



### VRAI OU FAUX ?

Le champ  $\vec{E}$  est toujours à circulation conservative.

ch5.Q1

### RÉPONSE :

#### FAUX

L'équation de Maxwell-Faraday hors de l'ARQS électrique prévoit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En intégrant sur une surface  $S$  délimitée par le contour fermé  $\mathcal{C}$  on obtient après application du théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0 \quad \text{a priori}$$

ch5.R1



### VRAI OU FAUX ?

Il existe toujours  $V$  tel que  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ .

ch5.Q2

### RÉPONSE :

#### FAUX

Supposons qu'il existe  $V$  tel que  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ .

Or, pour tout champ scalaire  $P(\vec{r}, t)$ ,  $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} P) = \vec{0}$ ,  
donc  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ .

Or l'équation de Maxwell-Faraday hors de l'ARQS électrique prévoit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0} \quad \text{a priori}$$

Donc il n'existe pas  $V$  tel que  $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$  hors de l'ARQS électrique.

ch5.R2



### VRAI OU FAUX ?

En ARQS électrique, le champ  $\vec{B}$  est négligeable en norme devant la norme de  $\frac{\vec{E}}{c}$ .

ch5.Q3

### RÉPONSE :

#### FAUX

Stricto sensu, l'ARQS électrique prévoit que le terme  $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$  soit une source négligeable pour  $\vec{E}$  devant  $\frac{\rho}{\epsilon_0}$ .

Par exemple, on peut considérer un champ  $\vec{B}$  stationnaire produit par un solénoïde infini parcouru par un courant **continu**  $I$  :  $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{e}_z$  dans le solénoïde.

On peut alors augmenter  $\|\vec{B}\|$  en norme jusqu'à dépasser  $\frac{\|\vec{E}\|}{c}$  tout en maintenant strictement  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$  et donc en maintenant l'ARQS électrique.

ch5.R3



### VRAI OU FAUX ?

Le champ  $\vec{B}$  est toujours à flux conservatif.

ch5.Q4

### RÉPONSE :

#### VRAI

L'équation de Maxwell-Thomson prévoit :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

En l'intégrant sur un volume quelconque  $V$  inclus dans une surface fermée  $\mathcal{S}$  on obtient, après application du théorème d'Ostrogradski :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Vrai pour toute surface fermée  $\mathcal{S}$  : c'est précisément ce qu'on appelle un champ à flux conservatif.

ch5.R4



### VRAI OU FAUX ?

Si  $\rho = 0$  alors  $\vec{E}$  est à flux conservatif, même si  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ .

ch5.Q5

### RÉPONSE :

#### VRAI

Si  $\rho = 0$  l'équation de Maxwell-Gauss devient :  $\text{div}(\vec{E}) = 0$ , en intégrant sur un volume inclus dans une surface fermée  $\mathcal{S}$ , on obtient après application du théorème d'Ostrogradski :

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Vrai pour toute surface fermée  $\mathcal{S}$  :  $\vec{E}$  est alors ce qu'on appelle un champ à flux conservatif.

ch5.R5



### VRAI OU FAUX ?

Un conducteur électrique neutre électriquement ( $\rho = 0$  en tout point) subit une force nulle dans un champ magnétique uniforme.

ch5.Q6

### RÉPONSE :

#### FAUX

$\rho = 0$  (quasi tjrs vrai) ne signifie pas  $\vec{j} = \vec{0}$  (faux si  $I \neq 0$ ). Dans le modèle de Drude, notons  $\rho_+$  la densité volumique de charge des noyaux + électrons non conducteurs et  $\rho_-$  la densité volumique de charge des électrons de conduction. Pour un matériau neutre électriquement (en pratique vrai pour les métaux cf chap. 4) on a  $\rho_- = -\rho_+$  tq

$$\rho_{tot} = \rho = \rho_+ + \rho_- = 0.$$

Dans le modèle de Drude les noyaux et  $e^-$  non conducteurs sont immobiles, mais les  $e^-$  de conduction ont une vitesse moyenne  $\vec{v}$ , donnant lieu à un  $\vec{j}$  non nul et donc à un courant  $I$  : le matériau subira a priori la force de Laplace  $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$ .

ch5.R6



Proposer un ordre de grandeur de l'amplitude du champ  $\vec{B}$  dans les cas suivants :

- Champ magnétique du noyau terrestre à la surface  $\vec{B}_{\text{terre}}$ .
- Champ magnétique l'intérieur d'un IRM  $\vec{B}_{\text{IRM}}$ .
- Champ magnétique d'un chargeur sans fil de téléphone  $\vec{B}_{\text{tel}}$  (solénoïde quasi-infini avec  $N = 20$  spires, de hauteur  $\ell = 2$  mm, rayon  $R = 20$  mm, parcouru par un courant continu d'intensité  $I = 1$  A).

ch5.Q7

### RÉPONSE :

**Rappel :**  $1 \text{ T} = 1 \text{ kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}$

- Champ magnétique du noyau terrestre à la surface  $\|\vec{B}_{\text{terre}}\| \sim 50 \mu\text{T}$ .
- Champ magnétique l'intérieur d'un IRM  $\|\vec{B}_{\text{IRM}}\| \sim 1 \text{ T}$ .
- Champ magnétique d'un chargeur sans fil de téléphone  $\|\vec{B}_{\text{tel}}\| = \frac{\mu_0 NI}{\ell} = \frac{4\pi 10^{-7} \times 20 \times 1}{0.002} \text{ T} \sim 12 \text{ mT}$ .

ch5.R7



Énoncer les équations de Maxwell et leur version simplifiée en :

- régime stationnaire
- en ARQS électrique
- en ARQS magnétique

ch5.Q8

### RÉPONSE :

Équation de Maxwell-Thomson :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{= \vec{0} \text{ en RS, } \approx \vec{0} \text{ en ARQSM}}$$

Équation de Maxwell-Gauss :

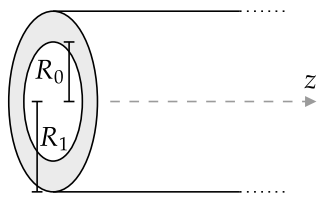
$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \underbrace{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{= \vec{0} \text{ en RS, } \approx \vec{0} \text{ en ARQSE}}$$

ch5.R8

On considère un cylindre creux infini selon  $z$ , de rayon interne  $R_0$  et externe  $R_1$ . Une densité volumique de courant  $\vec{j}$  stationnaire circule dans ce cylindre. En coordonnées cylindriques, si  $R_0 < r < R_1$  alors  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_\theta$  et sinon  $\vec{j} = \vec{0}$ .



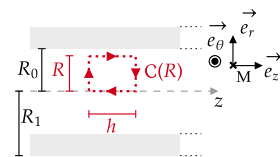
Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'espace.

ch5.Q9

### RÉPONSE :

$\vec{j}$  stationnaire  $\Rightarrow \sim$  solénoïde infini en magnétostat. càd :  
**Invariances :**  $\vec{j} = \vec{j}(r) \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$ .  
**Symétrie :**  $\forall M (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \Pi^+$  pour  $\vec{j}$  donc  $\Pi^-$  pour  $\vec{B}$  d'où  $\vec{B}(r) = B_z(r) \vec{e}_z$ .

**Contour d'Ampère :** Un rectangle du plan  $(M\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ , avec un segment à  $r = 0$  et un segment à  $r = R$  avec  $R$  paramétrable.



**Théorème d'Ampère :**

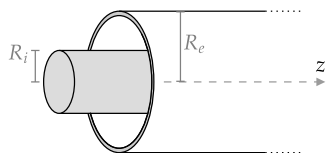
- Si  $0 \leq R \leq R_0$  [...]  $B_z(R) = B_z(0) = C^{te} \forall R \in [0; R_0]$
  - Si  $R_0 < R \leq R_1$  [...]  $B_z(R) - B_z(0) = -\mu_0 j_0 (R - R_0)$
  - Si  $R > R_1$  [...]  $B_z(R) - B_z(0) = -\mu_0 j_0 (R_1 - R_0) = C^{te}$
- et  $B_z(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow B_z(0) = \mu_0 j_0 (R_1 - R_0)$

ch5.R9

On modélise un câble coaxial en régime stationnaire comme la superposition :



- d'un coeur : un fil plein de rayon  $R_i$  parcouru par une densité volumique de courant  $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$
- et d'une gaine : un cylindre de rayon  $R_e$  parcouru en surface par une densité surfacique de courant  $\vec{j}_s = j_{s0} \vec{e}_z$  avec  $j_{s0} = -\frac{R_i^2}{2R_e} j_0$



Déterminer le champ  $\vec{B}$  en tout point extérieur à la gaine.

ch5.Q10

### RÉPONSE :

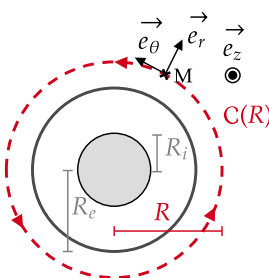
**Invariances :**  $\vec{j} = \vec{j}(r) \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$ .

**Symétrie :**  $\forall M (M, \vec{e}_r, \vec{e}_z) \Pi^+$  pour  $\vec{j}$  donc  $\Pi^-$  pour  $\vec{B}$  d'où  $\vec{B}(r) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$ .

**Contour d'Ampère :** Un cercle du plan  $(M\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$  centré sur O.

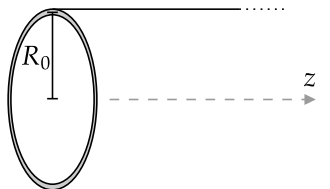
**Théorème d'Ampère :** Prenons  $R > R_e$ ,  $I_{\text{enlacé}} = \int_0^{R_i} dr \int_0^{2\pi} r d\theta j_0 + \int_0^{2\pi} R_e d\theta j_{s0} = \pi R_i^2 j_0 + 2\pi R_e j_{s0} = 0$ .

Donc  $\vec{B}(R > R_e) = \vec{0}$ .



ch5.R10

On considère un cylindre creux infini selon  $z$ , de rayon  $R_0$ . Une densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$  stationnaire circule dans ce cylindre. En coordonnées cylindriques, si  $r = R_0$  alors  $\vec{j}_s = j_{s0} \vec{e}_\theta$  et sinon  $\vec{j} = \vec{0}$ .



Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'espace.

ch5.Q11

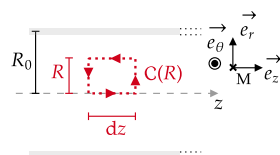
### RÉPONSE :

C'est presque le solénoïde infini de magnétostat. càd :

**Invariances :**  $\vec{j} = \vec{j}(r) \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$ .

**Symétrie :**  $\forall M (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \Pi^+$  pour  $\vec{j}$  donc  $\Pi^-$  pour  $\vec{B}$  d'où  $\vec{B}(r) = B_z(r) \vec{e}_z$ .

**Contour d'Ampère :** Un rectangle du plan  $(M\vec{e}_r, \vec{e}_z)$ , avec un segment à  $r = 0$  et un segment à  $r = R$  avec  $R$  paramétrable.



**Théorème d'Ampère :**

Ici  $I_{\text{enlacé}} = \int_{z_0}^{z_0+dz} d\vec{\ell} \cdot \vec{j}_s$  avec  $d\vec{\ell}$  orienté (via  $\mathcal{C}$ ) selon  $+\vec{e}_\theta$ .

- Si  $0 \leq R < R_0$  [...]  $B_z(R) = B_z(0) = C^{te} \forall R \in [0; R_0]$
- Si  $R > R_0$  [...]  $B_z(0) - B_z(R) = \mu_0 j_{s0} = C^{te}$  et  $B_z(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow B_z(0) = \mu_0 j_{s0}$

ch5.R11

On considère un fil rectiligne cylindrique de rayon  $R = 1$  mm et longueur  $\ell = 5$  m parcouru par un courant continu d'intensité  $I = 5$  A, calculer l'amplitude du champ  $\vec{B}$  produit à 10 cm du fil.

Commenter en comparant à l'amplitude du champ magnétique terrestre à la surface.



ch5.Q12

### RÉPONSE :

On a obtenu dans le cours  $\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  comme champ magnétique à l'extérieur d'un fil électrique parcouru par un courant continu  $I$ , le fil étant orienté selon  $\vec{e}_z$  avec  $I$  selon  $z$  croissant.

On a donc :  
 $\|\vec{B}_{\text{fil}}\| = \frac{20\pi 10^{-7}}{2\pi 0.1} \text{ T} \sim 10^{-5} \text{ T}$

Or  $\|\vec{B}_{\text{fil}}\| \sim 50 \mu\text{T}$

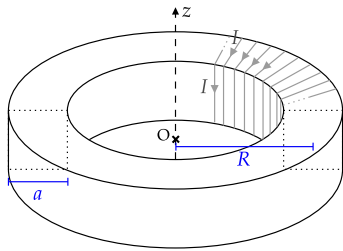
On observerait donc à peine l'effet du champ  $\vec{B}$  produit par ce fil sur une boussole, via une déviation de quelques degrés typiquement.

ch5.R12

On considère un tore à base carrée, de rayon  $R$  et de carré de base  $a$ .



Sur ce tore s'enroulent des spires parcourues par un courant continu  $I$ . On suppose les spires suffisamment rapprochées pour considérer qu'elles forment une distribution continue de courant.



Quelles informations apportent l'analyse des symétries et invariances du problème ?

ch5.Q13

## RÉPONSE :

**Invariances :** La distribution de courants est invariante par rotation d'angle  $\theta$  donc  $\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, z)$ .

**Symétries :** Pour tout point  $M$  de l'espace,  $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$  est  $\Pi^+$  pour  $\vec{j}$  donc  $\Pi^-$  pour  $\vec{B}$  donc  $\vec{B} = B_\theta(r, z)\vec{e}_\theta$ .

**Pour aller plus loin :** Prendre un contour de rayon inclus dans  $[R - a; R + a]$  et hors de cet intervalle pour montrer que  $\vec{B}$  est nul en-dehors du tore et qu'à l'intérieur on a  $\vec{B}(r) = -\frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  avec  $N$  le nombre de spires formées autour du tore, cf ex 4.

ch5.R13

## VRAI OU FAUX ?



Pour tout contour fermé  $\mathcal{C}$ ,  $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$  ne dépend que du courant électrique enlacé dans la surface délimitée par  $\mathcal{C}$ .

ch5.Q14

## RÉPONSE :

### FAUX

Hors de l'ARQSM, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Que l'on peut intégrer sur n'importe quelle surface s'appuyant sur un contour fermé quelconque  $\mathcal{C}$ , appliquer le théorème de Stokes donne alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} + \mu_0 \epsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Équation appelée "Théorème d'Ampère généralisé".

Le dernier terme est complètement indépendant du courant électrique enlacé.

ch5.R14

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, proposer un ordre de grandeur pour l'inductance propre d'un solénoïde contenant 1000 spires, de rayon  $R = 1$  cm, long de  $\ell = 1$  m, parcouru par un courant d'amplitude  $I = 0,5$  A



ch5.Q15

## RÉPONSE :

Puisque le champ magnétique dans un solénoïde infini en ARSQM est uniforme en son intérieur et vaut  $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \vec{e}_z$ , on obtient  $\Phi = \frac{\mu_0 N I \pi R^2}{\ell}$  et donc :

$$L = \frac{\mu_0 N \pi R^2}{\ell}$$

D'où  $L = \frac{4\pi 10^{-7} 10^3 \pi 0,01}{1} \Omega \cdot s \sim 4 \times 10^{-5} \Omega \cdot s$  ou :

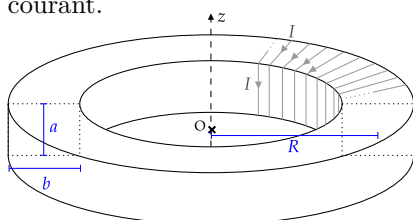
$$L \sim 40 \mu H$$

ch5.R15

On considère un tore à base rectangulaire, de rayon  $R$ .



Sur ce tore s'enroulent  $N$  spires parcourues par un courant continu  $I$ . On suppose les spires suffisamment rapprochées pour considérer qu'elles forment une distribution quasi-continue de courant.



Déterminer l'inductance propre de ce tore à base rectangulaire.

ch5.Q16

## RÉPONSE :

Très similaire à l'ex 11.

L'étude des invariances et symétries fournit  $\vec{B} = B_\theta(r, z)\vec{e}_\theta$ . Le théorème d'Ampère sur un contour circulaire de rayon  $r_c$  donne  $\vec{B}(r_c) = -\frac{\mu_0 N I}{2\pi r_c} \vec{e}_\theta$  uniforme dans l'intérieur du tore, et  $\vec{B} = \vec{0}$  ailleurs.

On calcule  $\Phi_p$  en prenant une surface orientée selon  $-\vec{e}_\theta$  car selon la règle de la main droite à partir de l'orientation du courant  $I$  afin que  $e = -\frac{d\Phi}{dt}$  soit la tension d'une source de tension en convention générateur vis-à-vis de  $I$ .

$$\Phi_p = N \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{R-b/2}^{R+b/2} dr \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

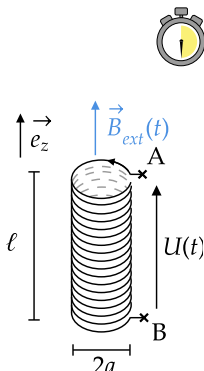
$$\text{D'où : } L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left( \frac{R + b/2}{R - b/2} \right)$$

ch5.R16

On plonge un solénoïde de rayon  $a$  et de longueur  $\ell$  constitué de  $N$  spires dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}_{ext}(t) = B_0 \cos(2\pi ft + \varphi) \vec{e}_z$ .

On assimile électriquement le solénoïde infini à une résistance  $r$  en série avec une inductance propre  $L$ .

Déterminer  $U(t)$ , puis en déduire en régime permanent le champ magnétique  $\vec{B}_{ind}(t)$  induit dans le solénoïde.



ch5.Q17

### RÉPONSE :

Orientons le contour selon  $+\vec{e}_\theta$  comme suggéré sur le schéma. On a alors  $e = U(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$  avec :

$$\Phi = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r d\theta \vec{e}_z \cdot \vec{B}_{ext}(t) = \pi a^2 B_0 \cos(2\pi ft + \varphi)$$

D'où  $e = 2\pi^2 a^2 f B_0 \sin(2\pi ft + \varphi)$ , donc  $ri(t) + L \frac{di}{dt} = e(t)$  donne en régime permanent ( $\Rightarrow$  RSF utilisable) [...]  $i(t) = \frac{2\pi^2 a^2 f B_0}{\sqrt{r^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}} \sin(2\pi ft + \varphi - \alpha)$  où  $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{2\pi f L}{r}\right)$ , d'où :

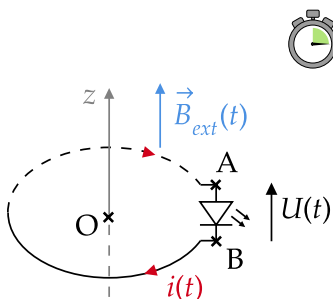
$$\vec{B}_{ind}(t) = \frac{2\mu_0 N \pi^2 a^2 f B_0}{\ell \sqrt{r^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}} \sin(2\pi ft + \varphi - \alpha) \vec{e}_z$$

ch5.R17

Par un mouvement d'aimant, on impose  $\vec{B}(t) = \beta t \vec{e}_z$  quasi uniforme à l'échelle d'une spire de rayon  $R$  contenue dans un plan orthogonal à  $\vec{e}_z$ , avec  $\beta > 0$ . On négligera le flux propre de la spire devant le flux extérieur.

Une LED s'allume si  $U(t) > 0$ .

La LED s'allumera-t-elle, si oui quand ?



ch5.Q18

### RÉPONSE :

En négligeant l'inductance propre de la spire on a le circuit équivalent ci-contre. On oriente  $e$  en convention générateur en suivant le contour orienté (dans le doute, ré-intégrer MF sur le contour orienté de votre exercice).

La règle de la main droite oriente  $d\vec{S}$  selon  $-\vec{e}_z$  pour le calcul de  $\Phi$  d'où  $\Phi = -\pi R^2 \beta t$  et donc :

$$e(t) = \pi R^2 \beta = U(t) \quad \text{loi des mailles}$$

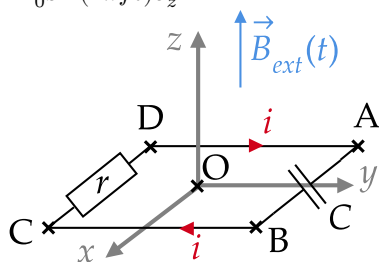
La LED s'allumera donc toujours.

ch5.R18

On plonge un circuit rC rectangulaire, d'inductance propre constante  $L$  dans un champ  $\vec{B}_{ext}$  uniforme :

$$\vec{B}_{ext} = B_0 \sin(2\pi ft) \vec{e}_z$$

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant électrique  $i$ .



ch5.Q19

### RÉPONSE :

Orientons le contour  $\mathcal{C}$  dans le sens de  $i$  (les fem induites  $e_p$  et  $e_{ext}$  sont toujours en convention générateur par rapport à  $\mathcal{C}$ , mais avec ce choix aussi en convention générateur par rapport à  $i$ ).

**Attention :**  $d\vec{S} = -dS \vec{e}_z$  pour le calcul de  $\phi$  avec ce  $\mathcal{C}$ .

La loi des mailles donne :  $e_p + e_{ext} = u_C + ri$ , [...]  $\frac{d}{dt}$

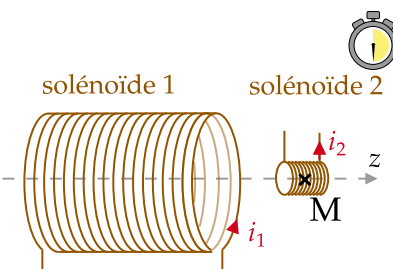
$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -4\pi^2 f^2 B_0 AB \times BC \times \sin(2\pi ft)$$

ch5.R19

On place deux solénoïdes idéaux (quasi-infinis), le n°1 ( $N_1$  fils, longueur  $\ell_1$ , rayon  $R_1$ ) et le solénoïde n°2 nettement plus petit ( $N_2$  fils, longueur  $\ell_2$ , rayon  $R_2$ ) autour du point M.

On mesure préalablement au teslamètre que le champ créé par le solénoïde 1 seul au voisinage de M est quasi-uniforme égal à 60% de sa valeur à l'intérieur du solénoïde 1.

Exprimer la constante de couplage  $k$  entre les deux solénoïdes en fonction des données fournies.



ch5.Q20

### RÉPONSE :

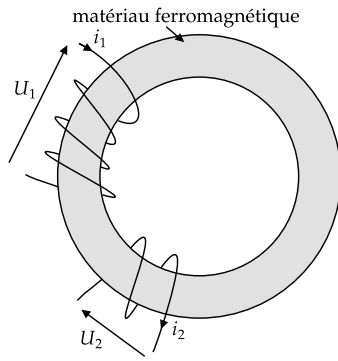
Calculons  $M$  via  $M_{1 \rightarrow 2}$  en calculant  $\phi_{1 \rightarrow 2}$  :

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{spires du sol. 2}} \vec{B}_1(M) \cdot d\vec{S}_2 = N_2 \iint_{\text{1 spire}} \vec{B}_1(M) \cdot d\vec{S}_2$$

L'orientation de  $d\vec{S}_2$  est selon  $\pm \vec{e}_z$  sans plus d'infos au vu du schéma (expérimentalement souvent difficile d'identifier le sens d'enroulement). En revanche  $\vec{B}_1(M) = 0,6 \frac{\mu_0 N_1 i_1}{\ell_1} \vec{e}_z$  d'où :

$$M_{1 \rightarrow 2} = \pm 0,6 N_2 \pi R_2^2 \frac{\mu_0 N_1}{\ell_1} \text{ et } k = \frac{0,6 R_2 \sqrt{\ell_2}}{R_1 \sqrt{\ell_1}}$$

ch5.R20



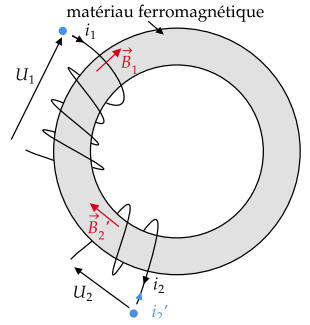
Proposer une paire de bornes homologues pour ce transformateur idéal, puis une relation entre  $U_1$  et  $U_2$  pour des tensions alternatives.

ch5.Q21

### RÉPONSE :

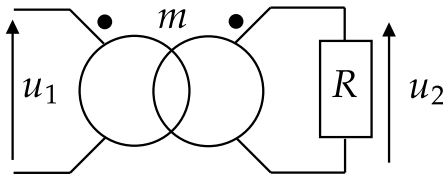
Les tensions et courants du primaire et secondaire sont volontairement orientés n'importe comment.

Les courants **entrants** dans les bornes homologues doivent contribuer dans le même sens au flux magnétique d'où 2 bornes homologues en bleu.



Donc  $U_2 = -\frac{N_2}{N_1}U_1 = -\frac{2}{4}U_1$  pour un transformateur idéal en comptant le nombre de spires sur le schéma.

ch5.R21



Un transformateur idéal possède 260 spires au primaire et 13 spires au secondaire.

On applique une tension continue  $u_1 = 220$  V au primaire.

Calculer  $m$ , puis calculer la tension  $u_2$  au secondaire.

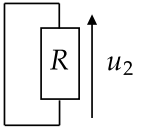
ch5.Q22

### RÉPONSE :

On a pour un transformateur idéal :

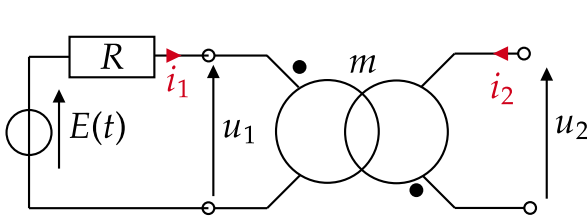
$$m = \frac{N_2}{N_1} = \frac{13}{260} = 0,05$$

**Attention :**  $u_1$  est d'après l'énoncé une tension **continue**, donc le courant  $i_1$  est constant, et  $\phi$  le flux du champ magnétique dans le ferromagnétique l'est également, d'où une fem induite  $e$  nulle (à la fois au primaire et au secondaire). On obtient alors le circuit équivalent ci-contre et :



$$u_2 = 0 \text{ V}$$

ch5.R22



On considère un transformateur idéal de facteur de transformation  $m$ , relié au primaire à une source de tension  $E(t)$  oscillant à 50 Hz, et laissé à vide au secondaire.

Exprimer  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $u_1$  et  $u_2$  en fonction de  $E(t)$  et  $R$ .

ch5.Q23

### RÉPONSE :

On obtient le schéma équivalent ci-contre (les bornes homologues donnent le sens du contour au secondaire selon celui au primaire pour avoir  $e_2 = +me$ ). Le secondaire est à vide donc  $i_2 = 0$  A.

Transformateur idéal

$\Rightarrow$  pas de pertes, d'où

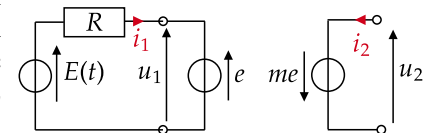
$u_1 i_1 = u_2 i_2$  et donc

$e i_1 = -m e i_2$  soit

$$i_1 = -m i_2 = 0 \text{ A}.$$

Les lois des mailles donnent  $u_2 = -me$  et  $E(t) = R i_1 + u_1$

donc  $u_1 = E(t)$  et  $u_2 = -mE(t)$ .



ch5.R23

### RÉPONSE :

Par pont diviseur de tension :  $P_A = R I^2 = \frac{R E^2}{(R + r_g)^2}$ .

Et  $P_B = R i_2^2$ , or on a 4 eq et 4 inconnues ( $u_1$ ,  $u_2$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ) :

Transfo idéal :

Lois des mailles :

$$\begin{cases} u_2 = m u_1 \\ u_1 i_1 = u_2 i_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_2 = R i_2 \\ E = u_1 + r_g i_1 \end{cases}$$

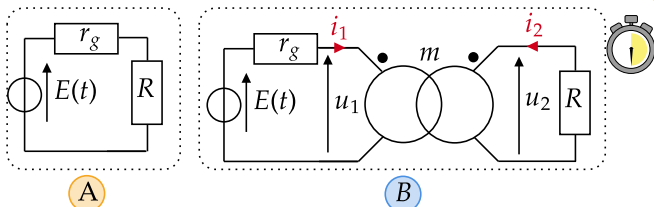
On isole  $i_2$  [...] :  $i_2 = \frac{m E}{R + r_g m^2}$  d'où :

$P_B = \frac{R m^2 E^2}{(R + r_g m^2)^2}$ , maximal lorsque  $(\frac{R}{m} + r_g m)$  est minimal

c'est-à-dire pour  $m = \sqrt{R/r_g}$ , où  $P_{B,\max} = \frac{E^2}{4 r_g}$ , on a bien

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{4 R r_g}{(R + r_g)^2} = \frac{(R + r_g)^2 - (R - r_g)^2}{(R + r_g)^2} < 1.$$

ch5.R24

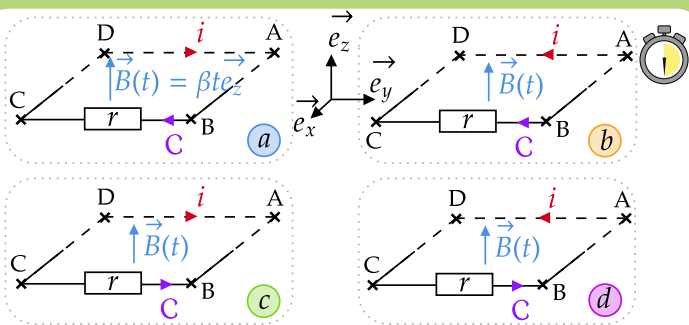


On note  $P_A$  la puissance absorbée par la résistance de charge  $R$  dans le cas A et  $P_B$  la puissance absorbée par  $R$  dans le cas B.

Exprimer  $P_A$  en fonction de  $r_g$ ,  $E(t)$  une tension alternative et  $R$ , puis déterminer la valeur de  $m$  maximisant  $P_B$ , on montrera que  $P_{B,\max}$  est strictement supérieur à  $P_A$  dès que  $r_g \neq 0$ .

ch5.Q24

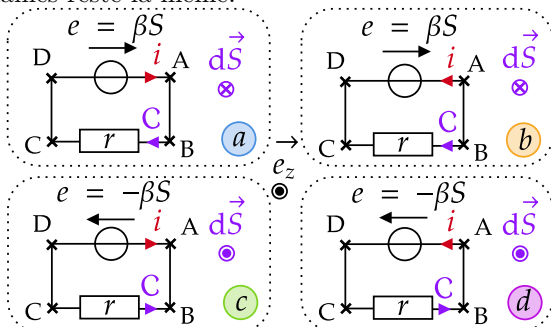




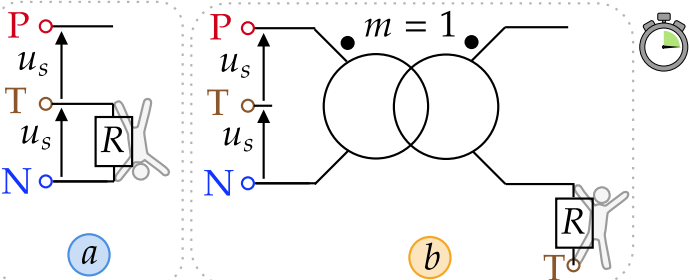
On considère une spire rectangulaire de surface  $S$  dans le plan  $(Oxy)$ , plongée dans  $\vec{B}(t)$  uniforme avec 4 orientations possibles pour  $i$  et le contour  $\mathcal{C}$  tel que  $e = \oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$ . Dans chaque cas, tracer le circuit équivalent en explicitant  $e$  en fonction des données.

ch5.Q25

**RÉPONSE :**  
 $e = -\frac{d\phi}{dt}$  vrai pour  $e$  orienté dans le sens de  $\mathcal{C}$ , et pour  $\phi$  le sens de  $d\vec{S}$  obtenu par règle de la main droite via  $\mathcal{C}$ .  $e$  plaçable à n'importe quel endroit de la maille tant que la loi des mailles reste la même.



ch5.R25

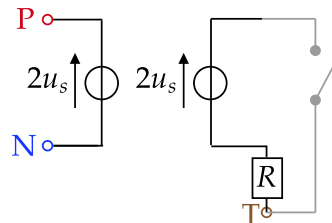


Une personne de résistance  $R = 1,1 \text{ k}\Omega$  touche un fil électrique dans chacun des cas  $a$  et  $b$ .  $u_s$  est une tension sinusoïdale de 110V d'amplitude et de fréquence 50 Hz. Sans  $R$ , le secondaire du transformateur ne serait pas relié à T. Calculer le courant la traversant dans chaque cas, et expliquer l'intérêt du transformateur.

ch5.Q26

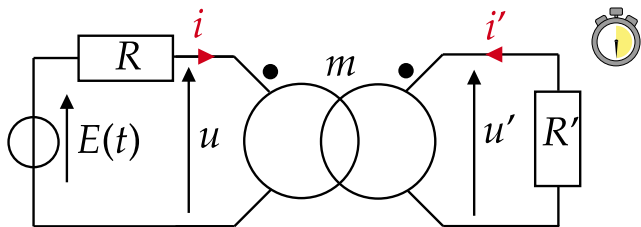
**RÉPONSE :**  
 Cas  $a$  : La loi d'Ohm donne  $i_a(t) = \frac{u_s(t)}{R}$  d'amplitude  $i_{s0} = \frac{u_{s0}}{R} = 100 \text{ mA}$  ce qui est un courant mortel.

Cas  $b$  : On obtient le schéma électrique suivant en remplaçant le transformateur par les fem au primaire et au secondaire. On peut à la rigueur expliciter en gris le fait que le circuit jusqu'à la terre est ouvert : on a donc  $i_b = 0 \text{ A}$ .



C'est un transformateur d'isolement : en aval, toucher une de ses bornes depuis la terre n'est plus dangereux.

ch5.R26



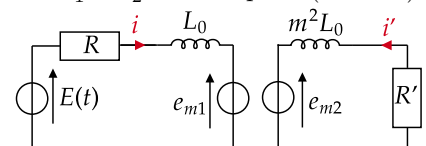
On considère un transformateur idéal relié au primaire à une source de tension  $E(t)$  telle que  $E(t \geq 0) = E = C^{te}$ . À  $t \leq 0$ ,  $i(t) = 0$ ,  $i'(t) = 0$  et  $E(t < 0) = 0$ . On note  $L_0$  l'inductance propre du primaire,  $m^2 L_0$  l'inductance propre du secondaire et on suppose le facteur de couplage égal à 1.

Déterminer  $i(t)$  lorsque  $t > 0$ .

ch5.Q27

**RÉPONSE :**  
**Attention :** L'équation  $u' = mu$  est fautive en présence de tensions continues, on doit donc revenir explicitement au fait que seules les dérivées de  $i_1$  et  $i_2$  sont couplées (cf. ex14).

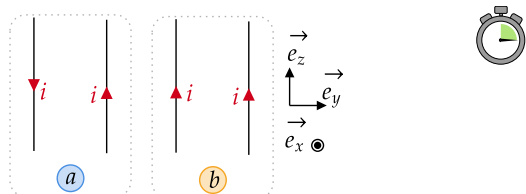
On a  $e_{m1} = M \frac{di'}{dt}$  et  $e_{m2} = M \frac{di}{dt}$  d'où, avec  $k = 1$  et donc  $M = m L_0$  :



$$\begin{cases} E = Ri + L_0 \frac{di}{dt} - m L_0 \frac{di'}{dt} & (1) \\ m L_0 \frac{di}{dt} = m^2 L_0 \frac{di'}{dt} + R' i' & (2) \end{cases} \quad \text{puis, par substitution [...] :}$$

$$\frac{L_0(m^2 R + m R')}{R R'} \frac{di}{dt} + i = \frac{E}{R} \Rightarrow i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

ch5.R27

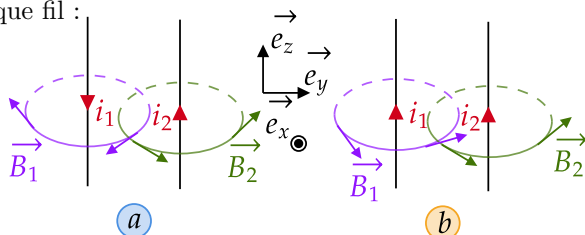


On considère deux fils verticaux sans pesanteur, libres de se mouvoir, parcourus par un courant  $i > 0$ . Dans l'un des cas les fils se collent, dans l'autre ils se repoussent.

Identifier le cas correspondant à chaque situation en justifiant.

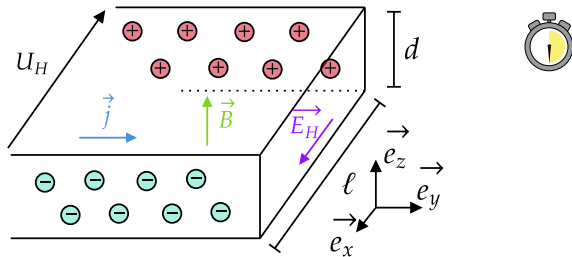
ch5.Q28

**RÉPONSE :**  
 On détermine d'abord l'allure du champ  $\vec{B}$  produit par chaque fil :



Puis on détermine le sens de la force de Laplace : Dans le cas  $a$  le fil 2 subit sur une longueur  $d\ell$  la force  $d\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = i_2 d\vec{z} \wedge \vec{B}_1 = i_2 B_1 d\vec{y}$  avec  $i_2 B_1 > 0$ . Même raisonnement 4 fois : en  $a$  les fils se repoussent et en  $b$  ils s'attirent.

ch5.R28



Une piste d'épaisseur  $d = 1 \mu\text{m}$  et de largeur  $\ell = 10 \mu\text{m}$  est plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  avec  $B_0 = 50 \text{ mT}$  et est parcourue par  $I = 2 \text{ mA}$  uniformément réparti de densité  $\vec{j}$ . Dans ce semi-conducteur InSb, le nombre d' $e^-$  libres par unité de volume est  $n \sim 2 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ . Proposer un odg pour la tension Hall  $U_H$  en régime stationnaire.

ch5.Q29

### RÉPONSE :

(Redémo facultative :) En régime stationnaire :

$$\vec{E}_H = -\vec{v} \wedge \vec{B} = -\frac{\vec{j}}{-en} \wedge \vec{B} = \frac{IB_0}{\ell den} \vec{e}_x$$

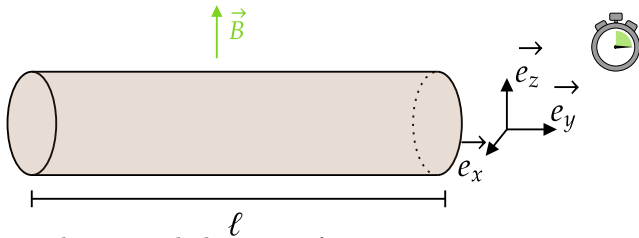
D'où, en supposant  $\vec{E}_H$  uniforme dans le semi-conducteur :

$$U_H = - \int_{x_0+\ell}^{x_0} dx \vec{e}_x \cdot \vec{E}_H = \frac{IB_0}{den}$$

D'où :

$$U_H = \frac{100}{1 \times 1,6 \times 10^{-19} \times 2 \times 10^{21}} \text{ V} = 0,33 \text{ V}$$

ch5.R29



Une tige de cuivre de longueur  $\ell = 30 \text{ cm}$  est parcourue par un courant  $I = 3 \text{ A}$  positif dans le sens indiqué par  $\vec{j}$ , et plongée dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  avec  $B_0 = 30 \text{ mT}$ . Déterminer la direction, le sens et la norme de la force de Laplace s'appliquant à cette tige.

ch5.Q30

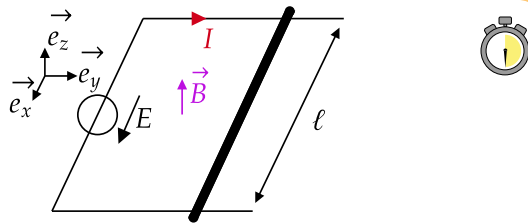
### RÉPONSE :

Un segment de longueur  $dx$  de la tige subit une force  $d\vec{F}_{La} = Idy \vec{e}_y \wedge \vec{B}$  et donc la force résultante est :

$$\vec{F}_{La} = \int_{y_0}^{y_0+\ell} dy I \vec{e}_y \wedge B_0 \vec{e}_z = IB_0 \ell \vec{e}_x$$

De norme  $F_{La} = 3 \times 0,03 \times 0,3 = 10 \text{ mN}$

ch5.R30



Une tige de masse  $m$  et résistance  $r$  est plongée dans un champ  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  ( $B_0 > 0$ ) uniforme et stationnaire, et posée sur un rail de résistance nulle, linéaire et semi-infini selon  $\vec{e}_x$ . Aux bornes du rail est appliquée une tension constante  $E > 0$ .

La tige est initialement à vitesse nulle : exprimer l'énergie cinétique finale acquise par le rail en fonction des données.

ch5.Q31

### RÉPONSE :

On obtient ce schéma électrique avec  $\phi = y(t)\ell B_0$  et  $e = -\dot{y}\ell B_0$ . Par loi des mailles et PFD appliqué à la tige on obtient :

$$\begin{cases} E - \dot{y}\ell B_0 + rI = 0 & (1) \\ m\ddot{y} = -IB_0\ell & (2) \end{cases} \quad (1) \times I + (2) \times \dot{y} \Rightarrow$$

$$(2) \text{ dans } (1) \text{ donne } \frac{E}{\ell B_0} - \dot{y} - \frac{rm}{B_0^2 \ell^2} \ddot{y} = 0 \text{ d'où } \dot{y} = \frac{E}{\ell B_0} (1 - e^{-t/\tau})$$

$$\text{et donc } \lim_{t \rightarrow +\infty} E_c = \frac{1}{2} m \left( \frac{E}{\ell B_0} \right)^2$$

ch5.R31

### RÉPONSE :

ch5.Q32

ch5.R32