

CAPECL

Document de Synthèse

Projet Climat
2024–2025

Réalisé par :
Les Carcajous Callipyges

Taha, Thaïs, Candice, Léna, Chloé, Pierre-Louis, Camille, Romain, Elise,
Melvin, Elsa

Table des matières

Introduction	2
1 Modèle 1:	5
1.1 Boule d'eau rayonnante dans le vide	5
Hypothèses	5
Schéma	5
Equation	5
Solution	5
Modélisation graphique	6
1.2 Coquille d'eau rayonnante (intérieur vide)	6
Hypothèses	6
Schéma	6
Calcul capacité thermique	7
1.3 Critique du modèle	8
2 Modèle 2 : Terre avec atmosphère conductrice	9
2.1 Boule d'eau avec atmosphère conductrice	9
Hypothèses	9
Équations de transfert thermique	9
Solution	10
Modélisation graphique	10
2.2 Coquille d'eau avec atmosphère conductrice	10
Hypothèses	10
Schéma	10
Modélisation graphique	11
2.3 Critique du modèle	11
3 Modèle 3 : Coquille d'eau avec intérieur conducteur	13
Hypothèses	13
Schéma	13
Équations de transfert thermique	13
Modélisation graphique	14
4 Modèle 4: Terre réaliste avec hétérogénéités	15
Hypothèses	15
Schéma	15
Équations de transfert thermique	16
Tabulation de l'albédo de surface en fonction de la position :	16
Tabulation de l'albédo des nuages	16
Calculs capacités calorifiques en fonction de la composition des surfaces	16
Chaleur latente	18
Modélisation graphique	19
Critique du modèle	22

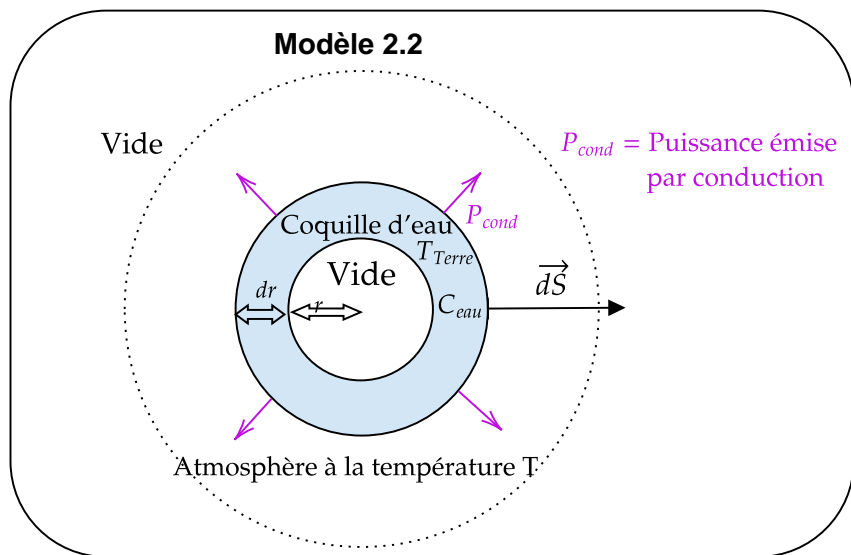
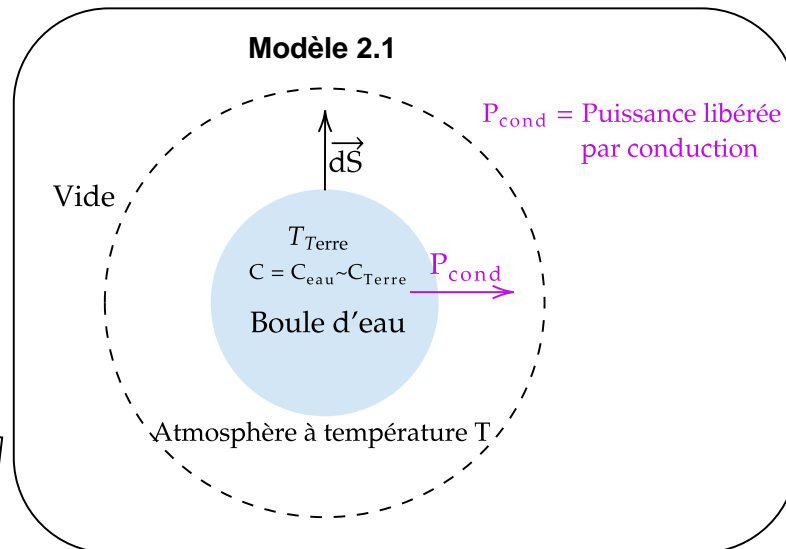
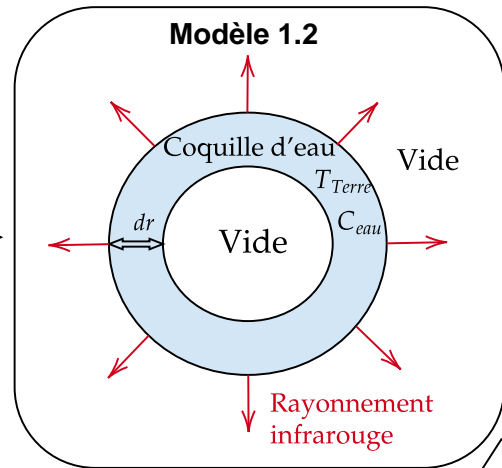
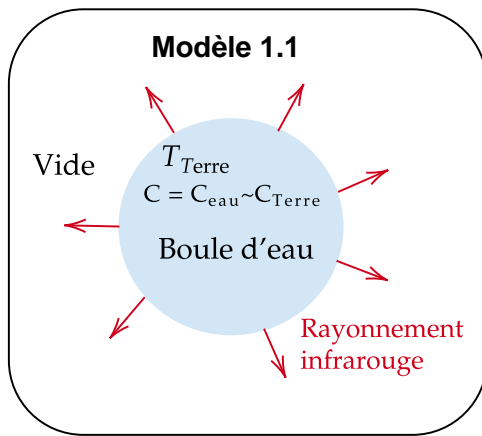
Introduction

Ce projet a pour but de modéliser de manière dynamique l'évolution de la température terrestre au cours du temps et de l'espace. L'idée est simple : partir d'une vision très simplifiée de notre planète, puis ajouter progressivement des éléments pour se rapprocher d'une description plus réaliste.

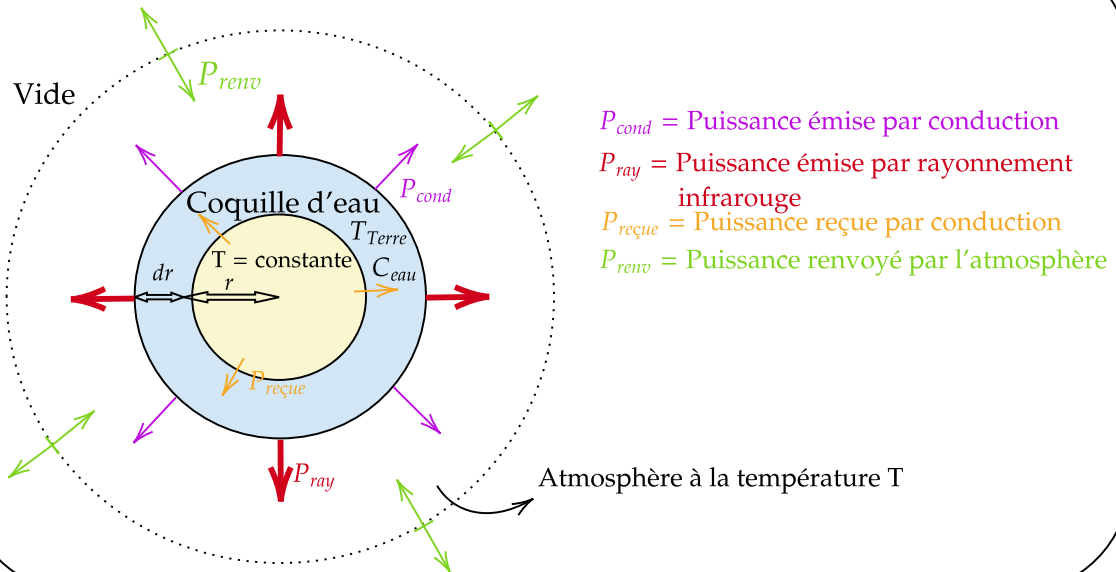
Quatre modèles ont été développés, chacun apportant une amélioration supplémentaire :

- **Modèle 1** : La Terre est vue comme une simple sphère (ou coquille) d'eau dans le vide, sans atmosphère ni apport solaire. Elle perd sa chaleur uniquement par rayonnement.
- **Modèle 2** : Une atmosphère est introduite. Elle permet à la Terre d'échanger de la chaleur avec l'extérieur par conduction thermique.
- **Modèle 3** : L'intérieur de la coquille n'est plus vide. On considère donc les échanges thermiques internes entre le centre de la Terre et sa surface.
- **Modèle 4** : C'est le modèle le plus complet. Il prend en compte la géographie réelle (continents, océans), l'albédo du sol et des nuages, la chaleur latente, les capacités thermiques variables selon les régions, et des données climatiques réelles.

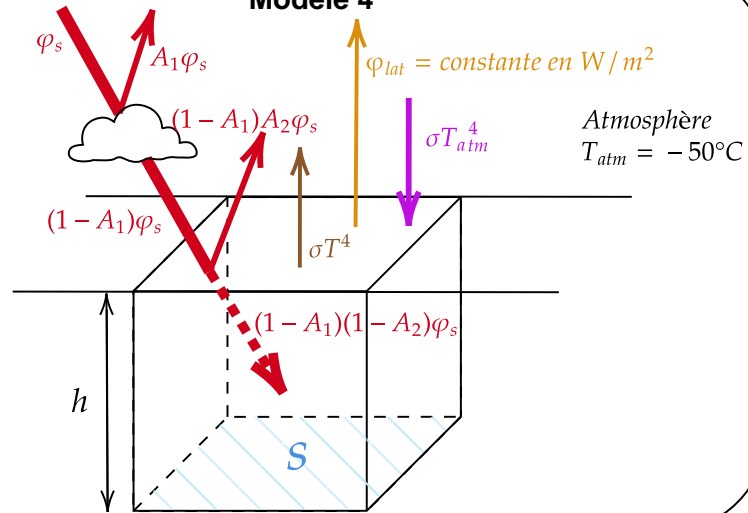
Les schémas ci-dessous montrent l'évolution des modèles :



Modèle 3



Modèle 4



1 Modèle 1:

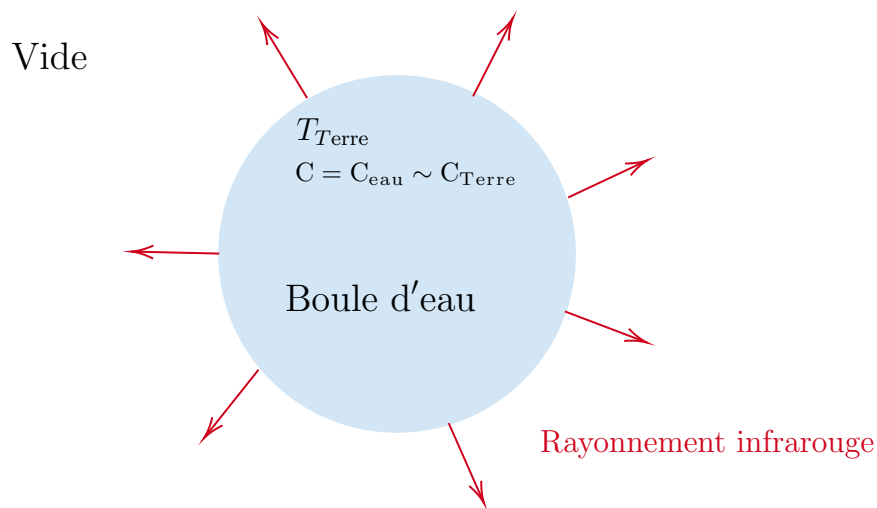
1.1 Boule d'eau rayonnante dans le vide

Hypothèses

- Terre assimilée à une **boule d'eau**, de température T_{Terre} telle que $T_{\text{Terre}} > T_{\text{ext}}$
- Sans atmosphère (dans le vide)
- Sans puissance solaire reçue
- $c_m = c_{\text{m,eau}} \sim c_{\text{m,Terre}}$
- $T(t=0) = T_i \quad T(t \rightarrow +\infty) = T_0$

→ la terre perd de la température par **rayonnement**

Schéma



Équation

$$P = \sigma T^4 \cdot S$$
$$C \frac{dT}{dt} = -\sigma T^4 \cdot S$$
$$\frac{dT}{dt} = \boxed{-\frac{4\pi R_T^2 \sigma T^4}{C}}$$

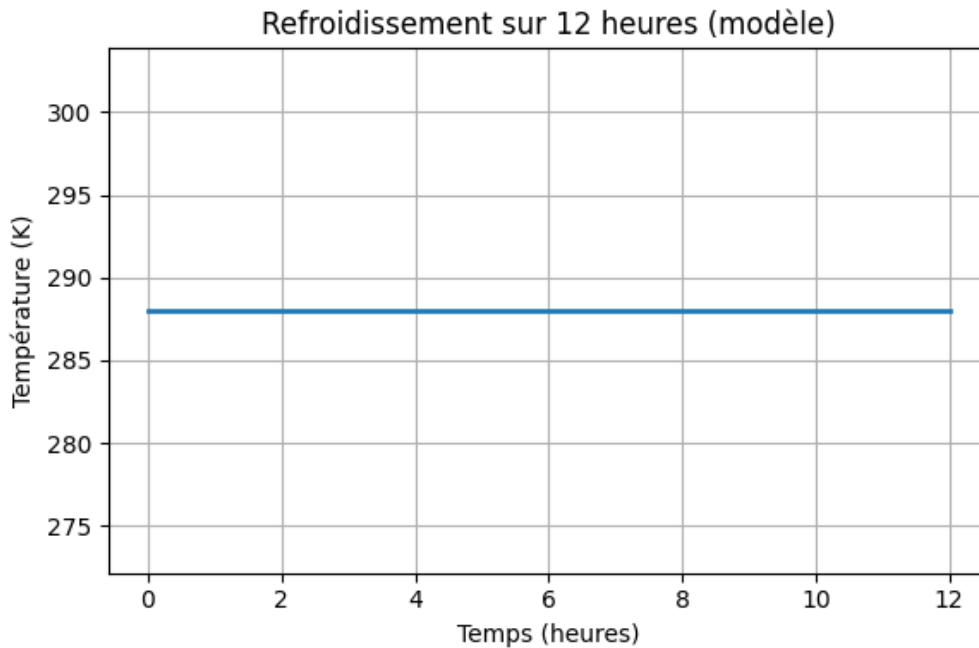
Avec $S = 4\pi r^2$ $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Solution

$$T(t) = \left(\frac{C}{C/T_i^3 + 12\pi R^2 \sigma t} \right)^{1/3} = \frac{T_i}{(1 + 3kT_i^3 t)^{1/3}}$$

avec $k = \frac{4\pi R_T^2 \sigma}{C}$ et $C = c_{\text{m eau}} \times m = 4,60 \cdot 10^{27} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

Modélisation graphique



1.2 Coquille d'eau rayonnante (intérieur vide)

Hypothèses

- On garde les hypothèses précédentes, excepté le système: la Terre est assimilée à une **coquille d'eau**, d'épaisseur dr , qui a un **intérieur vide**

→ il faut donc recalculer la capacité thermique

Schéma

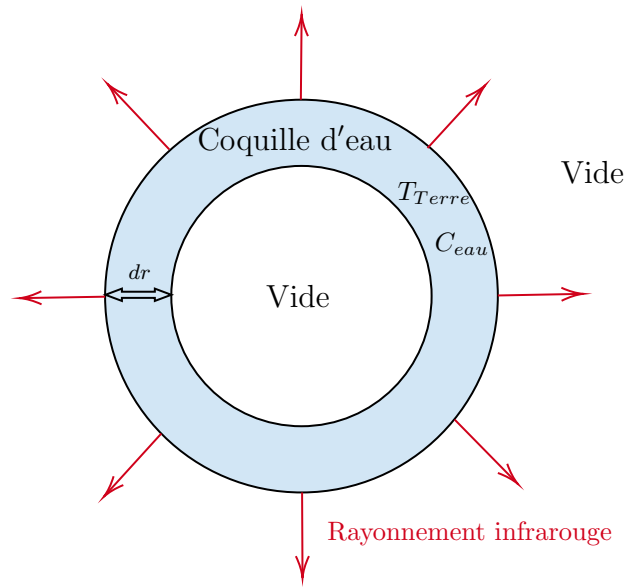


Schéma du modèle 1.2

Calcul capacité thermique

$$m = \rho_{\text{eau}} \left(\frac{4}{3}\pi(R_T + dr)^3 - \frac{4}{3}\pi R_T^3 \right)$$

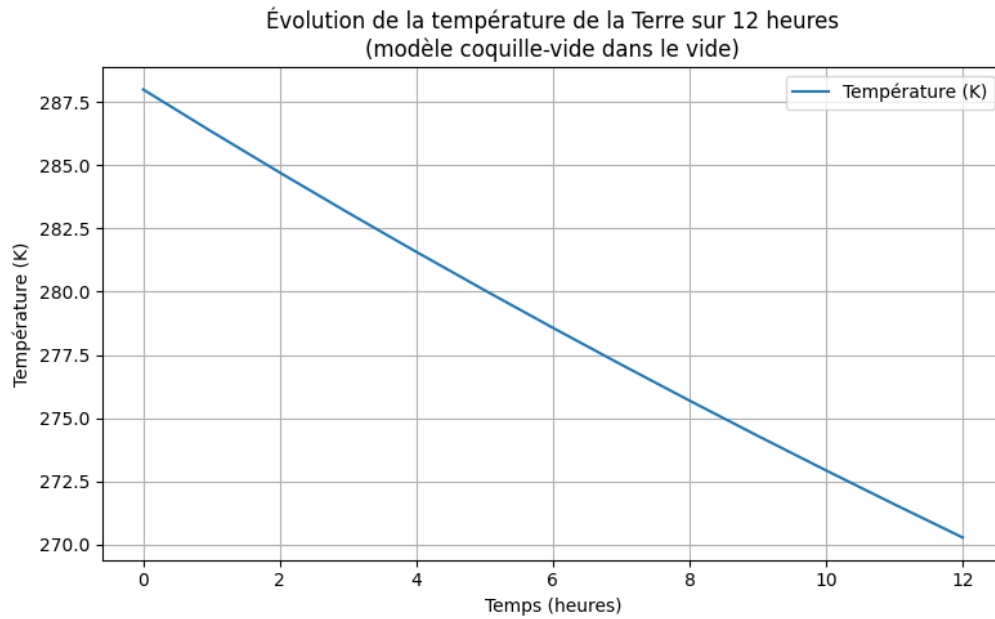
$$\stackrel{DL}{\approx} \rho_{\text{eau}} \cdot 4\pi R_T^2 \cdot dr$$

$$C = c_{\text{m,eau}} \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot 4\pi R_T^2 \cdot dr$$

$$= 4,31 \cdot 10^{20} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$k = \boxed{\frac{\sigma}{c_{\text{eau}} \cdot \rho_{\text{eau}} \cdot dr}}$$

Modélisation graphique



1.3 Critique du modèle

- Pas d'atmosphère, pas de rayonnement thermique reçu du Soleil, uniquement un transfert thermique émis par rayonnement.
- La Terre est assimilée à de l'eau.
- Température de la Terre subjective.
- Température du vide subjective.
- Épaisseur de la coquille arbitraire.
- On a supposé l'intérieur de la coquille vide, or cela implique un rayonnement à la fois vers l'intérieur et vers l'extérieur de la coquille.

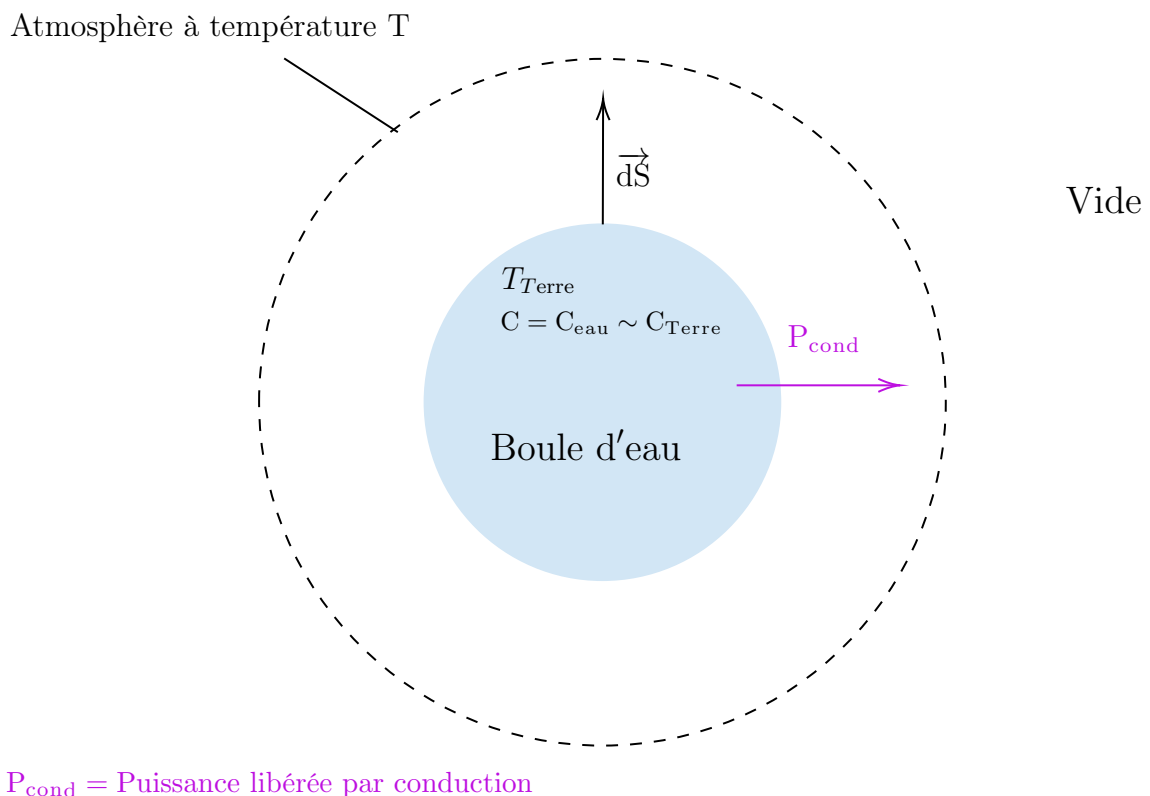
2 Modèle 2 : Terre avec atmosphère conductrice

2.1 Boule d'eau avec atmosphère conductrice

Hypothèses

- Terre assimilée à une **boule d'eau**, de température T_{Terre}
- **Atmosphère** avec une température uniforme T
- Sans puissance solaire reçue
- Sans convection
- $c_m = c_{m,\text{Terre}} \sim c_{m,\text{eau}}$
- $T(t=0) = T_i \quad T(t \rightarrow +\infty) = T_0$
- La Terre ne rayonne pas

Schéma :



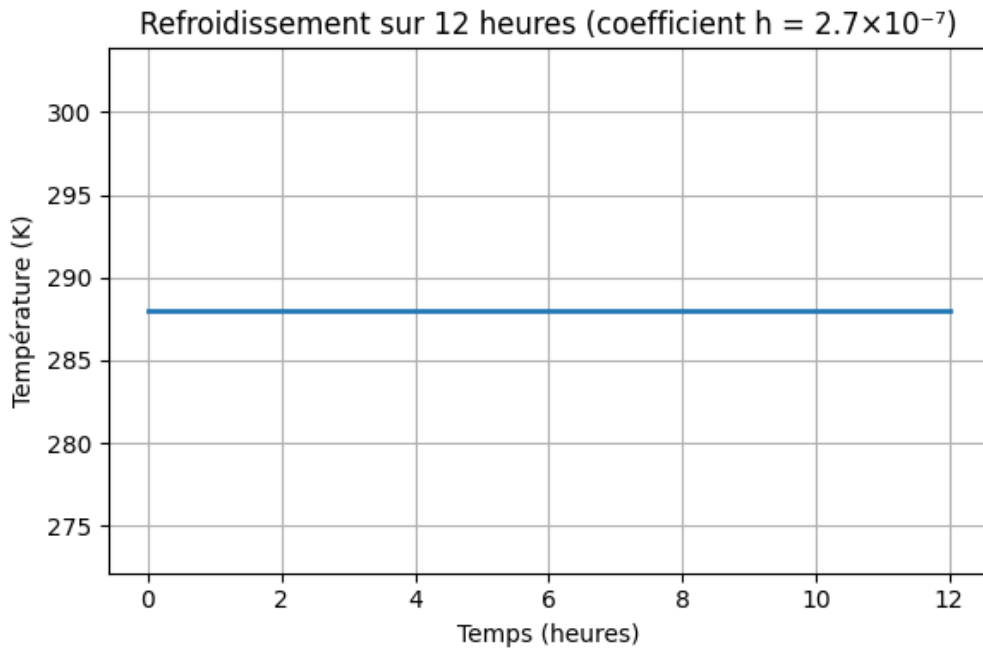
Équations de transfert thermique

On applique le premier principe au système { boule d'eau }

$$\begin{aligned}
\delta Q &= C dT = -P_{\text{th,cond}} \cdot dt \\
\Rightarrow - \int \int j_{\text{th,cond}} \vec{dS} dt &= C dT \\
\Rightarrow - \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} h(T - T_0) \vec{e}_r \cdot \vec{r}^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{e}_r dt &= C dT \\
\Rightarrow -h(T - T_0) \cdot 4\pi dt &= C dT \\
\Rightarrow -T + T_0 &= \frac{C}{h4\pi} \frac{dT}{dt} \\
\Rightarrow \frac{dT}{dt} &= -\frac{4\pi h}{C} (T - T_0)
\end{aligned}$$

Solution $T(t) = T_0 + (T_i - T_0)e^{-kt}$ avec $k = \frac{4\pi h}{C}$

Modélisation graphique



2.2 Coquille d'eau avec atmosphère conductrice

- On garde les hypothèses précédentes, en ajoutant l'**atmosphère**

Schéma

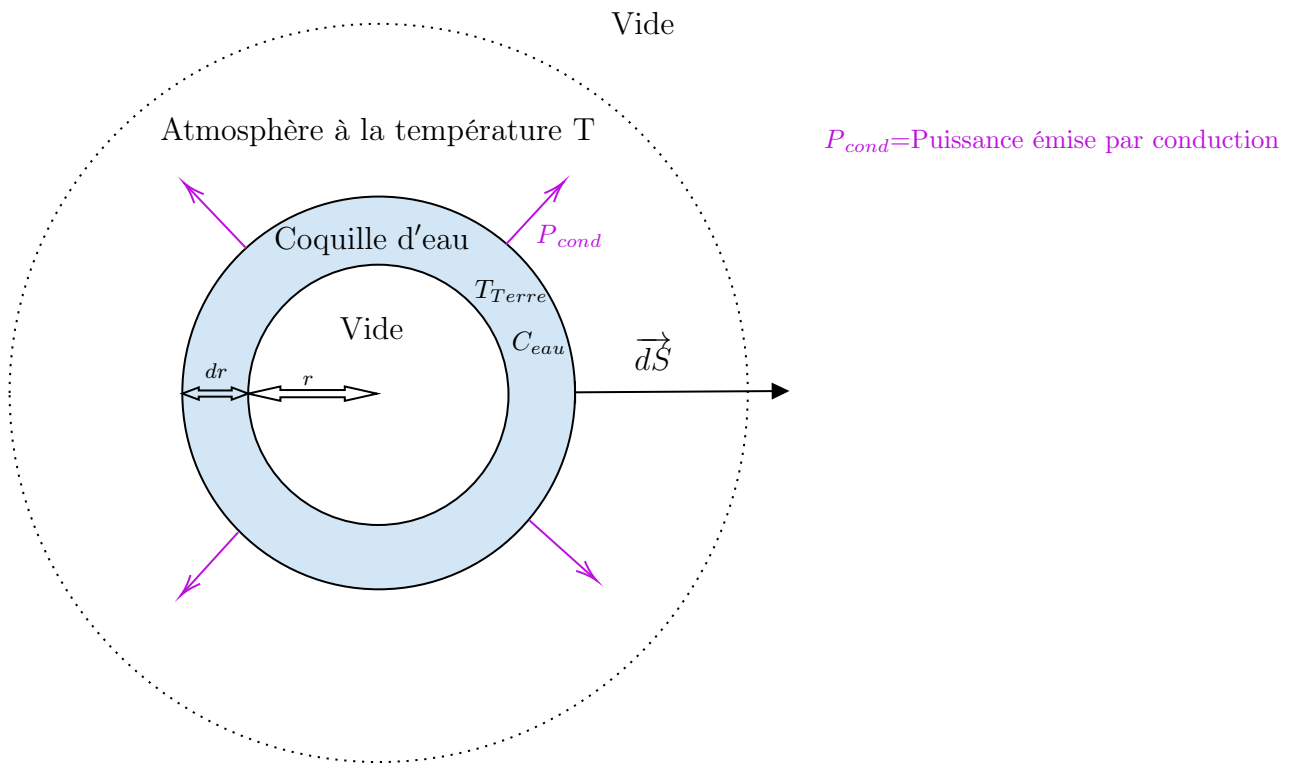
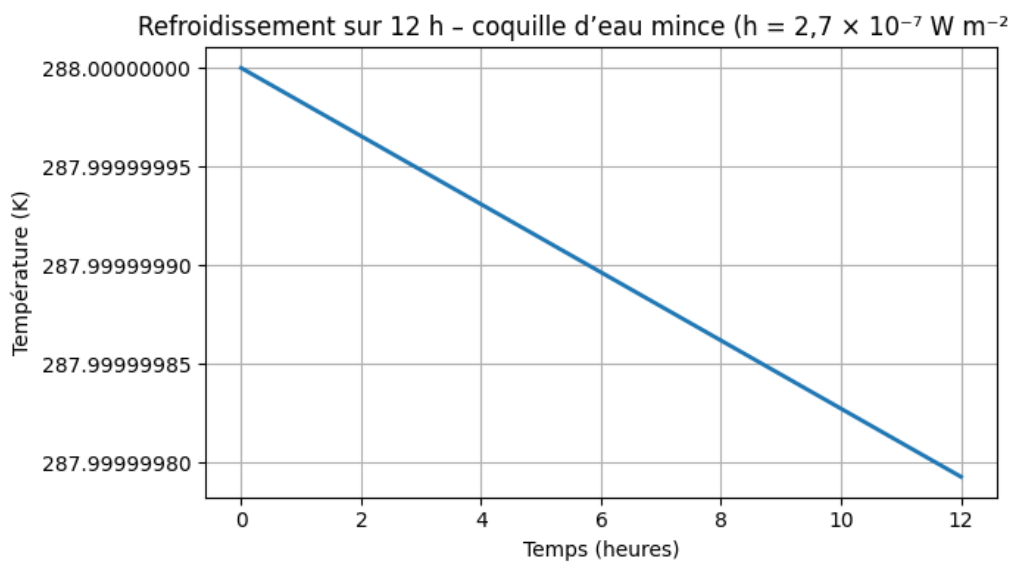


Schéma du modèle 2.2

Modélisation graphique



2.3 Critique du modèle

- Température de la Terre subjective.
- Épaisseur de la coquille.
- Prise en compte de l'atmosphère donc utilisation de la loi de Newton :

- problème de définition de la couche limite : convection non prise en compte
- Dans les codes `modele2_coquille.py` et `modele2_boule.py`, on a posé $h = \lambda_{\text{air}}/\delta$ avec $\lambda_{\text{air}} = 0,027 \text{ W}/(\text{K} \cdot \text{m})$.
 - $\delta = 100 \text{ km}$: longueur de la couche limite surestimée
- Problème de définition de T_0 :
 - température au-delà de la thermosphère (or on a posé $T_0 = 273 \text{ K}$ dans nos codes Python).

$$-h[T(r+dr) - T_0] 4\pi - 4\pi \cdot (r+dr)^2 \sigma T^4(r+dr) - 4\pi r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r) = C \frac{dT}{dt}.$$

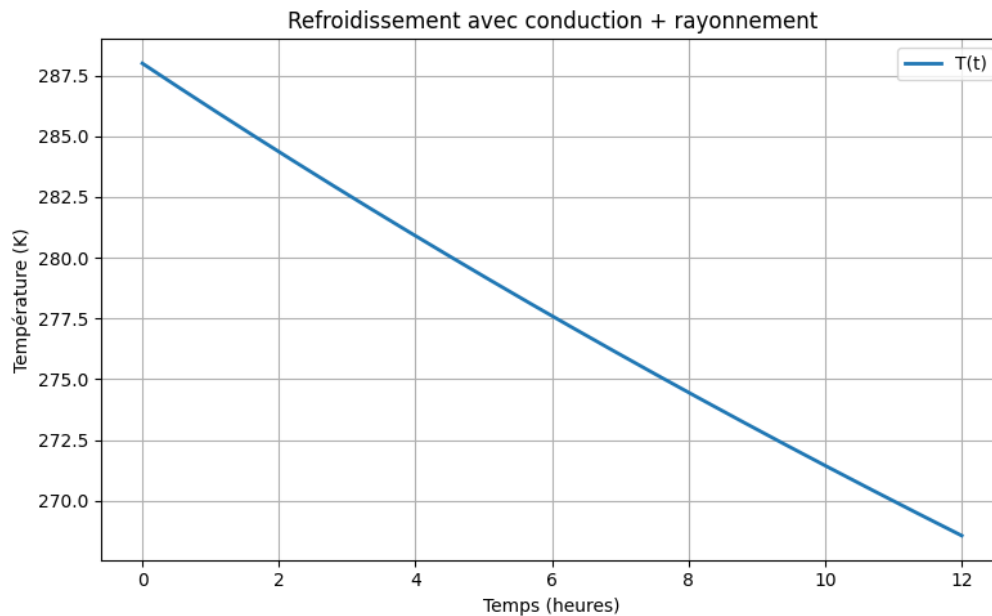
Or au 1^{er} ordre en dr , $r + dr \approx r$:

$$\boxed{-4\pi h(T(r) - T_0) - 4\pi r^2 \sigma T(r)^4 - 4\pi r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}(r) = C \frac{dT}{dt}}$$

Avec

$$P_r = \iiint \vec{j}_{\text{thr}} \cdot d\vec{S} = \iiint -\lambda \vec{\nabla} T \cdot d\vec{S} = -\lambda \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\partial T}{\partial r} \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r = -\lambda 4\pi r^2 \frac{\partial T}{\partial r}.$$

Modélisation graphique



Critiques du modèle :

- Sans convection
- dr doit être choisi de façon à ce que la température ne varie pas significativement.
- Problème de définition de T_0 :
 - température au-delà de la thermosphère (or on a posé $T_0 = 273 \text{ K}$ dans nos codes Python).

4 Modèle 4: Terre réaliste avec hétérogénéités

Terre hétérogène avec rayonnement et albédo

Hypothèses

- Terre modélisée avec les **continents**, les **mers**, les **océans**
- On néglige:
 - convection dans l'air
 - la conduction entre centre de la terre et croûte
 - la conduction entre croûte et air ($P_{th,cond}$)
- rayonnement de la croûte ($P_{th,ray}$)
- Température de l'atmosphère constante dans l'espace et au cours du temps
- Prise en compte de l'albédo du sol en fonction de la position et du mois de l'année
- Albédo des nuages.
- Capacité thermique selon la localisation
- $T(t = 0) = T_i$ indépendant de l'espace
- Chaleur latente considérée avec des constantes propres à chaque continent

Schéma

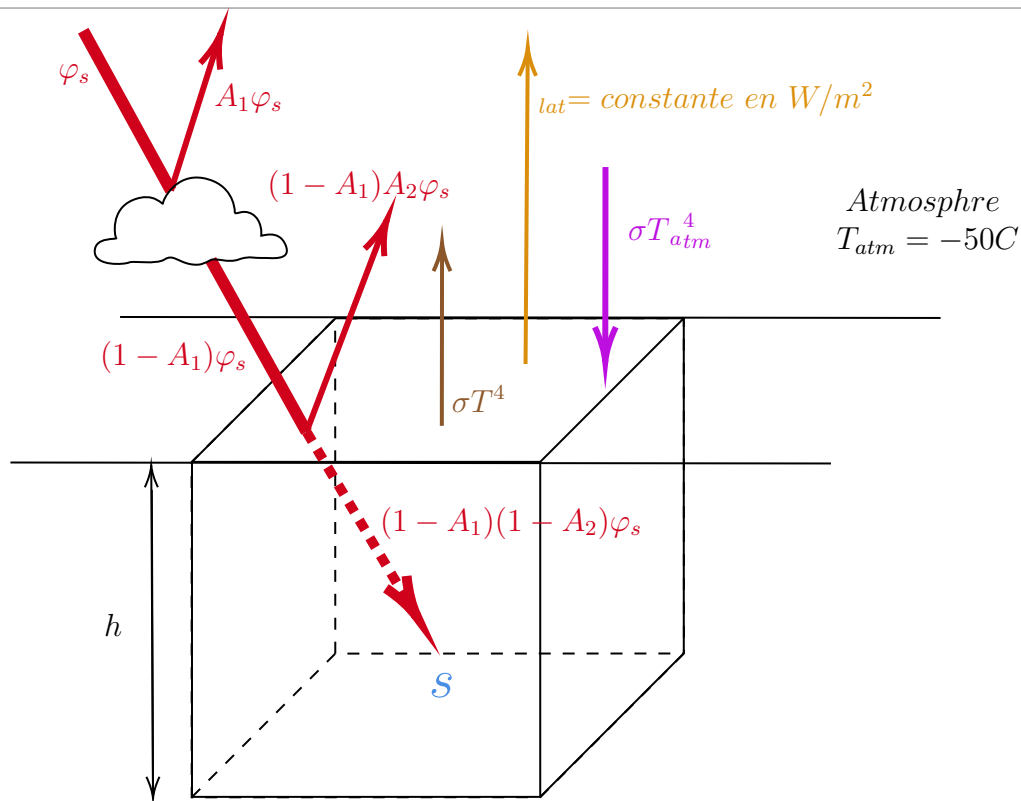


Schéma du modèle 4

Équations de transfert thermique

On applique le premier principe appliqué au système { un **pavé** de la Terre, de **hauteur h** et de **surface S** }

$$c_s \frac{dT}{dt} = (1 - A_1)(1 - A_2)\varphi_s - \sigma T^4 + \sigma T_{atm}^4 - \varphi_{lat}$$

Avec

- c_s la capacité thermique surfacique en $J \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$
- T la température du système en K
- A_1 l'albédo des nuages (sans unité)
- A_2 l'albédo du sol (sans unité)
- φ_s le flux solaire incident en $W \cdot m^2$
- σ la constante de Stefan-Boltzmann $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
- T_{atm} la température de l'atmosphère en K
- φ_{lat} le flux de chaleur latente émis par notre système en $W \cdot m^2$

Tabulation de l'albédo de surface en fonction de la position

- Données récupérées sur les dossiers CSV du projet (groupe B) de l'année précédente.
- Moyennes mensuelles tabulées pour chaque position sur Terre (latitude, longitude).

Tabulation de l'albédo des nuages

- Obtenue par différence de l'albédo de la Terre lors de ciel clair et ciel nuageux (moyennes mensuelles tabulées sur 1 an, du 1er janvier 2024 au 1er janvier 2025).
Source [ici](#), code associé [là](#)

Calculs capacités calorifiques en fonction de la composition des surfaces

Données récoltées [ici](#) et code associé [là](#).

- Moyenne faite sur une période de 1 an grâce à 12 données récoltées le matin et 12 données récoltées le soir
- Les 12 données ont été prises à des périodes différentes de l'année
- La masse volumique de la Terre est approximée constante
- Pour le Groenland et l'Antarctique

Constante	Valeur
$c_{p,\text{sec}}$	0.80
$c_{p,\text{eau}}$	4.187
ρ_b (sol)	1300
ρ_w (eau)	1000

Constantes utilisées pour le calcul de c_p

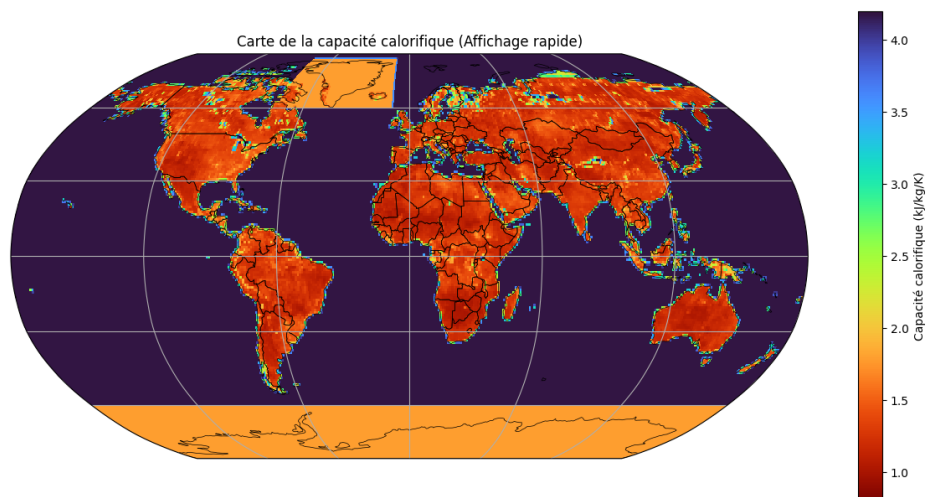
$$w = \frac{\rho_w \theta}{\rho_b(1 - \theta) + \rho_w \theta}$$

Avec θ : le taux d'humidité en m^3 d'eau par m^3 de sol

$$c_p = c_{p,\text{sec}} + w(c_{p,\text{eau}} - c_{p,\text{sec}})$$

Avec w : la fraction massique d'eau

- Planisphère représentant les capacités calorifiques:



Détail du calcul de c_s :

Avec C la capacité thermique

h : profondeur à partir de laquelle la température reste constante (cf. exo 1, TD chap. 11 sur la diffusion thermique), pour des variations de température journalières comprises entre 273 K (la nuit) et 293 K (le jour).

On obtient $h \approx 0,40$ m

(On nous donnait le coefficient de diffusion thermique du sol $D_{\text{sol}} = 6 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$)

Chaleur latente

→ correspond à la puissance surfacique positive (reçue) ou négative (fournie) afin d'évaporer ou de condenser l'eau de la surface de la Terre.

→ On découpe la Terre de plusieurs manières, par mers et océans, et par continents.

On parle d'une moyenne faite par continents :

- Mers et océans : 108.8 W/m^2
- Asie : 28.8 W/m^2
- Afrique : 45.1 W/m^2
- Europe : 38.1 W/m^2
- Amérique du Nord : 36.5 W/m^2
- Amérique du Sud : 73.1 W/m^2
- Océanie : 31.9 W/m^2

On suppose que la pression atmosphérique de la Terre est constante à la surface.

On applique le premier principe de la thermodynamique :

$$\begin{aligned} dH &= \delta Q \\ dm \Delta h_{\text{vap}} &= P_{th} \times dt \\ Dm \Delta h_{\text{vap}} &= P_{th} \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \phi_{\text{lat}} &= \frac{Dm}{S} \Delta h_{\text{vap}} \\ \phi_{\text{lat}} &= \frac{m}{S \Delta t} \Delta h_{\text{vap}} \\ \phi_{\text{lat}} &= \frac{\rho V}{S \Delta t} \Delta h_{\text{vap}} \\ \phi_{\text{lat}} &= \boxed{\frac{\rho S E_{\text{vap}} \Delta t}{S \Delta t} \Delta h_{\text{vap}}} \end{aligned}$$

Avec E_{vap} l'évaporation en m/s.

Continents	évaporation (cm/year)
Europe	49
Amérique du Nord	47
Amérique du Sud	94
Afrique	58
Asie	37
Océanie	41
Océans	140

On obtient donc:

Continents	Flux de chaleur latente (W/m^2)
Europe	38.1
Amérique du Nord	36.5
Amérique du Sud	73.1
Afrique	45.1
Asie	28.8
Océanie	31.9
Océans	108.8

Modélisation graphique :

Commentaire général:

- La deuxième année est simulée afin de laisser le temps à la température de se stabiliser, car des artefacts apparaissent au début de la première année (T initiale fixée à 15°C)
- Un lissage par convolution gaussienne est appliqué aux grandeurs tabulées (albédo de surface et des nuages, chaleur latente) pour atténuer les discontinuités liées aux transitions jour/nuit et aux changements mensuels
- code des premiers graphiques

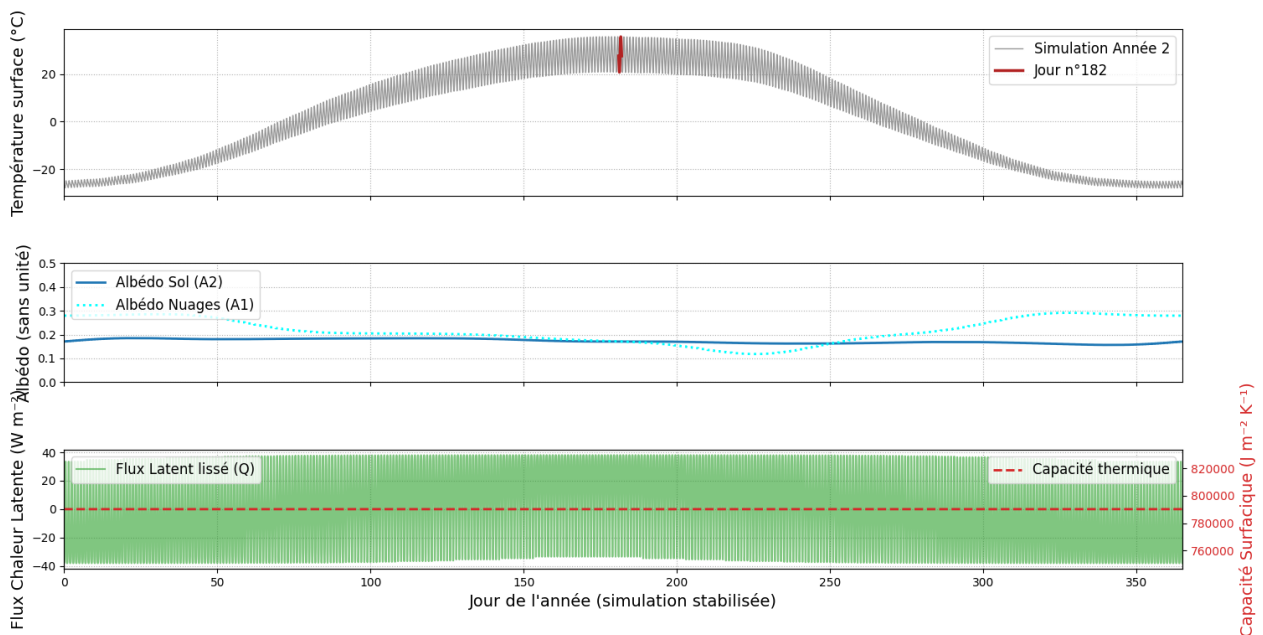


Figure : Simulation de l'évolution de la température sur une année à **Paris**

Paris :

- La légère montée du min et du max de la chaleur latente après lissage vient du fait que la durée du jour varie au fil de l'année
- Les variations journalières sont un peu trop faibles en hiver
- La température globale est trop basse

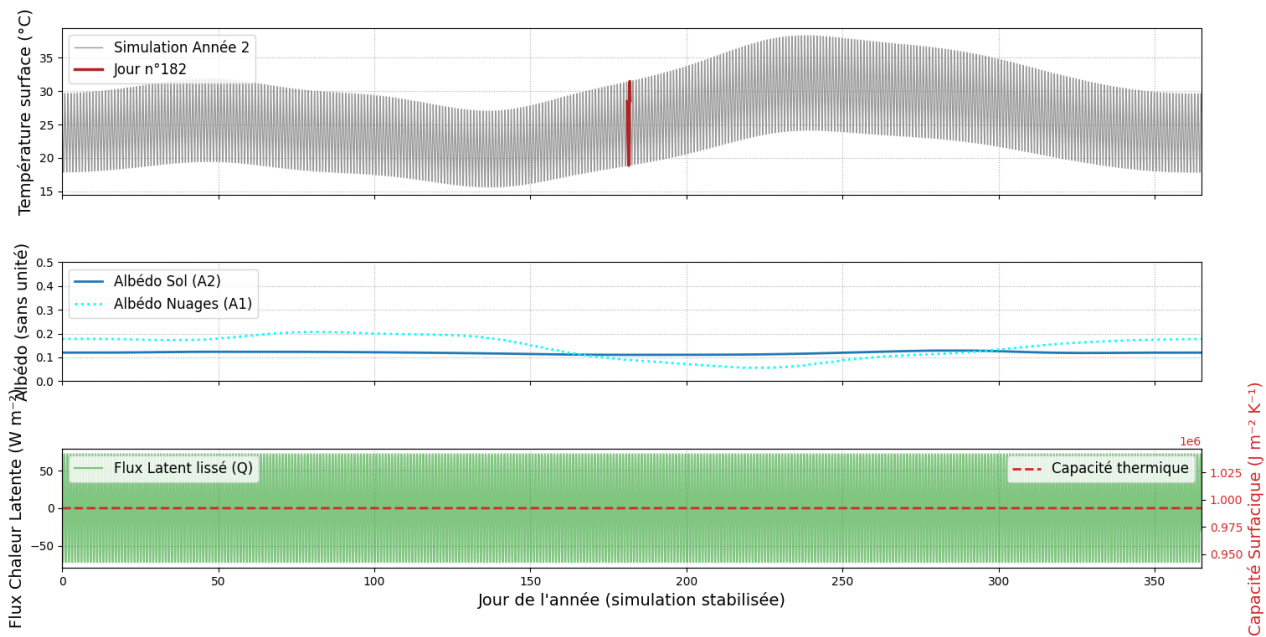


Figure : Simulation de l'évolution de la température sur une année en Amazonie

Amazonie

- La température globale évolue de manière cohérente avec le cycle saisonnier : elle diminue pendant la saison des pluies et augmente pendant la saison sèche.
- L'albédo des nuages suit également ces variations, avec une évolution logique selon les saisons.

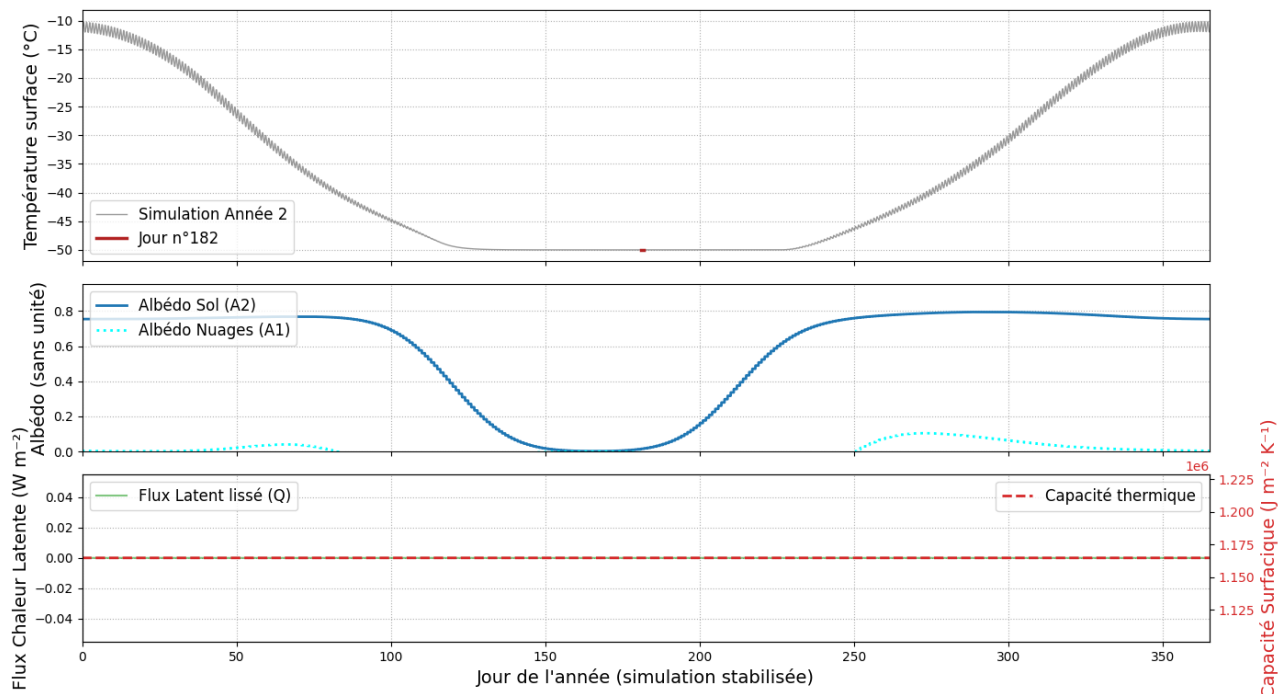
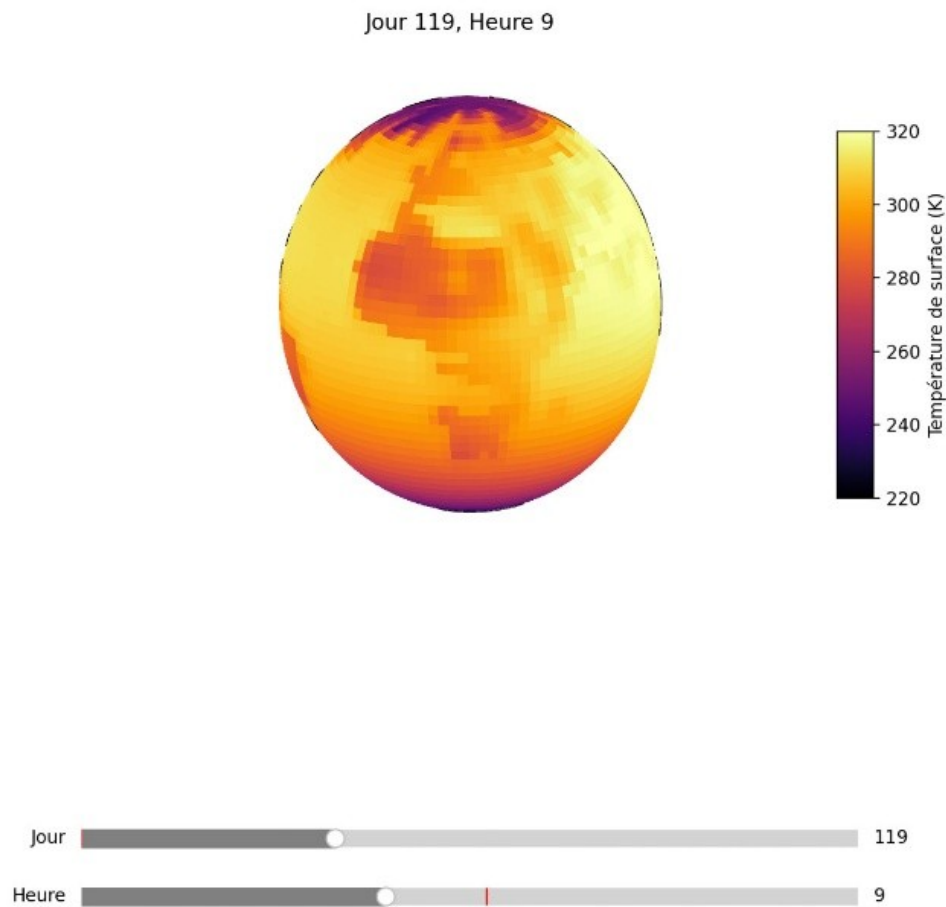


Figure : Simulation de l'évolution de la température sur une année en Antarctique

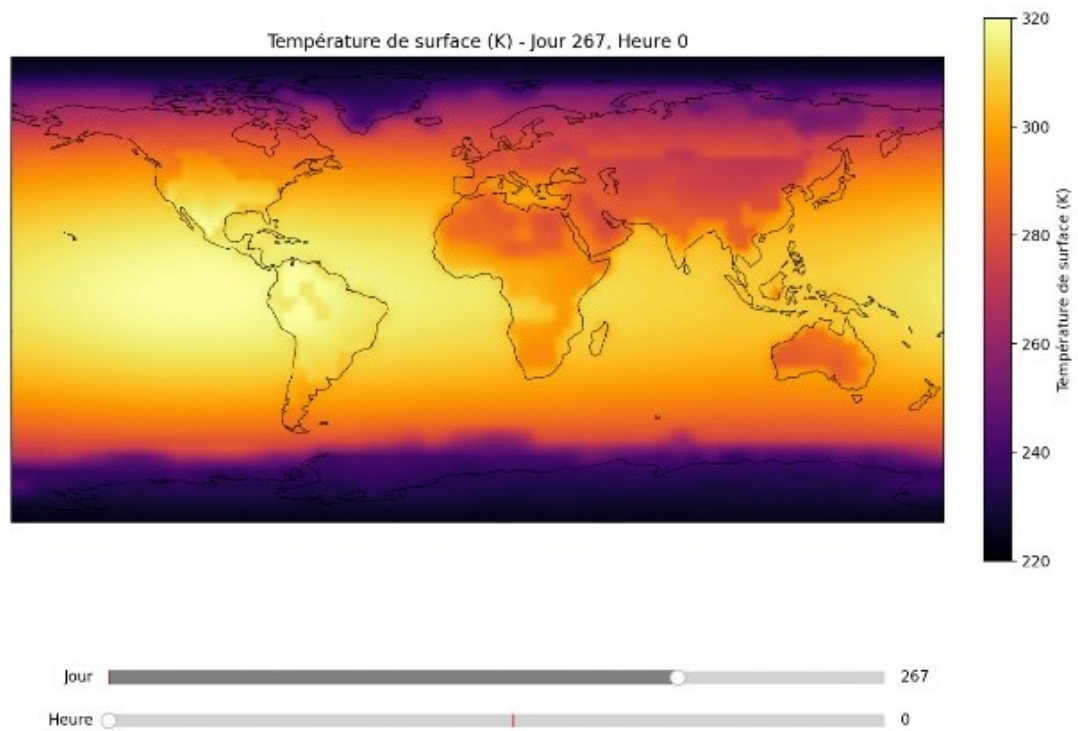
Antarctique

- La température globale simulée est trop élevée par rapport aux valeurs attendues.

- La courbe de température est artificiellement aplatie en milieu de période car la température atmosphérique (T_{atm}) est fixée à $-50\text{ }^{\circ}\text{C}$, ce qui empêche la température de descendre en dessous.
- Il existe une période où l'albédo du sol est nul, car la valeur tabulée dans le fichier CSV ($\sim 0,0001$) est arrondie à zéro dans les calculs.



Code associé



Code associé

Critique du modèle

- On néglige la conducto-convexion
- température de l'atmosphère considérée homogène et constante au cours du temps
- Les valeurs de chaleur latente sont prises constantes, ce qui n'est pas le cas en réalité