CENTRALE LYON

CapECL1

Devoir surveillé de Mathématiques n°3 le 19/11/2024

durée : 3h00

Exercice 1 (20 points).

Pour toutes les questions de cet exercice, on cherche les solutions à valeurs réelles.

1. **PARTIE 1 : Préliminaires**

   (a) Soit $x \in]-1,1[$. Montrer que $\tan(\arcsin(x))$ existe et simplifier l'expression.

   (b) Résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle :

   $$(F_0) : (1-x^2)y'(x) + xy(x) = 0$$

   (c) Soit $x \in]-1,1[$. En posant $u = \sin t$, calculer

   $$\int^x \frac{1}{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}} du.$$

   (d) Soit C un réel fixé. On note :

   $$(F_C) : (1-x^2)y'(x) + xy(x) = C, \quad \forall x \in]-1,1[$$

   Résoudre (F_C).
   (*On pourra utiliser la méthode de variation de la constante*)

   (e) Résoudre sur $\mathbb{R}$:

   $$(G) : z''(t) + z(t) = \frac{\sin(2t)}{2}$$

2. **PARTIE 2 : Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients non constants.**

   On souhaite résoudre les équations différentielles suivantes sur $]-1,1[$:

   $$(E_0) : (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$$

   $$(E) : (1-x^2)y''(x) - xy'(x) + y(x) = x\sqrt{1-x^2}$$

   (a) **Résolution de (E_0)**

   Soit y une fonctioin dérivable sur $I =]-1,1[$.On pose, pour tout $x \in]-1,1[$,

   2x

   $$v(x) = (1-x^2)y'(x) + xy(x)$$

   Justifier le fait que v est dérivable sur I et calculer $v'(x)$.
   Déduire de ce qui précède l'ensemble des solutions de (E_0) sur I.

   (b) **Résolution de (E)**

   i. Soit $y :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fontion deux fois dérivable.
   On définit la fonction z sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par :

   $$\forall t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, z(t) = y(\sin(t))$$

   Justifier brièvement que la fonction z est bien définie et qu'elle est deux fois dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
   Exprimer $z'(t)$ et $z''(t)$ en fonction de y', y'' et t.

   ii. Montrer que y est solution de (E) sur $]-1,1[$ **si et seulement si** z est solution de (G) sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

   iii. En déduire l'ensemble des solutions de (E).

   iv. Comparer à l'ensemble des solutions de (E_0) et commenter.

Exercice 2.

On définit la fonction f par :

$$f(x) = 2\arcsin(x) + \arcsin(1 - 2x^2).$$

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2. Déterminer l'ensemble Δ_f sur lequel on peut affirmer que f est dérivable.

3. Calculer et simplifier $f'(x)$ pour $x \in \Delta_f$. On distinguera deux cas.

4. Montrer (en justifiant soigneusement) que f est constante sur le fermé $[0, 1]$, et donner sa valeur.

5. Exprimer $f(x)$ en fonction de $\arcsin(x)$ pour $x \in [-1, 0]$.

6. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[-1, 0]$ une unique solution , notée α.

7. Montrer que $\frac{-1}{2} < \alpha$.

8. Déterminer α.

Exercice 3.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \arccos(\text{th}(x)) + \arctan(\text{sh}(x)).$$

1. Quel est l'ensemble de définition D de f ?
2. Déterminer une expression très simplifiée de la fonction f sur D.

3. Résoudre l'équation $\text{th}(x) = \frac{5}{13}$.

4. Que vaut $\arccos(\frac{5}{13}) + \arctan(\frac{5}{12})$?

FIN