CENTRALE LYON

CapECL1

Devoir surveillé de Mathématiques n°5 le 14/01/2025

durée : 2h30

Exercice 1 (11 points).

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

1. Déterminer la parité de f.
2. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0.On note encore f le prolongement.
3. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ puis calculer $f'(x)$.
4. (a) Soit $x \in]0, \pi[$.
   Montrer à l'aide du théorème des accroissements finis que :
   $$x\cos(x) < \sin(x) < x.$$
   (b) En déduire l'étude des variations de f sur $[0, \pi]$.
5. (a) Déterminer la limite de $\dfrac{\cos(x) - 1}{x}$ lorsque x tend vers 0.(justifier)
   (b) A l'aide des questions 4)a) et 5)a) montrer que f est dérivable à droite en 0 et donner la valeur de $f'_d(0)$.
   (c) En déduire sans autre calcul que f est dérivable en 0.
6. On pose , pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{3}]$:
   $$h(x) = \frac{\sin(x)}{x^2}$$
   Justifier le fait que l'équation $h(x) = 1$ possède une unique solution sur $]0, \frac{\pi}{3}]$, que l'on notera α.
7. On définit la constante $C = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. On pose , pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$,
   $$\varphi(x) = x\cos(x) - \sin(x) + Cx^2.$$
   Montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{3}]$, $\varphi(x) \geqslant 0$.
8. Déduire des questions 4)a) et 7) que : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{3}], \quad | f'(x) | \leqslant C$.
9. On définit la suite (u_n) par :
   $$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$
   (a) Montrer que , pour tout entier naturel n , u_n existe et $u_n \in [0, \frac{\pi}{3}]$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, | u_{n+1} - \alpha | \leqslant C \mid u_n - \alpha \mid$.
   (c) Démontrer que la suite u converge. Quelle est sa limite ?

Exercice 2 (8,5 points).

On note E l'ensemble des fonctions f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,1[$ telles que, pour tout entier naturel n, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f soit positive sur $]0,1[$, c'est-à-dire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in]0,1[, f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

Ces fonctions sont dites **absolument monotones sur** $]0,1[$.

1. Soient f, $g \in E$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
   (a) Montrer que $(\lambda f + g) \in E$.
   (b) Montrer que $fg \in E$.

2. Soit $f \in E$. On pose $g = e^f$. Calculer g' en fonction de f' et g et montrer à l'aide d'**une récurrence forte** que $g \in E$.

3. On pose, pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) = -1 - \dfrac{2}{x-1}$. Montrer que $g \in E$. (on pourra conjecturer puis admettre la forme des dérivées successives de g)

4. On considère une fonction $f \in E$.
   (a) Montrer que f admet une limite finie λ en 0^+.
   (b) On prolonge f par continuité en posant $f(0) = \lambda$. Montrer que f ainsi prolongée est de classe C^1 à droite en O.
   (c) Plus généralement, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et absolument monotone à droite en 0.
   (d) Peut-on en dire autant à gauche en 1 ?(Justifier)