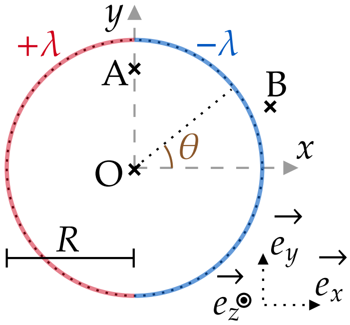


Des charges électriques sont réparties sur un cercle, de charge linéique $-\lambda$ pour θ allant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ puis $+\lambda$ de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$.
Déterminer les plans de Π^+ et Π^- de la distribution de charge passant par le point O, ceux passant par le point A, puis ceux passant par le point B.

ch2.Q1

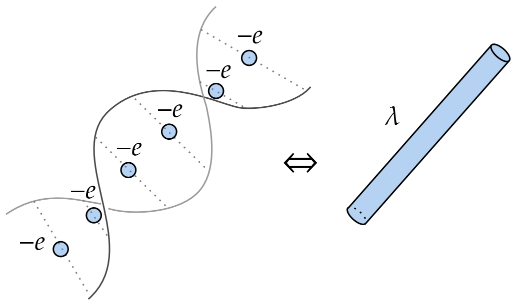
RÉPONSE :

Au point O :
- $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est Π^+ pour $\mathcal{D}$ donc pour $\vec{E}$
- $(O, \vec{e_x}, \vec{e_z})$ est Π^+ pour $\mathcal{D}$ donc pour $\vec{E}$
- $(O, \vec{e_z}, \vec{e_y})$ est Π^- pour $\mathcal{D}$ donc pour $\vec{E}$

Au point A :
- $(A, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est Π^+ pour $\mathcal{D}$ donc pour $\vec{E}$
- $(A, \vec{e_z}, \vec{e_y})$ est Π^- pour $\mathcal{D}$ donc pour $\vec{E}$

Au point B :
- $(B, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est Π^+ pour $\mathcal{D}$ donc pour $\vec{E}$

ch2.R1



On considère l'ADN comme un long cylindre fin, quasiment neutre électriquement, à l'exception d'une charge $-e$ par paire de base de 0,34 nm de long. On modélise simplement ce phénomène en considérant l'ADN chargé uniformément.
Calculer la densité linéique de charge de l'ADN.

ch2.Q2

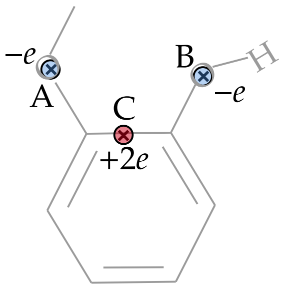
RÉPONSE :

On doit estimer la charge dq sur une longueur dz d'ADN. Puisqu'on a en moyenne une charge $\mathrm{dq} = -1,6 \times 10^{-19}$ C sur une longueur $\mathrm{dz} = 0,34$ nm on en déduit que :

$$\lambda = \frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dz}} = -\frac{1,6 \times 10^{-19}}{3,4 \times 10^{-10}}\ \mathrm{C.m^{-1}}$$

$$\boxed{\lambda \simeq -5 \times 10^{-10}\ \mathrm{C.m^{-1}}}$$

ch2.R2



On simplifie la distribution de charge du gaïacol à trois charges ponctuelles en A, B et C.
Exprimer le champ $\vec{E}$ créé en un point M par cette molécule en fonction entre autre des vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{CM}$.

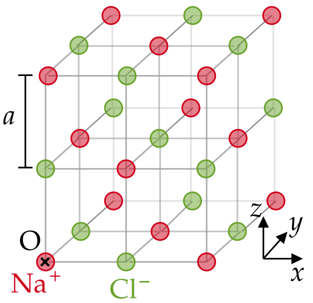
ch2.Q3

RÉPONSE :

Par principe de superposition on somme les champs individuels créés par chacune des trois charges ponctuelles et obtenons :

$$\boxed{\vec{E}_{tot} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-\overrightarrow{AM}}{||\overrightarrow{AM}||^3} + \frac{-\overrightarrow{BM}}{||\overrightarrow{BM}||^3} + \frac{2\overrightarrow{CM}}{||\overrightarrow{CM}||^3}\right)}$$

ch2.R3



On considère un cristal de sel (NaCl) produisant un potentiel électrique $V = V_0 \cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{a})\cos(\frac{\pi z}{a})$.
Déterminer l'expression de la distribution volumique de charge $\rho(x, y, z)$ ayant donné lieu à ce potentiel électrique.

ch2.Q4

RÉPONSE :

D'après l'équation de Poisson : $\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$, or :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

et

$$\frac{\partial^2 \cos(bx)}{\partial x^2} = -b^2 \cos(bx)$$

d'où :

$$\rho = -\varepsilon_0 V_0 \left[-3\frac{\pi^2}{a^2}\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{a})\cos(\frac{\pi z}{a})\right]$$

et donc :

$$\boxed{\rho = \frac{3\varepsilon_0 V_0 \pi^2}{a^2}\cos(\frac{\pi x}{a})\cos(\frac{\pi y}{a})\cos(\frac{\pi z}{a})}$$

ch2.R4

Proposer un analogue gravitationnel pour :
- le champ électrique $\vec{E}$
- la charge électrique q
- la loi de Coulomb donnant $\vec{F}_{A\to B}$
- la densité volumique de charge ρ
- les équations de Maxwell électrostatiques
- le théorème de Gauss

ch2.Q5

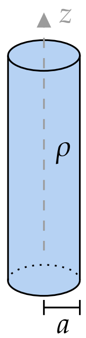
RÉPONSE :

On a :
- le champ électrique $\vec{E} \iff \vec{\mathcal{G}}$ le champ gravitationnel
- la charge électrique $q \iff m$ la masse
- $\vec{F}_{A\to B} = \frac{q_A q_B \overrightarrow{AB}}{4\pi\varepsilon_0 AB^3} \iff \vec{F}_{A\to B} = -G\frac{m_A m_B \overrightarrow{AB}}{AB^3}$
- la densité volumique de charge $\rho \iff \mu$ la masse volumique
- Maxwell-Gauss $\mathrm{div}(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \iff \mathrm{div}(\vec{\mathcal{G}}) = -4\pi G\mu$
- Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{E}) = \vec{0} \iff \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{\mathcal{G}}) = \vec{0}$
- le théorème de Gauss $\oiint \vec{E}.\mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \iff \oiint \vec{\mathcal{G}}.\mathrm{d}\vec{S} = -4\pi G M_{int}$

ch2.R5

On considère un fil électrique infini de rayon a, chargé uniformément d'une densité volumique de charge ρ.

Déterminer le champ électrique $\vec{E}(M)$ en tout point de l'espace.

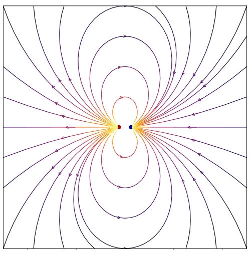


ch2.Q6

RÉPONSE :
- **Invariances :** $\rho(r) \Rightarrow \vec{E}(r)$
- **Symétries :** $(M\vec{e_r}\vec{e_z})$ Π^+ pour $\mathcal{D} \Rightarrow \vec{E}(M).\vec{e_\theta} = 0$ et $(M\vec{e_r}\vec{e_\theta})$ Π^+ pour $\mathcal{D} \Rightarrow \vec{E}(M).\vec{e_z} = 0$ donc $\boxed{\vec{E}(r) = E_r(r)\vec{e_r}}$
- **Surface fermée :** Cylindre de hauteur h et rayon R centré sur l'axe (Oz)
- **Théorème de Gauss :** Si $R < a$, $Q_{int} = \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta\rho = \pi R^2 h\rho$
d'où $E_r(R) \times 2\pi Rh \underbrace{+0+0}_{\vec{e_r}.\pm\vec{e_z}=0} = \frac{\pi R^2 h\rho}{\varepsilon_0}$, $\boxed{E_r(R) = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}}$

Si $R > a$, idem [...] $\boxed{E_r(R) = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0 R}}$

ch2.R6



On considère un dipôle produisant dans l'espace un potentiel électrique $V(r,\theta) = \frac{ea\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ en coordonnées polaires. On considère une charge électrique $+e$ initialement située en $\theta = 0$ et $r \to +\infty$
Déterminer l'énergie E_{constr} nécessaire pour amener la charge électrique $+e$ depuis l'infini vers le point $(r,\theta) = (a, 0)$.

ch2.Q7

RÉPONSE :

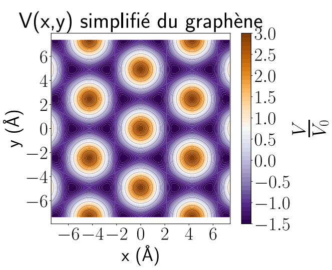
Calculons le travail $W = E_{constr}$ à fournir pour amener une charge e depuis $r \to +\infty$ à $r = a$. La force électrostatique dérive d'un potentiel donc son travail est indépendant du chemin suivi, on prend le chemin à $\theta = 0$ constant.

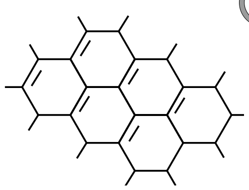
$$W \underbrace{=}_{\vec{F}_{op}=-\vec{F}_{elec}} -\int_{+\infty}^{a} \mathrm{d}r\vec{e_r}.\vec{F}_{elec} = e \times -\int_{+\infty}^{a} \mathrm{d}r\vec{e_r}.\vec{E}$$

Or $-\int_A^B \vec{E}.\mathrm{d}\vec{r} = V(B) - V(A)$ d'où :
$W = e \times (V(a) - \lim_{r\to+\infty} V(r))$

$$\boxed{W = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}}$$

ch2.R7





On mesure en AFM le potentiel électrique d'une surface de graphène : $V(x,y) = V_0\left[\cos(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}x) + \cos(\frac{\pi}{\sqrt{3}a}(\sqrt{3}y - x)) + \cos(\frac{\pi}{\sqrt{3}a}(\sqrt{3}y + x))\right]$

Déterminer le champ électrique $\vec{E}$ en tout point de l'espace.

ch2.Q8

RÉPONSE :

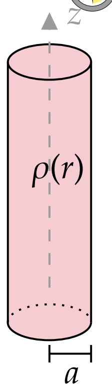
On sait que $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{e_x} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{e_y}$ donc :

$$\vec{E} = V_0\frac{\pi}{\sqrt{3}a}\left[2\sin(\frac{2\pi}{\sqrt{3}a}x) - \sin(\frac{\pi}{\sqrt{3}a}(\sqrt{3}y - x)) + \sin(\frac{\pi}{\sqrt{3}a}(\sqrt{3}y + x))\right]\vec{e_x} + V_0\frac{\pi}{a}\left[\sin(\frac{\pi}{\sqrt{3}a}(\sqrt{3}y - x)) + \sin(\frac{\pi}{\sqrt{3}a}(\sqrt{3}y + x))\right]\vec{e_y}$$

ch2.R8

Un cheveu chargé électriquement est modélisé comme un cylindre de hauteur h, chargé d'une densité volumique de charge $\rho(r) = \rho_0 \frac{r^2}{a^2}$ (en coordonnées cylindriques).

Déterminer la charge électrique totale Q stockée dans ce cheveu.



ch2.Q9

RÉPONSE :

On a :

$$Q = \iiint \rho \mathrm{d}V = \int_0^h \mathrm{d}z \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta \rho_0 \frac{r^2}{a^2}$$

On obtient donc :

$$Q = h \times 2\pi \times \rho_0 \int_0^a \mathrm{d}r \frac{r^3}{a^2}$$

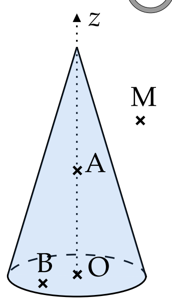
$$\boxed{Q = \frac{h\rho_0 \pi a^2}{2}}$$

C'est pile la moitié de ce qui serait stocké dans un cheveu identique de densité volumique de charge uniforme ρ_0.

ch2.R9

On considère un cône chargé en volume d'une densité volumique de charge $\rho(r)$. Par symétrie et invariances, déterminer au mieux, a priori, la forme du champ électrique produit par ce cône :

- En un point A de l'axe (Oz)
- En un point B du disque à la base du cône
- en un point M quelconque de l'espace.



ch2.Q10

RÉPONSE :

Invariances : Distribution de charge invariante par rotation d'angle $\theta \Rightarrow \vec{E}(r, z)$ en cylindriques.

Symétries :

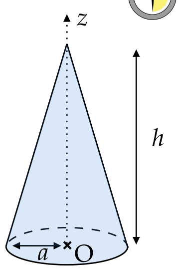
- **pour A :** (A, $\vec{e_r}$, $\vec{e_z}$) est Π^+ pour $\mathcal{D}$ donc Π^+ pour $\vec{E}$ donc $\vec{E}(A).\vec{e_\theta} = 0$
- **pour B :** (B, $\vec{e_r}$, $\vec{e_z}$) est Π^+ pour $\mathcal{D}$ donc Π^+ pour $\vec{E}$ donc $\vec{E}(B).\vec{e_\theta} = 0$
- **pour M :** (M, $\vec{e_r}$, $\vec{e_z}$) est Π^+ pour $\mathcal{D}$ donc Π^+ pour $\vec{E}$ donc $\vec{E}(M).\vec{e_\theta} = 0$

$$\boxed{\vec{E} = E_r(r, z)\vec{e_r} + E_z(r, z)\vec{e_z} \qquad \forall (r, z) \in \mathbb{R}^2}$$

ch2.R10

En électronébulisation, on observe un "cône de Taylor". C'est un cône chargé électriquement sur son enveloppe (càd sa surface excluant le disque à sa base).

On suppose pour simplifier que l'enveloppe du cône porte une charge surfacique $\sigma(z) = \sigma_0 \left(\frac{z}{h}\right)^p$ avec p une constante positive sans dimension.

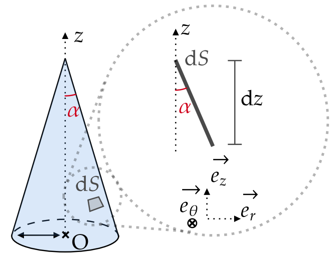


Exprimer la charge totale Q stockée par ce cône en fonction de a, h, σ_0 et p.

ch2.Q11

RÉPONSE :

On a $Q = \iint \sigma \mathrm{d}S$.
Or $\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}z}{\cos\alpha} \times R(z)\mathrm{d}\theta$ avec $R(z)$ le rayon du cylindre en z.
Or $R(z) = (h - z)\tan\alpha$, on a donc :

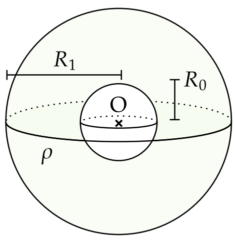


$$Q = \int_0^h \frac{\mathrm{d}z}{\cos\alpha} \int_0^{2\pi} \tan\alpha(h - z)\mathrm{d}\theta\sigma(z)$$

[...]

$$\boxed{Q = 2\pi\sigma_0 \frac{a\sqrt{a^2 + h^2}}{(p + 1)(p + 2)}}$$

ch2.R11



On considère deux sphères concentriques de rayons R_0 et R_1. Dans la boule de rayon R_0 et en-dehors de celle de rayon R_1, $\rho = 0$. En revanche, dans l'espace inclus dans la boule de rayon R_1 et extérieur à la boule de rayon R_0, $\rho = \rho_0 = \mathrm{C^{te}}$.

Déterminer le champ électrique en tout point M de l'espace.

ch2.Q12

RÉPONSE :

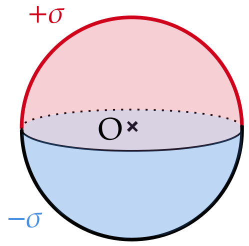
On retrouve les symétries et invariances de la boule de rayon a uniformément chargée vue en cours, pour laquelle :

- Si $r > a$, $\vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$
- Si $r < a$, $\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{e_r}$

Par principe de superposition, on obtient :

- Si $r > R_1$, $\vec{E} = \frac{\rho_0(R_1^3 - R_0^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$
- Si $r > R_0$ et $r < R_1$: $\vec{E} = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left[r - \frac{R_0^3}{r^2}\right]\vec{e_r}$
- Si $r < R_0$, $\vec{E} = \vec{0}$

ch2.R12



On considère une sphère chargée de rayon R. La demi-sphère supérieure est chargée uniformément avec une densité surfacique de charge $\sigma > 0$, et la demi-sphère inférieure est chargée uniformément avec une densité surfacique de charge $-\sigma < 0$. Déterminer le champ $\vec{E}$ produit par la sphère en son centre O.

ch2.Q13

RÉPONSE :

D'après l'intégrale de Coulomb en sphériques :

$$\vec{E}(O) = \iiint_V \frac{\rho \mathrm{d}\tau}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \times -\vec{e_r} = \oiint_{S_{sphere}} \frac{\sigma(\theta)\mathrm{d}S}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \times -\vec{e_r}$$

Or $(O, \vec{e_x}, \vec{e_y})$ est Π^- pour la distribution de charges donc $\vec{E}(O) = E_z(O)\vec{e_z} = (\vec{E}(O).\vec{e_z})\vec{e_z}$ (allège les calculs).

$$\vec{E}(O) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} R\sin\theta \mathrm{d}\varphi \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos\theta \vec{e_z}$$
$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} R\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} R\sin\theta \mathrm{d}\varphi \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos\theta \vec{e_z}$$
$$[...] \boxed{\vec{E}(O) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e_z}}$$

ch2.R13

ch2.Q14

RÉPONSE :

ch2.R14

ch2.Q15

RÉPONSE :

ch2.R15

On considère une seule liaison chimique C-H, où on omet tous les électrons : seuls les deux noyaux de carbone (Z = 6) et d'hydrogène (Z = 1) restent en place au même endroit.

On rappelle que $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F.m^{-1}.

Proposer un ordre de grandeur pour la norme du champ électrique vu par le noyau de carbone.

ch2.Q16

RÉPONSE :

Le champ électrique produit par une charge ponctuelle q_A en un point B a pour norme $||\vec{E}|| = -\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 AB^2}$.

Attention : Le champ électrique produit en B par A ne dépend donc pas de q_B. $\vec{F}_{A\to B}$ en revanche en dépendra.

Puisque $q_A = +e =$ et $AB \sim 0,1$ nm, on obtient :
$||\vec{E}|| \sim \frac{1,6\times10^{-19}}{4\times3\times9\times10^{-12}\times10^{-20}}$ V/m

$$\boxed{||\vec{E}|| \sim 1,6 \times 10^{11}\ \text{V.m}^{-1}}$$

ch2.R16