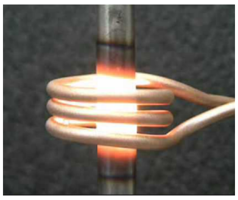
On considère un métal de conductivité électrique γ parcouru par une densité de courant électrique $\vec{j}(\vec{r},t)$. Ce métal a une capacité thermique massique c, une masse volumique μ, une conductivité thermique λ, et on note $\vec{j}_{th}(\vec{r},t)$ le vecteur densité de puissance thermique.

En régime stationnaire, déterminer l'équation reliant $\vec{j}_{th}$ et $\vec{j}$.

Sur l'image on impose $\vec{j}$ par induction ($\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$), le gradient de couleur traduit l'inhomogénéité de température (loi de Wien).



ch11.Q1

RÉPONSE :

Dans un métal de conductivité électrique finie la puissance volumique créée est :

$$P_{v,cr} = \vec{j}.\vec{E} = \frac{1}{\gamma}\|\vec{j}\|^2$$

Le premier principe sur un volume quelconque donne (reprendre le III.2 du cours) :

$$\mu c \frac{\partial T}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}_{th} = P_{v,cr}$$

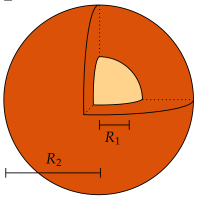
En régime stationnaire $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ d'où :

$$\boxed{\gamma \mathrm{div}\,\vec{j}_{th} = \|\vec{j}\|^2}$$

ch11.R1

Le manteau terrestre est supposé être un matériau homogène de conductivité thermique λ, compris entre le rayon $R_1 = 3400$ km et le rayon $R_2 = 6400$ km. Le problème est supposé invariant par rotation. On néglige tout transfert thermique par convection, et on néglige toute puissance volumique créée.

En régime stationnaire, exprimer la résistance thermique R_{th} du manteau terrestre.



Laplacien en sphériques :

$$\Delta A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2}$$

ch11.Q2

RÉPONSE :

En régime stationnaire, sans sources, l'équation de diffusion devient $\Delta T = 0$. Les invariances du problèmes indiquent que la température ne dépend pas de θ et φ donc $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = 0$, d'où $\frac{dT}{dr} = \frac{\alpha}{r^2}$ et donc $T(r) = -\frac{\alpha}{r} + \beta$ avec α et β deux constantes.

La puissance thermique entrant dans le noyau en $r = R_1$ est donc : $P_{th} = \iint \vec{j}_{th}(R_1).\mathrm{d}\vec{S} = \iint -\lambda\frac{\alpha}{R_1^2}\vec{e_r}.\vec{e_r}R_1\mathrm{d}\theta R_1\sin\theta\mathrm{d}\varphi = -4\pi\lambda\alpha$

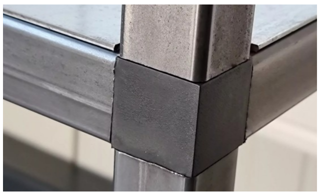
Or $T(R_2) - T(R_1) = \frac{\alpha}{R_1} - \frac{\alpha}{R_2}$ d'où $P_{th} = -4\pi\lambda\frac{T(R_2)-T(R_1)}{\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}}$

$$\Rightarrow \boxed{R_{th} = \frac{T(R_1)-T(R_2)}{P_{th}} = \frac{R_2 - R_1}{4\pi\lambda R_1 R_2}}$$

ch11.R2

VRAI ou FAUX ?

À une interface solide-solide en parfait contact, T peut être discontinu spatialement.

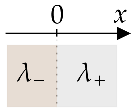


ch11.Q3

RÉPONSE :

FAUX

Notons λ_- la conductivité thermique du matériau en $x = 0^-$ et λ_+ la conductivité thermique du matériau en $x = 0^+$.



Supposons $T(x = 0^-) \neq T(x = 0^+)$. Alors, sur un système d'épaisseur $\mathrm{d}x$ tendant vers 0, on a $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} \underset{\mathrm{d}x\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$. Or la conductivité thermique λ est finie (comprise entre λ_- et λ_+ selon comment le système élémentaire est centré). La loi de Fourier donne alors $\vec{j}_{th}.\vec{e_x} \underset{\mathrm{d}x\to 0}{\longrightarrow} \pm\infty$ ce qui n'est pas acceptable physiquement.

D'ailleurs ce $\vec{j}_{th}$ infini réchaufferait infiniment vite le système de capacité thermique quasi nulle $c\mu S\mathrm{d}x$: la discontinuité se comblerait en un temps infiniment court.

ch11.R3

VRAI ou FAUX ?

En régime stationnaire, $\oiint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{th}.\mathrm{d}\vec{S} = -P_{\mathcal{V},\text{créé}}$

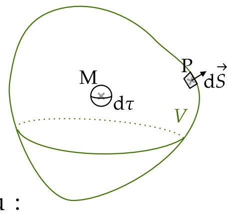
où $P_{\text{créé}}$ est la puissance créée dans le volume $\mathcal{V}$, volume délimité par la surface fermée $\mathcal{S}$, et $\mathrm{d}\vec{S}$ pointe vers l'extérieur de la surface fermée.

ch11.Q4

RÉPONSE :

FAUX

Le premier principe à un système fermé de volume $\mathcal{V}$ entre t et $t + \mathrm{d}t$ donne, avec $\mathrm{d}\vec{S}$ pointant sortant : $U(t+\mathrm{d}t) - U(t) \underset{\text{R.S}}{=} 0 \underset{\text{1er ppe}}{=} -P_{th}\mathrm{d}t + P_{\mathcal{V},\text{créé}}\mathrm{d}t$.



donc $0 = -\oiint_{\mathcal{S}} \vec{j_{th}}.\mathrm{d}\vec{S} + \iiint_{\mathcal{V}} p_{v\,cr}\mathrm{d}\tau$ d'où :

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{th}.\mathrm{d}\vec{S} = P_{\mathcal{V},\text{créé}}}$$

Attention: $\iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_{th}.\mathrm{d}\vec{S} = -P_{\mathcal{V},\text{créé}}$ serait a priori faux, le théorème d'Ostrogradski impose que la surface d'intégration soit celle **fermée** délimitant le volume $\mathcal{V}$.

ch11.R4

Proposer un ordre de grandeur de λ la conductivité thermique pour chacun des matériaux suivants, à pression et température ambiante :

- L'aluminium
- La laine de verre
- Le béton
- L'eau liquide
- L'air

ch11.Q5

RÉPONSE :

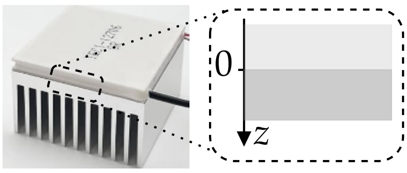
On a :

- Aluminium : $\lambda_a \simeq 200$ W.m^{-2}.K^{-1}
- Laine de verre : $\lambda_l \simeq 0,05$ W.m^{-2}.K^{-1}
- Béton : $\lambda_l \simeq 1$ W.m^{-2}.K^{-1}
- Eau liquide : $\lambda_l \simeq 1$ W.m^{-2}.K^{-1}
- Air : $\lambda_l \simeq 0,05$ W.m^{-2}.K^{-1}

ch11.R5

VRAI ou FAUX ?

À une interface solide-solide entre deux solides différents comme schématisée ci-dessous, $\frac{\partial T}{\partial z}$ peut être discontinue, càd qu'il est possible que $\frac{\partial T}{\partial z}(x = 0^-) \neq \frac{\partial T}{\partial z}(z = 0^+)$.



ch11.Q6

RÉPONSE :

VRAI

À une interface solide-solide, le bilan de puissance sur un système d'épaisseur dz à l'interface donnait, lorsque d$z \to 0$:

$$\vec{j}_{th}.\vec{e_z}(x, y, -\mathrm{d}z/2, t) - \vec{j}_{th}.\vec{e_z}(x, y, \mathrm{d}z/2, t) = 0$$

La loi de Fourier donne alors, en notant λ_1 la conductivité thermique du solide en $z < 0$ et λ_2 celle du solide en $z > 0$:

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, -\mathrm{d}z/2, t) = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, \mathrm{d}z/2, t)$$

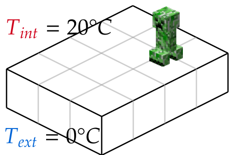
À moins que par chance $\lambda_1 = \lambda_2$ strictement, a priori

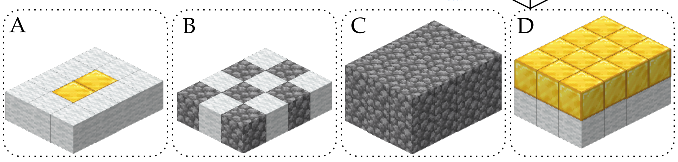
$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z = 0^-, t) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\partial T}{\partial z}(x, y, z = 0^+, t)}$$

ch11.R6

Un creeper a acheté sur sol glacé et compare des planchers pour sa surface de 4m×3m soit 4×3 blocs.

	laine	pierre	or
R_{th} en K.W^{-1}	10	10^{-1}	10^{-3}



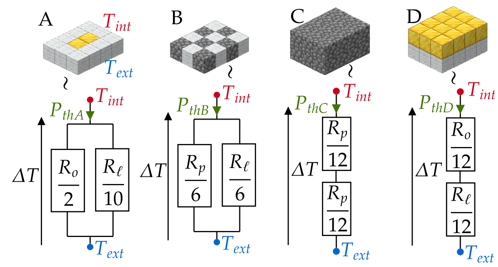


En régime stationnaire, classer chaque plancher par ordre croissant de puissance thermique qu'il laisserait traverser.

ch11.Q7

RÉPONSE :

$P_{th} = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_{th}}$ avec les schémas équivalents suivants :

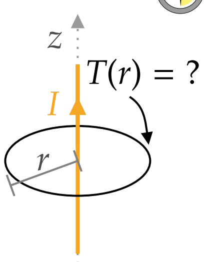


$\Rightarrow R_A \simeq \frac{R_0}{2} < R_B \simeq \frac{R_p}{6} < R_C = \frac{R_p}{6} < R_D \simeq \frac{R_\ell}{12}$, et donc :

$$\boxed{P_{thD} < P_{thC} < P_{thB} < P_{thA}}$$

ch11.R7

Un fil électrique de rayon a et conductivité électrique γ est parcouru par I et supposé quasi-infini.
Il chauffe en régime stationnaire un matériau homogène (cuir de gant de moto), de conductivité thermique λ. On sait en $R > a$ que $T(r = R) = T_\infty$.



Pour $r \in [a; R]$, en déduire l'expression du profil de température $T(r)$.

Laplacien en cylindrique : $\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

ch11.Q8

RÉPONSE :

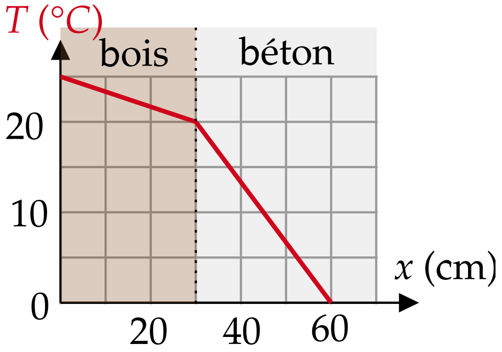
$T(r) \underset{\text{loi de Fourier}}{\Rightarrow} \vec{j}_{th} = j_{thr}(r)\vec{e_r}$

En R.S. la température du fil est constante et uniforme verticalement. Le 1er ppe sur une hauteur h de fil électrique donne donc : $j_{thr}(a)2\pi ah = \pi a^2 h \frac{I^2}{\gamma(\pi a^2)^2}$ d'où $j_{thr}(a) = \frac{I^2}{2\pi^2\gamma a^3}$.
Dans le cuir, $\Delta T = 0$ donc $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = \frac{A}{r}$ d'où $T(r) = -A\ln(r) + B$ avec $T_\infty + A\ln(R) = B$ et $j_{thr}(a) = \frac{I^2}{2\pi^2\gamma a^3} \underset{\text{Fourier}}{=} -\lambda\frac{A}{a}$ d'où :

$$\boxed{T(r) = -\frac{\lambda I^2}{2\pi^2\gamma a^2}\ln(\frac{r}{R}) + T_\infty}$$

Attention : sans imposer un cuir s'arrêtant en $r = R$, ce modèle divergerait à l'infini.

ch11.R8



En régime stationnaire, on observe le profil de température ci-dessus à une interface bois/béton. La conductivité thermique du bois est $\lambda_{\text{bois}} = 0{,}2$ W.m^{-1}.K^{-1}. En déduire la conductivité thermique λ du béton.

ch11.Q9

RÉPONSE :

D'après la loi de Fourier :

$$j_{thx}(x < 30\text{cm}) = \vec{j}_{th\text{bois}}.\vec{e_x} = \lambda_{\text{bois}} \frac{\partial T}{\partial x}$$

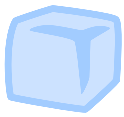
À l'interface solide-solide bois/béton on a de plus $\vec{j}_{th\text{bois}}(x = 30\text{cm}).\vec{e_x} = \vec{j}_{th\text{béton}}(x = 30\text{cm}).\vec{e_x}$

$$\text{Donc : } \lambda_{\text{bois}} \frac{\partial T}{\partial x}(30\text{cm} - \varepsilon) = \lambda_{\text{béton}} \frac{\partial T}{\partial x}(30\text{cm} + \varepsilon)$$

Or on lit graphiquement $\frac{\partial T}{\partial x}(30\text{cm} - \varepsilon) \simeq 17$ K/m et $\frac{\partial T}{\partial x}(30\text{cm} + \varepsilon) \simeq 67$ K/m d'où :

$$\boxed{\lambda_{\text{béton}} \simeq 4\lambda_{\text{bois}} = 0{,}8\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}}$$

ch11.R9



On étudie un glaçon de 3cm × 3cm × 3cm lors d'une expérience non spécifiée. Cette expérience consiste à mesurer un point tous les Δt.

On donne :

- la conductivité thermique de la glace $\lambda = 2$ W.m^{-1}.K^{-1}
- sa capacité thermique massique $c = 2$ kJ.kg^{-1}.K^{-1}

Quelle est la condition numérique sur Δt pour qu'on puisse supposer que la diffusion thermique a lieu en régime quasi-stationnaire dans le glaçon ?

ch11.Q10

RÉPONSE :

Le temps caractéristique de diffusion thermique sur une distance L est :

$$\tau \sim \frac{L^2}{D_{th}} \qquad \text{où} \qquad D_{th} = \frac{\lambda}{\mu c}$$

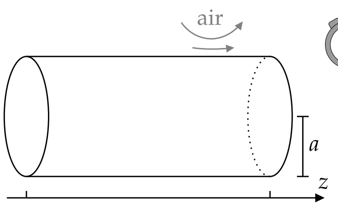
La taille caractéristique de variation de la température du glaçon est plutôt de 1,5 cm (la température varie du cœur à la surface) d'où :

$$\tau \sim \frac{L^2 \mu c}{\lambda} \sim \frac{0,015 \times 0,015 \times 10^3 \times 2 \times 10^3}{2} = 200\text{ s}$$

D'où, dès que $\Delta t \gg \tau$ on pourra supposer être dans l'ARQS du point de vue de la diffusion thermique.

ch11.R10

On considère en régime stationnaire un cylindre de métal très long, de sorte à ce que la température soit supposée ne dépendre que de z.

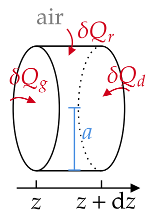


On note h le coefficient de convection thermique intervenant dans la loi de Newton, décrivant le transfert thermique ayant lieu sur la paroi radiale, entre le cylindre et l'air, de température T_a au loin.

Déterminer l'équation différentielle que suit $T(z)$ en fonction de T_a, h, a et λ la conductivité thermique du cylindre.

ch11.Q11

RÉPONSE :



Appliquons le premier principe entre t et $t + \mathrm{d}t$ à une tranche d'épaisseur $\mathrm{d}z$ du cylindre. On a $\mathrm{d}U = U(t + \mathrm{d}t) - U(t) \underset{\text{stationnaire}}{=} 0 \underset{1^{\text{er}}\text{ppe}}{=} \delta Q_{tot}$.

$T(z) \underset{\text{Fourier}}{\Rightarrow} \vec{j}_{th} = j(z)\vec{e_z}$

$$\begin{cases} \delta Q_g = & \mathrm{d}t \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta \vec{e_z}.j(z)\vec{e_z} \\ \delta Q_d = & \mathrm{d}t \int_0^a \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} r\mathrm{d}\theta(-\vec{e_z}).j(z + \mathrm{d}z)\vec{e_z} \\ \delta Q_r = & \mathrm{d}t\mathrm{d}z \times 2\pi a h(T(z) - T_a) \end{cases}$$

Et donc $\pi a^2 \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}z} = 2\pi a h(T - T_a)$ et avec la loi de Fourier :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}z^2} + \frac{2h}{\lambda a}(T - T_a) = 0}$$

ch11.R11

En 2011, La ville d'Helsinki a constitué une pile de neige assimilable à un pavé droit de longueur $\ell = 100$m, hauteur $a = 10$m et largeur $L = 10$m.

La température annuelle moyenne à Helsinki est de 10°C, le coefficient de convection par vent léger vaut environ $h \approx 5$ W.m^{-2}.K^{-1}, l'enthalpie massique de fusion de l'eau est $L_f \approx 3 \times 10^5$ J.kg^{-1}, et l'albédo de la neige sale est d'environ 0,1.

Proposer un ordre de grandeur de la durée Δt nécessaire pour que cette neige fonde.

ch11.Q12

RÉPONSE :

Notons $\Delta T = 10$°C, la loi de Newton prévoit $P_{th} = hS\Delta T$ fournie par l'air à la glace où S varie lorsque la neige fond. Pour faire simple mettons que la fonte signifie à une diminution de la hauteur $a(t)$ du tas de neige, alors $S(t) = \ell L + 2a(t)(L+\ell)$ et donc : $L_f \mu_g L\ell \frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + h\Delta T[\ell L + 2a(t)(L + \ell)] = 0$

$\Rightarrow a(t) = (a(0) + \frac{\ell L}{2(\ell+L)})e^{-t/\tau} - \frac{\ell L}{2(L+\ell)}$ avec $\tau = \frac{L_f \mu_g L\ell}{2h\Delta T(L+\ell)}$

$a(\Delta t) = 0 \underset{[...]}{\Rightarrow} \Delta t = \tau \ln(1 + \frac{a(0)\ell L}{2(L+\ell)}) \simeq 3 \times 10^7$ s $\simeq 1$ an !

Si en moyenne $0,9 \times 350 = 315$ W/m² de puissance surfacique radiative est absorbée, un corps noir à 273 K réémet $\sigma T^4_{neige} \simeq 314$ W/m², le forçage radiatif est négligeable devant les ∼50 W/m² de puissance surfacique fournie par conducto-convection.

ch11.R12