



VRAI OU FAUX ?

Le champ \vec{E} est toujours à circulation conservative.

ch5.Q1

RÉPONSE :

FAUX

L'équation de Maxwell-Faraday hors de l'ARQS électrique prévoit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

En intégrant sur une surface S délimitée par le contour fermé \mathcal{C} on obtient après application du théorème de Stokes :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \neq 0 \quad \text{a priori}$$

ch5.R1



VRAI OU FAUX ?

Il existe toujours V tel que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$.

ch5.Q2

RÉPONSE :

FAUX

Supposons qu'il existe V tel que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$.

Or, pour tout champ scalaire $P(\vec{r}, t)$, $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} P) = \vec{0}$,
donc $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$.

Or l'équation de Maxwell-Faraday hors de l'ARQS électrique prévoit :

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0} \quad \text{a priori}$$

Donc il n'existe pas V tel que $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$ hors de l'ARQS électrique.

ch5.R2



VRAI OU FAUX ?

En ARQS électrique, le champ \vec{B} est négligeable en norme devant la norme de $\frac{\vec{E}}{c}$.

ch5.Q3

RÉPONSE :

FAUX

Stricto sensu, l'ARQS électrique prévoit que le terme $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ soit une source négligeable pour \vec{E} devant $\frac{\rho}{\epsilon_0}$.

Par exemple, on peut considérer un champ \vec{B} stationnaire produit par un solénoïde infini parcouru par un courant **continu** I : $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} I \vec{e}_z$ dans le solénoïde.

On peut alors augmenter $\|\vec{B}\|$ en norme jusqu'à dépasser $\frac{\|\vec{E}\|}{c}$ tout en maintenant strictement $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ et donc en maintenant l'ARQS électrique.

ch5.R3



VRAI OU FAUX ?

Le champ \vec{B} est toujours à flux conservatif.

ch5.Q4

RÉPONSE :

VRAI

L'équation de Maxwell-Thomson prévoit :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

En l'intégrant sur un volume quelconque V inclus dans une surface fermée \mathcal{S} on obtient, après application du théorème d'Ostrogradski :

$$\oiint_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Vrai pour toute surface fermée \mathcal{S} : c'est précisément ce qu'on appelle un champ à flux conservatif.

ch5.R4



VRAI OU FAUX ?

Si $\rho = 0$ alors \vec{E} est à flux conservatif, même si $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$.

ch5.Q5

RÉPONSE :

VRAI

Si $\rho = 0$ l'équation de Maxwell-Gauss devient : $\text{div}(\vec{E}) = 0$, en intégrant sur un volume inclus dans une surface fermée \mathcal{S} , on obtient après application du théorème d'Ostrogradski :

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

Vrai pour toute surface fermée \mathcal{S} : \vec{E} est alors ce qu'on appelle un champ à flux conservatif.

ch5.R5



VRAI OU FAUX ?

Un conducteur électrique neutre électriquement ($\rho = 0$ en tout point) subit une force nulle dans un champ magnétique uniforme.

ch5.Q6

RÉPONSE :

FAUX

$\rho = 0$ (quasi tjrs vrai) ne signifie pas $\vec{j} = \vec{0}$ (faux si $I \neq 0$). Dans le modèle de Drude, notons ρ_+ la densité volumique de charge des noyaux + électrons non conducteurs et ρ_- la densité volumique de charge des électrons de conduction. Pour un matériau neutre électriquement (en pratique vrai pour les métaux cf chap. 4) on a $\rho_- = -\rho_+$ tq

$$\rho_{tot} = \rho_+ + \rho_- = 0.$$

Dans le modèle de Drude les noyaux et e^- non conducteurs sont immobiles, mais les e^- de conduction ont une vitesse moyenne \vec{v} , donnant lieu à un \vec{j} non nul et donc à un courant I : le matériau subira a priori la force de Laplace $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B}$.

ch5.R6



Proposer un ordre de grandeur de l'amplitude du champ \vec{B} dans les cas suivants :

- Champ magnétique du noyau terrestre à la surface \vec{B}_{terre} .
- Champ magnétique l'intérieur d'un IRM \vec{B}_{IRM} .
- Champ magnétique d'un chargeur sans fil de téléphone \vec{B}_{tel} (solénoïde quasi-infini avec $N = 20$ spires, de hauteur $\ell = 2$ mm, rayon $R = 20$ mm, parcouru par un courant continu d'intensité $I = 1$ A).

ch5.Q7

RÉPONSE :

Rappel : $1 \text{ T} = 1 \text{ kg.s}^{-2}.\text{A}^{-1}$

- Champ magnétique du noyau terrestre à la surface $\|\vec{B}_{\text{terre}}\| \sim 50 \mu\text{T}$.
- Champ magnétique l'intérieur d'un IRM $\|\vec{B}_{\text{IRM}}\| \sim 1 \text{ T}$.
- Champ magnétique d'un chargeur sans fil de téléphone $\|\vec{B}_{\text{tel}}\| = \frac{\mu_0 NI}{\ell} = \frac{4\pi 10^{-7} \times 20 \times 1}{0.002} \text{ T} \sim 12 \text{ mT}$.

ch5.R7



Énoncer les équations de Maxwell et leur version simplifiée en :

- régime stationnaire
- en ARQS électrique
- en ARQS magnétique

ch5.Q8

RÉPONSE :

Équation de Maxwell-Thomson :

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \underbrace{\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}_{= \vec{0} \text{ en RS, } \approx \vec{0} \text{ en ARQSM}}$$

Équation de Maxwell-Gauss :

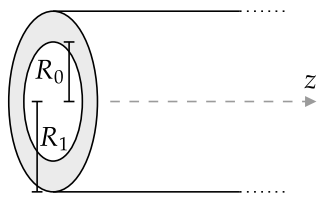
$$\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \underbrace{-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{= \vec{0} \text{ en RS, } \approx \vec{0} \text{ en ARQSE}}$$

ch5.R8

On considère un cylindre creux infini selon z , de rayon interne R_0 et externe R_1 . Une densité volumique de courant \vec{j} stationnaire circule dans ce cylindre. En coordonnées cylindriques, si $R_0 < r < R_1$ alors $\vec{j} = j_0 \vec{e}_\theta$ et sinon $\vec{j} = \vec{0}$.



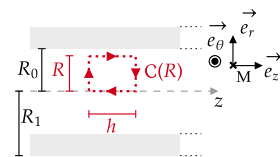
Déterminer le champ magnétique \vec{B} en tout point de l'espace.

ch5.Q9

RÉPONSE :

\vec{j} stationnaire $\Rightarrow \sim$ solénoïde infini en magnétostat. càd :
Invariances : $\vec{j} = \vec{j}(r) \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$.
Symétrie : $\forall M (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \Pi^+$ pour \vec{j} donc Π^- pour \vec{B} d'où $\vec{B}(r) = B_z(r) \vec{e}_z$.

Contour d'Ampère : Un rectangle du plan $(M\vec{e}_r, \vec{e}_z)$, avec un segment à $r = 0$ et un segment à $r = R$ avec R paramétrable.



Théorème d'Ampère :

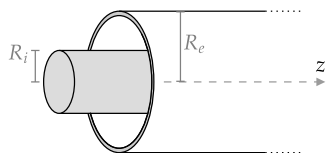
- Si $0 \leq R \leq R_0$ [...] $B_z(R) = B_z(0) = C^{\text{te}} \forall R \in [0; R_0]$
 - Si $R_0 < R \leq R_1$ [...] $B_z(R) - B_z(0) = -\mu_0 j_0 (R - R_0)$
 - Si $R > R_1$ [...] $B_z(R) - B_z(0) = -\mu_0 j_0 (R_1 - R_0) = C^{\text{te}}$
- et $B_z(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow B_z(0) = \mu_0 j_0 (R_1 - R_0)$

ch5.R9

On modélise un câble coaxial en régime stationnaire comme la superposition :



- d'un coeur : un fil plein de rayon R_i parcouru par une densité volumique de courant $\vec{j} = j_0 \vec{e}_z$
- et d'une gaine : un cylindre de rayon R_e parcouru en surface par une densité surfacique de courant $\vec{j}_s = j_{s0} \vec{e}_z$ avec $j_{s0} = -\frac{R_i^2}{2R_e} j_0$



Déterminer le champ \vec{B} en tout point extérieur à la gaine.

ch5.Q10

RÉPONSE :

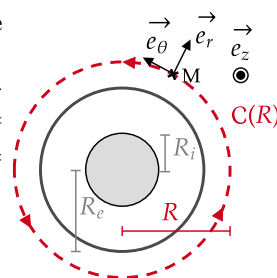
Invariances : $\vec{j} = \vec{j}(r) \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$.

Symétrie : $\forall M (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \Pi^+$ pour \vec{j} donc Π^- pour \vec{B} d'où $\vec{B}(r) = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$.

Contour d'Ampère : Un cercle du plan $(M\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ centré sur O.

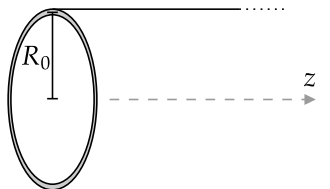
Théorème d'Ampère : Prenons $R > R_e$, $I_{\text{enlacé}} = \int_0^{R_i} dr \int_0^{2\pi} r d\theta j_0 + \int_0^{2\pi} R_e d\theta j_{s0} = \pi R_i^2 j_0 + 2\pi R_e j_{s0} = 0$.

Donc $\vec{B}(R > R_e) = \vec{0}$.



ch5.R10

On considère un cylindre creux infini selon z , de rayon R_0 . Une densité surfacique de courant \vec{j}_s stationnaire circule dans ce cylindre. En coordonnées cylindriques, si $r = R_0$ alors $\vec{j}_s = j_{s0} \vec{e}_\theta$ et sinon $\vec{j} = \vec{0}$.



Déterminer le champ magnétique \vec{B} en tout point de l'espace.

ch5.Q11

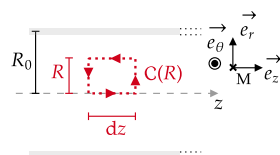
RÉPONSE :

C'est presque le solénoïde infini de magnétostat. càd :

Invariances : $\vec{j} = \vec{j}(r) \Rightarrow \vec{B} = \vec{B}(r)$.

Symétrie : $\forall M (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) \Pi^+$ pour \vec{j} donc Π^- pour \vec{B} d'où $\vec{B}(r) = B_z(r) \vec{e}_z$.

Contour d'Ampère : Un rectangle du plan $(M\vec{e}_r, \vec{e}_z)$, avec un segment à $r = 0$ et un segment à $r = R$ avec R paramétrable.



Théorème d'Ampère :

Ici $I_{\text{enlacé}} = \int_{z_0}^{z_0+dz} d\vec{\ell} \cdot \vec{j}_s$ avec $d\vec{\ell}$ orienté (via \mathcal{C}) selon $+\vec{e}_\theta$.

- Si $0 \leq R < R_0$ [...] $B_z(R) = B_z(0) = C^{\text{te}} \forall R \in [0; R_0]$
- Si $R > R_0$ [...] $B_z(0) - B_z(R) = \mu_0 j_{s0} = C^{\text{te}}$ et $B_z(R) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \Rightarrow B_z(0) = \mu_0 j_{s0}$

ch5.R11

RÉPONSE :

On a obtenu dans le cours $\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{2\pi r} \vec{e}_z$ comme champ magnétique à l'extérieur d'un fil électrique parcouru par un courant continu I , le fil étant orienté selon \vec{e}_z avec I selon z croissant.

On a donc :
 $\|\vec{B}_{\text{fil}}\| = \frac{20\pi 10^{-7}}{2\pi 0.1} \text{ T} \sim 10^{-5} \text{ T}$

Or $\|\vec{B}_{\text{fil}}\| \sim 50 \mu\text{T}$

On observerait donc à peine l'effet du champ \vec{B} produit par ce fil sur une boussole, via une déviation de quelques degrés typiquement.

ch5.Q12

ch5.R12

On considère un fil rectiligne cylindrique de rayon $R = 1$ mm et longueur $\ell = 5$ m parcouru par un courant continu d'intensité $I = 5$ A, calculer l'amplitude du champ \vec{B} produit à 10 cm du fil.

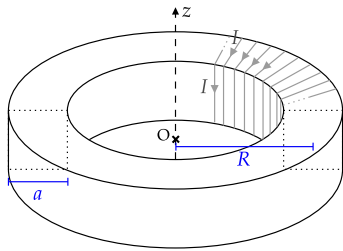
Commenter en comparant à l'amplitude du champ magnétique terrestre à la surface.



On considère un tore à base carrée, de rayon R et de carré de base a .



Sur ce tore s'enroulent des spires parcourues par un courant continu I . On suppose les spires suffisamment rapprochées pour considérer qu'elles forment une distribution continue de courant.



Quelles informations apportent l'analyse des symétries et invariances du problème ?

ch5.Q13

RÉPONSE :

Invariances : La distribution de courants est invariante par rotation d'angle θ donc $\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r, z)$.

Symétries : Pour tout point M de l'espace, $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ est Π^+ pour \vec{j} donc Π^- pour \vec{B} donc $\vec{B} = B_\theta(r, z)\vec{e}_\theta$.

Pour aller plus loin : Prendre un contour de rayon inclus dans $[R - a; R + a]$ et hors de cet intervalle pour montrer que \vec{B} est nul en-dehors du tore et qu'à l'intérieur on a $\vec{B}(r) = -\frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$ avec N le nombre de spires formées autour du tore, cf ex 4.

ch5.R13

VRAI OU FAUX ?



Pour tout contour fermé \mathcal{C} , $\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ ne dépend que du courant électrique enlacé dans la surface délimitée par \mathcal{C} .

ch5.Q14

RÉPONSE :

FAUX

Hors de l'ARQSM, l'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Que l'on peut intégrer sur n'importe quelle surface s'appuyant sur un contour fermé quelconque \mathcal{C} , appliquer le théorème de Stokes donne alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacé}} + \mu_0 \varepsilon_0 \iint \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Équation appelée "Théorème d'Ampère généralisé".

Le dernier terme est complètement indépendant du courant électrique enlacé.

ch5.R14

Dans le cadre de l'ARQS magnétique, proposer un ordre de grandeur pour l'inductance propre d'un solénoïde contenant 1000 spires, de rayon $R = 1$ cm, long de $\ell = 1$ m, parcouru par un courant d'amplitude $I = 0,5$ A



ch5.Q15

RÉPONSE :

Puisque le champ magnétique dans un solénoïde infini en ARSQM est uniforme en son intérieur et vaut $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \vec{e}_z$, on obtient $\Phi = \frac{\mu_0 N I \pi R^2}{\ell}$ et donc :

$$L = \frac{\mu_0 N \pi R^2}{\ell}$$

D'où $L = \frac{4\pi 10^{-7} 10^3 \pi 0,01}{1} \Omega \cdot s \sim 4 \times 10^{-5} \Omega \cdot s$ ou :

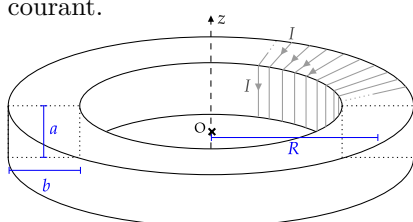
$$L \sim 40 \mu\text{H}$$

ch5.R15

On considère un tore à base rectangulaire, de rayon R .



Sur ce tore s'enroulent N spires parcourues par un courant continu I . On suppose les spires suffisamment rapprochées pour considérer qu'elles forment une distribution quasi-continue de courant.



Déterminer l'inductance propre de ce tore à base rectangulaire.

ch5.Q16

RÉPONSE :

Très similaire à l'ex 11.

L'étude des invariances et symétries fournit $\vec{B} = B_\theta(r, z)\vec{e}_\theta$. Le théorème d'Ampère sur un contour circulaire de rayon r_c donne $\vec{B}(r_c) = -\frac{\mu_0 N I}{2\pi r_c} \vec{e}_\theta$ uniforme dans l'intérieur du tore, et $\vec{B} = \vec{0}$ ailleurs.

On calcule Φ_p en prenant une surface orientée selon $-\vec{e}_\theta$ car selon la règle de la main droite à partir de l'orientation du courant I afin que $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ soit la tension d'une source de tension en convention générateur vis-à-vis de I .

$$\Phi_p = N \int_{-a/2}^{a/2} dz \int_{R-b/2}^{R+b/2} dr \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

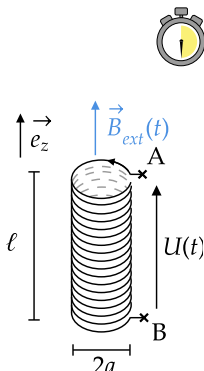
$$\text{D'où : } L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi} \ln \left(\frac{R + b/2}{R - b/2} \right)$$

ch5.R16

On plonge un solénoïde de rayon a et de longueur ℓ constitué de N spires dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_{ext}(t) = B_0 \cos(2\pi ft + \varphi) \vec{e}_z$.

On assimile électriquement le solénoïde infini à une résistance r en série avec une inductance propre L .

Déterminer $U(t)$, puis en déduire en régime permanent le champ magnétique $\vec{B}_{ind}(t)$ induit dans le solénoïde.



ch5.Q17

RÉPONSE :

Orientons le contour selon $+\vec{e}_\theta$ comme suggéré sur le schéma. On a alors $e = U(t) = -\frac{d\Phi}{dt}$ avec :

$$\Phi = \int_0^a dr \int_0^{2\pi} r d\theta \vec{e}_z \cdot \vec{B}_{ext}(t) = \pi a^2 B_0 \cos(2\pi ft + \varphi)$$

D'où $e = 2\pi^2 a^2 f B_0 \sin(2\pi ft + \varphi)$, donc

$ri(t) + L \frac{di}{dt} = e(t)$ donne en régime permanent (\Rightarrow RSF utilisable) [...] $i(t) =$

$\frac{2\pi^2 a^2 f B_0}{\sqrt{r^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}} \sin(2\pi ft + \varphi - \alpha)$ où $\alpha = \text{Arctan}\left(\frac{2\pi f L}{r}\right)$, d'où :

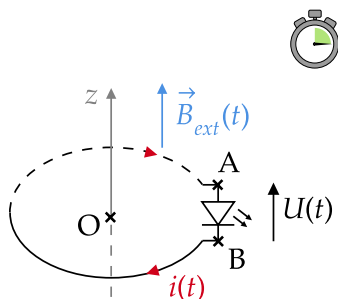
$$\vec{B}_{ind}(t) = \frac{2\mu_0 N \pi^2 a^2 f B_0}{\ell \sqrt{r^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}} \sin(2\pi ft + \varphi - \alpha) \vec{e}_z$$

ch5.R17

Par un mouvement d'aimant, on impose $\vec{B}(t) = \beta t \vec{e}_z$ quasi uniforme à l'échelle d'une spire de rayon R contenue dans un plan orthogonal à \vec{e}_z , avec $\beta > 0$. On négligera le flux propre de la spire devant le flux extérieur.

Une LED s'allume si $U(t) > 0$.

La LED s'allumera-t-elle, si oui quand ?



ch5.Q18

RÉPONSE :

En négligeant l'inductance propre de la spire on a le circuit équivalent ci-contre. On oriente e en convention générateur en suivant le contour orienté (dans le doute, ré-intégrer MF sur le contour orienté de votre exercice).

La règle de la main droite oriente $d\vec{S}$ selon $-\vec{e}_z$ pour le calcul de Φ d'où $\Phi = -\pi R^2 \beta t$ et donc :

$$e(t) = \pi R^2 \beta = U(t) \quad \text{loi des mailles}$$

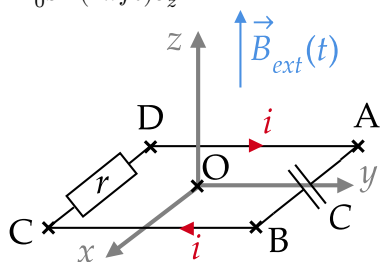
La LED s'allumera donc toujours.

ch5.R18

On plonge un circuit rC rectangulaire, d'inductance propre constante L dans un champ \vec{B}_{ext} uniforme :

$$\vec{B}_{ext} = B_0 \sin(2\pi ft) \vec{e}_z$$

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par le courant électrique i .



ch5.Q19

RÉPONSE :

Orientons le contour \mathcal{C} dans le sens de i (les fem induites e_p et e_{ext} sont toujours en convention générateur par rapport à \mathcal{C} , mais avec ce choix aussi en convention générateur par rapport à i).

Attention : $d\vec{S} = -dS \vec{e}_z$ pour le calcul de ϕ avec ce \mathcal{C} .

La loi des mailles donne : $e_p + e_{ext} = u_C + ri$, [...] $\frac{d}{dt}$

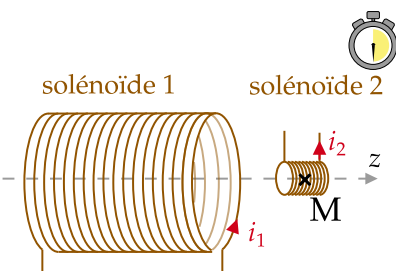
$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + r \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = -4\pi^2 f^2 B_0 AB \times BC \times \sin(2\pi ft)$$

ch5.R19

On place deux solénoïdes idéaux (quasi-infinis), le n°1 (N_1 fils, longueur ℓ_1 , rayon R_1) et le solénoïde n°2 nettement plus petit (N_2 fils, longueur ℓ_2 , rayon R_2) autour du point M.

On mesure préalablement au teslamètre que le champ créé par le solénoïde 1 seul au voisinage de M est quasi-uniforme égal à 60% de sa valeur à l'intérieur du solénoïde 1.

Exprimer la constante de couplage k entre les deux solénoïdes en fonction des données fournies.



ch5.Q20

RÉPONSE :

Calculons M via $M_{1 \rightarrow 2}$ en calculant $\phi_{1 \rightarrow 2}$:

$$\phi_{1 \rightarrow 2} = \iint_{\text{spires du sol. 2}} \vec{B}_1(M) \cdot d\vec{S}_2 = N_2 \iint_{\text{1 spire}} \vec{B}_1(M) \cdot d\vec{S}_2$$

L'orientation de $d\vec{S}_2$ est selon $\pm \vec{e}_z$ sans plus d'infos au vu du schéma (expérimentalement souvent difficile d'identifier le sens d'enroulement). En revanche $\vec{B}_1(M) = 0,6 \frac{\mu_0 N_1 i_1}{\ell_1} \vec{e}_z$ d'où :

$$M_{1 \rightarrow 2} = \pm 0,6 N_2 \pi R_2^2 \frac{\mu_0 N_1}{\ell_1} \text{ et } k = \frac{0,6 R_2 \sqrt{\ell_2}}{R_1 \sqrt{\ell_1}}$$

ch5.R20