

# DS PHYSIQUE 2 : LA FRONDE

EC : Mécanique

Calculatrice interdite, sans document, durée : 3h, Encadrez vos résultats. Toute valeur numérique donnée sans unité sera considérée comme erronée.

## EXERCICE 1 – Lance pierre primitif ( $\approx 15$ points)

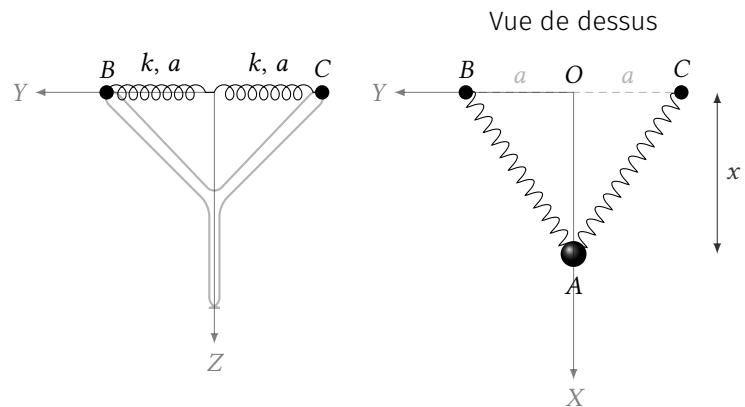
On étudie un lance-pierre.

On modélise un lance-pierre par deux points fixes (l'extrémité des branches en bois) entre lesquels existe un élastique.

Pour des raisons de commodité, l'élastique sera considéré comme deux ressorts bout à bout de longueurs au repos égales ( $\ell_0 = a$ , connue) et de raideurs égales ( $k = 100 \text{ N/m}$ , connue).

Au repos, l'espace entre les branches vaut  $2a$  avec  $a = 4 \text{ cm}$ . On place une masse (de taille nulle) en contact avec l'élastique au milieu des deux branches, puis on tire parallèlement à  $\vec{u}_x$ .

On cherche à déterminer la force à exercer en fonction de l'étirement horizontal  $x$  (voir dessin). Dans cet exercice, **on néglige les effets du poids**. On commence par considérer que l'étirement se fait uniquement dans le plan horizontal ( $O, \vec{u}_x, \vec{u}_y$ ).



1. Exprimer les vecteurs  $\vec{BA}$  et  $\vec{CA}$  en fonction de  $x$ .
2. En déduire l'expression des vecteurs unitaires  $\vec{u}_{BA}$  et  $\vec{u}_{CA}$  (toujours en fonction de  $x$ ).
3. Montrer que la force  $\vec{T}$  à exercer pour maintenir le système à l'équilibre vaut :

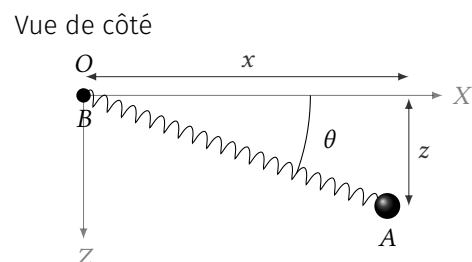
$$\vec{T} = 2kx \left( 1 - \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) \vec{u}_x$$

4. Pour quel étirement  $x$ , n'a-t-on pas besoin d'exercer d'effort pour que le système soit à l'équilibre ?

Pour améliorer ce modèle, on tient compte du fait que, lorsque le lance-pierre est fabriqué, l'élastique qui relie  $B$  à  $C$  n'est pas parfaitement ajusté. On traduit cette information par le fait que la longueur à vide des deux ressorts n'est pas tout à fait  $a$ , mais un peu plus grande que  $a$ . On note donc la nouvelle longueur à vide  $\beta a$ , avec  $\beta = 1.1$ .

5. Que devient l'expression de la force à exercer pour maintenir l'équilibre ?
6. Donner toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles on n'a pas besoin d'exercer d'effort pour que le système soit à l'équilibre ?

Ensuite, on tient compte du fait que l'on souhaite lancer la pierre vers le haut, en donnant un angle  $\theta$  connu entre le plan horizontal et l'inclinaison des ressorts.



7. Donner l'expression de la tension à exercer pour obtenir un équilibre, en fonction de  $x$  et  $z$ .

Enfin, on veut fournir une certaine énergie au projectile. Vous verrez plus tard que l'énergie potentielle emmagasinée par ce lance-pierre est dans le cas présent :  $E = k(\ell - \ell_0)^2$  où  $\ell$  est la longueur d'un des ressorts étirés et  $\ell_0$  la longueur à vide du ressort. On suppose cette énergie intégralement transmise au projectile lorsqu'on relâche la tension.

8. Si on souhaite que l'énergie emmagasinée soit  $E_0 = 25 \text{ J}$  (le Joule est une unité du système international), quelle doit être la longueur  $\ell_1$  d'un ressort étiré ? Faire l'application numérique.
9. Exprimer  $z$  en fonction de  $x$  et  $\theta$ . En déduire l'expression de  $x$  en fonction de  $\ell_1$ ,  $\beta$ ,  $a$  et  $\theta$
10. Donner l'expression de la force à exercer pour donner au projectile une énergie  $E_0$  avec un angle  $\theta$ .
11. Montrer que puisque  $a^2 \ll \ell_1^2$ , cette expression se simplifie en :  $\vec{T} \approx 2\sqrt{kE_0} \begin{bmatrix} \cos \theta \\ 0 \\ \sin \theta \end{bmatrix}$
12. En déduire la norme de la force à exercer. Faire l'application numérique. Seriez-vous capable d'exercer cette force ?

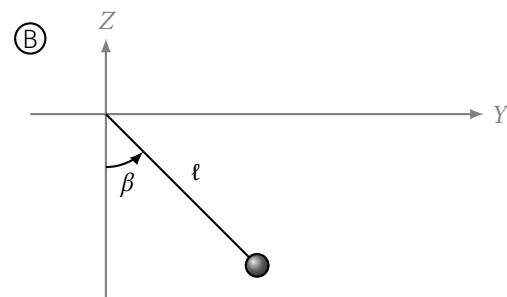
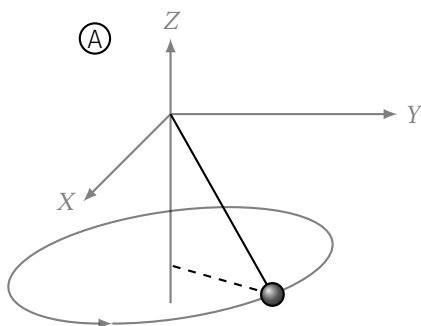
## EXERCICE 2 – Bolas - ( $\approx 10$ points)

Les bolas désignent une ancienne arme de jet qui était utilisée pour la chasse. On les faisait tourner au-dessus de la tête avant de les lâcher et de viser une cible, un peu comme avec une fronde. Nous allons modéliser cet instrument simplement par une seule masse ( $m$ ) ponctuelle attachée à un fil rigide, inextensible, de longueur  $\ell$ , en rotation dans un plan horizontal au-dessus de la tête du lanceur.

Dans un premier temps, on ignore le poids. On considèrera que le lanceur impose, via la tension dans le fil une trajectoire **circulaire uniforme** de vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \omega_0$ , positive, connue.



1. Rappeler l'expression générale du vecteur position, vitesse et accélération en repérage cylindrique.
2. Que deviennent ces expressions dans ce cas particulier ?
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique dans la base polaire pour en déduire la tension dans le fil, en fonction des données.
4. Quelle est la vitesse angulaire maximale que peut imposer le lanceur si le fil a une résistance maximale connue de  $T_{\max}$  ?
5. Faire l'application numérique avec :  $\ell = 1 \text{ m}$ ,  $m = 0.5 \text{ kg}$ ,  $T_{\max} = 1800 \text{ N}$ . Donner aussi votre réponse en tours par seconde. Y a-t-il un risque de casse ?



On prend maintenant en compte le poids. Le mouvement reste circulaire uniforme d'axe de rotation (OZ), et de vitesse angulaire  $\omega_0$  connu, mais le poids de la masse fait apparaître un angle  $\beta$  constant inconnu entre le fil et la verticale.

6. Reproduire les dessins ci-dessus et y faire apparaître, à l'endroit de la masse, les trois vecteurs de la base cylindrique.

7. Que valent le  $\rho$  et le  $z$  des coordonnées cylindriques dans ce modèle (en fonction de  $\beta$  et  $\ell$ )?
8. Utiliser le principe fondamental de la dynamique pour déterminer la valeur de  $\beta$  en fonction des données de l'énoncé.
9. Montrer que ce mouvement n'est possible qu'à partir d'une certaine valeur de  $\omega_0$ .  
Le lanceur lâche soudainement le fil, au moment où la masse est sur l'axe ( $OX$ ) (toujours sans vitesse verticale).
10. Que vaut l'expression de la vitesse  $\vec{v}_0$  au moment où le fil est lâché?  
Dans la suite du mouvement, on oublie le fil, on ne considère que la masse en mouvement dans l'air. La masse est initialement à une hauteur  $h$  au dessus du sol. On suppose que la vitesse initiale  $v_0$  vaut  $18 \text{ m.s}^{-1}$ . On néglige tout frottement.
11. À quelle distance horizontale du lanceur la masse touche-t-elle le sol?