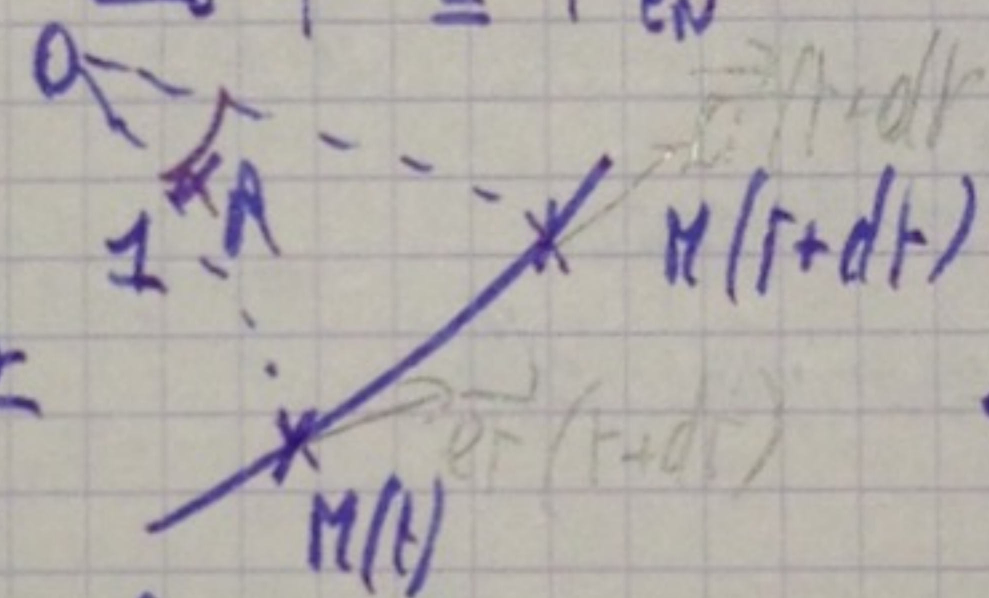
$$\frac{d\vec T}{dt} = ?$$

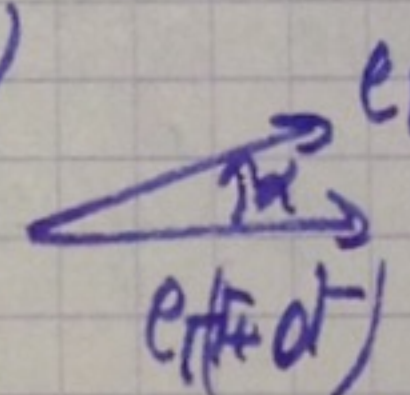
$$\frac{d\,\vec T\cdot\vec T}{dt} = 2\vec T\cdot\frac{d\vec T}{dt} = 0 \text{ car } \vec T\cdot\vec T = 1$$

↳ $\vec T = T\,\vec{e_N}$

$$\left\|\frac{d\vec{e_t}}{dt}\right\| = \frac{d\alpha}{dt}$$

rotation → $= \omega = \frac{v}{R}$




$$\vec a = \frac{dv}{dt}\vec{e_t} + \frac{v^2}{R}\vec{e_n}$$

$$\frac{D\vec v}{Dt} = \frac{\partial\vec v}{\partial t} + (\vec v\cdot\overrightarrow{grad})\,\vec v$$

$$\frac{D\vec v}{Dt} = \frac{\partial\vec v}{\partial t} + \overrightarrow{rot}\,\vec v\wedge\vec v + \overrightarrow{grad}\,\frac{v^2}{2}$$

## II.3 Les équations de la méca des écoulements parfaits

- inconnues : $\vec{v}$, $P$, $\rho$, $T$ } 6 inconnues

- Euler × 3
- Conservat° de la masse $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{v}) = 0$
- L'équat° d'état du fluide : $P = \frac{\rho R T}{M}$
- $\chi_S = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial P}\right)_S$ gaz : $P\rho^{-\gamma} = cte$ ← indice adiabat

## III- Exemple d'utilisat° des équat° d'Euler

- $\vec{v} = v_0 \vec{e_x}$ → Eq d'euler $\underset{\text{Rég. Perm}}{\Longrightarrow}$ $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P + \rho \vec{g} = 0$
- Jet d'eau → parabolique → $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g}$ → $-\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P = 0$

## III.2 Effet coanda

- un jet de fluide a tendance à entraîner le fluide environnant (viscosité !?)

## III.3 Exemple : vidange d'un tube

Théorème de Bernoulli : 1755

- écoulement
  - parfait (A)
  - permanent (B)
  - incompressible (C)
- axe z vertical ascendant (D)
- Le fluide ne subit pas d'actions autre que pesanteur entre A et B (E)

Entre 2 points A et B d'une m̂ ligne de courant, la charge est constante.

$$\left[ P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z \right]_A^B$$

Démonstrat°:

- $\rho \underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{\to 0 \text{ (B)}} + \rho (\overrightarrow{rot}\, \vec{v}) \wedge \vec{v} + \rho\, \overrightarrow{grad} \frac{v^2}{2} = - \overrightarrow{grad}(P) - \rho\, \overrightarrow{grad}(gz)$ (A) (D)
- (D) Circulat° selon ligne de courant

$$\int_A^B \rho\, \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \overrightarrow{grad}(P) + \rho\, \overrightarrow{grad}(gz) \cdot \vec{dl} = 0$$

- $\rho$ est constant dans l'écoulement (C)
- écoulement permanent (B) ⇒ lignes de courant et trajectoire confondue
  ⇒ $\rho$ peut sortir de l'intégrale

$$\left[ \rho \frac{v^2}{2} + P + \rho g z \right]_A^B = 0$$

Interprétat° énergétique

$$\underbrace{\int_A^B \rho\, \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) \vec{dl}}_{\text{variat° d'}E_c} = \underbrace{\int_A^B - \overrightarrow{grad}\, P \cdot \vec{dl}}_{\text{travail volumique des forces de pression}} + \underbrace{\int_A^B \rho \vec{g} \cdot \vec{dl}}_{\text{travail volumique du poids.}}$$