

Devoir surveillé de Mathématiques n°8 le 25/03/2025

durée : 2h00

Exercice 1 (10 points).

Dans ce problème, on considère un réel $a \in]0, 1[$.

1. Dans cette question, on suppose que f est une fonction continue sur \mathbb{R} , à valeurs réelles, solution de l'équation suivante :

$$(H) : \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt.$$

- (a) Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ en fonction de f, a et x .
- (b) Montrer que f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} et que, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f(a^n x)$.
- (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$.
- (d) Soit $A \in \mathbb{R}_+^*$.
- ~~✓~~ Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe $M \in \mathbb{R}, \forall x \in [-A, A], |f(x)| \leq M$?
- ~~✓~~ En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-A, A], |f^{(n)}(x)| \leq M$.
- ~~✓~~ Montrer enfin soigneusement que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-A, A], |f(x)| \leq M \frac{A^{n+1}}{(n+1)!}$.
- ~~✓~~ (e) En déduire que f est la fonction nulle sur \mathbb{R} .

- ~~✓~~ 2. Soit φ une fonction continue sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Montrer à l'aide du 1) qu'il existe au plus une fonction f , continue sur \mathbb{R} et à valeurs réelles, telles que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt + \varphi(x)$.

Exercice 2 (10 points).

On considère l'application f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{1+t-e^{-t}}$.

Pour $x > 0$, on définit $G(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$.

~~✓~~ Montrer que pour tout $t > 0$, $\frac{1}{1+t} \leq f(t) \leq \frac{1}{t}$.

~~✓~~ En déduire que G admet une limite finie ℓ en $+\infty$ et la déterminer.

~~✓~~ Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et déterminer sa dérivée.

4. Pour $t > 0$, on pose $h(t) = f(t) - \frac{1}{2t}$.

~~✓~~ Montrer que h se prolonge par continuité en 0. (on pourra chercher un $DL_0(0)$ de h). On note encore h le prolongement.

~~✓~~ Démontrer que G se prolonge par continuité en 0. Donner la valeur de $G(0)$.

5. On pose, pour $x > 0$, $\Delta(x) = G(x) - \int_x^{2x} \frac{1}{1+t} dt$.

~~✓~~ (a) On fixe $x > 0$. Montrer que $\forall t \in [x, 2x], 0 \leq f(t) - \frac{1}{1+t} \leq \frac{e^{-t}}{1+x-e^{-x}}$.

~~✓~~ (b) En déduire que $\Delta(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$.

~~✓~~ (c) Montrer que $G(x) - \ell \sim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2x}$.