CENTRALE LYON

CapECL1

Devoir surveillé de Mathématiques n°9 le 15/04/2025

durée : 2h30

La présentation, la lisibilité et l'orthographe, ainsi que la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (8 points).

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

On définit ainsi une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ M &\mapsto \mathrm{Tr}(M). \end{aligned}$$

Le but de l'exercice est d'étudier l'application

$$\begin{aligned} f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \mathrm{Tr}(A)M - \mathrm{Tr}(M)A. \end{aligned}$$

où A est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée vérifiant $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

Partie 1 : questions préliminaires

1. Montrer que Tr est linéaire.
   Comme Tr est à valeurs dans $\mathbb{R}$, de quel type d'application linéaire s'agit-il ?
2. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie 2 : étude d'un exemple

Dans cette partie, $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $f(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. En déduire des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Partie 3 : cas général

Dans cette partie, on retourne au cas général, on a $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée vérifiant $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.

1. Montrer que si une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dans $\mathrm{Ker}(f)$, alors $M \in \mathrm{Vect}(A)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(A)$.
3. Déterminer $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr})$ puis en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.
4. En déduire alors que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$. ?

Exercice 2 (12 points).

1. **Partie 1 : un résultat préliminaire**

   Soit v un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev E de dimension 3.
   On suppose que v est de rang 2 avec $v^2 \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $\mathrm{Ker}(v^2) \neq \mathrm{Ker}(v)$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(v) \subseteq \mathrm{Ker}(v^2)$.
   (b) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(v^2)$.
   (c) Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(v^2)$ qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(v)$.
   Montrer que la famille $(x, v(x))$ est une base de $\mathrm{Ker}(v^2)$.

2. **Partie 2 : Étude d'un endomorphisme**

   Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

   On note Id l'application Identité de $\mathbb{R}^3$ et I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$.
   Enfin , on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

   (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Démontrer que :
   $$A - \lambda I \text{ est inversible si et seulement si } \lambda \neq 2 \text{ et } \lambda \neq 3.$$
   (b) Calculer les rangs des matrices $A - 2I$ et $A - 3I$.

   (c) Justifier que $\mathrm{Ker}((f - 2Id)^2) \cap \mathrm{Ker}(f - 3Id) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. ?

   (d) Calculer la matrice $(A - 2I)^2$ et calculer son rang.

   (e) En déduire que $\mathrm{Ker}((f - 2Id)^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - 3Id) = \mathbb{R}^3$.

   (f) Déterminer un vecteur ε_3 de $\mathrm{Ker}(f - 3Id)$ de la forme $\varepsilon_3 = (1, *, *)$.

   (g) Déterminer un vecteur ε_2 de $\mathrm{Ker}((f - 2Id)^2)$ de la forme $\varepsilon_2 = (1, 1, *)$.

   ? (h) On pose $\varepsilon_1 = f(\varepsilon_2) - 2\varepsilon_2$; à l'aide de la partie 1 , justifier presque sans calculs que $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

   (i) Déterminer la matrice T de f dans cette nouvelle base $\mathcal{C}$.