



VRAI ou FAUX ?

La vitesse de groupe v_g peut excéder la vitesse de phase v_φ .

ch7.Q1

RÉPONSE :

VRAI

Cela dépend de la relation de dispersion.

$v_g > v_\varphi \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} > \frac{\omega}{k}$. Si la relation de dispersion est de la forme $\alpha\omega^a = k^b$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, cela se traduit par :

$$\frac{b}{a\alpha^{1/b}}\omega^{1-a/b} > \frac{\omega^{1-a/b}}{\alpha^{1/b}} \Rightarrow b > a$$

Par exemple : $\sqrt{\frac{\rho S}{IE}}\omega = k^2$ satisfait cette inégalité, obtenu pour une poutre en vibration.



ch7.R1



Dans un plasma, les ondes longitudinales de déplacement de charges électriques suivent la relation de dispersion suivante :

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$$

En déduire l'expression de v_φ et v_g : est-ce un milieu dispersif ?

ch7.Q2

RÉPONSE :

On a $k(\omega) = \pm \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}{c}$, on en déduit :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \pm \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} \Rightarrow v_\varphi \pm \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \pm \frac{1}{\frac{\omega}{c\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}} \Rightarrow v_g = \pm c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}$$

Pour ω fini, $v_\varphi \neq v_g$ donc c'est un milieu dispersif.

PS : on remarque que $v_g v_\varphi = c^2$

ch7.R2



VRAI ou FAUX ?

Une onde s'exprimant $y(x, t) = y_0 \cos(\omega(t + \frac{x}{v}) + \theta_0)$ peut se décomposer en somme d'ondes stationnaires, sachant y_0 , ω , v et θ_0 des constantes.

ch7.Q3

RÉPONSE :

VRAI

En utilisant l'identité trigonométrique $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ on obtient :

$$y(x, t) = y_0 \cos(\omega t) \cos(\frac{\omega}{v}x + \theta_0) - y_0 \sin(\omega t) \sin(\frac{\omega}{v}x + \theta_0)$$

Qui est bien la somme d'une onde stationnaire $y_1 = f_1(t)g_1(x)$ et d'une onde stationnaire $y_2 = f_2(t)g_2(x)$ où $f_1 : t \mapsto y_0 \cos(\omega t)$, $g_1 : x \mapsto \cos(\frac{\omega}{v}x + \theta_0)$, $f_2 : t \mapsto -y_0 \sin(\omega t)$, $g_2 : x \mapsto \sin(\frac{\omega}{v}x + \theta_0)$ (cette décomposition n'est pas unique).

ch7.R3



Indiquer les expressions correspondant à une onde progressive : si progressive, indiquer le sens de propagation lorsque $t \nearrow$.

A $y_A(z, t) = \exp\left(-\frac{(z - ct)^2}{\delta^2}\right)$	B $y_B(x, t) = A(x) \cos(\omega t + kx)$
C $y_C(x, t) = \cos(\omega t) \sin(kx) - \sin(\omega t) \cos(kx)$	D $y_D(z, t) = \cos(k(z - ct)) + \cos(k(z + ct))$

ch7.Q4

RÉPONSE :

- y_A : progressive selon les z croissants.
- y_B : non progressive, car non exprimable sous la forme d'une seule fonction $F(t - \frac{x}{v})$ (à moins que A soit une constante)
- y_C : progressive selon les x croissants car $y_C = \sin(kx - \omega t)$
- y_D : non progressive, mais stationnaire car $y_D = 2\cos(kz)\cos(kct)$. En revanche y_D est une superposition de deux ondes progressives.

ch7.R4

Indiquer les expressions correspondant à une onde plane.



A :
$$s_A(z, t) = \exp\left(-\frac{(z - ct)^2}{\delta^2}\right)$$

B :
$$s_B(x, z, t) = \cos(k(\sqrt{x^2 + z^2} - ct))$$

C :
$$s_C(x, z, t) = e^{-z/\delta} \cos(\omega t - kx)$$

D :
$$s_D(x, z, t) = \cos\left(\omega t + k\left(x + \frac{z}{2}\right)\right)$$

ch7.Q5

RÉPONSE :

Une onde est plane si à t fixé quelconque les surfaces pour lesquelles $s = \text{Cte}$ sont des plans.

- s_A : si $z = \text{Cte}$ $s_A = \text{Cte}$ donc onde plane, plan d'onde à $z = \text{Cte}$
- s_B : pas une onde plane, $s_D = \text{Cte}$ implique $x^2 + z^2 = \text{Cte}$, c'est une équation de cercle, et donc les surfaces où $s_D = \text{Cte}$ ne sont pas des plans mais des cylindres d'axe de révolution Oy .
- s_C : pas une onde plane
- s_D : si $2x + z = \text{Cte}$, $s_B = \text{Cte}$ donc onde plane, plan d'onde à $2x + z = \text{Cte}$, plan d'onde auquel le vecteur $-\frac{1}{2}\vec{e}_x + \vec{e}_z$ est toujours orthogonal.

ch7.R5

Indiquer les expressions correspondant à une onde stationnaire.



A :
$$s_A(z, t) = \exp\left(-\frac{z^2 - c^2 t^2}{\delta^2}\right)$$

B :
$$s_B(x, y, z, t) = e^{-z/\delta} \cos(k_x x) \cos(\omega t - k_y y)$$

C :
$$s_C(x, t) = \cosh\left(\frac{x}{\delta}\right) \sin(\omega t)$$

D :
$$s_D(x, t) = \sin(kx - \omega t) - \sin(kx + \omega t)$$

ch7.Q6

RÉPONSE :

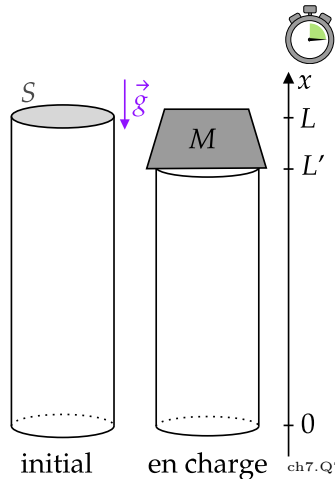
Une onde $s(x, y, z, t)$ est stationnaire si exprimable sous la forme d'un produit $s(x, y, z, t) = a(x)b(y)c(z)d(t)$.

- s_A : onde stationnaire avec $c(z) = \exp(-z^2/\delta^2)$ et $d(t) = \exp(c^2 t^2/\delta^2)$
- s_B : non stationnaire car $\cos(\omega t - k_y y) = \cos(\omega t) \cos(k_y y) + \sin(\omega t) \sin(k_y y)$. s_B est technique-ment une superposition de deux ondes stationnaires avec $a_{1,2} = \cos(k_x x)$, $b_1 = \cos(k_y y)$, $b_2 = \sin(k_y y)$, $c_{1,2} = e^{-z/\delta}$, $d_1 = \cos(\omega t)$ et $d_2 = \sin(\omega t)$.
- s_C : onde stationnaire avec $a = \cosh(x/\delta)$ et $d = \sin(\omega t)$
- s_D : onde stationnaire avec $a = -2\sin(kx)$ et $d = \cos(\omega t)$

ch7.R6

Un cylindre de section S et longueur initiale L est comprimé par une masse M grande devant la masse du cylindre.

Tracer $u(x)$ sur $[0, L]$ avec u l'écart d'un point par rapport à sa position initiale.



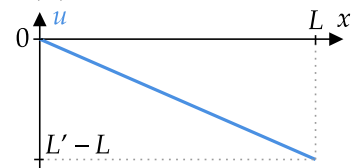
ch7.Q7

RÉPONSE :

En statique, PFD sur une tranche entre x et $x + dx$ du cylindre donne : $\vec{0} = \vec{F}_h + \vec{F}_b$ où \vec{F}_h est la force du reste du cylindre sur le haut de la tranche avec $\vec{F}_h = -ES \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx) \vec{n}_h$ donc :

$0 = ES \frac{\partial u}{\partial x}(x + dx) - ES \frac{\partial u}{\partial x}(x)$ d'où, après intégration selon x , seule variable dont dépend u : $u(x) = \alpha x + \beta$.

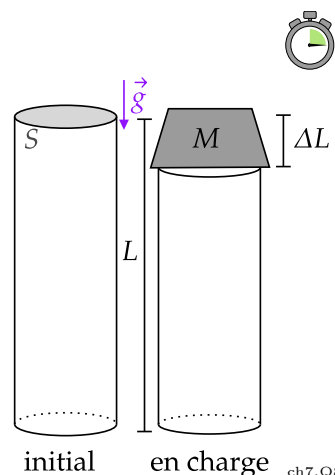
Or $u(0) = 0$ et $u(L) = L' - L$ d'où :



ch7.R7

Lorsqu'une personne s'assoit, un pied de chaise en acier de section S et longueur initiale L est comprimé par une masse M grande devant la masse du pieds de chaise.

Déterminer l'ordre de grandeur de ΔL la variation de longueur du pied de chaise.



ch7.Q8

RÉPONSE :

En statique, le PFD appliqué à la masse M dans le référentiel attaché au sol supposé galiléen donne, en prenant \vec{e}_z dans le sens de \vec{g} :

$$\vec{0} = Mg\vec{e}_z + ES \frac{\partial u}{\partial x} \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\Delta L}{L} < 0$$

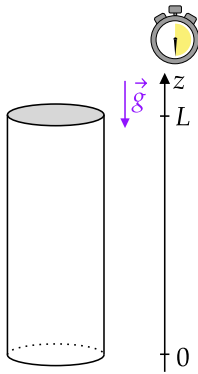
Un pied de chaise est usuellement creux, disons un disque creux de rayon $R = 1$ cm d'épaisseur $e = 2$ mm d'où :

$$\Delta L \simeq \frac{MgL}{2\pi R e E} \sim \frac{20 \times 10 \times 0,4}{6 \times 0,01 \times 0,002 \times 2 \times 10^{11}} \sim 3 \mu\text{m}$$

Avec $E \sim 200$ GPa pour de l'acier, $M \sim 20$ kg pour une chaise à 4 pieds et $L \sim 40$ cm.

ch7.R8

Une pile de pont a une masse volumique μ (lorsque non comprimée) et un module d'Young E . On note S la surface de son disque servant de base, L_0 sa longueur lorsque stockée horizontalement, et L sa hauteur lorsque stockée verticalement. Tracer $\varepsilon(z) = \frac{\partial u}{\partial z}$ le taux de déformation de la pile pour $z \in [0; L_0]$ en fonction des données fournies.



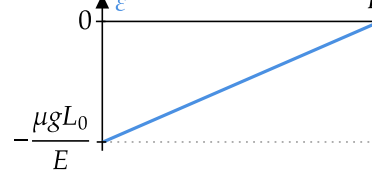
ch7.Q9

RÉPONSE :

En statique, le PFD sur une tranche entre z et $z + dz$ du cylindre donne : $\vec{0} = \vec{F}_h + \vec{F}_b + \mu S dz \vec{g}$ où \vec{F}_h est la force du reste du cylindre sur le haut de la tranche avec $\vec{F}_h = -ES \frac{\partial u}{\partial z}(z + dz) \vec{n}_h$ donc :

$$0 = ES \varepsilon(z + dz) - ES \varepsilon(z) - \mu S dz g$$

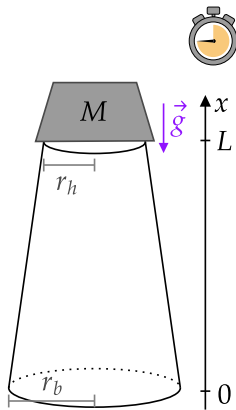
$$\frac{d\varepsilon}{dz} = \frac{\mu S g}{ES} \text{ et PFD sur la pile complète } \Rightarrow \varepsilon(0) = -\frac{\mu g L_0}{E}$$



ch7.R9

Une pile de pont en béton a une masse volumique μ (lorsque non comprimée) et un module d'Young E . Le rayon de la pile varie au repos linéairement de r_b à sa base à r_h en haut de la pile. Sa longueur est L_0 lorsque stockée horizontalement, et L sa hauteur lorsque stockée verticalement et supportant à son sommet une masse M .

Exprimer $L_0 - L$ la variation (supposée faible) de hauteur de la pile une fois redressée verticalement et supportant M , en fonction des données fournies.



ch7.Q10

RÉPONSE :

Le rayon s'écrit $r(x) = r_b + \frac{r_h - r_b}{L_0} x \simeq r_b + \frac{r_h - r_b}{L_0} x$. En statique, le PFD sur une tranche entre 0 et x donne : $\vec{0} = -E \pi r^2(x) \frac{du}{dx}(x) \times (-\vec{e}_x) + (M + \mu \int_x^{L_0} \pi r^2(x) dx) \vec{g}$, et donc [...]

$$\frac{du}{dx} = g \frac{M + \pi \mu \left(r_b^2 (L_0 - x) + 2 r_b \frac{r_h - r_b}{L_0} (L_0^2 - x^2) + \frac{(r_h - r_b)^2}{3 L_0^2} (L_0^3 - x^3) \right)}{\pi E \left(r_b + \frac{r_h - r_b}{L_0} x \right)^2}$$

$$\Delta L = \int_0^{L_0} \frac{du}{dx} dx \underset{\text{chgt de var}}{=} g \int_{r_b}^{r_h} \frac{M + \pi \mu L_0 \frac{r_h^3 - r_b^3}{3(r_h - r_b)}}{\pi E r^2} \frac{L_0 dr}{r_h - r_b}$$

$$\Delta L = \frac{g}{E} \left(\frac{M L_0}{\pi r_b r_h} + \mu \frac{L_0^2 (r_b + 2 r_h)}{r_b} \right)$$

ch7.R10

Une corde de piano cylindrique de diamètre $d = 1$ mm est tendue sur une longueur $L = 2$ m avec une tension $T_0 = 800$ N. L'alliage constituant la corde a une masse volumique $\rho = 8 \times 10^3$ kg.m⁻³.

Estimer la célérité de l'onde d'élongation transversale sur la corde de piano, puis la fréquence du mode fondamental.



ch7.Q11

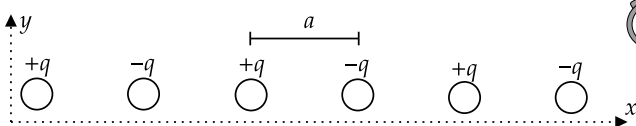
RÉPONSE :

$$\text{On a } c = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T dx}{dM}} = \text{d'où : } c = \sqrt{\frac{4T}{\rho \pi d^2}} \simeq 360 \text{ m.s}^{-1}$$

⚠ Attention : Cette célérité n'a a priori rien à voir avec la célérité du son dans l'air. L'équation de d'Alembert avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ décrit une onde de déformation transversale de la corde, se propageant le long de la corde. Les C.L. d'immobilité en $x = 0$ et $x = L$ imposent la fréquence des solutions stationnaires :

$$f_1 = \frac{c}{2L} \simeq 90 \text{ Hz}$$

ch7.R11

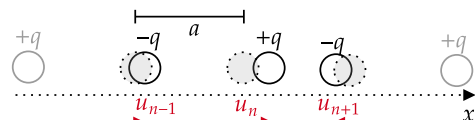


Un grand nombre d'ions tous de masse m sont chargés alternativement $+q$ et $-q$ et ne peuvent se déplacer sans frottement que suivant l'axe Ox. Chaque ion supposé ponctuel ne se déplace que très peu par rapport à sa position d'équilibre et n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisins.

Déterminer l'équation d'onde obtenue dans l'approximation des milieux continus, commenter.

ch7.Q12

RÉPONSE :

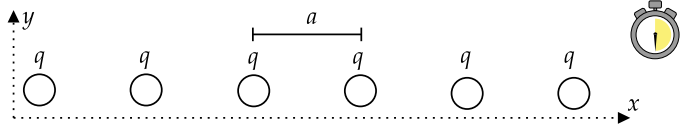


Notons $u_n(t)$ le déplacement par rapport à sa position d'équilibre du $n^{\text{ème}}$ ion. Le PFD sur le $n^{\text{ème}}$ ion dans le référentiel du cristal donne :

$$m \ddot{u}_n = \frac{q^2}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{(a + u_{n+1} - u_n)^2} - \frac{1}{(a - u_{n-1} + u_n)^2} \right)$$

Après D.L. : $\ddot{u}_n = \frac{q^2}{2\pi \epsilon_0 m a^2} (2u_n - u_{n+1} - u_{n-1})$, soit dans l'approximation des milieux continus $\ddot{u} = -c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}$: ce n'est PAS une équation de d'Alembert à cause du signe -.

ch7.R12

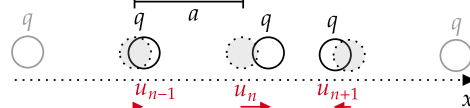


Un grand nombre d'ions tous de masse m sont tous chargés $+q$ et ne peuvent se déplacer sans frottement que suivant l'axe Ox . Chaque ion supposé ponctuel ne se déplace que très peu par rapport à sa position d'équilibre et n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisins.

Dans l'approximation des milieux continus, exprimer la célérité de l'onde longitudinale obtenue.

ch7.Q13

RÉPONSE :



Notons $u_n(t)$ le déplacement par rapport à sa position d'équilibre du $n^{\text{ème}}$ ion. Le PFD sur le $n^{\text{ème}}$ ion dans le référentiel du cristal donne :

$$m\ddot{u}_n = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{(a - u_{n-1} + u_n)^2} - \frac{1}{(a + u_{n+1} - u_n)^2} \right)$$

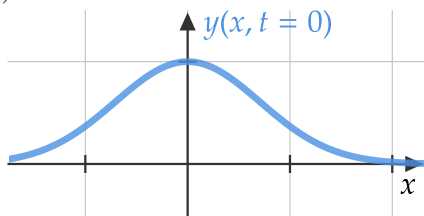
Après D.L. : $\ddot{u}_n = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 m a^2} (u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n)$, soit dans l'approximation des milieux continus $\ddot{u} = c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}$ avec

$$c = \frac{q}{\sqrt{2\pi\epsilon_0 m a^2}}.$$

ch7.R13



L'élongation transversale d'une corde, notée $y(x, t)$, est solution d'une équation de d'Alembert de célérité c . Initialement la corde est lâchée sans vitesse et a l'allure $y(x, t = 0) = y_0 \exp(-\frac{x^2}{\delta^2})$ avec y_0 et δ des constantes.



En justifiant, tracer qualitativement $y(x, t = \delta/c)$.

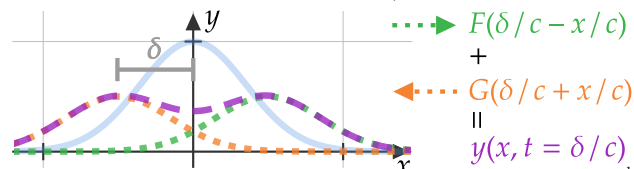
ch7.Q14

RÉPONSE :

L'ensemble des solutions pour $y(x, t)$ est de la forme $y(x, t) = F(t - \frac{x}{c}) + G(t + \frac{x}{c})$ et les C.L. imposent :

$$\begin{cases} F(-\frac{x}{c}) + G(\frac{x}{c}) = y_0 \exp(-\frac{x^2}{\delta^2}) \Rightarrow F(u) = \frac{y_0}{2} \exp(-\frac{c^2 u^2}{\delta^2}) \\ F(-\frac{x}{c}) - G(\frac{x}{c}) = 0 \end{cases}$$

D'où y est la superposition de deux gaussiennes contrapropagatives d'amplitude maximale $y_0/2$ chacune, parcourant une distance δ pendant une durée $\tau = \delta/c$:



ch7.R14



RÉPONSE :

ch7.Q15

ch7.R15



RÉPONSE :

ch7.Q16

ch7.R16