



On considère un champ électrique noté, en complexe :

$$\vec{E} = E_0 \exp(i[kx - \omega t]) \vec{e}_y$$

avec E_0 un complexe constant, dans un milieu non spécifié.

En déduire le vecteur de Poynting \vec{P} associé.

ch9.Q1

RÉPONSE :

On reconnaît une OPPM (plan d'onde à $x = C^{te}$, progressive selon les $x \nearrow$ et monochromatique de fréquence $\frac{\omega}{2\pi}$), donc on peut utiliser l'équation $\vec{k} \wedge \vec{E} = \omega \vec{B}$ (sinon utiliser M.F.).

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{k \vec{e}_x}{\omega} \wedge E_0 \exp(i[kx - \omega t]) \vec{e}_y \text{ d'où : } \vec{B} = \frac{k E_0}{\omega} \exp(i[kx - \omega t]) \vec{e}_z$$

En notant $E_0 = |E_0| e^{i\theta}$:

$$\vec{P} = \frac{\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})}{\mu_0} = \frac{k |E_0|^2}{\omega \mu_0} \cos^2(kx - \omega t + \theta) \vec{e}_x$$

On obtient strictement les mêmes résultats qu'en prenant $\vec{E}' = |E_0| e^{-i\theta} \exp(i[\omega t - kx]) \vec{e}_y$ son conjugué complexe : normal, leurs parties réelles sont identiques !

ch9.R1



VRAI ou FAUX ?

L'équation $\vec{B} = \frac{k \vec{e}_x}{\omega} \wedge \vec{E}$ permet de calculer \vec{B} si \vec{E} s'écrit comme une onde plane progressive.

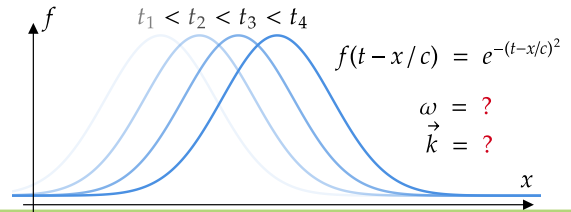
ch9.Q2

RÉPONSE :

FAUX

$\vec{B} = \frac{k \vec{e}_x}{\omega} \wedge \vec{E}$ nécessite que \vec{E} s'écrit comme une onde plane progressive **monochromatique**.

Une onde plane progressive quelconque se propageant selon x par exemple : $\vec{E} = f(t \pm \frac{x}{c}) \vec{e}_y$ n'est **a priori même pas périodique** : ω et k les pulsations temporelles et spatiales ne sont donc pas définies.



ch9.R2



VRAI ou FAUX ?

L'équation $\vec{B} = \frac{k \vec{e}_x}{\omega} \wedge \vec{E}$ permet, dans un métal suivant le modèle de Drude, de calculer \vec{B} si \vec{E} s'écrit comme une onde plane progressive monochromatique.



ch9.Q3

RÉPONSE :

VRAI

Dans un métal suivant le modèle de Drude, \vec{j} est relié à \vec{E} par $\gamma_0 \left(\vec{j} + \tau \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \right) = \gamma_0 \vec{E}$.

L'équation de Maxwell-Faraday $\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ne dépend pas de \vec{j} , donc la démonstration vue en application de cours est inchangée.

⚠ Attention : En revanche, dans un métal a priori $\vec{k} \wedge \vec{B} \neq -\mu_0 \varepsilon_0 \omega \vec{E}$ puisque $\vec{j} \neq \vec{0}$.

ch9.R3

Pour chacune des expressions ci-dessous de champs dans le vide, indiquer si elle correspond à une onde polarisée rectilignement, si oui préciser sa direction de polarisation.



A :
$$\vec{E}_A(z, t) = E_0 \exp\left(-\frac{z^2 - c^2 t^2}{\delta^2}\right) \vec{e}_x$$

B :
$$\vec{E}_B(x, y, t) = E_0 \cos(k_x x) \cos(\omega t - k_y y) \vec{e}_y$$

C :
$$\vec{B}_C(x, t) = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + \frac{\omega x}{c}) \vec{e}_y$$

D :
$$\vec{B}_D(z, t) = B_0 \left[\cos(\omega t - \frac{\omega z}{c}) \vec{e}_x + \sin(\omega t - \frac{\omega z}{c}) \vec{e}_y \right]$$

ch9.Q4

RÉPONSE :

- **A** : \vec{E} de direction constante au cours du temps selon l'axe (Ox) \Rightarrow polarisée rectilignement selon \vec{e}_x
- **B** : \vec{E} de direction constante selon l'axe (Oy) \Rightarrow polarisée rectilignement selon \vec{e}_y
- **C** : \vec{B}_C une OPPM dans le vide $\Rightarrow -\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \omega \vec{E}$ où $\vec{k} = -\frac{\omega}{c} \vec{e}_x$ donc $\vec{E}_C(x, t) = E_0 \cos(\omega t + \frac{\omega x}{c}) \vec{e}_z$ polarisé rectilignement selon \vec{e}_z
- **D** : \vec{B}_D une OPPM dans le vide $\Rightarrow \vec{E}_D = c B_0 [\sin(\omega t - \frac{\omega z}{c}) \vec{e}_x - \cos(\omega t - \frac{\omega z}{c}) \vec{e}_y]$ d'orientation variant au cours du temps (en $z = 0$, \vec{E}_D selon $-\vec{e}_y$ à $t = 0$ puis selon \vec{e}_x à $t = \frac{\pi}{2\omega}$) : donc pas polarisée rectilignement (mais polarisée circulairement)

ch9.R4



VRAI ou FAUX ?

L'équation de Maxwell écrite sous forme algébrique :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$$

est vraie si \vec{E} décrit une OPPM dans un plasma, avec \vec{k} a priori complexe.

ch9.Q5

RÉPONSE :

VRAI

L'équation de Maxwell-Faraday est inchangée quel que soit le milieu. Quant au fait que \vec{k} soit complexe, notons $\vec{k} = \vec{k}' + j\vec{k}''$. Prenons une OPPM complexe $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} e^{\vec{k}'' \cdot \vec{r}}$,

$$\text{rot} \vec{E} = e^{\vec{k}'' \cdot \vec{r}} e^{jX} \begin{pmatrix} E_{0z}(-jk'_y + k''_y) - E_{0y}(-jk'_z + k''_z) \\ E_{0x}(-jk'_z + k''_z) - E_{0z}(-jk'_x + k''_x) \\ E_{0y}(-jk'_x + k''_x) - E_{0x}(-jk'_y + k''_y) \end{pmatrix}$$

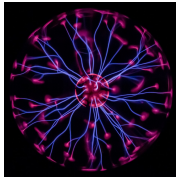
où $X = \omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r}$. On remarque que $\boxed{\text{rot} \vec{E} = -j\vec{k} \wedge \vec{E}}$.



Attention : l'éq. de M.A. diffère dans un plasma, $\vec{j} \neq \vec{0}$ ch9.R5



Démontrer l'équation de conservation de l'énergie dans un plasma quelconque. Interpréter le terme supplémentaire qui apparaît, en comparaison de l'équation de conservation de l'énergie dans le vide.



On rappelle que $\text{div} (\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{B}$

ch9.Q6

RÉPONSE :

$\text{div} (\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{B}$ donc (M.F. et M.A.) :

$$\mu_0 \text{div} (\vec{H}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \vec{E} \cdot \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

D'où :

$$\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \text{div} (\vec{H}) + \vec{j} \cdot \vec{E} = 0$$

Une puissance volumique dissipée $P_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$ apparaît. Cette puissance est bien dissipée car, si $\text{div} \vec{H} = 0$ et que $\vec{j} \cdot \vec{E} > 0$, on a effectivement décroissance de u_{em} au cours du temps.

Bonus : Pour un plasma non relativiste $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = \frac{n_e e^2}{m_e} \vec{E}$ càd, en RSF, $\vec{j} = \gamma(\omega) \vec{E}$ où $\gamma(\omega) = \frac{n_e e^2}{i\omega m_e}$. On peut alors démontrer, dans ce cadre, que $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle = 0$ ch9.R6



On considère un milieu quelconque où $\vec{j} = \vec{0}$ en tout point, dans lequel se propage une onde de champ magnétique écrite en complexe sous la forme :

$$\vec{B} = \frac{E_0}{c} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \vec{e}_x$$

avec $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$ où \vec{k}' et \vec{k}'' sont des vecteurs réels et constants. E_0 est un complexe constant.

En déduire la moyenne du vecteur de Poynting $\langle \vec{H} \rangle(\vec{r}, t)$ associé à cette onde.

On rappelle que $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

ch9.Q7

RÉPONSE :

On reconnaît une OPPM (plan d'onde de normale \vec{k} , progressive selon \vec{k} , monochromatique de pulsation ω).

On utilise donc $\vec{k} \wedge \vec{B} = -\mu_0 \epsilon_0 \omega \vec{E}$ (sinon passer en réels) : $\vec{E} = -\vec{k} \wedge \vec{e}_x \frac{E_0}{\omega} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$

On note $E_0 = |E_0| e^{i\phi}$ pour repasser en réels, puis obtenir :

$$\vec{H} = - \left[(\vec{k}' \wedge \vec{e}_x) \wedge \vec{e}_x \right] \frac{1}{\mu_0 \omega} |E_0|^2 e^{2\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \cos^2(X) + \left[(\vec{k}'' \wedge \vec{e}_x) \wedge \vec{e}_x \right] \frac{1}{\mu_0 \omega} |E_0|^2 e^{2\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \cos(X) \sin(X)$$

$$\text{où } X = \omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r} + \phi, \quad \boxed{\langle \vec{H} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \omega} |E_0|^2 e^{2\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \vec{k}''}$$

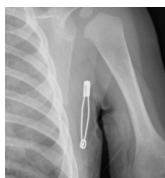
(div $\vec{B} = 0 \Rightarrow \vec{k}'' \cdot \vec{e}_x = 0$)

ch9.R7



Montrer que, pour le cuivre, il existe un intervalle de fréquences que l'on déterminera pour lesquelles le courant de déplacement \vec{j}_D vérifie $\|\vec{j}_D\| \gg \|\vec{j}\|$, et simultanément dans le modèle de Drude $\omega \tau \gg 1$.

En déduire la relation de dispersion, commenter la forme des ondes solution sur cet intervalle de fréquences.



ch9.Q8

RÉPONSE :

Pour du cuivre $\gamma_0 \sim 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$ et $\tau \sim 3 \times 10^{-15} s$.

• Si $\omega \tau \gg 1$ on a donc $f \gg \frac{1}{2\pi\tau} \Rightarrow f \gg 5 \times 10^{13} Hz$

• Si f tq $\|\vec{j}_D\| \gg \|\vec{j}\|$, sachant que $\omega \tau \gg 1 \Rightarrow \gamma \simeq \frac{\gamma_0}{i\omega\tau}$,

$$\text{alors } \frac{\|\vec{j}_D\|}{\|\vec{j}\|} \sim \frac{\epsilon_0 \omega \vec{E}}{\gamma_0 \vec{E} / (\omega \tau)} \gg 1 \Rightarrow \omega \gg \sqrt{\frac{\gamma_0}{\tau \epsilon_0}} \Rightarrow f \gg 10^{16} Hz$$

Si $f \in [10^{18} Hz; +\infty[$, les équations de Maxwell donnent $-\Delta \vec{E} = -\mu_0 \frac{\gamma_0}{\tau} \vec{E} - c^2 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ d'où $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0 \gamma_0}{\tau}$ donc k est

$$\text{réel et } \|\vec{j}_D\| \gg \|\vec{j}\| \Rightarrow \boxed{k \simeq \pm \frac{\omega}{c}}$$

\Rightarrow solutions en OPPM non atténuées ?! Pas du tout ce qu'on observe expérimentalement : le modèle de Drude est très faux à haute fréquence, les rayons X sont en réalité absorbés par les e^- de valence (modèle de l' e^- élastiquement lié). ch9.R8



Proposer un ordre de grandeur de fréquence pour chacune des ondes électromagnétiques ci-dessous :

- Tension alternative 220 V d'une prise secteur
- Signal d'une radio FM
- Signal de communication 4G
- Four Micro-onde
- Lumière réfléchie par une pomme verte
- Rayon X d'imagerie médicale

ch9.Q9

RÉPONSE :

- 220 V du secteur : $f = 50 \text{ Hz}$
- Radio FM : $f_{\text{porteuse}} \sim 100 \text{ MHz}$
- 4G : $f_{\text{porteuse}} \sim 2 \text{ GHz}$
- Four Micro-onde : $f_{\text{magnétron}} \sim 2 \text{ GHz}$
- Lumière verte : $f_{\text{vert}} \sim 6 \times 10^{14} \text{ Hz}$
- Rayon X : $f_X \sim 10^{19} \text{ Hz}$, $\lambda \sim 30 \text{ pm}$ ($< 10 \text{ nm}$ pour rayon X et $> 10 \text{ pm}$, sinon rayon gamma)

ch9.R9



Proposer une relation de dispersion pour chacune des ondes électromagnétiques ci-dessous :

- Tension alternative 220 V du secteur dans du cuivre.
- Signal d'une radio FM dans l'air
- Lumière verte dans du verre
- Rayon X d'imagerie médicale dans un plasma non-relativiste interstellaire (à base d'hydrogène avec $n \sim 10^{10} \text{ m}^{-3}$ d'électrons par unité de volume).

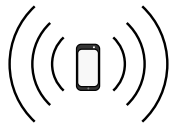
ch9.Q10

RÉPONSE :

On note $k = \|\vec{k}\|$.

- Le modèle de Drude à $f = 50 \text{ Hz}$ peut s'approximer par $\gamma \simeq \gamma_0(1 - i\omega\tau)$ puisque $\omega\tau \ll 1$, d'où $\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0\gamma_0(1 - i\omega\tau)$
- La radio FM se propageant (quasi) sans absorption dans l'air, on approxime l'air à un diélectrique d'indice optique réel $n = 1$, càd du vide : $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$
- Le verre étant transparent dans le visible, on approxime le verre à un diélectrique d'indice optique réel, en ordg $n \simeq 1,5$, donc $k^2 = n^2 \frac{\omega^2}{c^2}$
- Dans un plasma $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_p^2$ où $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}} \sim 5 \times 10^6 \text{ rad.s}^{-1}$, d'où $k = \pm \frac{\omega}{c} (1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2})$

ch9.R10



En coordonnées sphériques et en notation complexe, on note le champ électrique émis dans le vide par un téléphone portable :

$$\vec{E} = \frac{\alpha}{r} \exp[i(\omega t - kr)] \vec{e}_\theta \quad \text{avec } \alpha = 5 \text{ V et } k > 0$$

En déduire la valeur de la puissance surfacique moyenne reçue à $r = 1 \text{ m}$ de ce téléphone.

NB : En sphériques, $\vec{\text{rot}}(A(r)\vec{e}_\theta) = \frac{1}{r} \frac{\partial r A}{\partial r} \vec{e}_\varphi$

ch9.Q11

RÉPONSE :



Attention : L'onde n'est pas plane, on utilise donc l'équation de Maxwell-Faraday :

$$-i\omega \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{ik\alpha}{r} \exp[i(\omega t - kr)] \vec{e}_\varphi$$

Puisque dans le vide, on a ici $\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{e}_r$ d'où :

$\vec{B} = \frac{\alpha}{rc} \exp[i(\omega t - kr)] \vec{e}_\varphi$ et donc :

$$\vec{I} = \frac{\alpha^2}{r^2 c} \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r \Rightarrow \langle \vec{I} \rangle = \frac{\alpha^2}{2\mu_0 r^2 c} \vec{e}_r$$

A.N. pour $r = 1 \text{ m}$, $\langle \vec{I} \rangle \cdot \vec{e}_r = 30 \text{ mW.m}^{-2}$

ch9.R11



On considère un très long câble d'alimentation secteur à 50 Hz, produisant dans l'air (assimilé à du vide) le champ magnétique \vec{B} en coordonnées cylindriques :

$$\vec{B} = \frac{\beta}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot r \vec{e}_r) \vec{e}_z \quad \text{avec } \vec{k} = k_r \vec{e}_r \text{ où } k_r > 0$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{e}_z$$

En déduire le champ électrique \vec{E} de l'onde électrique associée.

ch9.Q12

RÉPONSE :



Attention : ce n'est pas une onde plane, les surfaces d'onde sont à $r = C^{\text{te}} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C^{\text{te}}$ ce qui décrit un cylindre et non un plan. On utilise donc l'équation de Maxwell Ampère dans le vide :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{\text{rot}} \vec{B} = - \left[\frac{\beta}{2r^{3/2}} \cos(\omega t - k_r r) + \frac{k_r \beta}{\sqrt{r}} \sin(\omega t - k_r r) \right] \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{c^2}{\omega} \left[\frac{k_r \beta}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - k_r r) - \frac{\beta}{2r^{3/2}} \sin(\omega t - k_r r) \right] \vec{e}_\theta + C^{\text{te}}$$

Et $C^{\text{te}} = \vec{0}$ car on étudie l'onde uniquement et pas l'éventuel champ statique. $k_r = \frac{\omega}{c}$ dans le vide d'où :

$$\vec{E} = \left[\frac{c\beta}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - k_r r) - \frac{\beta c^2}{2\omega r^{3/2}} \sin(\omega t - k_r r) \right] \vec{e}_\theta$$

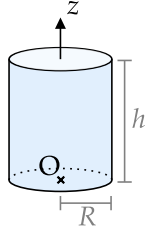
ch9.R12

On considère une onde électromagnétique émise dans le vide, écrite en coordonnées cylindriques :



$$\begin{cases} \vec{E} = c\beta \left[\frac{1}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - k_r r) - \frac{c}{2\omega r^{3/2}} \sin(\omega t - k_r r) \right] \vec{e}_\theta \\ \vec{B} = \frac{\beta}{\sqrt{r}} \cos(\omega t - k_r r) \vec{e}_z \end{cases}$$

Déterminer la puissance P moyenne reçue par la surface d'un cylindre de rayon R : comment la dépendance de P avec R .



ch9.Q13

RÉPONSE :

On calcule P via :

$$P = \int_0^h dz \int_0^{2\pi} R d\theta \vec{e}_r \cdot \langle \vec{H} \rangle$$

avec $\vec{H}(r, t) = c \frac{\beta^2}{\mu_0 r} [\cos^2(X) - \frac{c}{2\omega r} \cos(X) \sin(X)] \vec{e}_r$

où $X = \omega t - k_r r$ et donc $\langle \vec{H} \rangle = c \frac{\beta^2}{2\mu_0 r} \vec{e}_r$.

$$P = h\pi c \frac{\beta^2}{\mu_0}$$

P est indépendant du rayon R du cylindre pris, ce qui traduit la conservation de l'énergie électromagnétique lors de sa propagation dans le vide : la même puissance est récupérée si on englobe la source sur une distance plus élevée.

ch9.R13

VRAI ou FAUX ?



Quel que soit le milieu, si \vec{E} et \vec{B} sont des OPPM, on peut calculer la moyenne temporelle du vecteur de Poynting via :

$$\langle \vec{H} \rangle = \frac{\text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)}{2\mu_0}$$

où \vec{B}^* est le conjugué complexe de \vec{B} .

ch9.Q14

RÉPONSE :

VRAI

Dans le cas général on note une OPPM $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)}$ avec $\vec{E}_0 = \vec{C}^{\text{te}}$ et $\vec{k} = \vec{k}' + i\vec{k}''$ ne dépendant que de ω .

L'équation de Maxwell-Faraday impose que $\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$, \vec{B} s'écrit donc sous la forme $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)}$ d'où :

$$\text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \text{Re}(\vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0^*) e^{2\vec{k}'' \cdot \vec{r}}$$

$$\text{Or } \langle \text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B}) \rangle = \langle \vec{E}_0 \wedge \vec{B}_0^* e^{2\vec{k}'' \cdot \vec{r}} \cos^2(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r} + \varphi) \rangle$$

$$\text{Donc } \langle \text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B}) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

$$\text{D'où } \langle \vec{H} \rangle = \left\langle \frac{\text{Re}(\vec{E}) \wedge \text{Re}(\vec{B})}{\mu_0} \right\rangle = \frac{\text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)}{2\mu_0}$$

ch9.R14

Le modèle de Drude pour un métal donne, lorsque $\omega\tau \ll 1$ la relation de dispersion suivante :

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0\gamma_0$$

On suppose de plus que $\frac{\omega^2}{c^2} \gg \omega\mu_0\gamma_0$, la variable adimensionnée $\alpha = \frac{\omega\mu_0\gamma_0}{\omega^2/c^2}$ tendant vers 0.

En déduire $k' = \text{Re}(\underline{k})$ et $k'' = \text{Im}(\underline{k})$, chacun au premier ordre non nul. Autrement dit, déterminer le premier terme non nul des développements limités de k' et k'' en la variable α lorsque $\alpha \rightarrow 0$.

ch9.Q15

RÉPONSE :

Pour déterminer l'ordre 0 du développement en $\alpha = \frac{\omega\mu_0\gamma_0}{\omega^2/c^2}$, on impose $\alpha = 0$, donc $\underline{k}^2 \simeq \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow k' \simeq \pm \frac{\omega}{c} + O(\alpha)$ et $k'' \simeq 0 + O(\alpha)$.

$$\begin{cases} k'^2 - k''^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \\ 2k'k'' = -\omega\mu_0\gamma_0 \end{cases} \text{ devient, à l'ordre 1 } \begin{cases} k'^2 + O(\alpha^2) = \frac{\omega^2}{c^2} \\ \pm 2\frac{\omega}{c}k'' + O(\alpha^2) = -\omega\mu_0\gamma_0 \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} k' = \pm \frac{\omega}{c} + O(\alpha^2) \\ k'' = \mp \frac{1}{2}\mu_0\gamma_0 c + O(\alpha^2) \end{cases} \text{ où } \frac{1}{2}\mu_0\gamma_0 c = \frac{\omega}{2c}\alpha$$

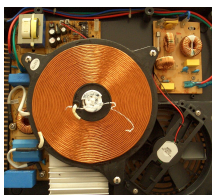
Bonus : $k'k'' < 0$ traduit ici que si $k' > 0$ (disons l'onde se propage selon $x \nearrow$), alors $k'' < 0$ (atténuation exponentielle pour $x \rightarrow +\infty$); et inversement.

ch9.R15

On étudie un métal suivant le modèle de Drude. Déterminer la relation de dispersion dans ce métal, milieu homogène et tel que $\omega\tau \ll 1$.



$$\text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = -\Delta \vec{A} + \text{grad}(\text{div} \vec{A}) \quad \forall \vec{A}$$



Ces hypothèses sont par exemple vérifiées dans le cuivre d'une plaque à induction

ch9.Q16

RÉPONSE :

Prendre le rotationnel de l'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\mu_0 \text{rot}(\vec{j}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = -\Delta \vec{B} + 0$$

Y injecter une OPPM comme $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp[i(\omega t - kx)]$ permet d'écrire $\text{rot}(\vec{j}) = \text{rot}(\gamma \vec{E})$ et donc, avec $\gamma(\omega) \underset{\omega\tau \ll 1}{\simeq} \gamma_0$, on obtient :

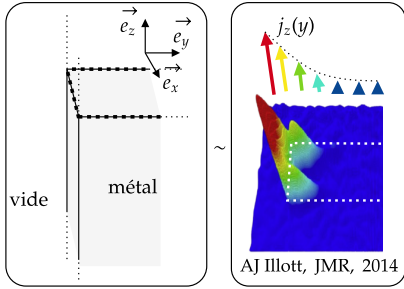
$$-i\omega\mu_0\gamma_0 + \frac{\omega^2}{c^2} = k^2$$

ch9.R16

On considère un métal ohmique (= suivant le modèle de Drude) situé en $y > 0$ et tel que $\omega\tau \ll 1$. De plus, on suppose que $\|\vec{j}_D\| \ll \|\vec{j}\|$. Déterminer l'équation différentielle que suit $\vec{j}(x, y, z, t)$.



Par étude des invariances, on admet qu'on peut chercher une solution sous la forme $\vec{j}(y, t) = \vec{\alpha} e^{-y/\delta} \cos(\omega t - ky + \psi)$. Sachant que $\vec{j}(y = 0, t) = j_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$, en déduire $\vec{j}(y, t)$.



ch9.Q17

RÉPONSE :

$$\text{rot}(\text{M.F.}) \Rightarrow -\Delta \vec{E} + \vec{0} = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_D)$$

Donc, avec ici $\|\vec{j}_D\| \ll \|\vec{j}\|$ et $\vec{j} = \gamma_0 \vec{E}$:

$$\Delta \vec{j} = \mu_0 \gamma_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

Y injecter la forme de solution donnée implique $\forall y > 0$ et $\forall t$: $\vec{\alpha} e^{-y/\delta} \left(\frac{1}{\delta^2} \cos X - 2 \frac{k}{\delta} \sin X - k^2 \cos X \right) = -\omega \vec{\alpha} e^{-y/\delta} \sin X$ où $X = \omega t - ky + \psi$ donc $\delta = \pm \frac{1}{k}$ où $k = \pm \sqrt{\frac{\mu_0 \omega \gamma_0}{2}}$. La C.L. impose finalement $\vec{\alpha} \cos \psi = j_0 \vec{e}_z$ où $\psi = \frac{\pi}{2}[\pi]$.

$$\Rightarrow \vec{j}(y, t) = j_0 e^{-y/\delta} \cos(\omega t - \frac{y}{\delta}) \vec{e}_z \text{ où } \delta = \pm \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \omega \gamma_0}}$$

ch9.R17

VRAI ou FAUX ?



On note \vec{E} le champ électrique noté en complexe.

Si $\text{Im}(\vec{E}) \neq \vec{0}$ alors il y a absorption, c'est-à-dire dissipation d'énergie dans le matériau lors de la propagation.

ch9.Q18

RÉPONSE :

FAUX

Lorsqu'on passe en complexe, par convention $\text{Re}(\vec{E}) = \vec{E}$ le vrai champ, mesurable.

$\text{Im}(\vec{E})$ n'a pas de sens physique particulier.

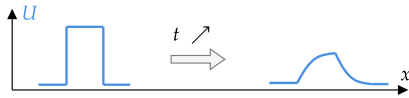
En revanche, lorsque $\text{Im}(\vec{k}) = \vec{k}'' \neq \vec{0}$, une solution en OPPM s'écrit sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[\vec{k}'' \cdot \vec{r}] \exp[i(\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r} + \phi)] \text{ ce qui donne :}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[\vec{k}'' \cdot \vec{r}] \cos[\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r} + \phi] \text{ atténué exponentiellement au cours de sa propagation.}$$

On n'observera jamais d'onde d'amplitude exponentiellement croissante selon sa direction de propagation, à moins de fournir continuellement de l'énergie au milieu ce que l'on ne considérera pas dans le cadre du programme.

ch9.R18



On étudie un champ électrique en notation complexe sous la forme d'une pseudo-onde plane progressive monochromatique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \phi)]$$

A priori, \vec{k} dépend de ω , \vec{E}_0 et ϕ sont des constantes.

Dans cette expression, qu'est-ce qui décrit :

- les phénomènes de dispersion ?
- les phénomènes d'atténuation ?
- les phénomènes de polarisation ?

ch9.Q19

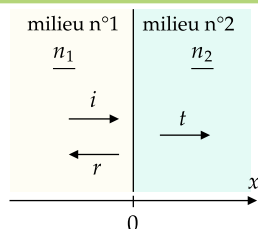
RÉPONSE :

On note $\vec{k} = k' \vec{e}_1 + ik'' \vec{e}_2$ avec \vec{e}_1 et \vec{e}_2 vecteurs unitaires.

- Dispersion : La dispersion $\Rightarrow v_\phi = \frac{\omega}{k'}$ dépend de ω . Si $k'(\omega)$ n'est pas proportionnel à ω , alors il y a dispersion.
- Atténuation : On a atténuation dès que $k'' \neq 0$. Un terme exponentiel atténue alors l'amplitude de l'onde lors de sa propagation $\vec{E} = \vec{E}_0 \exp[\vec{k}'' \cdot \vec{r}] \cos[\omega t - \vec{k}' \cdot \vec{r} + \phi]$. On parle de pseudo-OPPM (car plus vraiment progressive).
- Polarisation : La polarisation désigne la direction du champ \vec{E} et décrite par \vec{E}_0 . Pour des polarisation non-rectilignes, \vec{E}_0 peut être fonction de l'espace et du temps.

ch9.R19

On considère une interface entre deux milieux d'indice $\underline{n}_1(\omega) = \frac{k_1(\omega)c}{\omega}$ et $\underline{n}_2(\omega) = \frac{k_2(\omega)c}{\omega}$. $\vec{j}_s = \vec{0}$ sur le plan $x = 0$.



On note le champs électrique incident, réfléchi, et transmis :

$$\begin{cases} \vec{E}_i = E_0 \exp[i(\omega t - \underline{k}_1 x)] \vec{e}_y \\ \vec{E}_r = E_{0r} \exp[i(\omega t + \underline{k}_1 x)] \vec{e}_y \\ \vec{E}_t = E_{0t} \exp[i(\omega t - \underline{k}_2 x)] \vec{e}_y \end{cases}$$

En déduire les expressions de \underline{r} et \underline{t} en fonction de \underline{n}_1 et \underline{n}_2 .

ch9.Q20

RÉPONSE :

Les équations de continuité pour $\vec{E} \cdot \vec{e}_y$ et $\vec{B} \cdot \vec{e}_z$ donnent :

$$\begin{cases} \vec{E}_t(x=0^+, t) \cdot \vec{e}_y - (\vec{E}_i + \vec{E}_r)(x=0^-, t) \cdot \vec{e}_y = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_y \\ \vec{B}_t(x=0^+, t) \cdot \vec{e}_z - (\vec{B}_i + \vec{B}_r)(x=0^-, t) \cdot \vec{e}_z = j_{sx} = 0 \end{cases}$$

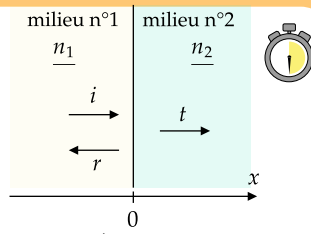
En remarquant que, par définition, $\underline{r} = \frac{\vec{E}_r \cdot \vec{e}_y}{\vec{E}_i \cdot \vec{e}_y}(x=0, t)$ et

$\underline{t} = \frac{\vec{E}_t \cdot \vec{e}_y}{\vec{E}_i \cdot \vec{e}_y}(x=0, t)$, et en calculant \vec{B} avec MF algébrisée :

$$\begin{cases} \underline{t} = 1 + \underline{r} & (a) \\ \underline{n}_2 \underline{t} = \underline{n}_1 (1 - \underline{r}) & (b) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{n}_1 \times (a) + (b) \Rightarrow \underline{t} = \frac{2\underline{n}_1}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \\ \underline{n}_2 \times (a) - (b) \Rightarrow \underline{r} = \frac{\underline{n}_1 - \underline{n}_2}{\underline{n}_1 + \underline{n}_2} \end{cases}$$

ch9.R20

On considère une interface entre deux milieux d'indice $\underline{n}_1(\omega) = \frac{k_1(\omega)c}{\omega}$ et $\underline{n}_2(\omega) = \frac{k_2(\omega)c}{\omega}$, où le champ électrique incident s'écrit $\vec{E}_i = E_{iy}\vec{e}_y = E_0 \exp[i(\omega t - k_1 x)] \vec{e}_y$



On donne le coefficient de réflexion $\underline{r} = \frac{\vec{E}_r \cdot \vec{e}_y}{\vec{E}_i \cdot \vec{e}_y}(x=0, t)$ et le coefficient de transmission $\underline{t} = \frac{\vec{E}_t \cdot \vec{e}_y}{\vec{E}_i \cdot \vec{e}_y}(x=0, t)$:

$$\underline{r} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

En déduire les expressions de R et T les coefficients de réflexion (resp. transmission) en puissance à l'interface. ch9.Q21

RÉPONSE :

$$R = \frac{\langle \vec{E}_r \wedge \vec{B}_r \rangle \cdot (-\vec{e}_x)}{\langle \vec{E}_i \wedge \vec{B}_i \rangle \cdot \vec{e}_x} \stackrel{\text{M.F. algébrisé}}{=} \frac{\langle \text{Re}(\underline{r} E_{iy}) \times \text{Re}(\underline{r} n_1 E_{iy}) \rangle}{\langle \text{Re}(\underline{r} E_{iy}) \times \text{Re}(\underline{r} n_1 E_{iy}) \rangle}$$

Or $\langle \text{Re}(\underline{r} E_{iy}) \text{Im}(\underline{r} E_{iy}) \rangle = 0$ et $\langle [\text{Re}(\underline{r} E_{iy})]^2 \rangle = \langle [\text{Im}(\underline{r} E_{iy})]^2 \rangle = \frac{E_0^2}{2}$ donc [...] :

$$R = \frac{r'^2 n_1' - r' r'' n_1'' + r' r'' n_1'' + n_1' r''^2}{n_1'} = |\underline{r}|^2$$

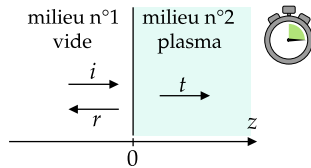
De même,

$$T = \frac{\langle \vec{E}_t \wedge \vec{B}_t \rangle \cdot \vec{e}_x}{\langle \vec{E}_i \wedge \vec{B}_i \rangle \cdot \vec{e}_x} = \frac{\langle \text{Re}(\underline{t} E_{iy}) \times \text{Re}(\underline{t} n_2 E_{iy}) \rangle}{\langle \text{Re}(\underline{r} E_{iy}) \times \text{Re}(\underline{r} n_1 E_{iy}) \rangle} \stackrel{[...]}{=} \frac{n_2' |\underline{t}|^2}{n_1'}$$

ch9.R21

Une onde incidente provenant du vide arrive sur un dioptré vide / plasma :

$$\vec{E}_i = E_0 \exp[i(\omega t - k_1 z)] \vec{e}_y$$



On admet que la relation de dispersion dans le plasma impose $k_2 = \pm \frac{i}{\delta}$ avec $\delta = C^{te}$. Les coefficients de réflexion $\underline{r} = \frac{\vec{E}_r \cdot \vec{e}_y}{\vec{E}_i \cdot \vec{e}_y}(x=0, t)$ et de transmission $\underline{t} = \frac{\vec{E}_t \cdot \vec{e}_y}{\vec{E}_i \cdot \vec{e}_y}(x=0, t)$ sont :

$$\underline{r} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \quad \text{et} \quad \underline{t} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

En déduire l'expression du champ électrique réfléchi \vec{E}_r et transmis \vec{E}_t , commenter leurs propriétés. ch9.Q22

RÉPONSE :

Dans le vide, $k_1 = \pm \frac{\omega}{c}$. De plus, on écrit a priori les OPPM réfléchies et transmises :

$$\vec{E}_r = E_{r0} \exp[i(\omega t + k_1 z)] \vec{e}_y \quad \text{et} \quad \vec{E}_t = E_{t0} \exp[i(\omega t - k_2 z)] \vec{e}_y$$

Et $E_{r0} \exp[i(\omega t + k_1 \times 0)] = \underline{r} E_0 \exp[i(\omega t - k_1 \times 0)]$ donc $E_{r0} = \underline{r} E_0$ on a une **OPPM** réfléchie déphasée par rapport à l'onde incidente mais de même amplitude car ici $|\underline{r}| = 1$.

$E_{t0} \exp[i(\omega t - k_2 \times 0)] = \underline{t} E_0 \exp[i(\omega t - k_1 \times 0)]$ donc $E_{t0} = \underline{t} E_0$ on a une **onde évanescente** ($k_2 \in i\mathbb{R}$) d'amplitude différente de l'onde incidente, et déphasée a priori.

Toutes deux sont polarisées rectilignement selon \vec{e}_y . ch9.R22

RÉPONSE :

RÉPONSE :

ch9.Q23

ch9.R23

ch9.Q24

ch9.R24