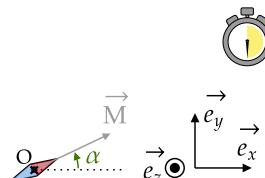


Un aimant de moment magnétique  $\vec{M}$  est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}(t) = B_0(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$ .  $\alpha$  est l'angle entre l'axe nord-sud de l'aimant, libre de tourner selon l'axe Oz, et  $\vec{e}_x$ .

$J$  est le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe Oz et on néglige tout frottement.

Déterminer l'équation différentielle suivie par  $\alpha(t)$  et commenter la condition pour avoir un couple moyen non-nul.

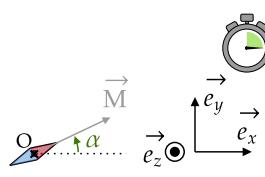


ch6.Q1

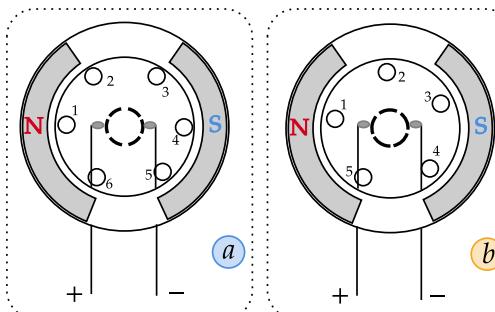
Un aimant de moment magnétique  $\vec{M}$  est plongé dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B}(t) = B_0(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$ . On note  $\alpha$  l'angle entre l'axe nord-sud de l'aimant, libre de tourner selon l'axe Oz, et  $\vec{e}_x$ .

$J$  est le moment d'inertie de l'aimant par rapport à l'axe Oz et  $\vec{I} = -k\vec{e}_z$  le couple mécanique résistant subit par l'aimant ( $k > 0$ ). On suppose une rotation synchrone en régime permanent, et que  $k$  initialement nul augmente très lentement.

À partir de quelle valeur de  $k$  la boussole décrochera-t-elle d'une rotation synchrone ? Commenter la valeur de l'angle entre  $\vec{M}$  et  $\vec{B}$  à cet instant.



ch6.Q2

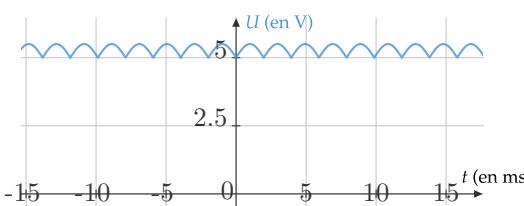


Dans chaque cas, relier d'une même couleur les lames de collecteur et fils de l'induit devant être reliés électriquement afin de réaliser correctement une MCC.

ch6.Q3

On utilise une MCC comme alternateur, et obtenons un signal de tension aux bornes de l'induit tel que tracé.

Le collecteur de cette MCC est constitué de 5 lames de cuivre comme schématisé.



Déterminer la vitesse angulaire de rotation du rotor.

ch6.Q4

## RÉPONSE :

Le couple électromagnétique reçu perçu par l'aimant est :

$$\vec{I} = \vec{M} \wedge \vec{B} = ||\vec{M}||B_0 [\cos(\alpha) \sin(\omega t) - \sin(\alpha) \cos(\omega t)] \vec{e}_z$$

$$\vec{I} = ||\vec{M}||B_0 \sin(\omega t - \alpha) \vec{e}_z$$

Le TMC appliqué au rotor par rapport à son axe de rotation donne alors :

$$J\ddot{\alpha}\vec{e}_z = ||\vec{M}||B_0 \sin(\omega t - \alpha) \vec{e}_z$$

Comme pour une MS,  $\langle \vec{I} \rangle \neq \vec{0}$  si  $\alpha = \omega t - \delta\alpha$  avec  $\delta\alpha$  indépendant du temps et alors  $\Gamma_z = ||\vec{M}||B_0 \sin(\delta\alpha)$ , comme pour la MS.

ch6.R1

## RÉPONSE :

En rotation synchrone on a, en régime permanent,  $\alpha = \omega t - \delta\alpha$ , et donc le TMC appliqué au rotor par rapport à son axe devient :

$$\vec{0} = \vec{I} - k\vec{e}_z = \vec{M} \wedge \vec{B} - k\vec{e}_z$$

En régime permanent de rotation synchrone l'angle entre  $\vec{B}$  et  $\vec{M}$  est constant et vaut  $\delta\alpha$  d'où :

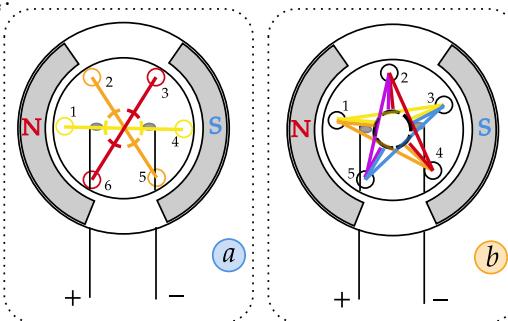
$$k = ||\vec{M}||B_0 \sin(\delta\alpha)$$

Lorsque  $k > ||\vec{M}||B_0$ , il n'y a plus possibilité de solution synchrone avec  $\delta\alpha = C^{\text{te}}$ , la boussole décroche et au moment du décrochage  $\delta\alpha = \frac{\pi}{2}$ , comme pour une MS.

ch6.R2

## RÉPONSE :

Il faut qu'à chaque instant la normale  $\vec{n}$  à la spire alimentée ( $\vec{n}$  étant colinéaire à son moment magnétique  $\vec{M}$ ) soit (quasi) orthogonale au champ statorique  $\vec{B}_s$  pour maximiser  $\vec{I} = \vec{M} \wedge \vec{B}_s$ .



ch6.R3

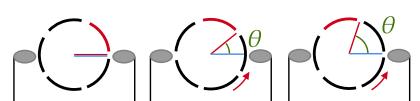


## RÉPONSE :

Les oscillations observées sont dues aux commutations des balais sur les lames du collecteur, comme vu en classe.

Les 5 lames du collecteur sont chacune espacées de  $\frac{360}{5} = 72^\circ$ . Or pour une machine à 5 lames au collecteur, on a une commutation tous les  $36^\circ$  donc 10 commutations par tour.

Or on compte 5 commutations en 10 ms donc 500 commutations par seconde d'où 50 tours par seconde,  $\omega \simeq 314 \text{ rad.s}^{-1}$

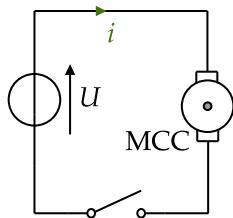


ch6.R4



On considère une MCC à excitation séparée : le champ statique est imposé par des solénoïdes parcourus par  $I_e$ .

En régime moteur, puis en régime alternateur, qu'arrive-t-il au couple électromagnétique reçu par le rotor et à la fcem y apparaissant lorsque on impose  $I_e = 0$  ?



ch6.Q5

### RÉPONSE :

Dans les deux cas :  $\vec{I}_{em} = \vec{M}_r \wedge \vec{B}_s$  avec  $\vec{B}_s \propto I_e$ , typiquement  $||\vec{B}_s|| = \mu_0 n I_e$  dans un solénoïde infini.

Si  $I_e = 0$ ,  $\vec{B}_s = \vec{0}$  et donc  $\vec{I}_{em} = \vec{0}$ .

Autrement dit, la force de Laplace s'appliquant sur les fils du rotor devient nulle puisque le champ magnétique dans lequel ils sont plongés devient nul.

$$E_{fcem} = \frac{d\Phi_{s \rightarrow r}}{dt} \text{ où } \Phi_{s \rightarrow r} = \iint \vec{B}_s \cdot d\vec{S}_r = 0 \text{ car } \vec{B}_s = \vec{0} \text{ d'où :}$$

$E_{fcem} = 0$

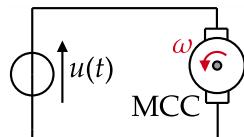
ch6.R5



On considère un moteur à courant continu ayant des aimants au stator, dont on note  $R$  la résistance électrique de l'induit. On néglige l'inductance propre de l'induit. Le rotor initialement immobile, on alimente à  $t > 0$  l'induit en imposant une tension continue  $U > 0$ .

Faire un schéma électrique de l'induit, puis expliquer pourquoi le courant d'induit est maximal au démarrage.

ch6.Q6



On considère un moteur à courant continu ayant des aimants au stator, dont on note  $R$  la résistance électrique de l'induit et dont on néglige l'inductance propre de l'induit. On considère la MCC comme un système linéaire d'entrée  $u$  et de sortie  $\omega$ .

Démontrer que la MCC se comporte comme un passe-bas, dont on proposera un ordre de grandeur de sa fréquence de coupure  $f_c$  pour le modèle présenté en classe.

ch6.Q7



À l'achat d'occasion, on lit sur une MCC la mention "12 V; 20 000 tr/min DC motor".

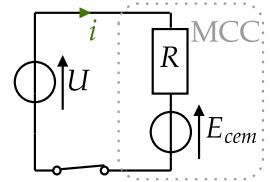
Comment alimenter cette MCC pour, à vide (sans couple résistant), obtenir un rotor tournant à 10 000 tr/min ?

ch6.Q8

### RÉPONSE :

On obtient ce schéma électrique. Par loi des mailles  $Ri + E_{cem} = U$  d'où :

$$i = \frac{U - \Phi\omega}{R}$$



ch6.R6

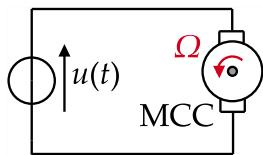
On démontre que  $\omega(t)$  est une fonction croissante avec le TMC appliqué au rotor // à son axe :  $J \frac{d\omega}{dt} = \Phi i = \frac{\Phi U - \Phi^2 \omega}{R}$  d'où  $\omega(t) = \frac{U}{\Phi}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  où  $\tau = \frac{RJ}{\Phi^2}$ .

Donc  $i$  minimal à  $t = 0$  lorsque  $\omega = 0$  d'où  $i$  maximal au démarrage.

### RÉPONSE :

On obtient ce schéma électrique. Par loi des mailles  $i = \frac{u - \Phi\Omega}{R}$ . Par TMC au rotor // à son axe  $J \frac{d\Omega}{dt} = \Phi i$ . On passe en RSF car le forçage  $u(t)$  est sinusoïdal et on obtient en combinant les équations :

$$j\omega\Omega = \frac{\Phi u - \Phi^2\Omega}{JR} \text{ et donc } \frac{\Omega}{u} = \frac{1/\Phi}{1+j\omega\tau} \text{ avec } \tau = \frac{1}{f_c} = \frac{JR}{\Phi^2}.$$



ch6.R7

À 10 V une MCC fait typiquement 100 tours/s donc  $\Phi \sim \frac{10}{600} \text{ V.rad}^{-1}.\text{s} \sim 15 \text{ mV.rad}^{-1}.\text{s}$ .

$R$  de l'ordre du Ohm (pas kiloOhm ou milliOhm),  $R \sim 1 \Omega$ , et pour un cylindre homogène  $J = \int r^2 dm = \frac{mR^2}{2} \sim \frac{0.1}{2} \times (0,02)^2 \text{ kg.m}^2 \sim 2 \times 10^{-5} \text{ kg.m}^2$ .  $\Rightarrow f_c \sim 10 \text{ Hz}$ .

ch6.R7

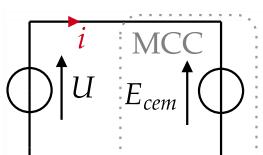
### RÉPONSE :

On suppose faute de davantage de données un moteur à courant continu idéal ( $R$  négligeable, etc.) de sorte à ce que  $U = E_{cem} = \Phi\Omega$ . Pour imposer  $\Omega$  il faut donc imposer une source de tension constante  $U$ .

$$\text{On obtient } \Phi = \frac{12 \text{ V}}{20000 \text{ tr/min}} = 6 \times 10^{-4} \text{ V.min/tr.}$$

Pour avoir  $\Omega = 10000 \text{ tr/min}$  il faut donc imposer

$$U = \frac{\Phi}{\Omega} = 6 \text{ V}$$



ch6.R8



On considère un moteur synchrone tournant en régime stationnaire.

Comment est affectée la vitesse de rotation du rotor lorsqu'on augmente en valeur absolue le frottement mécanique  $\Gamma_R < 0$  s'opposant au mouvement du rotor ?

ch6.Q9

### RÉPONSE :

**Rappel :** Pour une machine synchrone  $\Gamma = \frac{VB_{r0}B_{s0}}{2\mu_0} \sin(\delta_\alpha)$ , avec l'angle de rotation du rotor  $\alpha(t) = \omega t - \delta\alpha$ .

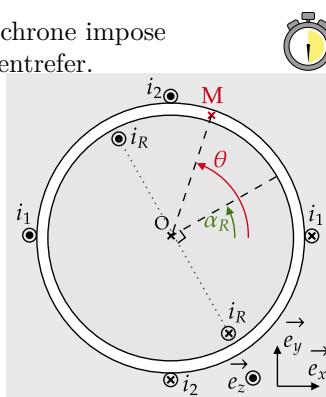
On a alors deux possibilités :

- Si  $\Gamma_R > -\frac{VB_{r0}B_{s0}}{2\mu_0}$ , alors  $\dot{\alpha}$  est inchangé égal à  $\omega$  la vitesse de rotation du champ magnétique statorique.
- Si  $\Gamma_R < -\frac{VB_{r0}B_{s0}}{2\mu_0}$ , alors il n'existe plus de solution synchrone, le couple moyen devient nul et  $\dot{\alpha}$  chute jusqu'à atteindre 0 : la machine décroche.

ch6.R9

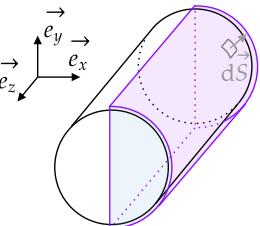
Un inducteur d'alternateur synchrone impose  $\vec{B}_r = B_{r0} \cos(\alpha_R - \theta) \vec{e}_r$  dans l'entrefer.

Chacun des 2 brins du stator contient  $N$  enroulements superposés, concentrés sur le même rectangle de surface  $\ell \times (R + e)$  chacun (on ne les répartit pas astucieusement pour obtenir un champ variant sinusoïdalement dans l'entrefer).



Déterminer en régime stationnaire de rotation à  $\omega$  la fem induite  $e_{r \rightarrow 1}$  et  $e_{r \rightarrow 2}$  dans chacun des 2 brins du stator.

ch6.Q10



### RÉPONSE :

On calcule  $\Phi_2$  pour une spire sur n'importe quelle surface s'appuyant sur le contour d'un rectangle du brin 2 (puisque  $\oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ ).

$$\Phi_2 = \int_0^\ell dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta B_{r0} \cos(\alpha_R - \theta)$$

D'où  $\Phi_2 = 2\ell B_{r0} \cos(\alpha_R)$  avec  $\alpha_R = \omega t - \delta\alpha$  d'où :

$$e_{r \rightarrow 2} = -N \frac{d\Phi_2}{dt} = -2N\ell B_{r0} \omega \sin(\omega t - \delta\alpha)$$

De même,  $\Phi_1 = \int_0^\ell dz \int_0^\pi d\theta B_{r0} \cos(\alpha_R - \theta)$  donc  $\Phi_1 = 2\ell B_{r0} \sin(\alpha_R)$ , enfin  $e_{r \rightarrow 1} = -2N\ell B_{r0} \omega \cos(\omega t - \delta\alpha)$

ch6.R10

### VRAI ou FAUX ?

Pour un moteur à courant continu, en régime stationnaire ajouter du frottement augmente la puissance dissipée par effet Joule dans l'induit.



### RÉPONSE :

**VRAI**

En régime stationnaire le TMC appliqué au rotor // à son axe de rotation impose  $\Gamma_{em} = -\Gamma_R$  où  $\Gamma_R < 0$ , s'opposant au mouvement.

Augmenter en valeur absolue de  $\Gamma_R$  augmente donc  $\Gamma_{em}$ , or pour une MCC  $\Gamma_{em} = \Phi i$  avec  $i$  le courant dans l'induit et  $\Phi$  une constante.

En conclusion, pour une MCC :

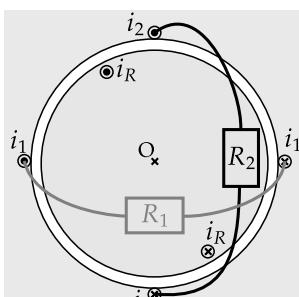
si  $\Gamma_R$  augmente,  $\Gamma_{em}$  augmente et donc  $i$  augmente.

ch6.Q11

ch6.R11



Un alternateur synchrone dont l'inducteur parcouru par  $i_R$  est fait d'une bobine de résistance  $r_R$  et d'inductance propre  $L_R$ , et l'enroulement n°1 (resp. 2) au stator est mis aux bornes d'une résistance de charge  $R_{c1}$  (resp.  $R_{c2}$ ) et parcouru par  $i_1$  (resp.  $i_2$ ).



Le rotor de cet alternateur reçoit un couple  $\Gamma > 0$  et est mis en rotation à une vitesse angulaire  $\Omega > 0$ .

Exprimer le rendement  $\eta$ .

ch6.Q12

### RÉPONSE :

$$\eta = \frac{\sum \text{Puissances utiles}}{\sum \text{Puissances coûteuses}}$$

Pour un alternateur les puissances utiles sont les puissances électriques fournies par l'inducteur,  $R_{c1}i_1^2$  et  $R_{c2}i_2^2$ .

Pour un alternateur les puissances coûteuses sont la puissance mécanique fournie, et ici également la puissance qu'il faut fournir pour alimenter l'inducteur (sans ça pas de fem induite au stator car pas de champ magnétique dans l'entrefer). Le courant dans l'inducteur est continu (car mime le champ B que produirait un aimant), donc  $u_{LR} = 0$  d'où :

$$\eta = \frac{R_{c1}i_1^2 + R_{c2}i_2^2}{\Gamma\Omega + r_R i_R^2}$$

ch6.R12