CENTRALE LYON

CapECL1

Devoir surveillé de Mathématiques n°4 le 09/12/2024

durée : 2h30

Exercice 1 (30 points).

On considère l'équation fonctionnelle :

$$(\mathrm{P})\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\quad [1 - f(x)f(y)]f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Le but est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues sur $\mathbb{R}$, qui vérifient (P).

Dans les questions 1) *à* 5) *, on suppose que f est une fonction qui vérifie toutes les conditions ci-dessus.*

1. Premières propriétés de f

   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   (b) Montrer que f est impaire.

2. Limite de f en $+\infty$

   (a) Justifier que : $\forall x \in \mathbb{R} : (1 - f(x)^2)f(2x) = 2f(x)$.
   (b) Montrer qu'il est impossible que f ait une limite infinie lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer que, si f possède une limite lorsque x tend vers $+\infty$, alors cette limite est nécessairement 0.

3. Ensemble des zéros de f
   On note désormais $S = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$.

   (a) Justifier que $S \neq \emptyset$.
   (b) Montrer que , si $x \in S$, alors , pour tout $m \in \mathbb{N}$, $mx \in S$.
   (c) Montrer que , si $x \in S$, alors $\dfrac{x}{2} \in S$.

4. Raisonnement par l'absurde :
   Supposons, par l'absurde, que $S = \{0\}$.

   (a) Montrer que f a un signe constant strict sur $]0, +\infty[$. $f(y)-f(x)$
   (b) Soit $(x,y) \in]0,+\infty[^2$.Montrer que $\cancel{f(x) - f(y)}$ est du signe de $f(y - x)$ (au sens strict).
   (c) Dans le cas où $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   Que dire dans l'autre cas ?
   (d) Conclure.

5. Détermination de l'ensemble S

   (a) Montrer qu'il existe un réel a strictement positif dans S.
   (b) On fixe donc un réel $a \in S \cap]0, +\infty[$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{a}{2^n} \in S$, puis que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \dfrac{ma}{2^n} \in S$.
   (c) Soit x un réel fixé positif.
   On définit la suite (u_n) par :

   $$u_n = \frac{a}{2^n} E\left(\frac{2^n x}{a}\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

   Montrer que $u_n \to x$.
   En déduire que $x \in S$.

6. Conclusion
   Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues qui vérfient (P) ?

Exercice 2 (11 points).

On considère la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \in [-1, 1]$.
2. Etudier la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par $g(x) = \sin(x) - x$ et en déduire son signe sur cet intervalle.
3. Que dire de la suite (u_n) si u_0 est tel que $u_1 = 0$?
4. On suppose que $u_1 \in]0, 1]$.
   Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; u_n \in]0, 1]$. En déduire que u est décroissante et donner sa limite.
5. Que se passe-t-il si $u_1 \in [-1, 0[$? (on pourra justifier plus rapidement)

Exercice 3 (9 points).

Soit (u_n) une suite réelle.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n}{n}$

On suppose que la suite u est **croissante et converge** vers un réel ℓ

1. Montrer que la suite v ainsi définie est également croissante et que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_n \leqslant \ell$.
   Que peut-on en déduire pour la suite v ?
2. Établir que , pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
3. En déduire la limite de la suite v.