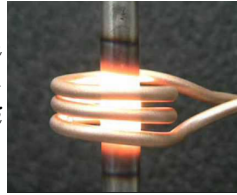


On considère un métal de conductivité électrique γ parcouru par une densité de courant électrique $\vec{j}(\vec{r}, t)$. Ce métal a une capacité thermique massique c , une masse volumique μ , une conductivité thermique λ , et on note $\vec{j}_{th}(\vec{r}, t)$ le vecteur densité de puissance thermique.

En régime stationnaire, déterminer l'équation reliant \vec{j}_{th} et \vec{j} .

Sur l'image on impose \vec{j} par induction ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$), le gradient de couleur traduit l'inhomogénéité de température (loi de Wien).



ch11.Q1

RÉPONSE :

Dans un métal de conductivité électrique finie la puissance volumique créée est :

$$P_{v,cr} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\gamma} \|\vec{j}\|^2$$

Le premier principe sur un volume quelconque donne (reprendre le III.2 du cours) :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_{th} = P_{v,cr}$$

En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ d'où :

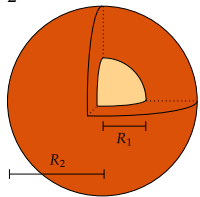
$$\gamma \text{div } \vec{j}_{th} = \|\vec{j}\|^2$$

ch11.R1

Le manteau terrestre est supposé être un matériau homogène de conductivité thermique λ , compris entre le rayon $R_1 = 3400$ km et le rayon $R_2 = 6400$ km.

Le problème est supposé invariant par rotation. On néglige tout transfert thermique par convection, et on néglige toute puissance volumique créée.

En régime stationnaire, exprimer la résistance thermique R_{th} du manteau terrestre.



Laplacien en sphériques :

$$\Delta A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial A}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial A}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 A}{\partial \varphi^2}$$

ch11.Q2

RÉPONSE :

En régime stationnaire, sans sources, l'équation de diffusion devient $\Delta T = 0$. Les invariances du problème indiquent que la température ne dépend pas de θ et φ donc $\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0$, d'où $\frac{dT}{dr} = \frac{\alpha}{r^2}$ et donc $T(r) = -\frac{\alpha}{r} + \beta$ avec α et β deux constantes.

La puissance thermique entrant dans le noyau en $r = R_1$ est donc : $P_{th} = \iint \vec{j}_{th}(R_1) \cdot d\vec{S} = \iint -\lambda \frac{\alpha}{R_1^2} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r R_1 d\theta d\varphi = -4\pi\lambda\alpha$

Or $T(R_2) - T(R_1) = \frac{\alpha}{R_1} - \frac{\alpha}{R_2}$ d'où $P_{th} = -4\pi\lambda \frac{T(R_2) - T(R_1)}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}}$

$$\Rightarrow R_{th} = \frac{T(R_1) - T(R_2)}{P_{th}} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2}$$

ch11.R2

VRAI ou FAUX ?

À une interface solide-solide en parfait contact, T peut être discontinu spatialement.

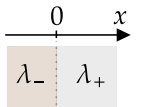


ch11.Q3

RÉPONSE :

FAUX

Notons λ_- la conductivité thermique du matériau en $x = 0^-$ et λ_+ la conductivité thermique du matériau en $x = 0^+$.



Supposons $T(x = 0^-) \neq T(x = 0^+)$. Alors, sur un système d'épaisseur dx tendant vers 0, on a $\frac{dT}{dx} \rightarrow \pm\infty$. Or la conductivité thermique λ est finie (comprise entre λ_- et λ_+ selon comment le système élémentaire est centré). La loi de Fourier donne alors $\vec{j}_{th} \cdot \vec{e}_x \rightarrow \pm\infty$ ce qui n'est pas acceptable physiquement.

D'ailleurs ce \vec{j}_{th} infini réchaufferait infiniment vite le système de capacité thermique quasi nulle $c\mu S dx$: la discontinuité se comblerait en un temps infiniment court.

ch11.R3

VRAI ou FAUX ?

$$\text{En régime stationnaire, } \oiint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = -P_{V,créé}$$

où $P_{V,créé}$ est la puissance créée dans le volume \mathcal{V} , volume délimité par la surface fermée \mathcal{S} , et $d\vec{S}$ pointe vers l'extérieur de la surface fermée.

ch11.Q4

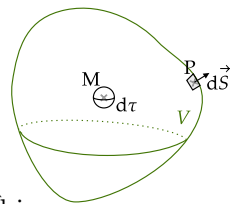
RÉPONSE :

FAUX

Le premier principe à un système fermé de volume \mathcal{V} entre t et $t + dt$ donne, avec $d\vec{S}$ pointant sortant : $U(t + dt) - U(t) = 0 = -P_{th} dt + P_{V,créé} dt$.

donc $0 = -\oiint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} + \iiint_V p_{v,cr} d\tau$ d'où :

$$\oiint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = P_{V,créé}$$



Attention : $\oiint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = -P_{V,créé}$ serait a priori faux, le théorème d'Ostrogradski impose que la surface d'intégration soit celle **fermée** délimitant le volume \mathcal{V} .

ch11.R4



Proposer un ordre de grandeur de λ la conductivité thermique pour chacun des matériaux suivants, à pression et température ambiante :

- L'aluminium
- La laine de verre
- Le béton
- L'eau liquide
- L'air

ch11.Q5

RÉPONSE :

On a :

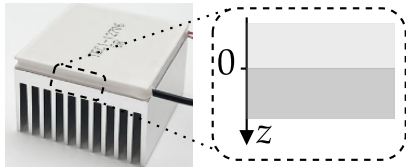
- Aluminium : $\lambda_a \simeq 200 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Laine de verre : $\lambda_l \simeq 0,05 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Béton : $\lambda_b \simeq 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Eau liquide : $\lambda_l \simeq 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- Air : $\lambda_l \simeq 0,05 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$

ch11.R5



VRAI ou FAUX ?

À une interface solide-solide entre deux solides différents comme schématisée ci-dessous, $\frac{\partial T}{\partial z}$ peut être discontinue, c'est-à-dire qu'il est possible que $\frac{\partial T}{\partial z}(x=0^-) \neq \frac{\partial T}{\partial z}(x=0^+)$.



ch11.Q6

RÉPONSE :

VRAI

À une interface solide-solide, le bilan de puissance sur un système d'épaisseur dz à l'interface donnait, lorsque $dz \rightarrow 0$:

$$\vec{j}_{th} \cdot \vec{e}_z(x, y, -dz/2, t) - \vec{j}_{th} \cdot \vec{e}_z(x, y, dz/2, t) = 0$$

La loi de Fourier donne alors, en notant λ_1 la conductivité thermique du solide en $z < 0$ et λ_2 celle du solide en $z > 0$:

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, -dz/2, t) = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, dz/2, t)$$

À moins que par chance $\lambda_1 = \lambda_2$ strictement, a priori

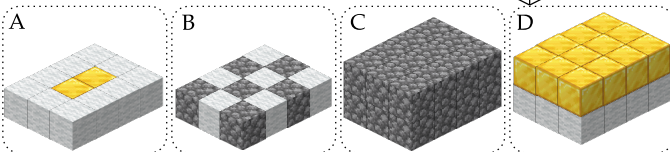
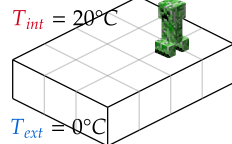
$$\frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z=0^-, t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z=0^+, t)$$

ch11.R6

Un creeper a acheté sur sol glacé et compare des planchers pour sa surface de $4\text{m} \times 3\text{m}$ soit 4×3 blocs.



	laine	pierre	or
R_{th} en K.W^{-1}	10	10^{-1}	10^{-3}

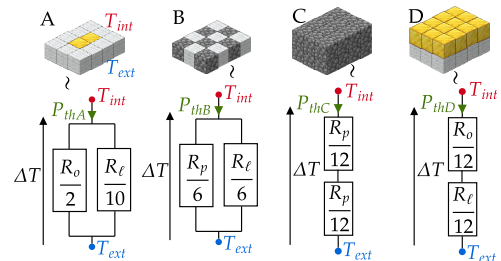


En régime stationnaire, classer chaque plancher par ordre croissant de puissance thermique qu'il laisserait traverser.

ch11.Q7

RÉPONSE :

$P_{th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th}}$ avec les schémas équivalents suivants :



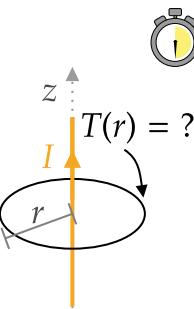
$$\Rightarrow R_A \simeq \frac{R_0}{2} < R_B \simeq \frac{R_p}{6} < R_C = \frac{R_p}{6} < R_D \simeq \frac{R_l}{12}, \text{ et donc :}$$

$$P_{thD} < P_{thC} < P_{thB} < P_{thA}$$

ch11.R7

Un fil électrique de rayon a et conductivité électrique γ est parcouru par I et supposé quasi-infini.

Il chauffe en régime stationnaire un matériau homogène (cuir de gant de moto), de conductivité thermique λ . On sait en $R > a$ que $T(r=R) = T_\infty$.



Pour $r \in [a; R]$, en déduire l'expression du profil de température $T(r)$.

Laplacien en cylindrique : $\Delta f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

ch11.Q8

RÉPONSE :

$$T(r) \xRightarrow{\text{loi de Fourier}} \vec{j}_{th} = j_{thr}(r) \vec{e}_r$$

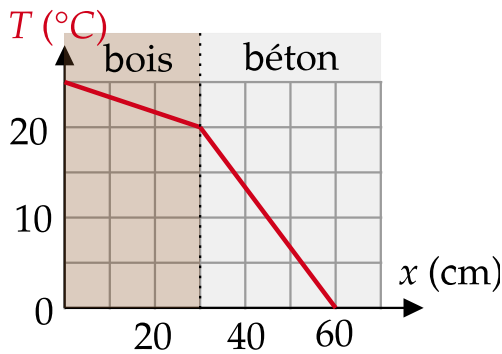
En R.S. la température du fil est constante et uniforme verticalement. Le 1er ppe sur une hauteur h de fil électrique donne donc : $j_{thr}(a) 2\pi a h = \pi a^2 h \frac{I^2}{\gamma(\pi a^2)^2}$ d'où $j_{thr}(a) = \frac{I^2}{2\pi^2 \gamma a^3}$.

Dans le cuir, $\Delta T = 0$ donc $\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r}$ d'où $T(r) = -A \ln(r) + B$ avec $T_\infty + A \ln(R) = B$ et $j_{thr}(a) = \frac{I^2}{2\pi^2 \gamma a^3} \xRightarrow{\text{Fourier}} -\lambda \frac{A}{a}$ d'où :

$$T(r) = -\frac{\lambda I^2}{2\pi^2 \gamma a^2} \ln\left(\frac{r}{R}\right) + T_\infty$$

Attention : sans imposer un cuir s'arrêtant en $r = R$, ce modèle divergerait à l'infini.

ch11.R8



En régime stationnaire, on observe le profil de température ci-dessus à une interface bois/béton. La conductivité thermique du bois est $\lambda_{\text{bois}} = 0,2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$. En déduire la conductivité thermique λ du béton.

ch11.Q9

RÉPONSE :

D'après la loi de Fourier :

$$j_{th}(x < 30\text{cm}) = \vec{j}_{th\text{bois}} \cdot \vec{e}_x = \lambda_{\text{bois}} \frac{\partial T}{\partial x}$$

À l'interface solide-solide bois/béton on a de plus $\vec{j}_{th\text{bois}}(x = 30\text{cm}) \cdot \vec{e}_x = \vec{j}_{th\text{béton}}(x = 30\text{cm}) \cdot \vec{e}_x$

$$\text{Donc : } \lambda_{\text{bois}} \frac{\partial T}{\partial x}(30\text{cm} - \varepsilon) = \lambda_{\text{béton}} \frac{\partial T}{\partial x}(30\text{cm} + \varepsilon)$$

Or on lit graphiquement $\frac{\partial T}{\partial x}(30\text{cm} - \varepsilon) \simeq 17 \text{ K/m}$ et $\frac{\partial T}{\partial x}(30\text{cm} + \varepsilon) \simeq 67 \text{ K/m}$ d'où :

$$\lambda_{\text{béton}} \simeq 4\lambda_{\text{bois}} = 0,8 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

ch11.R9



On étudie un glaçon de $3\text{cm} \times 3\text{cm} \times 3\text{cm}$ lors d'une expérience non spécifiée. Cette expérience consiste à mesurer un point tous les Δt .

On donne :

- la conductivité thermique de la glace $\lambda = 2 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
- sa capacité thermique massique $c = 2 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Quelle est la condition numérique sur Δt pour qu'on puisse supposer que la diffusion thermique a lieu en régime quasi-stationnaire dans le glaçon ?

ch11.Q10

RÉPONSE :

Le temps caractéristique de diffusion thermique sur une distance L est :

$$\tau \sim \frac{L^2}{D_{th}} \quad \text{où} \quad D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c}$$

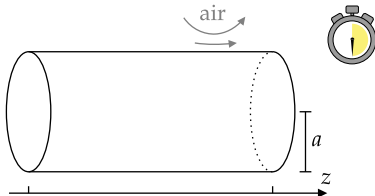
La taille caractéristique de variation de la température du glaçon est plutôt de $1,5 \text{ cm}$ (la température varie du cœur à la surface) d'où :

$$\tau \sim \frac{L^2 \mu c}{\lambda} \sim \frac{0,015 \times 0,015 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{2} = 200 \text{ s}$$

D'où, dès que $\Delta t \gg \tau$ on pourra supposer être dans l'ARQS du point de vue de la diffusion thermique.

ch11.R10

On considère en régime stationnaire un cylindre de métal très long, de sorte à ce que la température soit supposée ne dépendre que de z .



On note h le coefficient de convection thermique intervenant dans la loi de Newton, décrivant le transfert thermique ayant lieu sur la paroi radiale, entre le cylindre et l'air, de température T_a au loin.

Déterminer l'équation différentielle que suit $T(z)$ en fonction de T_a , h , a et λ la conductivité thermique du cylindre.

ch11.Q11

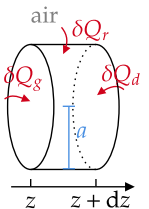
RÉPONSE :

Appliquons le premier principe entre t et $t + dt$

à une tranche d'épaisseur dz du cylindre. On a $dU = U(t + dt) - U(t) = 0 = \delta Q_{\text{tot}}$.

$$T(z) \Rightarrow \vec{j}_{th} = j(z) \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} \delta Q_g = dt \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r d\theta \vec{e}_z \cdot j(z) \vec{e}_z \\ \delta Q_d = dt \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r d\theta (-\vec{e}_z) \cdot j(z + dz) \vec{e}_z \\ \delta Q_r = dt dz \times 2\pi a h (T(z) - T_a) \end{cases}$$



Et donc $\pi a^2 \frac{dj}{dz} = 2\pi a h (T - T_a)$ et avec la loi de Fourier :

$$\frac{d^2 T}{dz^2} + \frac{2h}{\lambda a} (T - T_a) = 0$$

ch11.R11

En 2011, La ville d'Helsinki a constitué une pile de neige assimilable à un pavé droit de longueur $\ell = 100\text{m}$, hauteur $a = 10\text{m}$ et largeur $L = 10\text{m}$.

La température annuelle moyenne à Helsinki est de 10°C , le coefficient de convection par vent léger vaut environ $h \approx 5 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$, l'enthalpie massique de fusion de l'eau est $L_f \approx 3 \times 10^5 \text{ J.kg}^{-1}$, et l'albédo de la neige sale est d'environ $0,1$.

Proposer un ordre de grandeur de la durée Δt nécessaire pour que cette neige fonde.



ch11.Q12

RÉPONSE :

Notons $\Delta T = 10^\circ\text{C}$, la loi de Newton prévoit $P_{th} = hS\Delta T$ fournie par l'air à la glace où S varie lorsque la neige fond. Pour faire simple mettons que la fonte signifie à une diminution de la hauteur $a(t)$ du tas de neige, alors $S(t) = \ell L + 2a(t)(L + \ell)$ et donc : $L_f \mu_g L \ell \frac{da}{dt} + h \Delta T [\ell L + 2a(t)(L + \ell)] = 0$
 $\Rightarrow a(t) = (a(0) + \frac{\ell L}{2(L + \ell)}) e^{-t/\tau} - \frac{\ell L}{2(L + \ell)}$ avec $\tau = \frac{L_f \mu_g L \ell}{2h \Delta T (L + \ell)}$
 $a(\Delta t) = 0 \Rightarrow \Delta t = \tau \ln(1 + \frac{a(0)\ell L}{2(L + \ell)}) \simeq 3 \times 10^7 \text{ s} \simeq 1 \text{ an}!$

Si en moyenne $0,9 \times 350 = 315 \text{ W/m}^2$ de puissance surfacique radiative est absorbée, un corps noir à 273 K réémet $\sigma T_{neige}^4 \simeq 314 \text{ W/m}^2$, le forçage radiatif est négligeable devant les $\sim 50 \text{ W/m}^2$ de puissance surfacique fournie par conducto-convection.

ch11.R12