CENTRALE LYON

CapECL1

Devoir surveillé de Mathématiques n°7 le 25/02/2025

durée : 2h00

6/11

Exercice 1 (11 points).

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \exp(\arctan(x))$. La courbe représentative de f est notée C.

1. **Étude en** 0.

   (a) Montrer que f admet un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0, de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n + o(x^n)$.

   (b) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de f.

   (c) Calculer, pour $x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)f'(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + (2nx-1)f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0.$$

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer a_{n+1} en fonction de n, a_{n-1} et a_n.

2. **Étude en** 1.

   Déterminer une équation de la tangente T à C en 1 et préciser la position relative de T et C au voisinage de 1.

3. **Étude en** $+\infty$.

   Montrer que C admet une asymptote horizontale D en $+\infty$ et préciser la position relative de C et D.

7/10

Exercice 2 (10 points).

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}\ln(1+\mathrm{sh}(x))}{x}.$$

La courbe représentative de f est notée C.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On notera encore f le prolongement obtenu.

2. Étudier la dérivabilité de f en 0.

3. Montrer que $e^{-x} = \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

4. Déterminer deux réels a et b tels que lorsque x tend vers $+\infty$, on a $\ln(1+\mathrm{sh}(x)) = ax + b + \underset{x \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$.

5. Montrer que la courbe C admet une asymptote oblique Δ que l'on précisera lorsque x tend vers $+\infty$. Préciser la position de C par rapport à Δ.

Exercice 3 (9 points).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation :

$$e^x = n - x$$

1. Montrer que cette équation admet une une unique solution sur $\mathbb{R}_+$. On la notera x_n.
2. Etudier la monotonie puis la limite de la suite (x_n).
3. Démontrer que $x_n \sim \ln(n)$.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $x_n = \ln(n) + \ln(1 - \frac{x_n}{n})$.
5. En déduire l'existence d'un réel a tel que

$$x_n = \ln(n) + a\frac{\ln(n)}{n} + o(\frac{\ln(n)}{n})$$

6. En déduire alors l'existence de deux réels b et c tels que

$$x_n = \ln(n) + a\frac{\ln(n)}{n} + b\frac{\ln(n)}{n^2} + c\frac{(\ln(n))^2}{n^2} + o(\frac{\ln(n)}{n^2})$$