CENTRALE LYON

CapECL1

Devoir surveillé de Mathématiques n°6 le 04/02/2025

durée : 2h30

Exercice 1.

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) = \dim(G)$.
On se propose de vérifier sur deux exemples concrets puis de démontrer dans le cas général que F et G admettent **un supplémentaire commun** dans E, c'est-à-dire qu'il existe un sous-espace vectoriel K de E tel que $F \oplus K = G \oplus K = E$.

1. *Premier exemple.* Dans cette question , on pose $E = \mathbb{R}^3$.

   on prend $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y + z \text{ et } y - z = 0\}$ et $G = \{(2a, -a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Démontrer que F et G sont deux droites vectorielles et donner une base (f) de F et une base (g) de G.

   (b) Montrer qu'il existe un vecteur $h \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathcal{B} = (f, f + g, h)$ soit une base de $E = \mathbb{R}^3$. Donner un tel vecteur h.

   (c) On pose alors $K =$Vect$((f + g, h))$. Démontrer que $F \oplus K = G \oplus K = E$.

2. *Second exemple.* Dans cette question , on pose encore $E = \mathbb{R}^3$.

   On prend $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x = y + z\}$ et $G = \{(a, b - a, a + 2b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

   (a) Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E et en donner une base.

   (b) Déterminer une base (e) de $F \cap G$.

   (c) Déterminer un vecteur f de F et un vecteur g de G tels que (e, f) soit une base de F et que (e, g) soit une base de G.

   (d) On pose $K =$Vect$((f + g))$. Démontrer que $F \oplus K = G \oplus K = E$.

3. *Cas général.* On suppose que $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$ et $\dim(F) = \dim\,(G) = p \in \mathbb{N}^*$ avec $p \leqslant n$. On considère une base $(e_1, e_2, ..., e_k)$ de $F \cap G$.

   (a) Démontrer qu'il existe des vecteurs $f_{k+1}, f_{k+2}, ..., f_p \in F$ et des vecteurs $g_{k+1}, g_{k+2}, ...g_p \in G$ tels que $\mathcal{B}_F = (e_1, e_2, ..., e_k, f_{k+1}, f_{k+2}, ...f_p)$ soit une base de F et $\mathcal{B}_G = (e_1, e_2, ..., e_k, g_{k+1}, g_{k+2}, ..., g_p)$ soit une base de G.

   (b) Soit H un supplémentaire de $F + G$ dans E. Déterminer $r = \dim(H)$ en fonction de n, p et k.

   (c) On considère $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_k, f_{k+1}, f_{k+2}, ..., f_p, f_{k+1}+g_{k+1}, f_{k+2}+g_{k+2}, ..., f_p+g_p, h_1, h_2, ..., h_r)$, où $(h_1, h_2, ...h_r)$ est une base de H. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de E.

   (d) Soit $K = \text{Vect}(f_{k+1}, +g_{k+1}, f_{k+2} + g_{k+2}, ..., f_p + g_p, h_1, h_2, ..., h_r)$. Déduire de ce qui précède que $F \oplus K = E$. On prouve de même que $G \oplus K = E$.

Exercice 2.

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

Soit P une fonction polynômes vérifiant les conditions suivantes :

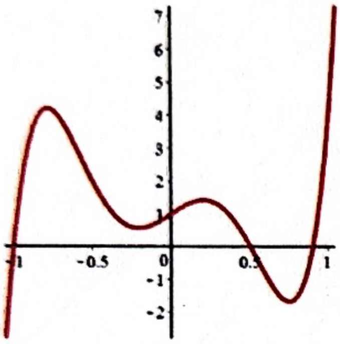
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{P(x)}{4x^5} = 1$$

P admet -1 comme racine simple et $\dfrac{1}{2}$ comme racine double.

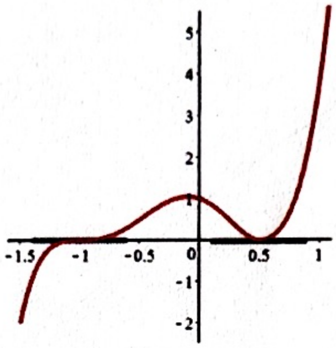
$P(x)$ est divisible par (x^2+1).

1. Donner l'expression de $P(x)$ pour tout réel x.

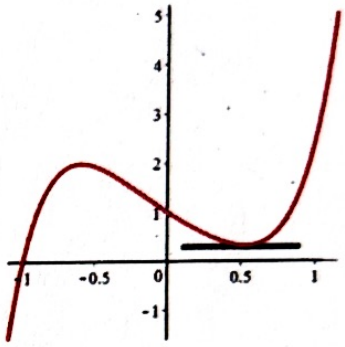
2. Parmi les courbes numérotées de 1 à 6 ci-dessous, justifier qu'il n'y en a qu'une seule qui peut être la courbe représentative de P. Préciser laquelle.



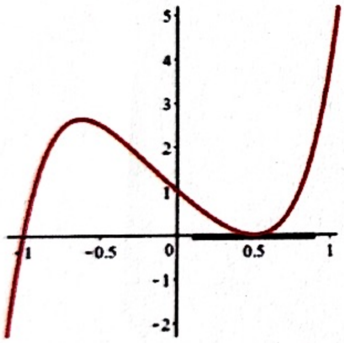
courbe 1



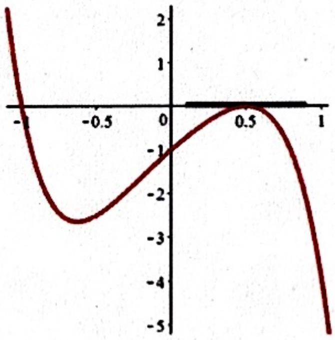
courbe 2



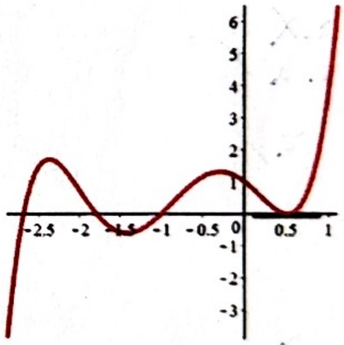
courbe 3



courbe 4

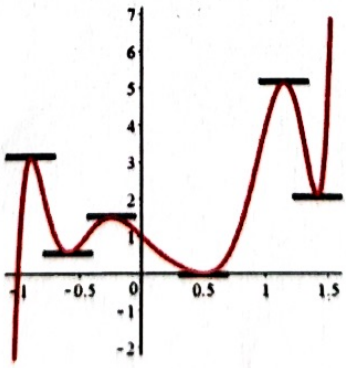


courbe 5

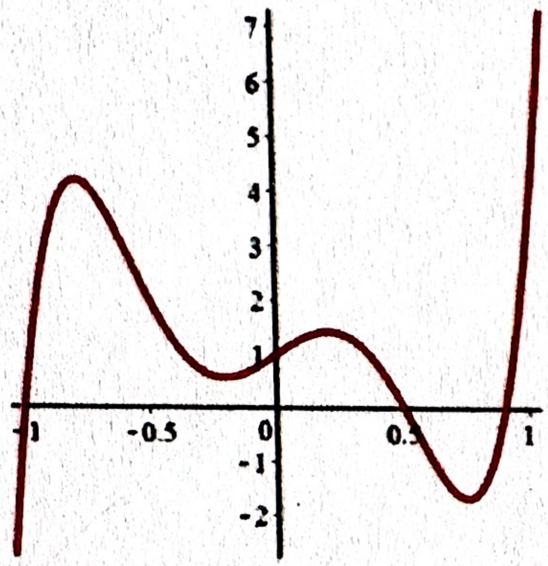


courbe 6

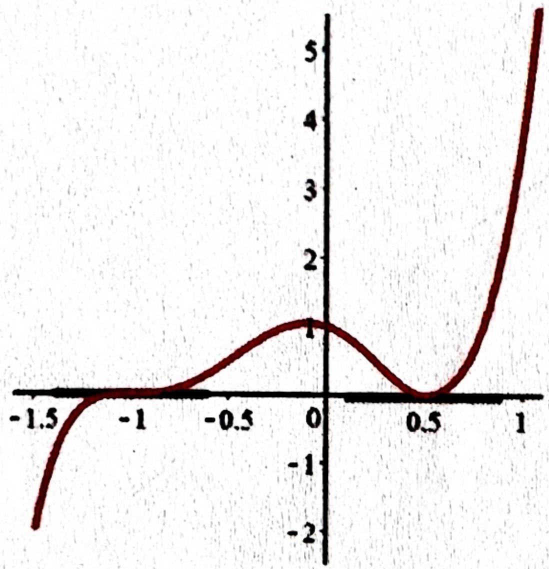
3. En considérant le polynôme dérivé P' , que l'on ne cherchera pas à calculer, expliquer pourquoi la courbe numéro 7 ci-dessous ne peut pas être la courbe représentative de P.



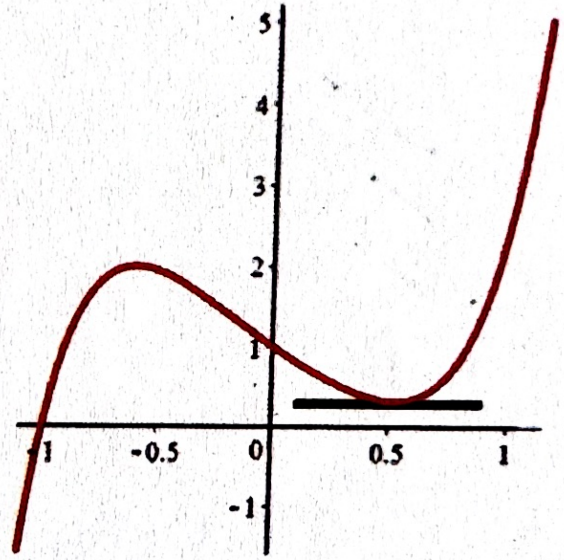
courbe 7



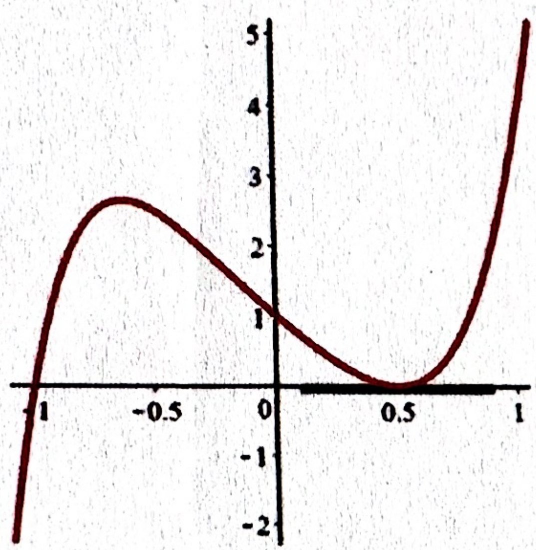
courbe 1



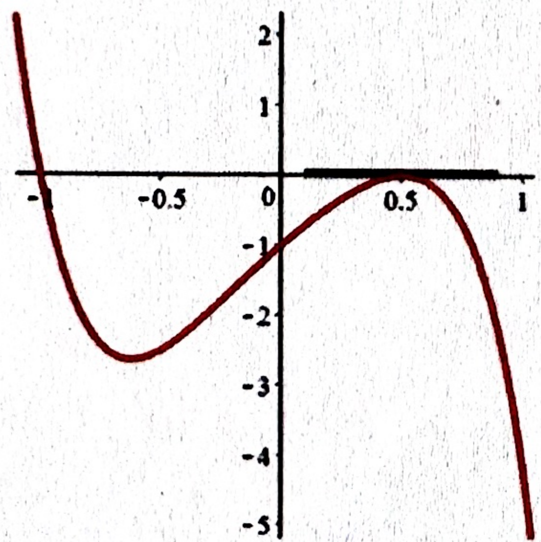
courbe 2



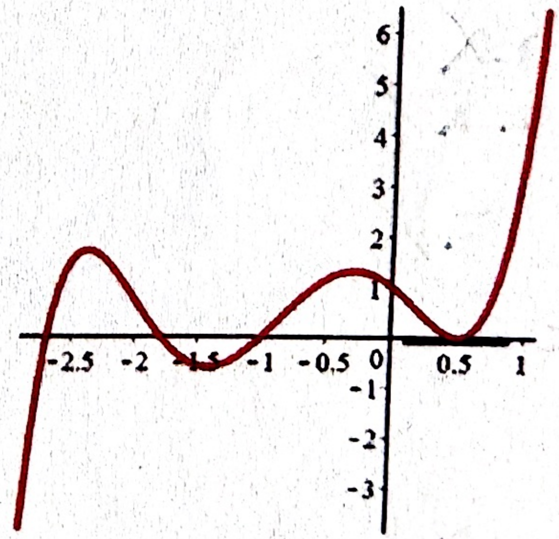
courbe 3



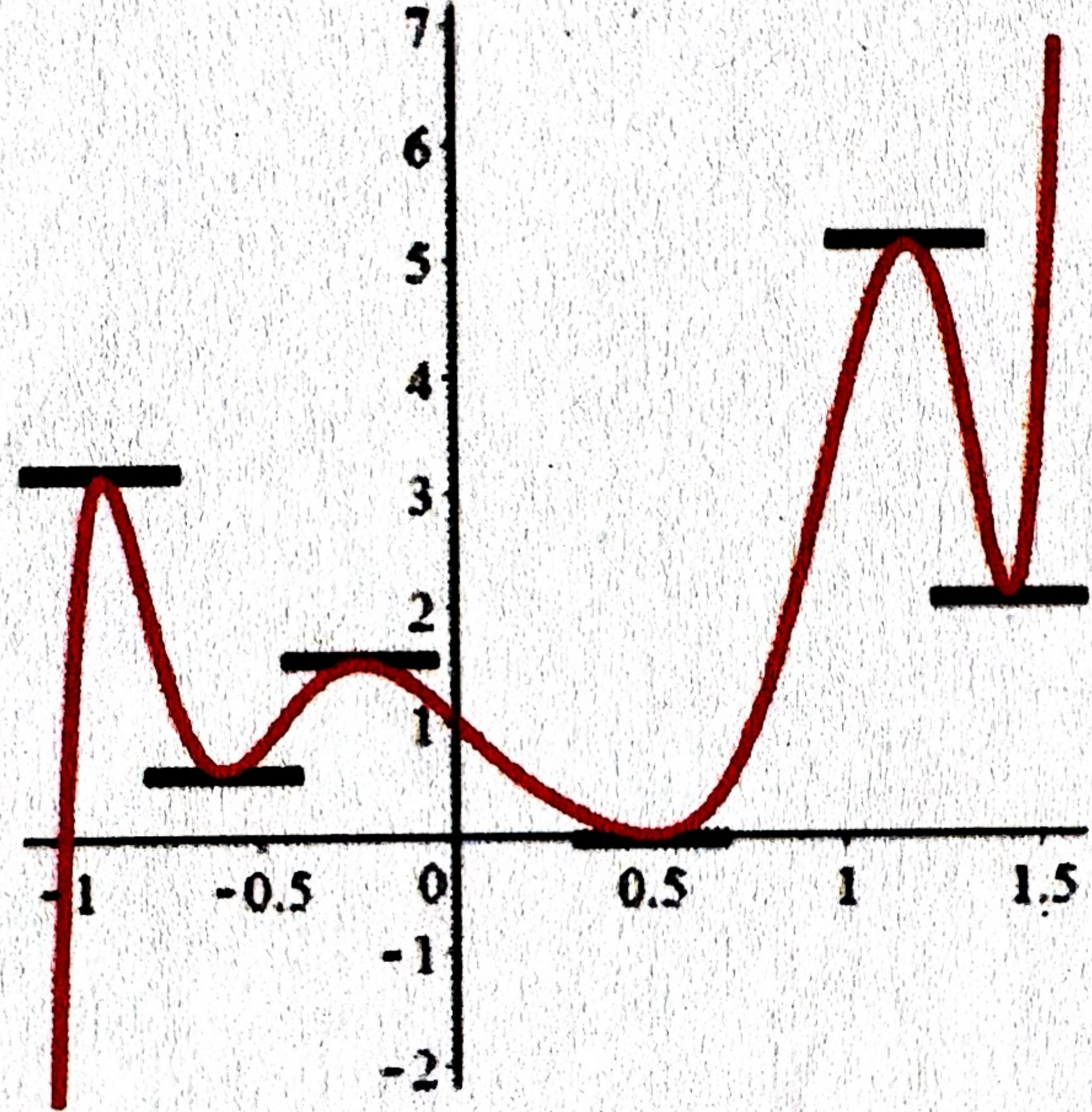
courbe 4



courbe 5



courbe 6



courbe 7