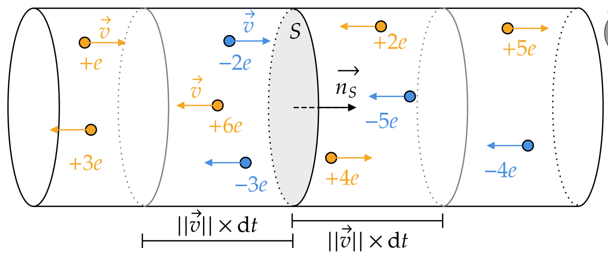


Le schéma représente à l'instant t les charges électriques dans un câble. Chaque charge a quasiment le même vecteur vitesse : seul son sens varie comme schématisé.
Exprimer le courant i traversant la surface S grisée dans le sens indiqué par $\vec{n_S}$ entre t et $t+\mathrm{d}t$, en fonction de e et $\mathrm{d}t$.

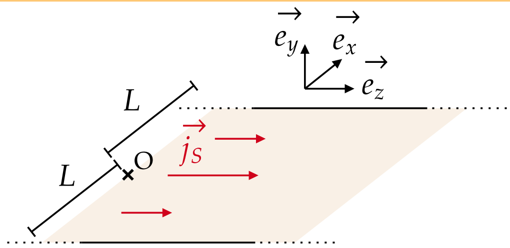
ch4.Q1

RÉPONSE :

Attention : Seules les charges traversant la surface seront comptées. Elles doivent donc être comprises dans le cylindre de surface S et hauteur $2||\vec{v}||\mathrm{d}t$ et avoir un vecteur vitesse pointant vers S.
On compte $\mathrm{d}q = -2e - (+2e - 5e) = +e$ donc :

$$\boxed{i = \frac{e}{\mathrm{d}t}}$$

ch4.R1



On considère un conducteur plan de largeur $2L$, parcouru par une densité surfacique de courant électrique $\vec{j_S} = j_{S0}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)\vec{e_z}$.
Déterminer le courant I traversant toute la largeur $2L$ de ce plan conducteur, compté positif dans le sens $+\vec{e_z}$.

ch4.Q2

RÉPONSE :

Pour une densité **surfacique** de courant électrique on a :

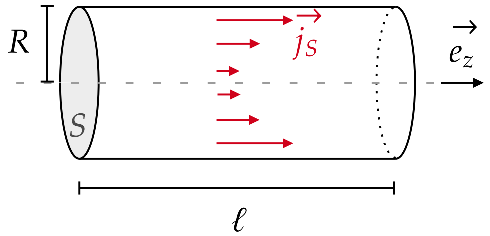
$$I = \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x \vec{e_z}.\vec{j_S}$$

En y injectant l'expression de $\vec{j_S}$:

$$I = \int_{-L}^{L} \mathrm{d}x j_{S0}\left(1 - \frac{x^2}{L^2}\right)$$

$$\boxed{I = j_{S0}\left(2L - \frac{2L}{3}\right) = \frac{4 j_{S0} L}{3}}$$

ch4.R2



On considère un fil de rayon R, parcouru par une densité de courant électrique $\vec{j} = j_0 \frac{r^2}{R^2}\vec{e_z}$.

Déterminer le courant I traversant toute la section S de ce fil, compté positif dans le sens $+\vec{e_z}$.

ch4.Q3

RÉPONSE :

Pour une densité de courant électrique on a :

$$I = \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta \vec{e_z}.\vec{j}$$

En y injectant l'expression de $\vec{j}$ et en intégrant selon θ :

$$I = 2\pi \int_0^R \mathrm{d}r j_0 \frac{r^3}{R^2}$$

$$\boxed{I = j_0 \pi \frac{R^2}{2}}$$

ch4.R3

Dans un métal, d'après le modèle de Drude, proposer un ordre de grandeur et l'unité SI pour :

- n le nombre de porteurs de charge par m^3
- ρ la densité volumique en charges libres
- γ_0 sa conductivité statique
- τ la constante de temps apparaissant dans le modèle de Drude

ch4.Q4

RÉPONSE :

- $n \underset{\text{pour Cu}}{\simeq} \frac{\mu_{Cu}\mathcal{N}_A}{M_{Cu}} \sim \frac{10^4 \times 6 \times 10^{23}}{6 \times 10^{-2}} \sim 10^{29}\ \mathrm{m}^{-3}$ car 1 électron libre par atome
- $\rho \underset{\text{pour Cu}}{=} -e \times n \sim -1,6 \times 10^{10}\ \mathrm{C/m}^3$ car un porteur de charge est un électron dans ce cas
- $\gamma_0 \underset{\text{pour Cu}}{\sim} 6 \times 10^7\ \Omega^{-1}.\mathrm{m}^{-1}$
- $\tau \underset{\text{pour Cu}}{\sim} 10^{-14}\ \mathrm{s}$

ch4.R4

On observe que la constante de temps τ du modèle de Drude diminue si la température T augmente.

Comment évolue donc la résistance R d'un câble suivant le modèle de Drude, lorsqu'il est chauffé ?

ch4.Q5

RÉPONSE :

Dans un câble, on a $R = \frac{\ell}{\gamma S}$.
Le modèle de Drude prévoit $\underline{\gamma}(\omega) = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}$.
Et donc $R = \frac{\ell}{S\mathrm{Re}\left(\frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}\right)}$.
La partie imaginaire de $\underline{\gamma}$ nécessiterait d'ajouter une capacité en série de la résistance pour modéliser correctement le conducteur.

$$\mathrm{Re}(\underline{\gamma}) = \mathrm{Re}\left(\frac{\gamma_0(1-j\omega\tau)}{1+\omega^2\tau^2}\right) = \frac{\gamma_0}{1+\omega^2\tau^2}$$

$\boxed{\text{Si } \tau \text{ augmente, } \mathrm{Re}(\underline{\gamma}) \text{ diminue et donc } R \text{ augmente.}}$

ch4.R5

Lorsque la conductivité électrique est complexe $\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont déphasés.
On considère alors :
- $\vec{j} = j_0 \cos(2\pi f t + \varphi)\vec{e_x}$
- $\vec{E} = \frac{j_0}{\gamma}\cos(2\pi f t)\vec{e_x}$

Exprimer la moyenne temporelle de la puissance volumique dissipée par effet Joule en fonction de φ, γ et j_0.

ch4.Q6

RÉPONSE :

On a la puissance volumique dissipée $P_V = \vec{j}.\vec{E}$ dont la moyenne temporelle $\langle P_V \rangle$ est :

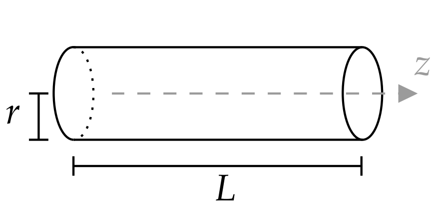
$$\langle P_V \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t \frac{j_0^2}{\gamma}\cos(2\pi f t + \varphi)\cos(2\pi f t)$$

Or $2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b)$ d'où :

$$\langle P_V \rangle = \frac{j_0^2}{2T\gamma}\int_{t_0}^{t_0+T} \mathrm{d}t\,[\cos(4\pi f t + \varphi) + \cos(\varphi)]$$

$$\boxed{\langle P_V \rangle = \frac{j_0^2}{2\gamma}\cos(\varphi)}$$

ch4.R6



On considère un matériau conducteur électrique de conductivité électrique γ, en forme de cylindre de rayon R et longueur L. Ce système est soumis en régime stationnaire à un champ $\vec{E} = E_0\vec{e_z}$.

Exprimer la résistance R du cylindre en fonction de γ, R et L, puis sa conductance G en fonction de sa résistivité ρ.

ch4.Q7

RÉPONSE :

Posons $U = V_{gauche} - V_{droite}$ et donc I compté positivement selon $+\vec{e_z}$. Par définition :

$$R \triangleq \frac{\int_z^{z+L} \vec{E}.\mathrm{d}\vec{e_z}}{\int_0^r \mathrm{d}r' \int_0^{2\pi} r'\mathrm{d}\theta\vec{e_z}.\gamma\vec{E}}$$

D'où $\boxed{R = \frac{L}{\gamma\pi r^2}}$.

Puisque $G = \frac{1}{R}$ et $\rho = \frac{1}{\gamma}$ on obtient : $\boxed{G = \frac{\pi r^2}{L\rho}}$.

ch4.R7

Un fil cylindrique en cuivre est utilisé pour chauffer des gants de moto.
Le fil est long de $L = 2$ m, et d'une section $S = 1$ mm^2. On considère que le vecteur densité de courant électrique qui y règne est stationnaire, uniforme, et dirigé selon l'axe de révolution des coordonnées cylindriques.
Calculer la puissance dissipée lorsque le fil est parcouru par un courant continu d'intensité $I = 5$ A.

ch4.Q8

RÉPONSE :

On sait que le cuivre suit la loi d'Ohm et donc que la puissance dissipée s'écrit :

$$P = RI^2$$

On a de plus obtenu pour un cylindre de cuivre que :

$$R = \frac{L}{\gamma S}$$

On a donc $\boxed{P = \frac{LI^2}{\gamma S} = \frac{50}{6\times10^7\times10^{-6}}\ \mathrm{W} \simeq 1\ \mathrm{W}}$

ch4.R8

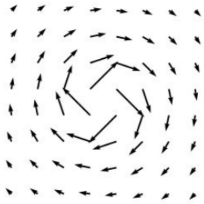
VRAI OU FAUX ?

$\text{div}\vec{j} = 0$ implique que le champ $\vec{j}$ est uniforme.

ch4.Q9

RÉPONSE :
FAUX

Par ex. $\vec{j} = \alpha x \vec{e_z}$ est tel que $\text{div}\vec{j} = 0$ mais $\vec{j}$ est non uniforme.
Idem pour $\vec{j} = A\left[\frac{x}{x^2+y^2}\vec{e_y} - \frac{y}{x^2+y^2}\vec{e_x}\right]$ de divergence nulle mais clairement non uniforme (ci-dessous) :



La réciproque en revanche est vraie

ch4.R9

VRAI OU FAUX ?

Un champ $\vec{j}$ à circulation conservative implique que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j} = \vec{0}$

ch4.Q10

RÉPONSE :

VRAI

Un $\vec{j}$ à circulation conservative est tel que, $\forall$ contour $\mathcal{C}$ fermé, sa circulation sur ce contour soit nulle d'où :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{j}.\text{d}\vec{\ell} = 0$$

Or, d'après le théorème de Stokes, avec S la surface quelconque entourée par le $\mathcal{C}$ fermé quelconque :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j}.\text{d}\vec{S} = 0$$

Vrai $\forall$ S et donc $\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j} = \vec{0}}$.

ch4.R10

Pour un conducteur électrique de conductivité γ, montrer qu'en régime stationnaire, si γ est uniforme, alors $\rho = 0$.

ch4.Q11

RÉPONSE :

On a $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\vec{j} = 0$ donc en régime stationnaire :

$$\text{div}\vec{j} = 0$$

Dans un conducteur $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ donc :

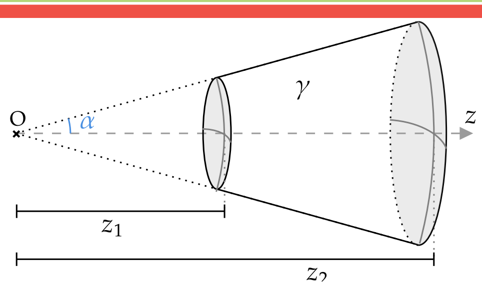
$$\text{div}(\gamma\vec{E}) = 0$$

Puisque γ est uniforme et non-nul (sinon $\vec{E}$ est nul et donc ρ aussi immédiatement d'après MG)

$$\text{div}\vec{E} = 0$$

Et donc, d'après l'équation de Maxwell-Gauss : $\boxed{\rho = 0}$.

ch4.R11



On considère un cône de sommet O tronqué par deux boules de rayon z_1 et z_2, rempli d'un matériau homogène de conductivité γ. Entre les surfaces à $||\overrightarrow{\text{OM}}|| = z_1$ et $||\overrightarrow{\text{OM}}|| = z_2$ règne en coordonnées cylindriques un potentiel $V(r, z) = \beta(r^2 + z^2)^{-1/2}$.
Déterminer la résistance R du conducteur électrique entre les surfaces à $||\overrightarrow{\text{OM}}|| = z_1$ et $||\overrightarrow{\text{OM}}|| = z_2$.

ch4.Q12

RÉPONSE :

On a $\vec{E} = -\vec{\nabla}V \underset{\text{en cartésiennes}}{=} \frac{\beta}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left[x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}\right]$

Et donc : $\vec{E} \underset{\text{en sphériques}}{=} \frac{\beta}{r^2}\vec{e_r}$

Les deux surfaces grisées sont bien des équipotentielles, le cône un tube de champ $\vec{E}$, et on pose $U = V(0, z_1) - V(0, z_2) = \beta(\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2})$ et I positif selon $+\vec{e_r}$ en sphériques.
Puisque $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, on note $I(r)$ le courant passant selon $+\vec{e_r}$ par l'intersection entre la sphère de rayon r et le cône. On a $I(r) = \int_0^\alpha r\text{d}\theta \int_0^{2\pi} r\sin\theta \text{d}\varphi \frac{\gamma\beta}{r^2}$
Donc $I = 2\pi(1 - \cos\alpha)\gamma\beta$ est indépendant de r.

D'où $\boxed{R = \dfrac{z_2 - z_1}{2\pi(1 - \cos\alpha)\gamma z_1 z_2}}$, lorsque $\alpha = \frac{\pi}{2}$ c'est l'ex.1

ch4.R12