



UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES
MAGISTÈRE DE MATHÉMATIQUES

STAGE DE MAGISTÈRE
ANNÉE 2021

**Droites triples des hypersurfaces cubiques
lisses de \mathbb{P}^4**

PIERRE LOISEL
ENCADRÉ PAR SAMUEL BOISSIÈRE ET GRÂCE BOCKONDAS



Table des matières

0	Introduction	3
1	Droites multiples et courbe de Murre	4
1.1	Mise en place du contexte	4
1.1.1	Cordonnées et plongement de Pluecker	4
1.1.2	Variété de Fano	6
1.1.3	Droites multiples et courbe de Murre	10
1.2	Deux exemples fondamentaux	14
1.2.1	La cubique de Fermat	14
1.2.2	La cubique de Klein	15
1.3	Travail effectué	16
1.3.1	Composantes irréductibles de la courbe de Murre	16
1.3.2	Recherche d'une formule générale pour l'équation locale de la courbe de Murre	17
2	À la recherche des points de Eckardt	18
2.1	Définitions et propriétés des points de Eckardt	18
2.2	Travail effectué	20
2.2.1	Condition sur la cubique pour posséder des points de Eckardt	20
2.2.2	Détermination de la composante principale	22
3	Cubiques pfaffiennes à revêtement triple	23
3.1	Définitions et propriétés	23
3.2	Travail effectué	24
4	Impression 3D de surfaces	25
A	Programmes	29
A.1	Calcul de la Grassmannienne	29
A.2	Calcul des équations de la variété de Fano	29
A.3	Calcul des équations de la courbe de Murre	30
A.4	Calcul du lieu singulier d'une cubique	31
A.5	Recherche d'une formule pour l'équation locale de la courbe de Murre	31
A.6	Recherche de points de Eckardt d'une forme donnée	33
A.7	Calcul de l'hypersurface Pfaffienne	34
A.8	Calcul d'une cubique Pfaffienne	35
B	Comment imprimer de jolies surfaces en 3D ?	36

0 Introduction

Ce document est le résumé du travail que j'ai effectué durant mon stage de avril à juillet 2021 encadré par Samuel Boissière et Grâce Bockondas. Le but premier du stage était d'assister Samuel et Grâce dans la thèse de cette dernière sur les droites triples des hypersurfaces cubiques de \mathbb{P}^4 . Plus précisément, je devais chercher et travailler sur des exemples afin d'émettre des conjectures (ou en infirmer comme nous le verrons par la suite). Mon travail s'est donc divisé en deux parties.

La première a été de comprendre la théorie relative aux droites triples des hypersurfaces cubiques de \mathbb{P}^4 . Plus précisément, il a été attendu de moi que je comprenne les théorèmes, les différentes situations géométriques et les calculs qui permettent de mettre en valeur ces dernières. C'est notamment ce qui est proposé dans les parties 1.1.2 et 1.1.3 où nous étudions les équations (locales) des droites multiples des hypersurfaces cubiques de \mathbb{P}^4 et dans la partie 2.1 où nous étudions les points de Eckardt, les points de multiplicité trois, d'une hypersurface cubique.

La deuxième partie de ce travail a donc été de trouver, traiter et travailler sur des exemples concrets afin de savoir si des propriétés qui ont été trouvées sur des hypersurfaces cubiques connues (notamment les cubiques de Fermat et de Klein) se retrouvent dans d'autres hypersurfaces cubiques plus générales. Pour cela, les calculs ont grandement été automatisés à l'aide du logiciel SageMath, que l'on pourra retrouver dans l'annexe A. Le traitement des exemples et l'énonciation (ou la réfutation) des conjectures que nous avons pu avoir se trouvent dans les parties 1.3 et 2.2 principalement.

Les parties 3 et 4 sont un peu à part. La partie 3 concerne les cubiques pfaffiennes à revêtement triples sur lesquels je devais initialement plus travailler. Il se trouve qu'au final mon attention s'est plus portée sur les droites triples des hypersurfaces cubiques et je n'y ai passé que peu de temps, d'où le fait qu'elle est moins développée. J'ai cependant quand même eu le temps de travailler sur cette théorie et eu le temps de traiter un exemple dans la partie 3.2. La partie 4 n'a pas vraiment à voir avec le reste du stage. Une des tâches annexes que j'ai eu à faire était de me renseigner sur l'impression 3D de surfaces possédant des singularités complexes à modéliser. Il se trouve que j'y ai passé plus de temps que ce que l'on pensait à la base et que le projet a notamment aboutit à l'impression de deux des surfaces et à la rédaction dans l'annexe B d'un "guide" afin d'obtenir un fichier prêt à l'impression en partant de l'équation d'une surface.

Je tenais à remercier Samuel et Grâce pour leurs aide précieuse et leurs bonnes humeurs qui rendaient les journées de travail toutes très agréables (et ce malgré l'absence de montagnes à l'horizon). Je souhaite aussi remercier l'ensemble du personnel du LMA qui tous et toutes ont été très accueillant et sympathiques avec moi lors de mon séjour à Poitiers.

1 Droites multiples et courbe de Murre

1.1 Mise en place du contexte

Dans cette section, nous allons donner le contexte et les outils permettant de comprendre le travail que j'ai eu à fournir durant ce stage. On renverra aux chapitres 1 et 2 de [8] pour ce qui concerne les concepts de base de la géométrie algébrique affine et projective.

1.1.1 Cordonnées et plongement de Pluecker

Dans un premier temps, nous allons construire le plongement de Plücker qui nous permettra d'obtenir les équations algébriques des droites projectives incluses dans la cubique (dans un sens qui sera donné plus tard).

Dans toute la suite, E sera un \mathbb{C} espace vectoriel de dimension $n+1$. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons par la suite \mathbb{P}^n l'espace projectif associé à E . On notera $\Lambda^2 E$ l'ensemble des bivecteurs de E . C'est un espace vectoriel et, si (e_1, \dots, e_n) est une base de E , alors l'ensemble

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \mid 0 \leq i_1 < i_2 \leq n\}$$

est une base de $\Lambda^2 E$. De plus, rappelons que $\wedge : E \times E \rightarrow \Lambda^2 E$ est bilinéaire et vérifie pour tout $u, v \in E$, $u \wedge v = -(v \wedge u)$ et $u \wedge u = 0$.

Soit $\Pi \subset E$ un plan. Le sous-espace projectif associé à Π est une droite que l'on notera ℓ . On notera $\mathbb{G}(1, n)$ la **Grassmannienne des droites de \mathbb{P}^n** . Dans la suite, lorsque l'on parlera de Grassmannienne, on parlera de la Grassmannienne des droites. On considère (v_0, v_1) une base de Π . Alors (w_0, w_1) est une autre base de Π s'il existe $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que

$$\begin{cases} w_0 = av_0 + bv_1 \\ w_1 = cv_0 + dv_1 \end{cases}$$

et que $(ad - bc) \neq 0$. On peut alors calculer $w_0 \wedge w_1$, on a ainsi

$$w_0 \wedge w_1 = (ad - bc)v_0 \wedge v_1$$

Ainsi, comme $(ad - bc) \neq 0$ et qu'une droite projective est caractérisée par deux vecteurs, on peut passer dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$ et définir le plongement de Plücker.

Définition 1.1.1 (Plongement de Plücker). *En reprenant les notations ci-dessus, on définit le **plongement de Plücker** comme étant l'application p définie par*

$$p : \begin{pmatrix} \mathbb{G}(1, n) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\Lambda^2 E) \\ \ell & \longmapsto & v_0 \wedge v_1 \end{pmatrix}$$

Cette application est bien définie. En effet, si ℓ est une droite projective, nous avons vu qu'elle était définie par deux vecteurs formant une base du plan Π , et que deux couples de vecteurs formant une base de Π diffèrent dans $\Lambda^2 E$ d'un réel non-nul, donc définissent le même élément dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$. Ce plongement des droites projectives dans un espace projectif a le bon goût d'être injective, comme nous allons le voir dans la propriété qui suit.

Propriété 1.1.2. *Le plongement de Plücker p , défini en 1.1.1, est injectif. Plus exactement, l'image dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$ de $\mathbb{G}(1, n)$ est exactement l'ensemble des éléments $\omega \in \Lambda^2 E$ s'écrivant sous la forme $\omega = v_0 \wedge v_1$ modulo la relation de colinéarité. Un tel élément est appelé un **bivecteur décomposable**.*

Démonstration : On reprend les notations précédentes. Soit $\omega = v_0 \wedge v_1 \in \Lambda^2 E$. On considère le sous-espace

$$\Pi_\omega = \{v \in E \mid v \wedge \omega = 0\}$$

Il est clair que $\Pi \subset \Pi_\omega$. Réciproquement, si $v \in \Pi_\omega$, comme le couple (v_0, v_1) est une base du plan Π , on peut compléter la famille en une base de E que l'on note $(v_i)_{0 \leq i \leq n}$. Dans cette base, on a $v = \sum_{i=0}^n a_i v_i$. La condition que $v \in \Pi_\omega$ nous donne donc que $a_i = 0$ pour $2 \leq i \leq n$ et donc $v \in \Pi_\omega$. Si maintenant l_1 et l_2 sont deux droites projectives telles que $p(l_1) = p(l_2)$, alors on a par ce qui précède que $\Pi_{p(l_1)} = \Pi_{p(l_2)}$ et on a ainsi l'injectivité et la structure de l'image. \square

Ainsi, nous avons ramené l'étude des droites projectives dans un espace projectif, ce qui nous permettra d'user des techniques de la géométrie algébrique. Nous allons voir maintenant que dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$, on a un système de coordonnées sympathique qui nous permet d'étudier ces droites.

On considère une base (e_0, \dots, e_n) de E . Si $v_0 = \sum_{i=0}^n a_i e_i$ et $v_1 = \sum_{i=0}^n b_i e_i$, on peut calculer le bivecteur associé dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$.

$$v_0 \wedge v_1 = \sum_{0 \leq i < j \leq n} (a_i b_j - a_j b_i) e_i \wedge e_j$$

Les quantités $p_{ij} = a_i b_j - a_j b_i$ sont appelées les **coordonnées de Pluecker de ℓ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$** . Ces dernières vont nous permettre d'avoir un cadre de travail satisfaisant. Elles vont nous permettre tout d'abord de démontrer cette propriété fondamentale dans la suite.

Propriété 1.1.3. *L'ensemble $\mathbb{G}(1, n)$ est une variété projective.*

Avant de démontrer la propriété, nous allons énoncer un lemme sur les bivecteurs totalement décomposables.

Lemme 1.1.4. *Soit $\omega \in \Lambda^2 E$. Alors ω est totalement décomposable si et seulement si $\omega \wedge \omega = 0$.*

Démonstration de 1.1.4 : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ et $v_0, v_1 \in E$ qui ne sont pas colinéaires. Si $\omega = \lambda v_0 \wedge v_1$, alors il est clair que $\omega \wedge \omega = 0$. Réciproquement, supposons que $\omega \wedge \omega = 0$ mais que ω n'est pas totalement décomposable. Alors on peut écrire

$$\omega = v_0 \wedge v_1 + \omega'$$

où $\omega' \neq 0$ et où il n'existe pas de vecteur $v \in E$ tel que $\omega' = v \wedge v_0$ ou $\omega' = v \wedge v_1$ (sinon, ω serait totalement décomposable). On a alors que

$$\omega \wedge \omega = 0 = 2v_0 \wedge v_1 \wedge \omega' + \omega' \wedge \omega'$$

Comme par hypothèse v_0 et v_1 ne sont pas colinéaires, on complète la famille (v_0, v_1) en une base (v_0, v_1, \dots, v_n) de E . Ainsi, l'ensemble $(v_{i_1} \wedge v_{i_2})_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\Lambda^2 E$ et on a, dans cette base, que $\omega' = \sum_{0 \leq i < j \leq n} a_{ij} v_i \wedge v_j$. Or, v_0 et v_1 n'interviennent pas dans la décomposition de ω' en bivecteurs totalement décomposables. Ainsi, on a nécessairement que les deux termes de la somme sont nuls et donc que $\omega' = 0$. \square

Démonstration de 1.1.3 : Afin de montrer la propriété, on va montrer que $\mathbb{G}(1, n)$ est déterminée par une famille d'équations polynomiales en les coordonnées de Pluecker. D'après 1.1.2, on sait que $\mathbb{G}(1, n)$ s'identifie aux classes projectives de bivecteurs totalement décomposables.

Soit $\omega \in \Lambda^2 E$ un bivecteur associé à une droite $\ell \in \mathbb{G}(1, n)$. Nous avons vu dans 1.1.2 que ω est totalement décomposable et donc, d'après 1.1.4, que $\omega \wedge \omega = 0$. Or, si l'on écrit

$$\omega = \sum_{0 \leq i < j \leq n} p_{ij} e_i \wedge e_j$$

on a $\omega \wedge \omega = 0$ qui nous fournit une famille d'équations quadratiques dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$. \square

Exemple : On va exhiber ici le système de coordonnées que nous aurons à utiliser en pratique dans la suite. On se place dans le cas où $E = \mathbb{C}^5$. Ainsi, $\mathbb{P}(\Lambda^2 E)$ est isomorphe à \mathbb{P}^9 et les équations de $\mathbb{G}(1, 4)$ sont données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{03}p_{12} - p_{02}p_{13} + p_{01}p_{23} = 0 \\ p_{04}p_{12} - p_{02}p_{14} + p_{01}p_{24} = 0 \\ p_{04}p_{13} - p_{03}p_{14} + p_{01}p_{34} = 0 \\ p_{04}p_{23} - p_{03}p_{24} + p_{02}p_{34} = 0 \\ p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0 \end{array} \right.$$

Nous avons obtenu ces équations à l'aide du programme A.1. Si maintenant on se place dans la carte affine $\{p_{01} = 1\}$, on obtient alors les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{03}p_{12} - p_{02}p_{13} = -p_{23} \\ p_{04}p_{12} - p_{02}p_{14} = -p_{24} \\ p_{04}p_{13} - p_{03}p_{14} = -p_{34} \\ p_{04}p_{23} - p_{03}p_{24} + p_{02}p_{34} = 0 \\ p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24} + p_{12}p_{34} = 0 \end{array} \right.$$

On voit ainsi que, localement, $\mathbb{G}(1, 4)$ est isomorphe à \mathbb{C}^6 par le plongement suivant

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^6 &\longrightarrow \mathbb{P}^9 \\ (p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{12}, p_{13}, p_{14}) &\longmapsto (1, p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34}) \end{aligned}$$

où p_{23} , p_{24} et p_{34} sont déterminés par les autres p_{ij} .

1.1.2 Variété de Fano

Nous allons définir ici la variété de Fano associée à une cubique, puis montrer que c'est une variété projective et en donner des équations. Commençons par quelques définitions basiques quant à ce qu'est une hypersurface de \mathbb{P}^n .

Définition 1.1.5 (Hypersurface de \mathbb{P}^n). Une **hypersurface X de degré d de l'espace projectif \mathbb{P}^n** est le lieu d'annulation d'un polynôme homogène $f \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ de degré d .

Nous parlerons surtout dans ce rapport de stage **d'hypersurfaces cubiques**, c'est à dire que $d = 3$. Sauf si précisé, dans la suite de ce rapport, X désignera une hypersurface cubique **lisse** de \mathbb{P}^n .

Notons $f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{|I|=d} a_I x^I$ où $I = (i_1, \dots, i_n)$ est un multi-indice vérifiant $\sum_{k=1}^n i_k = d$ et $i_k \geq 0$ et où $x^I = x^{i_1} \dots x^{i_n}$ et où $a_I \in \mathbb{C}$. La donnée d'une hypersurface X de degré d est la même que la donnée d'une famille de coefficients $(a_I)_{|I|=d}$. Nous allons, avant de continuer, énoncer un lemme qui nous permettra de plonger l'ensemble des hypersurfaces d'un degré d donné dans un espace projectif.

Lemme 1.1.6. Soit X une hypersurface de degré d et soit $N_d = \binom{n+d}{d}$. On considère \mathbb{P}^{N_d} munie des coordonnées homogènes $(X_I)_{|I|=d}$. Soit de plus l'application¹ :

$$\phi_d : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^{N_d-1} \\ (x_0, \dots, x_n) & \longmapsto & (x^I)_{|I|=d} \end{array}$$

Alors $X \subset \mathbb{P}^n$ s'identifie à l'intersection de la sous-variété $\phi_d(\mathbb{P}^n)$ et de l'hyperplan de \mathbb{P}^{N_d-1} d'équation

$$\sum_{|I|=d} a_I X_I = 0$$

Ainsi, toute hypersurface de \mathbb{P}^n de degré d peut être vue comme une section hyperplane d'une sous-variété projective.

Démonstration : Il est clair que deux équations proportionnelles définissent la même hypersurface. Le seul point qui n'est pas évident est le fait qu'il y ait besoin de N paramètres pour définir notre hypersurface. Cela revient à montrer qu'il y a bien N_d multi-indices de poids d à $n+1$ variables. Pour ce faire, on considère la série formelle

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} t^\alpha$$

que l'on écrit de deux façons différentes :

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}} t^\alpha = \prod_{i=1}^{n+1} \left(\frac{1}{1-t} \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^{n+1} \\ \alpha_1 + \dots + \alpha_{n+1} = d}} t^d$$

en dérivant et en évaluant en 0, on obtient l'égalité recherchée. \square

Nous souhaitons nous intéresser aux droites incluses dans une hypersurface cubique. Avant de continuer, il faut s'assurer qu'une hypersurface cubique puisse contenir, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Propriété 1.1.7. Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface lisse de degré $d \geq 2$. Soit $\Pi \subset X$ un sous-espace linéaire de dimension projective k . Alors $k < \frac{n}{2}$.

Démonstration : Soit X une hypersurface lisse d'équation $f(x_0, \dots, x_n)$. Quitte à changer le système de coordonnées, on peut supposer que \mathbb{P}^n est muni des coordonnées homogènes (x_0, \dots, x_n) de telle sorte que Π soit donné par $x_0 = \dots = x_{n-k-1} = 0$. Dans un tel système de coordonnées, on a :

1. Cette application est appelée le **plongement de Véronèse**.

$$f(x_0, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n-k-1} x_i q_i(x_0, \dots, x_n)$$

avec les q_i qui sont des polynômes homogènes de degré exactement $d - 1$. On calcule les dérivées partielles de f :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j} &= q_j + \sum_{i=0}^{n-k-1} x_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n-k-1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_j} &= \sum_{i=0}^{n-k-1} x_i \frac{\partial q_i}{\partial x_j} \quad \text{pour } n-k \leq j\end{aligned}$$

Ainsi, sur Π , on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_j}(0, \dots, 0, x_{n-k}, \dots, x_n) &= q_j(0, \dots, 0, x_{n-k}, \dots, x_n) \quad \text{pour } 0 \leq j \leq n-k-1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(0, \dots, 0, x_{n-k}, \dots, x_n) &= 0 \quad \text{pour } n-k \leq j\end{aligned}$$

En assimilant Π à l'espace projectif \mathbb{P}^k de coordonnées homogènes x_{n-k}, \dots, x_n , les $n-k$ équations obtenues en restreignant les polynômes homogènes q_0, \dots, q_{n-k-1} ont une solution non-nulle dès que le nombre d'équations est inférieur au nombre de coordonnées homogènes². Ainsi, on aura des solutions dès que $n-k \leq k$. Donc on a bien que la dimension de Π notée k vérifie $k < \frac{n}{2}$. \square

D'après 1.1.7, une hypersurface cubique de \mathbb{P}^n peut contenir des droites dès lors que $n \geq 3$. Nous voulons étudier l'ensemble des droites de \mathbb{P}^n incluses dans X . On va définir dans l'item suivant l'objet important de cette partie à savoir la variété de Fano.

Définition 1.1.8 (Variété de Fano). *Soit X une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^n . On appelle **variété de Fano associée à X** et on le note $F(X)$ le sous ensemble de $\mathbb{G}(1, n)$ défini par :*

$$F(X) = \{\ell \in \mathbb{G}(1, n) \mid \ell \subset X\}$$

Remarques sur la définition : Si on note f l'équation de X , alors une droite ℓ est incluse dans X si et seulement si $f|_\ell = 0$. Ainsi, on a la définition alternative suivante :

$$F(X) = \{\ell \subset \mathbb{G}(1, n) \mid f|_\ell = 0\}$$

Nous allons maintenant montrer que la variété de Fano est bien une variété algébrique projective.

Propriété 1.1.9. *Soit X une hypersurface cubique lisse d'équation f . La variété de Fano $F(X)$ est une sous-variété algébrique de $\mathbb{G}(1, n)$.*

2. On pourra par exemple voir [9], corollaire 5 page 71, ou encore [8], page 87, pour plus de détails.

Démonstration : D'après le lemme 1.1.6, on considère l'espace projectif des paramètres des hypersurfaces cubiques de \mathbb{P}^n avec $N = \binom{n+3}{3}$. On considère la variété d'incidence

$$\Xi = \{(\ell, [f]) \in \mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^{N-1} \mid f|_{\ell} = 0\}$$

qui est bien une sous-variété de $\mathbb{G}(1, n) \times \mathbb{P}^{N-1}$. On note $p : \Xi \rightarrow \mathbb{G}(1, n)$ et $q : \Xi \rightarrow \mathbb{P}^{N-1}$ les projections associées. Or, il est clair que $F(X) = p(q^{-1}([f]))$ ce qui montre que $F(X)$ est bien une sous-variété de $\mathbb{G}(1, n)$. \square

Comme nous venons de le voir, l'ensemble des droites d'une hypersurface lisse est munie d'une structure de variété algébrique. Nous énonçons un théorème que nous ne démontrerons pas sur la dimension de cette variété (c.f [1] page 6) dans le cas où X est une hypersurface cubique lisse.

Théorème 1.1.10. *Soit $X \subset \mathbb{P}^n$ une hypersurface cubique lisse. Alors $F(X)$ est une variété algébrique lisse de dimension $2(n - 3)$.*

En particulier, si $n = 4$, nous avons à faire à une surface.

Exemple fondamental Soit X une hypersurface cubique lisse et $\ell \in F(X)$. Par l'exemple suivant la démonstration du lemme 1.1.4, la droite ℓ est engendrée par deux vecteurs que l'on note $v_0 = (a_0, \dots, a_n)$ et $v_1 = (b_0, \dots, b_n)$. Soit maintenant $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{P}^n$. Alors $x \in \ell$ si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

est de rang deux, cela revient à ce que tous ses mineurs d'ordre 2 soient tous nuls. **À partir de maintenant et durant tout le rapport**, nous supposerons que $n = 4$.

On travaille dans la carte affine $p_{01} = 1$. Comme les vecteurs (v_0, v_1) engendrent la droite, alors la matrice

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

est de rang 2. Comme nous travaillons dans la carte affine $p_{01} = 1$, le déterminant $p_{01} = a_0b_1 - a_1b_0$ est égal à 1. Ainsi, a_0 et a_1 ne peuvent être nuls simultanément. Sans perte de généralité, supposons que $a_0 = 1$. En notant L_i la i -ème ligne de la matrice définie en 1, on applique la transformation de Gauss

$$L_1 \longrightarrow L_1 - b_0L_0$$

on obtient la matrice équivalente (où nous continuerons de noter les coefficients a_i et b_j et ce même après transformation)

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

Or, sous cette forme-là, on a que $b_1 = 1$. En effectuant une opération similaire sur la ligne L_0 , on obtient la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{pmatrix}$$

Ainsi, en développant par rapport à la première ou deuxième colonne les déterminants, on peut ainsi obtenir les valeurs des a_i et a_j , et notre matrice peut donc s'écrire

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ 0 & 1 & p_{02} & p_{03} & p_{04} \end{pmatrix}$$

Ainsi, un point $x = (x_0, \dots, x_4) \in \ell$ si et seulement si la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ 0 & 1 & p_{02} & p_{03} & p_{04} \\ x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

est de rang 2. Ceci nous donne une famille d'équations linéaires qui expriment les coordonnées x_2, x_3 et x_4 en fonction de x_0 et x_1 , à savoir

$$\begin{cases} (x_0, x_1) \in \mathbb{P}^1 \\ x_2 = p_{02}x_1 - p_{12}x_0 \\ x_3 = p_{03}x_1 - p_{13}x_0 \\ x_4 = p_{04}x_1 - p_{14}x_0 \end{cases}$$

On reconsidère ici l'hypersurface cubique lisse X d'équation $f(x_0, \dots, x_4) = 0$. On obtient, en substituant ces points, l'équation

$$f(x_0, x_1, p_{02}x_1 - p_{12}x_0, p_{03}x_1 - p_{13}x_0, p_{04}x_1 - p_{14}x_0) = 0$$

Or, on peut réécrire cette équation de la sorte

$$f(x_0, x_1, p_{02}x_1 - p_{12}x_0, p_{03}x_1 - p_{13}x_0, p_{04}x_1 - p_{14}x_0) = x_0^3\phi^{30} + x_0^2x_1\phi^{21} + x_0x_1^2\phi^{12} + x_1^3\phi^{03} = 0 \quad (2)$$

Cette équation est vérifiée si et seulement si les ϕ^{ij} sont nuls. Nous avons ainsi obtenu quatre équations qui sont les **équations de la variété de Fano**. On renvoie au programme A.2 de l'annexe qui calcule, partant d'une hypersurface cubique lisse, les équations de la variété de Fano associée.

1.1.3 Droites multiples et courbe de Murre

Dans cette section, nous allons introduire l'objet fondamental de cette étude : la variété de Murre. Partant d'une droite ℓ incluse dans une hypersurface cubique X , on va intersecter X avec un plan Π qui contient la droite ℓ . Alors d'une part l'intersection entre X et Π est une courbe de degré 3 et, d'autre part, il y a une droite incluse dans cette intersection. Il y a donc deux possibles : ou bien $X \cap \Pi = \ell \cup C$ avec C une conique non-dégénérée, ou bien $X \cap \Pi = \ell \cup \ell_1 \cup \ell_2$ où ℓ_1 et ℓ_2 sont des droites. Nous nous intéressons au second cas, plus précisément au cas où deux de ces droites sont confondues. On dira dans ce cas que la droite ℓ est **double**. Si les trois droites sont identiques, on dira que la droite est **triple**. Le résultat intéressant, c'est que l'ensemble des droites doubles peut

être munies d'une structure de variété algébrique. Cette dernière est la **variété de Murre associée à X** que nous noterons $M(X)$.

Tout ceci ne sera pas facile. Dans ce chapitre, nous considérons X une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^4 d'équation $f(x_0, \dots, x_4)$. On suppose que la droite ℓ est contenue dans la carte affine $p_{01} = 1$, contenue dans X et donnée par les vecteurs (v_0, v_1) comme fait à la suite du théorème 1.1.10. Notons $\Pi_{0,1}$ le plan d'équation $x_0 = x_1 = 0$.

On va tout d'abord énoncer un lemme technique qui nous sera utile plus tard.

Lemme 1.1.11. *Sous les hypothèses précédentes, on suppose que P est un plan de \mathbb{P}^4 qui contient ℓ . Alors P intersecte le plan $\Pi_{0,1}$ en un unique point v_P d'équation $(0, 0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$.*

Démonstration : On considère les vecteurs (v_0, v_1) donnés par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_{12} & -p_{13} & -p_{14} \\ 0 & 1 & p_{02} & p_{03} & p_{04} \end{pmatrix}$$

Comme vu en 1.1.9, un point (x_0, \dots, x_4) est dans ℓ s'il s'écrit de la forme

$$\begin{cases} (x_0, x_1) = (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1 \\ x_2 = p_{02}\mu - p_{12}\lambda \\ x_3 = p_{03}\mu - p_{13}\lambda \\ x_4 = p_{04}\mu - p_{14}\lambda \end{cases}$$

Ainsi, on voit directement que $\ell \cap \Pi_{0,1} = \emptyset$. De plus, comme $\ell \subset P$ mais que ℓ n'intersecte pas $\Pi_{0,1}$, alors $P \cap \Pi_{0,1}$ est un point ou une droite. Par l'absurde, supposons que cette intersection est une droite ℓ' , alors comme $\ell' \subset P$, l'intersection entre ℓ et ℓ' serait non-vide dans P , et donc serait non-vide dans $\Pi_{0,1}$ ce qui serait absurde est donc $P \cap \Pi_{0,1}$ est un point qui est bien de la forme $v_P = (0, 0, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ comme attendu. \square

Soit P un plan contenant la droite ℓ . Alors $P \cap X$ est une cubique du plan P qui contient une droite. Ainsi, $P \cap X = C \cup \ell$ où C est une conique appelée la **conique résiduelle**. Supposons que cette conique soit dégénérée, il y a alors trois cas possibles :

1. $P \cap X = \ell_1 \cup \ell_2 \cup \ell$ où les trois droites sont distinctes. Nous ne nous intéresserons pas à ce cas dans la suite.
2. $P \cap X = 2\ell_1 \cup \ell_2$ où ℓ_1 et ℓ_2 sont distinctes. On dira dans ce cas-là que ℓ_2 est une **droite double de X** . On dira de plus que P est **tangent à X le long de ℓ_1** .
3. $P \cap X = 3\ell$, on dira dans ce cas-là que ℓ est une **droite triple de X** .

On va maintenant énoncer une propriété qui a pour but de donner une condition pour être une droite double.

Propriété 1.1.12. *En reprenant les mêmes notations que précédemment, on se place dans la carte affine $p_{01} = 1$. Supposons que $P \simeq \mathbb{P}^2$ soit donné par les coordonnées homogènes (t_0, t_1, t_2) . Alors la droite ℓ donnée par les vecteurs (v_0, v_1) est double si et seulement si pour tout $(t_0, t_1) \in \mathbb{P}^1$, on a*

$$\left(\sum_{i=2}^4 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0 v_0 + t_1 v_1) \alpha_i \right) = 0$$

où les α_i ont été définis dans le lemme 1.1.11.

Démonstration : D'après le lemme 1.1.11, le plan P est caractérisé par les points v_0, v_1 et v_P . Ainsi, l'équation de $X \cap P$ est donc, pour des coordonnées homogènes $(t_0, t_1, t_P) \in P \simeq \mathbb{P}^2$, donnée par l'expression

$$f(t_0v_0 + t_1v_1 + t_Pv_P) = 0 \quad (3)$$

Effectuons un développement de Taylor au voisinage de $t_0v_0 + t_1v_1$ de l'équation (3) :

$$f(t_0v_0 + t_1v_1) + \frac{\partial f}{\partial t_2}(t_0v_0 + t_1v_1)t_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}(t_0v_0 + t_1v_1)t_2^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial t_2^3}(t_0v_0 + t_1v_1)t_2^3 = 0 \quad (4)$$

Mais on sait que $t_0v_0 + t_1v_1 \in X$ et donc $f(t_0v_0 + t_1v_1) = 0$ et l'équation (4) devient

$$\frac{\partial f}{\partial t_2}(t_0v_0 + t_1v_1)t_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}(t_0v_0 + t_1v_1)t_2^2 + \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial t_2^3}(t_0v_0 + t_1v_1)t_2^3 = 0$$

De plus, on a que

$$t_0v_0 + t_1v_1 + t_2v_p = (t_0, t_1, t_1p_{02} - t_0p_{12} + t_2\alpha_2, t_1p_{03} - t_0p_{13} + t_2\alpha_3, t_1p_{04} - t_0p_{14} + t_2\alpha_4)$$

et ainsi on peut expliciter les autres termes de l'équation 4 qui sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t_2}(t_0v_0 + t_1v_1) &= \sum_{i=2}^4 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0v_0 + t_1v_1)\alpha_i \\ \frac{\partial^2 f}{\partial t_2^2}(t_0v_0 + t_1v_1) &= \sum_{i=2}^4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(t_0v_0 + t_1v_1)\alpha_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq 4} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t_0v_0 + t_1v_1)\alpha_i \alpha_j \\ \frac{1}{6}\frac{\partial^3 f}{\partial t_2^3}(t_0v_0 + t_1v_1) &= f(v_P) \end{aligned}$$

Pour le troisième terme, on remarque que $f(t_0v_0 + t_1v_1 + t_2v_p)$ est un polynôme homogène et donc que le terme en t_2^3 s'obtient en évaluant $f(t_0v_0 + t_1v_1 + t_2v_p)$ en $t_0 = t_1 = 0$ et $t_2 = 1$. Dans ce système de coordonnées, la droite ℓ est d'équation $t_2 = 0$ et ainsi on obtient l'équation de la conique résiduelle :

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=2}^4 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0v_0 + t_1v_1)\alpha_i \right) \\ &+ \left(\sum_{i=2}^4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(t_0v_0 + t_1v_1)\alpha_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq 4} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(t_0v_0 + t_1v_1)\alpha_i \alpha_j \right) t_2 \\ &+ f(v_P)t_2^2 = 0 \end{aligned}$$

Il est donc clair ici que la droite $t_2 = 0$ est incluse dans la conique résiduelle si et seulement si l'équation suivante est vérifiée :

$$\left(\sum_{i=2}^4 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0v_0 + t_1v_1)\alpha_i \right) = 0 \quad (5)$$

ce qui est bien le résultat attendu. \square

On définit alors la **variété de Murre** comme étant l'ensemble des droites doubles incluses dans X . Cet ensemble est bien une variété algébrique comme nous le montre le théorème suivant, dont une preuve peut se trouver dans [7].

Théorème 1.1.13. *L'ensemble $M(X)$ est une courbe algébrique de $F(X)$.*

Nous ne démontrerons pas ce théorème. Cependant, nous allons expliciter comment obtenir une équation locale de $M(X)$ dans $F(X)$. On se place dans la carte affine $p_{01} = 1$. D'après 1.1.12, il faut étudier les expressions de la forme

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0v_0 + t_1v_1)$$

Or, cette dernière est un polynôme homogène de degré deux en t_0 et t_1 et, de manière similaire que pour les équations de $F(X)$, on a (pour $i = 2, 3, 4$) :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t_0v_0 + t_1v_1) = t_0^2\phi_i^{20} + t_0t_1\phi_i^{11} + t_1^2\phi_i^{02}$$

où les ϕ_i^{jk} sont des polynômes en les coordonnées de Pluecker dans la carte affine $p_{01} = 1$ qui dépendent de ℓ . En injectant tout cela dans la relation 5, on obtient

$$\sum_{i=2}^4(t_0^2\phi_i^{20} + t_0t_1\phi_i^{11} + t_1^2\phi_i^{02})\alpha_i = 0$$

On obtient ainsi, comme chacun des ϕ_i^{jk} est non-nul, le système d'équation

$$\begin{cases} \phi_2^{20}\alpha_2 + \phi_2^{11}\alpha_3 + \phi_2^{02}\alpha_3 = 0 \\ \phi_3^{20}\alpha_2 + \phi_3^{11}\alpha_3 + \phi_3^{02}\alpha_3 = 0 \\ \phi_4^{20}\alpha_2 + \phi_4^{11}\alpha_3 + \phi_4^{02}\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

On a alors dans ce cas que ℓ est une droite double si et seulement si ce système possède une solution non-triviale. En effet, si ce système a une solution non-triviale il est direct que ℓ est double. Réciproquement, si ℓ est double, alors $t_2 = 0$ est dans la conique et la relation vue en 1.1.11 est vérifiée et nous donne une solution non-triviale du système. Ainsi, ℓ est double si et seulement si le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} \phi_2^{20} & \phi_2^{11} & \phi_2^{02} \\ \phi_3^{20} & \phi_3^{11} & \phi_3^{02} \\ \phi_4^{20} & \phi_4^{11} & \phi_4^{02} \end{pmatrix}$$

est nul. Ce déterminant nous donne très précisément l'équation locale de $M(X)$ dans $F(X)$.

Ainsi, pour qu'une droite soit double, il faut que t_2^2 soit un facteur de $f(t_0v_0 + t_1v_1 + t_2v_p)$. Pour être une droite triple, il faut que t_2^3 en soit un facteur. Cela passe par le calcul de v_P et du plan tangent à X contenant ℓ .

On peut caractériser les droites triples comme étant le lieu d'annulation d'un polynôme en les coordonnées de Pluecker **et** en les α_i . Cela peut être utile notamment lorsque l'on travaille sur des exemples et que la recherche d'un plan tangent le long d'une droite est difficile.

Tout d'abord, le système d'équations liant les ϕ_i^{jk} nous donne trois équations polynomiales en les p_{ij} et en les ϕ_i^{jk} (qui sont les conditions pour qu'une droite soit double). Or, pour être une droite triple, il faut aussi annuler le terme d'ordre deux

$$\sum_{i=2}^4 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (t_0 v_0 + t_1 v_1) \alpha_i^2 + 2 \sum_{2 \leq i < j \leq 4} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (t_0 v_0 + t_1 v_1) \alpha_i \alpha_j = 0 \quad (6)$$

qui est un polynôme en t_0 et t_1 . Si $i \neq j$, on notera

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (t_0 v_0 + t_1 v_1) = t_0 \phi_{ij}^{10} + t_1 \phi_{ij}^{01}$$

et si $i = j$, on notera alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} (t_0 v_0 + t_1 v_1) = t_0 \phi_{ii}^{10} + t_1 \phi_{ii}^{01}$$

où les termes ϕ_{ij}^{kl} sont des polynômes en les coordonnées de Pluecker. On obtient alors de l'équation (6) le système suivant (écrit sous forme matricielle) :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \phi_{33}^{10} & \frac{1}{2} \phi_{44}^{10} & \frac{1}{2} \phi_{55}^{10} & \phi_{34}^{10} & \phi_{35}^{10} & \phi_{45}^{10} \\ \frac{1}{2} \phi_{33}^{01} & \frac{1}{2} \phi_{44}^{01} & \frac{1}{2} \phi_{55}^{01} & \phi_{34}^{01} & \phi_{35}^{01} & \phi_{45}^{01} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_3^2 \\ \alpha_4^2 \\ \alpha_5^2 \\ \alpha_3 \alpha_4 \\ \alpha_3 \alpha_5 \\ \alpha_4 \alpha_5 \end{pmatrix} = 0 \quad (7)$$

et donc le système 7 nous donne une autre manière d'aborder les droites triples, qui nous sera utile notamment en 2.2.2.

1.2 Deux exemples fondamentaux

Nous allons prendre ici un peu de temps afin de développer deux exemples : la cubique de Fermat et la cubique de Klein. De nombreuses conjectures que nous avons découlent de l'étude de ces exemples. La majorité des calculs ont été effectué à l'aide des codes disponibles dans l'annexe.

1.2.1 La cubique de Fermat

On se place dans \mathbb{P}^4 muni des coordonnées homogènes (x_0, \dots, x_4) . La cubique de Fermat est définie par

$$F(x_0, \dots, x_4) = x_0^3 + \dots + x_4^3$$

Cette dernière étant lisse, elle définit bien une hypersurface cubique de \mathbb{P}^4 . Cette cubique étant définie par un polynôme symétrique, l'étude dans la carte p_{01} suffit pour connaître son comportement global. Nous ne ferons ici que son étude dans cette carte et glisserons quelques mots sur ses propriétés globales.

La variété de Fano $F(X)$ est donnée par les équations

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{12}^3 + p_{13}^3 + p_{14}^3 - 1 = 0 \\ p_{02}p_{12}^2 + p_{03}p_{13}^2 + p_{04}p_{14}^2 = 0 \\ p_{02}^2p_{12} + p_{03}^2p_{13} + p_{04}^2p_{14} = 0 \\ p_{02}^3 + p_{03}^3 + p_{04}^3 + 1 = 0 \end{array} \right.$$

L'équation locale de la courbe de Murre $M(X)$ dans $F(X)$ est

$$\begin{aligned} m &= p_{03}p_{04}^2p_{12}^2p_{13} - p_{02}p_{04}^2p_{12}p_{13}^2 - p_{03}^2p_{04}p_{12}^2p_{14} \\ &\quad + p_{02}^2p_{04}p_{13}^2p_{14} + p_{02}p_{03}^2p_{12}p_{14}^2 - p_{02}^2p_{03}p_{13}p_{14}^2 \\ &= (p_{04}p_{13} - p_{03}p_{14})(p_{04}p_{12} - p_{02}p_{14})(p_{03}p_{12} - p_{02}p_{13}) \end{aligned}$$

On voit que la courbe de Murre n'est pas lisse et se factorise ici en trois quadriques. Les trois quadriques sont lisses, leurs intersections deux à deux ne sont pas vides et l'intersection de ces trois composantes est vide. On peut montrer que les points d'intersections des quadriques correspondent à des droites triples et aussi à des points singuliers. Il a été montré³ que X possède des droites triples si et seulement si $M(X)$ n'est pas lisse. Dans ce cas, ses points singuliers sont exactement les droites triples de X . Initialement, Murre avait énoncé et démontré que la courbe $M(X)$ est toujours lisse, ce qui n'est pas le cas. Il a été démontré dans [2] que la cubique de Fermat contient exactement 135 droites triples.

1.2.2 La cubique de Klein

La cubique de Klein est définie par

$$K(x_0, \dots, x_4) = x_0x_1^2 + x_1x_2^2 + x_2x_3^2 + x_3x_4^2 + x_4x_0^2$$

Cette dernière est bien lisse et donc définie bien une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^4 . Dans la carte affine $p_{01} = 1$, la variété de Fano $F(X)$ qui lui est associée est

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{12}p_{13}^2 + p_{13}p_{14}^2 + p_{14} = 0 \\ 2p_{03}p_{12}p_{13} + p_{02}p_{13}^2 + 2p_{04}p_{13}p_{14} + p_{03}p_{14}^2 + p_{12}^2 + p_{04} = 0 \\ p_{03}^2p_{12} + 2p_{02}p_{03}p_{13} + p_{04}^2p_{13} + 2p_{03}p_{04}p_{14} + 2p_{02}p_{12} - 1 = 0 \\ p_{02}p_{03}^2 + p_{03}p_{04}^2 + p_{02}^2 = 0 \end{array} \right.$$

L'équation locale de la courbe de Murre $M(X)$ dans $F(X)$ est

$$\begin{aligned} m &= p_{04}^3p_{13}^3 - 3p_{03}p_{04}^2p_{13}^2p_{14} + 3p_{03}^2p_{04}p_{13}^2p_{14} - p_{03}^3p_{14}^3 + 4p_{03}p_{04}p_{12}^2p_{13} - 4p_{02}p_{04}p_{12}p_{13}^2 \\ &\quad - 4p_{02}p_{03}p_{12}p_{13}p_{14} - p_{04}^2p_{12}p_{13}p_{14} + 4p_{02}^2p_{13}^2p_{14} + 2p_{03}p_{04}p_{12}p_{14}^2 + 2p_{02}p_{03}p_{13}p_{14}^2 - 2p_{02}p_{03}p_{14}^3 \\ &\quad + p_{03}^3p_{12} - p_{02}p_{03}^2p_{13} - p_{03}p_{04}^2p_{13} + p_{03}^2p_{04}p_{14} - p_{04}^2p_{12} + 2p_{02}^2p_{13} + 2p_{02}p_{04}p_{14} \end{aligned}$$

Ici, l'équation ne se factorise pas, la courbe de Murre est lisse et on vérifie qu'elle ne possède aucune droite triple.

3. On renvoie à [2] pour plus d'information sur ce qui est dit dans ce paragraphe

1.3 Travail effectué

Ici, j'expliquerai le travail que j'ai eu à accomplir lors de ce stage en ce qui concerne les droites multiples et la courbe de Murre.

1.3.1 Composantes irréductibles de la courbe de Murre

Tout d'abord, nous avons voulu vérifier à l'aide d'exemples qu'il n'y avait que deux cas possibles pour la courbe de Murre :

1. Soit $M(X)$ est lisse, dans ce cas-là la courbe est irréductible et X ne contient pas de droite triples.
2. Soit $M(X)$ est singulière, dans ce cas-là la courbe n'est pas irréductible et les droites triples correspondent aux intersections entre les composantes irréductibles de $M(X)$. De plus, l'équation locale m de $M(X)$ dans $F(X)$ se factorise naturellement.

Ce phénomène, observé sur la cubique de Fermat et la cubique de Klein, a pu être observé en partie sur d'autres courbes.

Pour le premier point, j'ai essayé de trouver des cubiques non-singulières (en utilisant l'algorithme présent en A.4). Il est facile ensuite de calculer l'équation de $M(X)$ et de voir si elle se factorise (ou non). Cependant, cette factorisation n'apparaît pas forcément directement et la seule manière de la voir "explicitement" est de calculer les composantes irréductibles de la courbe $M(X)$. C'est là que je me suis heurté à ma première difficulté : très souvent, le calcul des composantes irréductibles est très long et n'a pu être effectué sur mon ordinateur⁴. C'est pour cela que nous avons dû, à plusieurs reprises, faire tourner les calculs sur les ordinateurs du labo en utilisant cette fois-ci le langage **Magma**. Le calcul prend cependant plusieurs heures mais nous a permis de travailler explicitement sur quelques exemples dont je parlerai par la suite.

Le second point, lui, a pu être vérifié expérimentalement (de la même manière que présenté ci-dessus) sur quelques exemples choisis judicieusement. Il a été démontré dans [2] que les points singuliers de la courbe de Murre correspondent exactement à des droites triples. Cependant, le fait que la courbe de Murre soit réductible dans le cas où l'hypersurface cubique possède des droites triples doit encore être montré. Nous avons décidé de travailler avec des cubiques qui sont de la forme

$$f(x_0, \dots, x_4) = x_2 q_2(x_2, \dots, x_4) + x_3 q_3(x_0, \dots, x_4) + x_4^3$$

où q_2 et q_3 sont des formes quadratiques. L'avantage de ces cubiques est que, mises sous cette forme, contiennent toutes la droite $x_2 = x_3 = x_4 = 0$ et que cette dernière est triple. J'ai donc beaucoup travaillé avec ces cubiques, en essayant de faire varier q_2 et q_3 . Le principal problème a été, comme précédemment, de pouvoir trouver des exemples dont on pouvait calculer les composantes irréductibles.

4. Il est intéressant ici de noter que certains calculs prennent des heures sur Python mais quelques secondes sur Magma sur une machine équivalente. J'ai pu voir que le problème venait du fait que, pour calculer les composantes irréductibles, les deux logiciels faisaient d'abord un calcul de base de Groebner, et que c'est là que Sage prend du temps. Le calcul des composantes irréductibles étant plus efficace sur Magma, nous avons surtout utilisé ce dernier pour ces calculs.

1.3.2 Recherche d'une formule générale pour l'équation locale de la courbe de Murre

On considère de nouveau une cubique écrite sous la forme

$$f(x_0, \dots, x_4) = x_2 q_2(x_2, \dots, x_4) + x_3 q_3(x_0, \dots, x_4) + x_4^3$$

On note A_2 et A_3 les matrices associées aux formes quadratiques q_2 et q_3 . On note m l'équation de $M(X)$ dans $F(X)$. L'idée ici était de voir si l'on pouvait trouver une formule générale de m en fonction des coefficients des matrices A_2 et A_3 . Cependant, même dans des cas très simples, on ne voit aucune formule qui s'en dégage. J'avais notamment essayé de regarder si l'on avait pas une formule à l'aide du déterminant, en vain. On renvoie à A.5 pour les détails techniques.

2 À la recherche des points de Eckardt

Dans cette section, nous allons étudier une famille de point de notre cubique, à savoir les **points de Eckardt**. Nous allons tout d'abord définir ce qu'est un point de Eckardt puis on présentera le travail que j'ai effectué sur cette notion.

2.1 Définitions et propriétés des points de Eckardt

On va introduire ici la notion de multiplicité d'un point afin de pouvoir définir ce que sont les points de Eckardt. Tout d'abord, nous commençons par une définition fondamentale das la suite. On considère une hypersurface lisse $X \subset \mathbb{P}^n$ d'équation f .

Définition 2.1.1 (Espace tangent projectif). *On appelle l'espace tangent projectif de X en $a \in X$ l'espace linéaire défini par*

$$T_a X = V \left(\sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) x_i \right)$$

Il est à noter qu'à l'aide de la formule d'Euler

$$f(a) = \frac{1}{d} \sum_{i=0}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) x_i$$

le point a est dans l'espace tangent projectif $T_a X$.

Avant de continuer, nous aurons besoin de la notion affine de multiplicité d'un point d'une courbe.

Définition 2.1.2. *Soit F un polynôme de $\mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ de degré d . On peut alors écrire*

$$F = F_0 + F_1 + \dots + F_d$$

où les F_i sont des polynômes homogènes de degré i . Soit $p \in \mathbb{C}^{n+1}$. On appelle la multiplicité de p le plus petit entier i tel que $F_i(p) \neq 0$ et $F_j(p) = 0$ pour tout $0 \leq j < i$. On note cet entier $m_p(F)$. Si F est irréductible et $X = V(F)$, alors on définit la multiplicité de X en p comme étant la multiplicité de F en p .

On remarque que $m_p(F) = 0$ si et seulement si $F(p) \neq 0$. On a $m_p(F) > 0$ si et seulement si $F(p) = 0$.

Afin de parler de la multiplicité d'une courbe projective, nous devons placer celle-ci dans un espace affine. Soit X une hypersurface cubique de \mathbb{P}^n d'équation

$$f(x_0, \dots, x_n) = ax_0^3 + x_0^2 \ell(x_1, \dots, x_4) + x_0 q(x_1, \dots, x_4) + C(x_1, \dots, x_4)$$

où ℓ est une forme linéaire, q une forme quadratique et C un polynôme homogène de degré 3. **Dans la suite de cette partie, si ce n'est pas précisé, les éléments ℓ , q et C , s'ils ne sont pas redéfinis, correspondent aux polynômes homogènes de l'équation de f associés au développement par rapport à la variable x_0 .** On considère $p = (1, 0, 0, 0, 0)$ et on suppose que $p \in X$. Dans ce cas-là, on a $a = 0$ et l'équation de X dans cette carte affine devient

$$f(1, x_1, \dots, x_4) = \ell(x_1, \dots, x_4) + q(x_1, \dots, x_4) + C(x_1, \dots, x_4)$$

En dérivant l'équation $f(x_0, \dots, x_4)$ par rapport à x_0 , on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(x_0, \dots, x_n) = 2x_0\ell(x_1, \dots, x_4) + q(x_1, \dots, x_4)$$

et en évaluant en p , on obtient que $\frac{\partial f}{\partial x_0}(p) = 0$. De même, en dérivant par rapport aux autres variables x_i , en notant α_i le coefficients devant x_i dans ℓ , on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \alpha_i$$

L'équation de X devient alors

$$f(x_0, \dots, x_4) = x_0^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_4}(p)x_4 \right) + x_0q(x_1, \dots, x_4) + C(x_1, \dots, x_4)$$

et on voit ainsi que l'espace tangent $T_p X$ correspond à l'hyperplan $\ell(x_1, \dots, x_4) = 0$ et l'équation de la cubique $T_p X \cap X$ est donnée par

$$x_0q(x_1, \dots, x_4) + C(x_1, \dots, x_4) = 0$$

On va maintenant pouvoir définir la notion de point de Eckardt⁵ d'une hypersurface.

Définition 2.1.3 (Point de Eckardt). Soit X une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^4 et $p \in X$. On dit que p est un **point de Eckardt** si p est un point de multiplicité trois de la cubique $T_p X \cap X \subset T_p X$.

Soit $p \in X$ un point de Eckardt. Quitte à appliquer un changement de coordonnée dans \mathbb{P}^4 , on peut supposer que $p = (1, 0, 0, 0, 0)$. Ainsi, en reprenant les notations précédentes, notre cubique $T_p X \cap X$ a pour équation

$$T_p X \cap X : \begin{cases} \ell(x_1, \dots, x_4) = 0 \\ x_0^2\ell(x_1, \dots, x_4) + x_0q(x_1, \dots, x_4) + C(x_1, \dots, x_4) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, si p est un point de Eckardt, alors $q(x_1, \dots, x_4) = 0$ et l'équation de $T_p X \cap X$ devient

$$T_p X \cap X : \begin{cases} \ell(x_1, \dots, x_4) = 0 \\ x_0^2\ell(x_1, \dots, x_4) + C(x_1, \dots, x_4) = 0 \end{cases}$$

Remarque : On peut montrer que si $X \subset \mathbb{P}^4$ est une hypersurface cubique lisse d'équation f possédant $(1, 0, 0, 0, 0)$ comme point de Eckardt, alors on peut faire un changement de coordonnées afin que X soit d'équation

$$f(x_0, \dots, x_4) = x_0^2x_1 + C(x_1, \dots, x_4)$$

5. Cela ne nous sera pas utile dans la suite, et c'est pour cela que nous ne le ferons pas, mais la notion de point de Eckardt peut être définie de manière tout à fait similaire dans \mathbb{P}^n .

On considère X une hypersurface cubique lisse d'équation f . Alors q et C ont soit six droites communes, soit une infinité. Or, si p est un point de Eckardt, alors on voit bien que q et C ont une composante commune et donc qu'il y a une infinité de droites de X passant par p . Cela nous amène à une définition équivalente de point de Eckardt.

Définition 2.1.4. *On dit que $a \in X$ est un point de Eckardt s'il y a une infinité de droites de X qui passent par a .*

Si $C(x_1, \dots, x_4)$ est la composante de f de degré 3, alors pour tout point q sur la courbe définie par C , la droite engendrée par les points q et $p = (1, 0, 0, 0, 0)$ est contenue dans $T_p X \cap X$. Ainsi, on voit que le cône de sommet p et de base C est contenue dans $T_p X \cap X$. L'étude de la cubique C est intéressante : tout d'abord, elle est lisse et donc l'on peut bien parler de courbe elliptique. De plus, les droites passant par ses points d'inflexions ont l'air d'être des droites triples de X . Tout cela sera discuté dans la partie 2.2.

Enfin, ici énoncer un théorème fondamental qui nous donne un majorant du nombre de points de Eckardt d'une hypersurface cubique lisse de \mathbb{P}^n . On renvoie à [5] pour plus de détail sur ce théorème.

Théorème 2.1.5. *Une cubique lisse de \mathbb{P}^n possède au plus $3^{\frac{n(n+1)}{2}}$ points de Eckardt.*

Dans le cas de \mathbb{P}^4 , il y a au plus 30 points de Eckardt. Ce nombre est atteint pour la cubique de Fermat (c.f [2]).

2.2 Travail effectué

On va ici décrire les différentes choses en rapport avec les points de Eckardt sur lesquels j'ai pu travailler.

2.2.1 Condition sur la cubique pour posséder des points de Eckardt

Une conjecture que nous avons est qu'une droite triple passe nécessairement par deux points de Eckardt. Seulement, il est très difficile en général de les calculer car les espaces tangents s'expriment de manière compliquée. L'idée était donc de prendre le problème à l'envers : on suppose que notre cubique possède deux points de Eckardt et nous cherchons quelles sont les conditions que cela met sur notre cubique.

Comme fait en partie 1.3.1, on va supposer que notre hypersurface X est donnée par une cubique qui est de la forme

$$f(x_0, \dots, x_4) = x_2 q_2(x_0, \dots, x_4) + x_3 q_3(x_0, \dots, x_4) + x_4^3$$

En plus de précédemment, nous supposerons aussi que les points $p = (1, 0, 0, 0, 0)$ et $q = (0, 1, 0, 0, 0)$ sont des points de Eckardt. On peut donc calculer $T_p X$:

$$(T_p X) : \{x_2 q_2(p) + x_3 q_3(p) = 0\}$$

On a $q_2(p) = 1$ ou $q_3(p) = 1$ du fait que X est lisse. Sans perte de généralité, on peut supposer $q_2(p) = 1$. On va dès maintenant imposer une hypothèse supplémentaire qui est que $q_3(p) = 0$. Ainsi, l'espace tangent devient simplement $\{x_2 = 0\}$. On peut ainsi obtenir l'équation de $T_p X \cap X$:

$$T_p X \cap X : f(x_0, x_1, 0, x_3, x_4) = x_3 q_3(x_0, x_1, 0, x_3, x_4) + x_4^3$$

On s'intéresse au comportement au voisinage de p , on va donc se placer dans l'ouvert $\{x_0 = 1\}$. Ainsi, on obtient localement

$$f(1, x_1, 0, x_3, x_4) = x_3 q_3(1, x_1, 0, x_3, x_4) + x_4^3$$

On va maintenant écrire q_3 en monômes de puissances de x_0 , à savoir :

$$q_3(x_0, x_1, 0, x_3, x_4) = ax_0^2 + x_0 \ell_3(x_1, 0, x_3, x_4) + \tilde{q}_3(x_1, 0, x_3, x_4)$$

où $a \in \mathbb{C}$, ℓ_3 est une forme linéaire et où \tilde{q}_3 est une forme quadratique. Le fait que $p \in X$ nous donne que $a = 0$. Ainsi, l'équation locale de $T_p X \cap X$ devient

$$f(1, x_1, 0, x_3, x_4) = x_3 \ell_3(x_1, 0, x_3, x_4) + x_3 \tilde{q}_3(x_1, 0, x_3, x_4) + x_4^3$$

Or, le point p est un point de Eckardt, donc le terme d'ordre deux doit être nul et alors $\ell_3(x_1, 0, x_3, x_4) = 0$. Ce qui nous donne la condition que $\ell_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = a_3 x_2$ pour $a_3 \in \mathbb{C}$. Ainsi, si p est un point de Eckardt, alors q_3 s'écrit

$$q_3(x_0, \dots, x_4) = a_3 x_0 x_2 + \tilde{q}_3(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

et nous avons une première condition nécessaire. Réciproquement, si l'on suppose que $q_2(q) = 0$, on obtient que $T_q X \cap X = \{x_3 = 0\}$ et on a une condition similaire à celle obtenue sur q_3 , à savoir (attention, ici on séparera les termes selon les puissances de x_1) :

$$q_2(x_0, \dots, x_4) = a_2 x_1 x_3 + \tilde{q}_2(x_0, x_2, x_3, x_4)$$

L'exemple le plus simple d'hypersurface cubique lisse vérifiant ces identités est

$$f(x_0, \dots, x_4) = x_2(x_0^2 + x_2^2) + x_3(x_1^2 + x_3^2) + x_4^3$$

Nous avons cependant décidé⁶ de travailler sur une autre cubique, à savoir

$$f(x) = x_0^2 x_4 + x_1^2 x_3 + x_3^3 + x_3^2 x_4 + x_3 x_4^2 - x_4^3 + x_2^3 = x_0^2 x_4 + x_1^2 x_3 + C(x_2, x_3, x_4)$$

où C est un polynôme homogène de degré trois en x_2 , x_3 et x_4 . Tout d'abord, il est simple de voir que les points $(1, 0, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0, 0)$ sont des points de Eckardt. Pour cela, il suffit de calculer les espaces tangents en p et q :

$$T_p X \cap X : \{x_0 = 0\}, \quad T_q X \cap X : \{x_1 = 0\}$$

et, par les mêmes calculs que précédemment, on vérifie bien que les points p et q ne sont pas des points de Eckardt. Nous avons réussi à démontrer, à l'aide du code utilisé en A.6, que cette cubique ne possédait que deux points de Eckardt de la forme $(p_0, p_1, 0, 0, 0)$, à savoir $(1, 0, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0, 0)$.

6. La forme de cette cubique provient de [5] que nous avons étudié où il est démontré que toute cubique la forme $x_0^2 x_4 + x_1^2 x_3 + C(x_2, x_3, x_4)$ ne possède que les points $(1, 0, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0, 0)$ comme points de Eckardt. Le théorème est en réalité plus général et concerne les points de Eckardt des cubiques de \mathbb{P}^n : une preuve par récurrence est faite pour le cas des cubiques de \mathbb{P}^n avec $n \geq 5$, mais les cas $n = 3$ et $n = 4$ ne sont pas traités...

Cependant, l'article [5] où nous avons trouvé cette cubique dit (sans démonstration) que ce sont les seuls points de Eckardt de cette cubique. Nous avons réussi à montrer qu'il n'y avait pas de points de Eckardt de la forme $(p_0, p_1, 1, p_3, p_4)$ ou de la forme $(p_0, 1, 0, \frac{1}{2}, p_4)$, mais nous n'avons pas réussi à montrer que les points $(1, 0, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0, 0)$ sont bien les seuls points de Eckardt de cette cubique.

2.2.2 Détermination de la composante principale

Nous avons conjecturé en 2.2.2 qu'une hypersurface contenant des droites triples n'est pas irréductible. En fait, nous conjecturons un résultat plus précis. Tout d'abord, si la variété de Murre d'une hypersurface cubique est réductible, on distingue deux cas de figure :

1. Celles où il n'y a pas de points de Eckardt, que l'on appellera **composantes principales**.
2. Celles où il y a des points de Eckardt, que l'on appellera **composantes réductibles** ou encore **composantes elliptiques**. Dans ce cas, ce sont des courbes elliptiques.

On peut montrer que la variété de Fano contient au plus 30 composantes elliptiques. La première conjecture que nous avons eu est que les points d'inflexions des composantes elliptiques correspondent à des droites triples. Ainsi, comme ces composantes elliptiques sont des cônes ayant pour sommet un point de Eckardt, on dira que les composantes réductibles sont **paramétrée par des points de Eckardt**. Une seconde conjecture que nous avons est que, à part pour la cubique de Fermat⁷, la courbe de Murre d'une hypersurface cubique lisse contenant des droites triple se décompose en une unique composante principale et en des composantes réductibles. La dernière conjecture que nous avons eu est que chaque droite triple passe par deux points de Eckardt. Mon travail a été de chercher des cubiques lisses, de calculer leurs courbe de Murre, de calculer leurs décomposition en composantes irréductibles et d'étudier ces dernières. Nous avons décidé mener ces calculs pour une cubique, à savoir

$$f(x_0, \dots, x_4) = x_0^2x_4 + x_1^2x_3 + x_3^3 + x_3^2x_4 + x_3x_4^2 - x_4^3 + x_2^3$$

En effet, cette cubique devrait (d'après [5]) contenir exactement deux points de Eckardt qui sont $(1, 0, 0, 0, 0)$ et $(0, 1, 0, 0, 0)$, et ainsi elle ne possède que peu de droites triples. On y trouve trois composantes : deux composantes réductibles et une composante qui semble être la composante principale. Cependant, cette dernière est très compliquée et il est impossible de faire des calculs dessus en pratique. Il faut donc travailler avec les composantes réductibles. Ces dernières correspondent bien à des composantes elliptiques.

Étant donné qu'il est compliqué de calculer explicitement des droites triples, nous n'avons pas réussi à infirmer la première conjecture. La deuxième est elle aussi compliquée à vérifier (le calcul des points de Eckardt étant compliqué) mais nous l'avons vérifié sur la cubique ci-dessus. La dernière conjecture a pu être infirmée : cette cubique contient 35 droites triples.

7. Dans cette dernière, il y a trois composantes contenant chacune des points de Eckardt, c.f [2]. Ces composantes ne sont pas elliptiques ou principales, mais il se trouve que c'est le seul exemple de cubique contenant des droites triples sans composante elliptique que nous ayons trouvé.

3 Cubiques pfaffiennes à revêtement triple

Durant ce stage, j'ai eu à comprendre ce qu'est une cubique pfaffienne et, dans le cas de l'une d'entre elles, à essayer de savoir si elle possède des droites triples.

3.1 Définitions et propriétés

Dans toute la suite, V est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension $2n$. On note $\Lambda^2 V^*$ l'ensemble des 2-formes antisymétriques. On fixe un isomorphisme entre $\Lambda^{2n} V^*$ et \mathbb{C} .

Définition 3.1.1 (Pfaffien et diviseur Pfaffien). Soit $\varphi \in \Lambda^2 V^*$.

1. On appelle **Pfaffien de φ** la quantité

$$\text{Pf}(\varphi) = \frac{1}{n!} \varphi^n \in \mathbb{C}$$

2. On appelle **diviseur Pfaffien** l'hypersurface de degré n , notée $\mathcal{PF}_n \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V^*)$ donnée par

$$\mathcal{PF}_n = \{[\varphi] \in \mathbb{P}(\Lambda^2 V^*) \mid \text{Pf}(\varphi) = 0\} \subset \mathbb{P}(\Lambda^2 V^*)$$

On sait que l'espace $\Lambda^2 V^*$ est de dimension $d = n(2n - 1)$ et donc $\mathcal{PF}_n \subset \mathbb{P}^{d-1}$. Le programme A.7 permet de calculer une équation de l'hypersurface Pfaffienne et de savoir si elle est lisse.

Dans toute la suite, on se placera dans un espace vectoriel V de dimension 6 (et donc $n = 3$). On considère W un sous-espace vectoriel de $\Lambda^2 V^*$.

Définition 3.1.2. On note, s'il n'est pas égal à W , \mathcal{C}_W comme étant l'ensemble des 2-formes antisymétriques s'annulant sur W de pfaffien nul. Un tel ensemble est appelé une **cubique pfaffienne**.

Exemple : On note (e_0, \dots, e_5) une base de V . On considère W le sous-espace vectoriel engendré par les 2-formes suivantes :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= e_0^* \wedge e_1^* + e_2^* \wedge e_4^* & \varphi_1 &= e_0^* \wedge e_2^* + e_3^* \wedge e_5^* \\ \varphi_2 &= e_0^* \wedge e_3^* - e_1^* \wedge e_4^* & \varphi_3 &= e_0^* \wedge e_4^* - e_2^* \wedge e_5^* \\ \varphi_4 &= e_0^* \wedge e_5^* + e_1^* \wedge e_3^* \end{aligned}$$

Ainsi, si $\varphi \in W$, alors $\varphi = x_0 \varphi_0 + \dots + x_4 \varphi_4$ qui correspond à la matrice antisymétrique

$$\begin{pmatrix} 0 & x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_0 & 0 & 0 & x_4 & -x_2 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 & x_0 & -x_3 \\ -x_2 & -x_4 & 0 & 0 & 0 & x_1 \\ -x_3 & x_2 & -x_0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_4 & 0 & x_3 & -x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le pfaffien de cette matrice est $-(x_0^2 x_1 + x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_4 + x_4^2 x_0)$. Cette cubique est la **cubique de Klein de \mathbb{P}^5** . Le programme 3.1.2 permet de calculer explicitement \mathcal{C}_W étant donné les vecteurs φ_i .

Soit $\varphi_0 \in \Lambda^2 V^*$ tel que $\text{Pf}(\varphi_0) = 1$. On peut écrire, pour tout $\varphi \in \Lambda^2 V^*$,

$$\text{Pf}(x_0\varphi_0 + \varphi) = x_0^3 + x_0^2 h_0(\varphi) + x_0 q_0(\varphi) + \text{Pf}(\varphi)$$

où $h_0(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi_0^2 \wedge \varphi$ est une forme linéaire et $q_0(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi_0 \wedge \varphi^2$ est une forme quadratique. On note $H = \ker(h_0)$. La forme polaire de q_0 est donnée par

$$\langle \varphi, \psi \rangle_0 = \frac{1}{2}\varphi_0 \wedge \varphi \wedge \psi$$

On remarque que l'on a $H = (\mathbb{C}\varphi_0)^\perp$ pour la forme polaire précédente. En effet, si $\varphi \in H$, on a $\langle \varphi_0, \varphi \rangle_0 = h_0(\varphi) = 0$ et donc $\varphi \in (\mathbb{C}\varphi_0)^\perp$. Réciproquement, si $\varphi \in (\mathbb{C}\varphi_0)^\perp$, on a dans ce cas $h_0(\varphi) = \frac{1}{2}\varphi_0 \wedge \varphi_0 \wedge \varphi = \langle \varphi_0, \varphi \rangle_0 = 0$ et donc $\varphi \in H$. Comme $q_0(\varphi_0) = 3\text{Pf}(\varphi_0) = 3 \neq 0$, l'hyperplan H est régulier pour q_0 . Ainsi, l'espace H munit de la restriction à H de q_0 est un espace hermitien de dimension $15 - 1 = 14$. Un sous-espace totalement isotrope est de dimension au plus 7.

Considérons un sous-espace totalement isotrope Z de dimension 5. On note $W = \mathbb{C}\varphi_0 \oplus Z$. Alors

$$Y_Z = \{[\varphi] \in \mathbb{P}(W) \mid \text{Pf}(\varphi) = 0\} \subset \mathbb{P}(W)$$

est une hypersurface cubique de dimension quatre de $\mathbb{P}(W) \simeq \mathbb{P}^5$ qui est un revêtement triple de $\mathbb{P}(Z) \simeq \mathbb{P}^4$ branché le long de la cubique de dimension trois

$$\mathcal{C}_Z = \{[\varphi] \in \mathbb{P}(Z) \mid \text{Pf}(\varphi) = 0\} \subset \mathbb{P}(Z) \simeq \mathbb{P}^4$$

3.2 Travail effectué

Mon travail était, dans un premier temps de comprendre la théorie expliquée ci-dessus, et dans un second temps de savoir si la cubique pfaffienne à revêtement triple définie dans l'annexe A de [4] contenait des droites triples. Comme vu dans la première partie de ce compte-rendu, cela équivaut au fait que la courbe de Murre est lisse. Cependant, nous n'avons pas réussi à faire aboutir le calcul car la cubique citée dans [4] a une équation beaucoup trop compliquée.

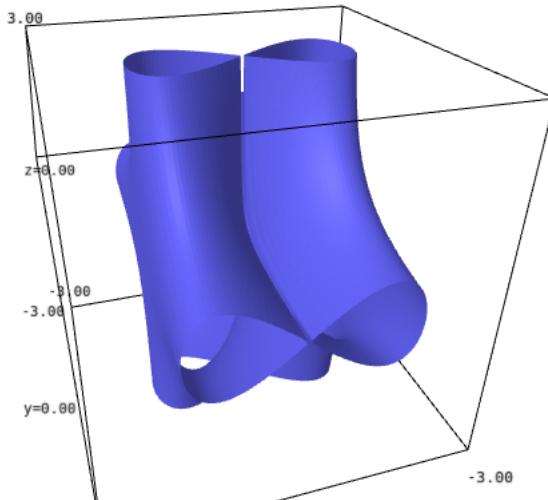
4 Impression 3D de surfaces

Très loin de ce qui précède, j'ai eu durant ce stage à modéliser certaines surfaces issues de la géométrie algébrique en vue de pouvoir les imprimer à l'aide une imprimante 3D. Le défi ici n'était pas mathématique mais plus informatique. On expliquera ici les différents problèmes rencontrés et comment on peut les résoudre. Enfin, on finira par quelques jolies photos des impressions finales. On renverra à l'annexe B qui est un guide que j'ai écrit pour imprimer une surface sympathique⁸.

La première surface que j'ai eu à modéliser était une **hélice**, une surface d'équation

$$6x^2 - 2x^4 - y^2z^2 = 0$$

En suivant la procédure décrite ci-dessous, il n'y a eu aucun problème pour la modéliser et l'imprimer, si ce n'est que c'est avec cet exemple qu'on remarque que le nombre de points pour la modélisation est important.



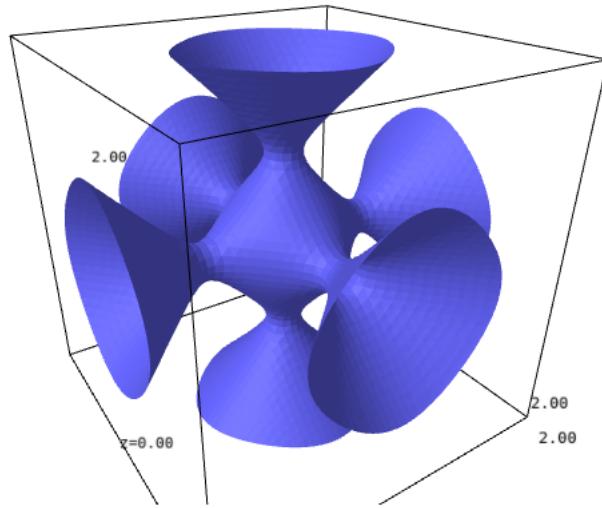
Ci-dessus la représentation sous Sage de l'hélice où l'on a pris 100 points et pour $(x, y, z) \in [-3, 3]^3$, modélisée sous Sage. On voit bien en haut au centre le fait que la singularité est mal modélisée (il y a un trou qui n'existe pas normalement). Celle-ci disparaît sans aucun problème lorsque l'on donne de l'épaisseur à la surface sous Blender.

La seconde surface que j'ai modélisée est la surface d'équation

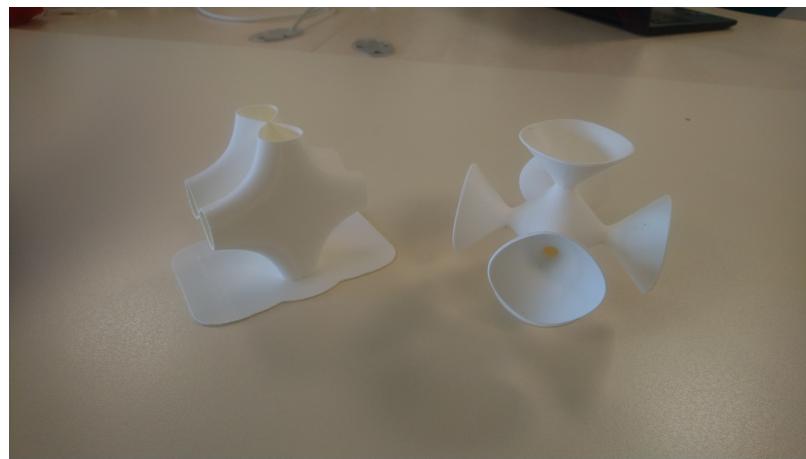
$$1 + x^4 + y^4 + z^4 - a(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2$$

avec a un paramètre, en général on souhaite le prendre proche de 0.49 afin d'avoir une jolie surface.

8. Précisons que le mot sympathique, à l'inverse ce que l'on pourrait croire, n'a aucune définition mathématique formelle. Le fait qu'une surface soit sympathique ou non dépend uniquement de l'appréciation personnelle de l'auteur.



Ici, nous avons pris le paramètre valant $a = 0.49$ et on a utilisé 100 points. Un problème que l'on pensait avoir était que l'imprimante ne puisse pas imprimer de manière correcte la surface car elle se referme sur elle-même. Il se trouve qu'au final il n'y a pas eu de problème à l'impression.

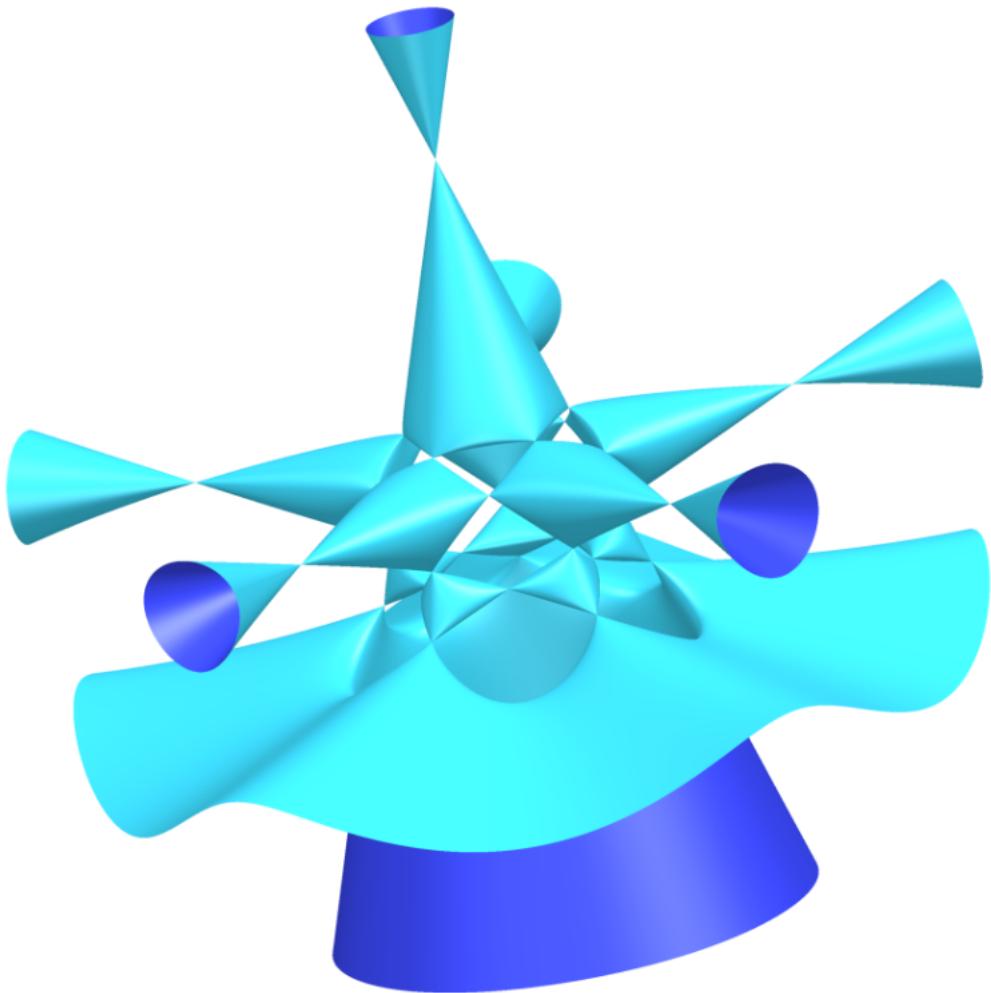


Les surfaces ci-dessus mesurent environ une quinzaine de centimètres et sont celles que nous avons réussi à faire imprimer.

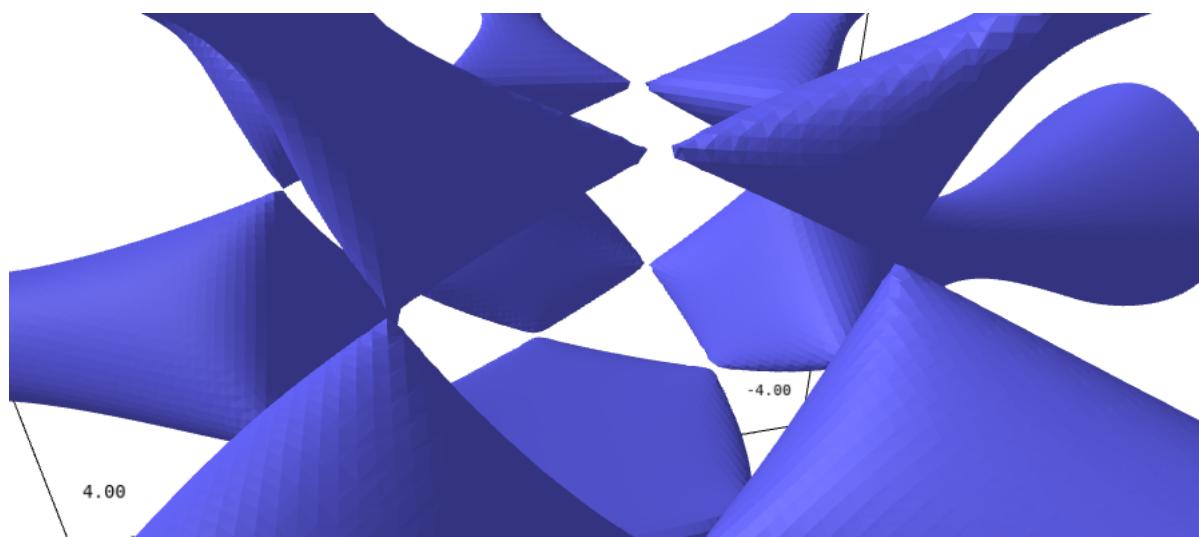
La surface sur laquelle j'ai dû par la suite travailler est la surface de Togliatti d'équation

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \frac{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}{2}z\right) \left(x^2 + y^2 - 1 + \frac{1 + 3\sqrt{5}}{4}z^2\right)^2 - 3.8496061120482923113983843766 \times a \\
 & \times (x - z)(\cos(\frac{2\pi}{5})x - \sin(\frac{2\pi}{5})y - z)(\cos(\frac{4\pi}{5})x - \sin(\frac{4\pi}{5})y - z) \\
 & \times (\cos(\frac{6\pi}{5})x - \sin(\frac{6\pi}{5})y - z)(\cos(\frac{8\pi}{5})5x - \sin(\frac{8\pi}{5})y - z)
 \end{aligned}$$

avec a un paramètre que l'on fait varier. Sur l'image ci-dessous, le paramètre est $a = 1$.



Afin d'éliminer les singularités aux bord, il faut augmenter légèrement le paramètre : pour $a = 1.05$, on a quelque chose de correct. Cependant, le problème est que, pour le moment, je n'ai pas trouvé de méthode afin de faire disparaître les singularités présentes au centre de la surface (c.f image ci-dessous).



Même en y mettant un grand nombre de point (400 étant le plus grand nombre que mon PC supporte), ces singularités restent. Sous Blender, le logiciel a beaucoup de mal à donner à la surface de

l'épaisseur de manière convenable en ces points, donnant une figure très peu esthétique. Le problème n'a, à ce jour, toujours pas été réglé.

A Programmes

Dans cette annexe, nous mettons tout les programmes qui ont été utilisés durant ce stage. Les divers commentaires, en plus de ce qui sont fait dans le code, seront fait **en dessous** du code.

Les programmes python ont été fait sur **SageMath 8.1**.

A.1 Calcul de la Grassmannienne

```
1 n=5
2
3 indices = [[i,j] for i in range(n) for j in range(i+1, n)]
4 varP = ['p%d%d' %(i,j) for [i,j] in indices] #création des coordonnées de
      Pluecker
5 RingExt2E = PolynomialRing(QQ, varP)
6 gensExt2E = RingExt2E.gens()                      #injecter les variables p_ij
7 ExtE = ExteriorAlgebra(RingExt2E, 'e', n)
8 ExtE.inject_variables()
9 basisE = ExtE.gens()
10 basisExt2E = ExtE.basis(2).list()                 #on definit ici les e_i ^ e_j
11 generic2vector = sum([gensExt2E[i] * basisExt2E[i] for i in range(len(indices))])
      ]) #on definit ici v = sum p_ij e_i^e_j
12 G = Ideal(RingExt2E, (generic2vector * generic2vector).coefficients())
```

Grassmannienne.py

Ce programme sert dans la partie 1.1.1 à obtenir les équations de la Grassmannienne. L'algorithme est simple : on considère un bivecteur générique $v = \sum_{0 \leq i < j \leq n} p_{ij} e_i \wedge e_j$. On sait que $v \wedge v = 0$ par le lemme 1.1.4 et cela nous fournit explicitement nos équations.

A.2 Calcul des équations de la variété de Fano

```
1 indices = [[i,j] for i in range(2) for j in range(2, 5)]
2 varX = ['x%i' for i in range(5)]
3 varP = ['p%d%d' %(i,j) for [i,j] in indices]
4 RingP = PolynomialRing(QQ, varP)
5 RingXP = PolynomialRing(QQ, varX + varP)
6 RingP.inject_variables()
7 RingXP.inject_variables()
8
9 cubique = #mettre ici l'équation d'une cubique de P^4
10
11 eqs = cubique.substitute(x2 = p02 * x1 - p12 * x0, x3 = p03 * x1 - p13 * x0,
                           x4 = p04 * x1 - p14 * x2)
12
13 monomeX = [x0^3, x0^2 * x1, x0 * x1^2, x1^3]
14 Ideal_Fano = ideal(RingP, [eqs.coefficient(mon) for mon in monomeX])
15 Pluecker = AffineSpace(QQ, 6, varP)
16 Fano = Pluecker.subscheme(Ideal_Fano)
17 print(Fano.dimension(), Fano.is_smooth(), Fano)
```

Fano.py

Ce programme nous sert à calculer les équations de la variété de Fano associée à une hypersurface cubique lisse X . Partant de l'équation générale d'une cubique, on regarde dans les coordonnées de Pluecker l'équation d'une droite incluse dans X :

$$f(x_0, x_1, p_{02}x_1 - p_{12}x_0, p_{03}x_1 - p_{13}x_0, p_{04}x_1 - p_{14}x_0) = x_0^3\phi^{30} + x_0^2x_1\phi^{21} + x_0x_1^2\phi^{12} + x_1^3\phi^{03} = 0$$

On obtient ainsi qu'une droite est incluse dans X si et seulement si on a la nullité des polynômes $\phi^{30}, \phi^{21}, \phi^{12}$ et ϕ^{03} , homogènes en $p_{02}, p_{03}, p_{04}, p_{12}, p_{13}, p_{14}$. Le programme ci-dessus ne fait qu'écrire l'équation sous cette forme et donne des propriétés du schéma correspondant (dimension, lissité...).

A.3 Calcul des équations de la courbe de Murre

```

1 n=5
2 indices = [[i,j] for i in range(2) for j in range(2,n)]
3 varX = [ 'x%' + str(i) for i in range(n)]
4 varP = [ 'p%' + str(d) + '%' + str(i,j) for [i,j] in indices]
5 RingXP = PolynomialRing(QQ, varX + varP)
6 RingXP.inject_variables()
7 varT = [ 't0', 't1', 't2' ]
8 RingXPT = PolynomialRing(QQ, varX + varP + varT)
9 RingXPT.inject_variables()
10 RingP = PolynomialRing(QQ, varP)
11 RingP.inject_variables()
12 cubique1 = #mettre ici une cubique de P^4
13 eqs = cubique1.substitute(x2 = p02 * x1 - p12 * x0, x3 = p03 * x1 - p13 * x0, x4
   = p04 * x1 - p14 * x0)
14
15 monomeX = [x0^3, x0^2 * x1, x0 * x1^2, x1^3]
16 Ideal_Fano = Ideal(RingP, [eqs.coefficient(mon) for mon in monomeX])
17 Pluecker = AffineSpace(QQ,6,varP)
18
19 monT = [t0^2, t0 * t1, t1^2]
20 eq_x2 = RingXPT(cubique1).derivative(x2).substitute(x0 = t0, x1 = t1, x2 = t1 *
   p02 - t0 * p12,
21                                     x3 = t1 * p03 - t0 * p13, x4
   = t1 * p04 - t0 * p14)
22 [phi_2_20, phi_2_11, phi_2_02] = [eq_x2.coefficient(mon) for mon in monT]
23 eq_x3 = RingXPT(cubique1).derivative(x3).substitute(x0 = t0, x1 = t1, x2 = t1 *
   p02 - t0 * p12,
24                                     x3 = t1 * p03 - t0 * p13, x4
   = t1 * p04 - t0 * p14)
25 [phi_3_20, phi_3_11, phi_3_02] = [eq_x3.coefficient(mon) for mon in monT]
26 eq_x4 = RingXPT(cubique1).derivative(x4).substitute(x0 = t0, x1 = t1, x2 = t1 *
   p02 - t0 * p12,
27                                     x3 = t1 * p03 - t0 * p13, x4
   = t1 * p04 - t0 * p14)
28 [phi_4_20, phi_4_11, phi_4_02] = [eq_x4.coefficient(mon) for mon in monT]
29
30 M = matrix(RingP, 3, 3, [phi_2_20, phi_3_20, phi_4_20, phi_2_11, phi_3_11,
   phi_4_11, phi_2_02, phi_3_02, phi_4_02])
31 m = M.determinant()
32
33 Murre = Pluecker.subscheme(Ideal_Fano + m)
34 print(m.factor(), Murre, Murre.is_smooth(), Murre irreducible_components())

```

Ce programme permet de calculer les équations locales de la courbe de Murre $M(X)$ dans la carte affine $p_{01} = 1$. Tout d'abord, il faut calculer les équations de la surface de Fano $F(X)$, à laquelle il faut ajouter le déterminant

$$\begin{pmatrix} \phi_2^{20} & \phi_2^{11} & \phi_2^{02} \\ \phi_3^{20} & \phi_3^{11} & \phi_3^{02} \\ \phi_4^{20} & \phi_4^{11} & \phi_4^{02} \end{pmatrix}$$

ce qui est facile étant donné que l'on a une expression explicite des ϕ_i^{jk} (c.f la remarque suivant 1.1.13). Nous utilisons après ces équations afin de vérifier la lissité de la courbe de Murre et son nombre de composantes irréductibles.

A.4 Calcul du lieu singulier d'une cubique

```

1 n=5
2 varX = [ 'x%d' %i for i in range(n) ]
3 RingX = PolynomialRing(QQ, varX)
4 RingX.inject_variables()
5 gensX = RingX.gens()
6
7 def Singular_locus(f):
8     Jac = Ideal(RingX, [derivative(RingX(f), gensX[i]) for i in range(n)]).
9         radical()
9     return(Jac.dimension(), Jac.groebner_basis())

```

Singulier.py

Cet algorithme nous permet de calculer le lieu singulier d'une cubique. Pour cela, on calcule les dérivées partielles de f puis l'on regarde la dimension de l'idéal engendré par ces dérivées. Si cette dimension est 0, il n'y a pas de relation non-triviale entre les dérivées de f et donc f est non-singulière dans \mathbb{P}^n .

A.5 Recherche d'une formule pour l'équation locale de la courbe de Murre

```

1 varA2 = [ 'a2' , 'b2' , 'c2' , 'd2' , 'e2' , 'f2' ]
2 varA3 = [ 'a3' , 'b3' , 'c3' , 'd3' , 'e3' , 'f3' ]
3 indices = [[i,j] for i in range(2) for j in range(2,5)]
4 varP = [ 'p%d%d' %(i, j) for [i,j] in indices]
5 varV2 = [ 'v020' , 'v021' , 'v121' ]
6 varV3 = [ 'v030' , 'v031' , 'v131' ]
7
8 RingAPV = PolynomialRing(QQ, varA2 + varA3 + varP + varV2 + varV3)
9 RingAPV.inject_variables()
10
11 [phi_20_2, phi_20_3, phi_20_4] = [v020 + 2*p12 * (p12 - a2) + 2*p13*(p12 - a3),
12                                         2*p12*(p13 - b2) + v030 + 2*p13*(p13 - a3),
13                                         2*p12*(p14 - c2) + 2*p13*(p14 - c3) + 3*p14^2]
14
15 [phi_11_2, phi_11_3, phi_11_4] = [2*p02*(a2 - p12) + 2*v021 - 2*p12*(d2 + p02),
16                                         + 2*p03*(a3 - p12) - 2*p13*(d3+p02),
17                                         2*p02*(b2 - p13) - 2*p12*(e2 + p03) + 2*p03*(b3
18                                         - p13) + 2*v031 - 2*p13*(e3 + p03),
19                                         2*p02*(c2 - p14) - 2*p12*(f2 + p04) + 2*p03*(c3
20                                         - p14) - 2*p13*(f3 + p04) - 6*p14*p04]

```

```

18
19 [ phi_02_2 , phi_02_3 , phi_02_4 ] = [ v121 + 2*p02*( p02 + d2 ) + 2*p03*( d3+p02 ) ,
20           2*p02*( p03 + e2 ) + v131 + 2*p03*( p03 + e3 ) ,
21           2*p02*( p04 + f2 ) + 2*p03*( p04 + f3 ) + 3*p04 ^2 ]
22
23 M = Matrix(RingAPV, 3, 3, [ phi_20_2 , phi_20_3 , phi_20_4 , phi_11_2 , phi_11_3 ,
phi_11_4 , phi_02_2 , phi_02_3 , phi_02_4 ])
24
25 murre = M.determinant()

```

Pattern.py

Dans cet algorithme, l'objectif était de trouver une relation reliant m et les coefficients des matrices A_2 et A_3 (comme précisé en 1.3.2). Tout d'abord, partant de l'équation de la cubique

$$f(x_0, \dots, x_4) = x_2 q_2(x_0, \dots, x_4) + x_3 q_3(x_0, \dots, x_4) + x_4^3$$

En notant $X = (x_0, \dots, x_4)$, l'équation de la cubique se réécrit :

$$f(X) = x_2 X^T A_2 X + x_3 X^T A_3 X + x_4^3$$

On se place dès lors dans la carte affine $p_{01} = 1$. On note considère les vecteurs $v_0 = (1, 0, -p_{12}, -p_{13}, -p_{14})$ et $v_1 = (0, 1, p_{02}, p_{03}, p_{04})$ qui correspondent à une droite ℓ incluse dans X . Ainsi, un élément de ℓ s'écrit

$$\lambda v_0 + \mu v_1$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$. On se place dans le cadre, afin de limiter le nombre de coefficients, dans le cas où

$$A_2 = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & B_2 \\ \hline B_2^T & I_3 \end{array} \right)$$

$$A_3 = \left(\begin{array}{c|c} I_2 & B_3 \\ \hline B_3^T & I_3 \end{array} \right)$$

où, dans le code, les coefficients de `varA2` correspondent aux coefficients de B_2 de cette façon-là :

$$B_2 = \left(\begin{array}{ccc} a_2 & b_2 & c_2 \\ d_2 & e_2 & f_2 \end{array} \right)$$

et de même avec `varA3` et B_3 . Ainsi, on peut donner explicitement une formule pour $f(\lambda v_0 + \mu v_1)$ et obtenir les coefficients ϕ^{ij} avec $i + j = 3$:

$$\begin{aligned} \phi^{30} &= -p_{12}v_0^T A_2 v_0 - p_{13}v_0^T A_3 v_0 - p_{14}^3 \\ \phi^{21} &= p_{02}v_0^T A_2 v_0 - 2p_{12}v_0^T A_2 v_1 + p_{03}v_0^T A_3 v_0 - 2p_{13}v_0^T A_3 v_1 + 3p_{14}^2 p_{04} \\ \phi^{12} &= -p_{12}v_1^T A_2 v_1 + 2p_{02}v_1^T A_2 v_1 - p_{13}v_1^T A_3 v_1 + 2p_{03}v_1^T A_3 v_1 - p_{14}p_{04}^2 \\ \phi^{03} &= p_{02}v_1^T A_2 v_1 + p_{03}v_1^T A_3 v_1 + p_{04}^3 \end{aligned}$$

Pour calculer les ϕ_i^{jk} avec $i = 2, 3, 4$ et $j + k = 2$, on introduit ici une astuce calculatoire. On écrit en premier lieu l'équation de f le long de la droite ℓ :

$$f(\lambda v_0 + \mu v_1) = \lambda^3 \phi^{30} + \lambda^2 \mu \phi^{21} + \lambda \mu^2 \phi^{12} + \mu^3 \phi^{03}$$

Puis on calcule la dérivée de f par rapport à p_{12} de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial p_{12}}(\lambda v_0 + \mu v_1) &= -\lambda \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\lambda^3 \phi_2^{20} - \lambda^2 \mu \phi_2^{11} - \lambda \mu^2 \phi_2^{02} \\ &= \lambda^3 \frac{\partial \phi^{30}}{\partial p_{12}} + \lambda^2 \mu \frac{\partial \phi^{21}}{\partial p_{12}} + \lambda \mu^2 \frac{\partial \phi^{12}}{\partial p_{12}} + \mu^3 \frac{\partial \phi^{03}}{\partial p_{12}}\end{aligned}$$

On a ici deux polynômes en λ et μ . On peut donc identifier ces expressions et on obtient ainsi les relations

$$\phi_2^{20} = -\frac{\partial \phi^{30}}{\partial p_{12}}, \quad \phi_2^{11} = -\frac{\partial \phi^{21}}{\partial p_{12}}, \quad \phi_2^{02} = -\frac{\partial \phi^{12}}{\partial p_{12}}, \quad 0 = \frac{\partial \phi^{03}}{\partial p_{12}}$$

On retrouve au passage le fait que ϕ^{03} ne dépende pas de p_{12} . Ainsi, il nous faut juste calculer explicitement les ϕ^{ij} pour $i + j = 3$ et $j \neq 3$ afin d'obtenir nos équations. De même, en dérivant par rapport à p_{1i} , on obtient des expressions similaires pour les ϕ_i^{jk} et ce sont celles que l'on retrouve dans le code ci-dessus.

A.6 Recherche de points de Eckardt d'une forme donnée

```

1 varX = [ 'x%d' %d for d in range(5) ]
2 varP = [ 'p%d' %d for d in range(5) ]
3 RingXP = PolynomialRing(QQ, varX + varP)
4 RingXP.inject_variables()
5 RingP = PolynomialRing(QQ, varP)
6 RingP.inject_variables()
7
8 eqs = x0^2 * x4 + x1^2 * x3 + x3^3 + x3^2 * x4 + x3 * x4^2 - x4^3 + x2^3
9
10 derivative = x0*(RingXP(eqs).derivative(x0).substitute(x0=p0, x1=p1, x2=p2, x3=p3, x4=p4)) + x1*(RingXP(eqs).derivative(x1).substitute(x0=p0, x1=p1, x2=p2, x3=p3, x4=p4)) + x2*(RingXP(eqs).derivative(x2).substitute(x0=p0, x1=p1, x2=p2, x3=p3, x4=p4)) + x3*(RingXP(eqs).derivative(x3).substitute(x0=p0, x1=p1, x2=p2, x3=p3, x4=p4)) + x4*(RingXP(eqs).derivative(x4).substitute(x0=p0, x1=p1, x2=p2, x3=p3, x4=p4))
11
12 tangent = RingXP(derivative).substitute(x4 = p1^2 * x3)
13
14 eqs_eval = RingXP(eqs).substitute(x0=1, x1=p1, x2=0, x3=0, x4=0)
15
16 derivative_0 = RingXP(tangent).derivative(x0).substitute(x0=1, x1=p1, x2=0, x3=0)
17 derivative_1 = RingXP(tangent).derivative(x1).substitute(x0=1, x1=p1, x2=0, x3=0)
18 derivative_2 = RingXP(tangent).derivative(x2).substitute(x0=1, x1=p1, x2=0, x3=0)
19 derivative_3 = RingXP(tangent).derivative(x3).substitute(x0=1, x1=p1, x2=0, x3=0)
20
21 derivative_00 = RingXP(tangent).derivative(x0).derivative(x0).substitute(x0=1, x1=p1, x2=0, x3=0)
```

```

22 derivative_01 = RingXP(tangent).derivative(x0).derivative(x1).substitute(x0=1,
23   x1=p1, x2=0, x3=0)
24 derivative_02 = RingXP(tangent).derivative(x0).derivative(x2).substitute(x0=1,
25   x1=p1, x2=0, x3=0)
26 derivative_03 = RingXP(tangent).derivative(x0).derivative(x3).substitute(x0=1,
27   x1=p1, x2=0, x3=0)
28 derivative_11 = RingXP(tangent).derivative(x1).derivative(x1).substitute(x0=1,
29   x1=p1, x2=0, x3=0)
30 derivative_12 = RingXP(tangent).derivative(x1).derivative(x2).substitute(x0=1,
31   x1=p1, x2=0, x3=0)
32 derivative_13 = RingXP(tangent).derivative(x1).derivative(x3).substitute(x0=1,
33   x1=p1, x2=0, x3=0)
34 derivative_22 = RingXP(tangent).derivative(x2).derivative(x2).substitute(x0=1,
35   x1=p1, x2=0, x3=0)
36 derivative_23 = RingXP(tangent).derivative(x2).derivative(x3).substitute(x0=1,
37   x1=p1, x2=0, x3=0)
38 derivative_33 = RingXP(tangent).derivative(x3).derivative(x3).substitute(x0=1,
39   x1=p1, x2=0, x3=0)
40 Ideal_eckardt = ideal(RingP, [eqs_eval, derivative_0, derivative_1, derivative_2,
41   derivative_3, derivative_00,
42   derivative_01, derivative_02, derivative_03,
43   derivative_11, derivative_12,
44   derivative_13, derivative_22, derivative_23,
45   derivative_33]).radical()
46 B = Ideal_eckardt.groebner_basis()
47 print(B)

```

Eckardt.py

Cet algorithme n'a rien de bien compliqué malgré sa taille : l'idée est que l'on calcule l'idéal engendré par toute les dérivées premières et secondes de f dans le tangent $T_pX \cap X$ où $p = (1, p_0, 0, 0, 0)$ (les cas des points $(0, 1, 0, 0, 0)$ et $(1, 0, 0, 0, 0)$ ayant déjà été traités). Le programme automatise tout ces calculs fastidieux à faire à la main pour, à la fin, regarder (la base de groebner de) l'idéal engendré par ces équations. Nous étudions après ces relations qui nous permettent, par exemple ici, de conclure que les seuls points de Eckardt de la forme $(1, p_1, 0, 0, 0)$ de la cubique définie par $x_0^2x_4 + x_1^2x_3 + x_3^3 + x_3^2x_4 + x_3x_4^2 - x_4^3 + x_2^3$ sont bien $(1, 0, 0, 0, 0)$.

Nous avons aussi fait fonctionner un programme similaire afin de démontrer que cette cubique ne possédait pas de points de Eckardt de la forme $(p_0, p_1, 1, p_3, p_4)$. Cependant, le cas général est encore inaccessible. Ces exemples particuliers fonctionnent bien car nous avons une description simple des espaces tangents. Nous avons essayé de faire tourner l'algorithme sans rien fixer (c'est à dire essayer de regarder les points de Eckardt de la cubique de la forme (p_0, \dots, p_4)) mais nous n'avons rien pu obtenir d'intéressant.

A.7 Calcul de l'hypersurface Pfaffienne

```

1 n = 2
2 d = n*(2*n - 1)
3
4 RingX = PolynomialRing(QQ, 'x', d)
5 RingX.inject_variables()

```

```

6 gensX = RingX.gens()
7
8 ExtVdual = ExteriorAlgebra(RingX, 'E', 2*n)
9 ExtVdual.inject_variables()
10
11 Wedge2ExtVdual_basis = ExtVdual.basis(2).list()
12
13 def Pf(f):
14     return (((1/factorial(n)) * (f^n)).hodge_dual().constant_coefficient())
15
16 Irrelevant = ideal(RingX, gensX)
17
18 def is_smooth(f):
19     Jac = Ideal(RingX, [derivative(RingX(f), gensX[i])
20                         for i in range(d)]).radical()
21     return Jac == Irrelevant
22
23 f = Pf(sum(gensX[i] * Wedge2ExtVdual_basis[i] for i in range(d)))
24
25 print(f, is_smooth(f))

```

hypersurfacePfaffienne.py

Ce programme prend en entrée un entier n et permet d'obtenir une équation de \mathcal{PF}_n et de savoir si \mathcal{PF}_n est lisse. L'algorithme est simple : il suffit juste de regarder le radical de l'idéal engendré par $\{\text{Pf}(\varphi) = 0\}$.

A.8 Calcul d'une cubique Pfaffienne

```

1 n = 5
2 ringX = PolynomialRing(QQ, 'x', n)
3 ringX.inject_variables()
4 gensX = ringX.gens()
5 ExtVdual = ExteriorAlgebra(ringX, 'E', n + 1)
6 ExtVdual.inject_variables()
7 def Pf(phi):
8     return ((1/6) * (phi^3)).hodge_dual().constant_coefficient()
9 def PfCubic(W):
10    print(Pf(sum(gensX[i] * W[i] for i in range(n))))
11
12 W = [E0 * E1 + E2 * E4, E0 * E2 + E3 * E5, E0 * E3 - E1 * E4,
13       E0 * E4 - E2 * E5, E0 * E5 + E1 * E3]
14
15 PfCubic(W)

```

cubiquePfaffienne.py

Le programme ci-dessus prend en entrée un sous-espace vectoriel W de $\Lambda^2 V^*$ donnée par une base et nous donne la cubique Pfaffienne associée à W . Pour cela, on écrit $\varphi = x_0\varphi_0 + \cdots + x_4\varphi_4$ et on calcule $\text{Pf}(\varphi)$.

B Comment imprimer de jolies surfaces en 3D ?

Dans cette annexe, on fournit les explications techniques sur comment modéliser de manière convenable une surface 3D en vue de l'imprimer. Comme dit en préambule, je ne m'occupais pas de la partie impression mais juste de la partie modélisation. De plus, on explique ici la manière générale de le faire, qui peut bloquer dans certains cas (comme expliquer en 4) et qu'il faut donc traiter au cas par cas.

Ce guide a été fait en utilisant la version **8.1 de Sage** et la version **2.7.9 de Blender**.

Tout d'abord, il faut savoir que les fichiers lus par une imprimante 3D sont des fichiers au format **.stl**. Il faut donc, après avoir modélisé une surface, l'exporter en **.stl**. Sage, à l'aide du code suivant, nous permet de faire les deux très facilement.

```
1 var('x, y, z')
2 S = implicit_plot3d(equation == 0, (x,-a,b), (y,-c,d), (z,-e,f), plot_points = n
, viewer='threejs')
3 S.save('cubique_poitiers.stl')
```

Equation_to_stl.py

Dans la première ligne, on définit les variables (x, y, z) afin d'y écrire l'équation que l'on souhaite. Dans la seconde ligne, la fonction `implicit_plot3d` est une fonction prenant en entrée cinq arguments⁹ :

1. Le premier, `equation == 0`, est l'équation de la surface que l'on souhaite modéliser. Par exemple, si on veut modéliser une surface d'équation $xy = 0$, on entrera ici $x * y == 0$.
2. Les trois autres arguments, ($x, -a, b$), ($y, -c, d$) et ($z, -e, f$), nous donnent l'intervalle dans lequel la surface sera modélisée. En général, si on ne sait pas quoi mettre, il vaut mieux veiller à ce que tous les paramètres soient égaux.
3. L'argument `plot_points` indique le nombre de points qui seront utilisés afin de modéliser la surface. Plus le nombre de point sera élevé, plus la surface sera modélisée finement mais plus le fichier **.stl** final sera lourd et plus le calcul prendra du temps.

On utilisera la commande `S.save('ma_surface.stl')` afin d'enregistrer la surface en fichier **.stl**. Si l'on souhaite afficher la surface, il suffit d'écrire `S` dans une cellule Sage et d'exécuter la cellule.

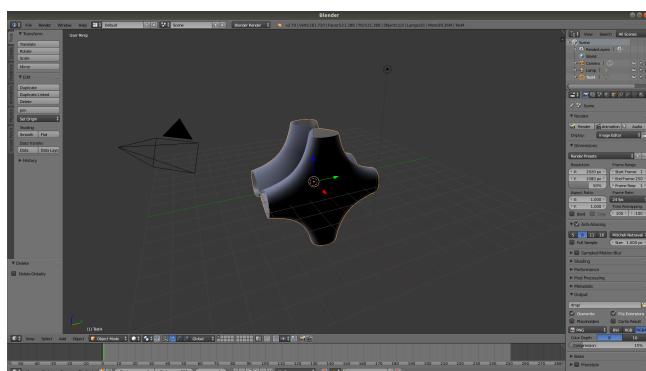


FIGURE 1 – Interface Blender après avoir importé la surface.

9. Le dernier argument, `viewer='threejs'`, n'est pas forcément nécessaire. J'en ai eu besoin afin d'afficher la surface.

Si l'on regarde la surface que nous venons d'obtenir, celle-ci n'a pas d'épaisseur. Même si cela ne nous dérange pas en mathématique, cela n'est pas le cas de l'imprimante. Il faut à peu près une épaisseur d'au moins *3mm* afin de pouvoir imprimer de manière convenable la surface. De plus, cette dernière n'a pas de dimension actuellement, et nous devons donc lui en donner. Nous utiliserons pour cela le logiciel Blender.

Lorsque l'on lance Blender, le logiciel s'ouvre avec un cube modélisé au centre du repère, qu'il faut supprimer en appuyant sur la touche *x* du clavier. Il faut ensuite importer le fichier *.stl* créé précédemment. Pour cela, on va dans **File** → **Import** → **Stl** puis on recherche le fichier. La fenêtre ressemble donc à l'image ci-dessous.

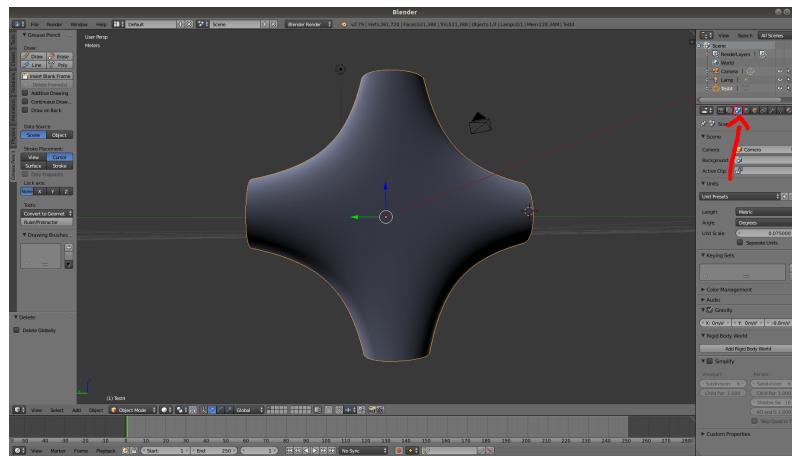


FIGURE 2 – Environnement scène.

Dans un premier temps, il faut donner les dimensions adéquates à notre objet. Pour ce faire, on va dans tout d'abord dans l'onglet **scene** (c.f Figure 2).

Cela nous ouvre une fenêtre à droite. On sélectionne maintenant l'option **Unit Presets**. Celle-ci fait apparaître un menu déroulant où l'on va choisir, pour notre exemple, **meters**. À partir de maintenant, un carré présent sur Blender est de côté 1 mètre. Il faut aussi choisir l'option **Metric** dans l'onglet **Length** juste en dessous, puis il faut jouer après avec l'option **unit scale** afin d'avoir la taille souhaitée (c.f Figure 3).

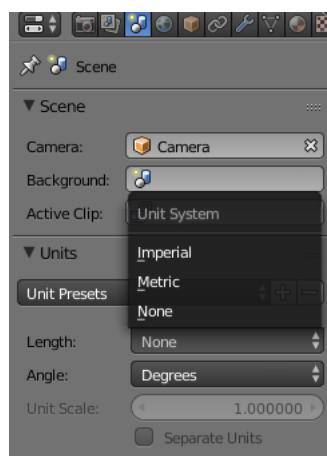


FIGURE 3 – Onglet **scene** avec les différentes options disponibles.

Afin de vérifier que l'on a bien la dimension souhaitée, on peut mesurer manuellement notre figure sous Blender. Pour cela, il faut (c.f Figure 4) :

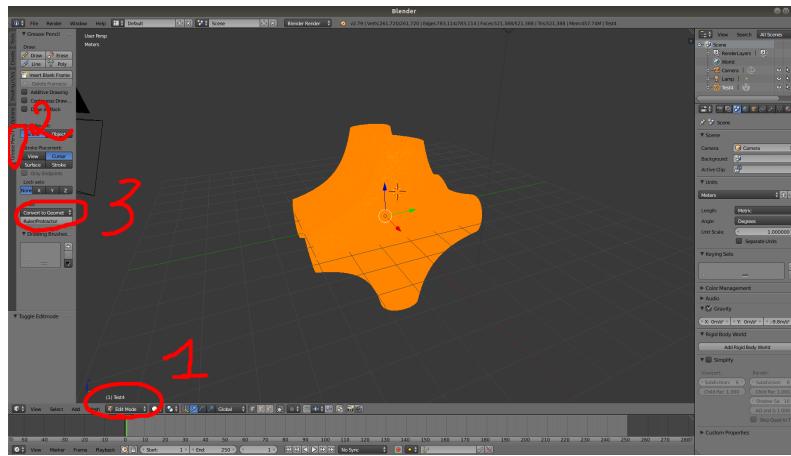


FIGURE 4 – Mesure d'une distance sur la surface.

1. Passer en **Edit Mode**.
2. Sélectionner l'option **Grease Pencil**.
3. Sélectionner l'outil **Ruler/Protractor**.
4. On fait un clic gauche sur la première extrémité, puis on reste appuyer et on fait glisser afin de mesurer la portion souhaitée jusqu'à la seconde extrémité.

Afin de donner de l'épaisseur à notre surface, il faut tout d'abord revenir en **Object Mode** (c'est au même endroit que lorsque nous étions passé en **Edit Mode**). Il faut ensuite (c.f Figure 5) :

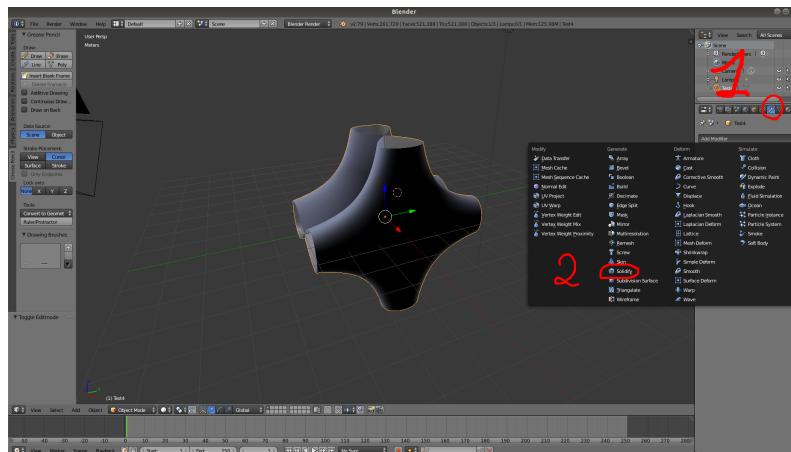


FIGURE 5 – Accès à l'interface **Solidify**.

1. Ouvrir l'environnement **Modifiers**.
2. Sélectionner **Add Modifier** puis sélectionner **Solidify**.

Enfin, pour exporter le modèle en **.stl**, on va dans **File** → **Export** → **.stl**.

Références

- [1] A. B. Altman, S. L. Kleiman, *Foundations of the theory of schemes*, Compositio Mathematica, Tome 34 n°1 p.3-47, 1977
- [2] G. Bockondas, *Hypersurfaces cubiques à revêtement triple*, Thèse en cours
- [3] S. Boissière, *Géométrie des hypersurfaces cubiques projectives*, École de géométrie du CIRPA, 2022, Brazzaville
- [4] S. Boissière, C. Camere, A. Sarti, *Cubic threefolds and hyperkähler manifolds uniformized by the 10-dimensional complex ball*, Mathematische Annalen, Volume 373, Avril 2019
- [5] G. Canonero, M. V. Catalisano, M. E. Serpico, *Inflection points of cubic hypersurfaces*, Bollettino Dell'Unione Matematica Italiana, 1997
- [6] D. Eisenbud, *Commutative algebra, with a view toward algebraic geometry*, Springer, 1995
- [7] J. P. Murre, *Algebraic equivalence modulo rational equivalence on a cubic threefold*, Compositio Mathematica, Tome 25 n°2 p.161-206, 1972
- [8] D. Perrin, *Géométrie Algébrique, une introduction*, CNRS Editions, 1995
- [9] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1*, Springer, Troisième édition, 2013