CENTRALE LYON

CapECL1

Devoir surveillé de Mathématiques n°2 le 15/10/2024

durée : 2h00

Exercice 1 (6 points).

La suite de Fibonacci est définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer que , pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+2} - u_{n+1} \geqslant 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.
   Simplifier l'expression de $S_n = \sum_{k=1}^{n-2}(u_{k+2} - u_{k+1})$.

3. Déduire des questions que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n - 1$.

Exercice 2 (3 points).

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
On suppose que f est injective et vérifie $f(n) \leqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

(*On pourra utiliser une récurrence forte*)

Exercice 3 (6 points).

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété :

$$(P)\ ,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{f^2(x) + 3x^2} = f(x) + f(1)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, en raisonnant par analyse-synthèse, l'équation $2a = \sqrt{a^2 + 3}$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
   (a) On suppose que f vérifie (P).Calculer $f(1)$.

   (b) Déterminer alors soigneusement toutes les fonctions vérifiant (P).

Exercice 4 (15 points).

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'application

$$\begin{cases} f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z(1-z) \end{cases}$$

On identifiera dans l'exercice un point du plan et son affixe complexe z.

1. Déterminer les antécédents de $\dfrac{1+i}{4}$.
   Qu'en déduit-on pour la fonction f ?

2. Soient z_1, z_2 deux complexes distincts.
   Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple pour que $f(z_1) = f(z_2)$.
   En donner une interprétation géométrique faisant intervenir un milieu.

3. Justifier que f est surjective.
   Y a-t-il des complexes admettant un seul antécédent par f ? Si oui le(s)quel(s) ?

4. Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.
   Quelle est la nature géométrique de cet ensemble ?

5.(a) Calculer , pour $\theta \in \mathbb{R}$, $f(\frac{1}{2} + e^{i\theta})$.

(b) En déduire que $f(\Gamma) = \Gamma'$ où Γ est le cercle de centre d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon 1 et Γ' est un cercle que l'on caractérisera.