

# POLYTECHNIQUE MONTRÉAL

## BACCALAURÉAT EN GÉNIE PHYSIQUE

COURS - PHS3903

PR. MAKSIM SKOROBOGATIY ET PR. JÉRÉMIE VILLENEUVE

---

### Rapport final

---

*Auteurs :*

PIERRE-LUC THÉRIAULT (1876713)

JIE OU YANG (1895692)

JEAN-MICHEL FORTIER (1899112)

5 MAI 2020



**POLYTECHNIQUE  
MONTRÉAL**

UNIVERSITÉ  
D'INGÉNIERIE

# 1 Introduction

Le sonar (*SOund Navigation And Ranging*) est une méthode qui permet la détection d'objets dans l'eau à l'aide des propriétés de propagation du son dans l'eau. Il est utilisé dans plusieurs domaines dont le domaine militaire et le domaine civil. Les applications militaires vont de la détection de sous-marins au guidage de torpilles sous-marines. Dans le domaine civile, le sonar est entre autres utilisé pour la pêche et la navigation des navires. On compte 2 grandes classes de sonars : les sonars actifs et les sonars passifs. Les sonars passifs captent les ondes sonores émises par les objets en mouvement alors que les sonars actifs émettent des impulsions qui sont à leur tour réfléchies sur les objets. Cela permet au sonar actif de cartographier son environnement.

La capacité d'un objet à être détecté dépendra de plusieurs facteurs dont la forme et la composition de cet objet. En fonction des applications, il peut être utile de maximiser ou de minimiser la capacité d'un objet à être détecté. Ce projet consistera donc à modéliser et simuler la capacité d'un objet à être détecté à l'aide d'un sonar actif en fonction de sa forme et de ses autres caractéristiques. Ce rapport final posera les bases du projet en présentant les équations qui permettent de modéliser le problème. Ensuite, en comparant différentes approches de résolution, une approche sera choisie. Les différentes étapes menant à la solution finale du projet seront donc détaillées. La discréétisation des équations, une évaluation de la performance du code, une présentation des résultats et une évaluation de la qualité de ces derniers seront donc présentées.

## 2 Description du problème

Le problème à résoudre consiste à déterminer la géométrie et les propriétés d'un objet dans l'eau qui permettraient de minimiser ou maximiser sa capacité à être détecté par un sonar constitué d'une source et d'un détecteur ponctuel.

La capacité à être détecté d'un objet peut être formalisé à l'aide du concept de surface équivalente radar (SER). La SER est définie comme étant une propriété physique intrinsèque d'un objet qui caractérise l'intensité relative d'une onde électromagnétique réfléchie à sa surface [1]. La SER est habituellement utilisée dans l'aéronautique à l'aide de la technologie radar, soit une onde électromagnétique incidente à la place d'une onde acoustique pour un sonar, mais le principe reste le même pour une onde sonore dans l'eau.

Une formulation plus rigoureuse du problème serait donc de déterminer, à l'aide d'une simulation numérique, la géométrie d'un objet et les fréquences de l'onde acoustique qui permettent d'optimiser la SER de l'objet à l'étude. Il faudra donc simuler un espace sous-marin où un objet se trouvera en présence d'un sonar. Le domaine de simulation devra être «infini» dans le sens où les ondes émises par le sonar devront pouvoir quitter la cellule de simulation.

### 2.1 Formulation mathématique et physique du problème

Le son est une onde de pression créée par une vibration d'un objet. Les vibrations se transmettent d'une particule à l'autre et donnent lieu à une onde longitudinale (contrairement aux ondes électromagnétiques qui sont des ondes transversales) qu'on appelle «onde sonore» [2]. Lorsqu'il est question d'acoustique sous-marine, les équations en lien avec la propagation d'ondes sonores peuvent être dérivées à partir des équations de mécanique des fluides. En fonction de la méthode numérique utilisée, la formulation du problème qui est la plus appropriée peut varier. Dans cette sous-section, plusieurs formulations/équations pertinentes au problème seront présentées même si elles sont généralement équivalentes.

Les deux équations suivantes constituent la base pour le projet [3]. Il s'agit des équations couplées pression-vitesse valables pour les milieux dispersifs (avec pertes).

$$-\rho \frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t} - \alpha \rho B \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} p(\vec{r}, t), \quad (2.1.1)$$

$$-\frac{1}{B} \frac{\partial p(\vec{r}, t)}{\partial t} - \alpha p(\vec{r}, t) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (2.1.2)$$

où  $p$  est la pression acoustique en Pa,  $\rho$  représente une densité de masse,  $B$  est le module d'élasticité du milieu (*Bulk Modulus*) en Pa et  $\alpha$  est le coefficient d'atténuation en  $\text{Pa}^{-1}\text{s}^{-1}$ .

La pression acoustique  $p(\vec{r}, t)$  est définie comme étant la variation de pression par rapport à la pression au repos [4]. La vitesse est la dérivée temporelle du déplacement. Le déplacement, quant à lui, peut également être relié à la pression acoustique à l'aide de la relation [4] :

$$p(\vec{r}, t) = -B \vec{\nabla} \cdot \vec{u}(\vec{r}, t), \quad (2.1.3)$$

Il est possible de transformer ces équations afin d'obtenir des équations plus appropriées pour certaines méthodes numériques. En effet, en isolant  $\frac{\partial \vec{v}(\vec{r}, t)}{\partial t}$  de l'équation 2.1.1 et en le remplaçant dans l'équation 2.1.2 dérivée par rapport au temps, on trouve :

$$-\frac{1}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \alpha \frac{\partial p}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{-\vec{\nabla} p}{\rho} - \alpha B \vec{v} \right).$$

En faisant l'hypothèse que  $\alpha$  et  $B$  sont constants et en utilisant 2.1.3, l'équation devient :

$$\frac{-1}{B} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + 2\alpha \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{-\nabla^2 p}{\rho} \quad (2.1.4)$$

Sous cette forme, il est possible de reconnaître qu'il s'agit d'une équation d'onde atténuee. Le principale avantage de cette formulation est qu'elle n'utilise que des quantités scalaires ce qui réduit le nombre d'inconnues. En faisant l'hypothèse que la pression varie de manière harmonique  $p \propto e^{i\omega t}$ , il est possible d'écrire l'équation 2.1.4 dans le domaine fréquentiel de la manière suivante :

$$\left( \frac{\omega^2}{B} + 2i\omega\alpha \right) p = \frac{-\nabla^2 p}{\rho} \quad (2.1.5)$$

Cette formulation pourrait être utile pour les méthodes de résolution numérique dans le domaine fréquentiel.

### 2.1.1 Autres équations et concepts utilisés en acoustique

Il existe également plusieurs autres relations utiles pour le projet. La vitesse du son  $c$  peut être exprimée en fonction d'autres propriétés du milieu. En effet, cette vitesse dépend de la densité du milieu  $\rho$  et du coefficient d'élasticité du milieu  $B$ . Ces quantités sont liées de la manière suivante :

$$c = \sqrt{\frac{B}{\rho}} \quad (2.1.6)$$

Pour quantifier la capacité d'un objet à être détecté par un sonar, il faudra définir les équations permettant de calculer la surface équivalente radar comme il s'agit des mêmes que pour un sonar. La SER peut être calculée en utilisant la relation 2.1.7 :

$$\text{SER} = \frac{P_s}{P_i} \cdot R^2 \quad (2.1.7)$$

où  $P_s$  est la densité puissance dissipée (*scattered*) par l'objet à la position du détecteur,  $P_i$  est la densité de puissance émise par la source et  $R$  est la distance entre le détecteur et le point de l'objet le plus près de la source. Les simulations considéreront que la source et le détecteur sont situés dans la même zone de 1 m de rayon.

Pour évaluer la SER dans la simulation, la source sera placée devant le bateau. Comme la géométrie de l'avant de l'objet variera selon différents paramètres (tel qu'illustré à la figure 2), ce seront ces derniers et la fréquence qui feront varier la SER. Il sera alors d'optimiser la forme pour minimiser ou maximiser la SER.

## 2.2 Les conditions frontières et la condition initiale.

Comme pour les ondes électromagnétiques, les ondes acoustiques doivent respecter certaines conditions frontières lors du passage d'un milieu à un autre. On parle alors de conditions aux interfaces [5]. La première condition qui doit être respectée est la continuité de la pression présentée à l'équation 2.2.1.

$$p_1(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\text{Interface}} = p_2(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\text{Interface}} \quad (2.2.1)$$

où  $p_1$  et  $p_2$  sont les pressions de chaque côté de l'interface.

La deuxième condition s'applique sur le champ de vitesse  $\vec{v}$ . De chaque côté de l'interface, les composantes normales de la vitesse de chaque côté doivent être égales. Mathématiquement, cela s'exprime comme suit :

$$\vec{v}_1(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{12}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\text{Interface}} = \vec{v}_2(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{12}(\vec{r}) \Big|_{\vec{r}=\text{Interface}} \quad (2.2.2)$$

où  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  sont les vitesses de chaque côté de l'interface et  $\vec{n}_{12}$  est un vecteur normal à l'interface. Cette situation est représentée sur la figure 1.

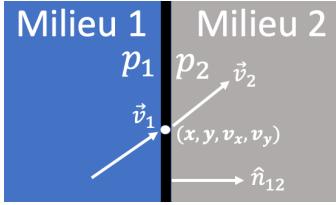


FIGURE 1 – Situation physique au point  $(x, y, v_x, v_y)$  à l'interface

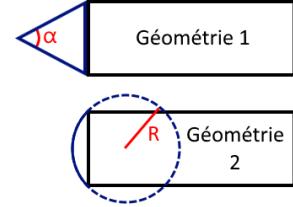


FIGURE 2 – Différentes géométries de l'objet

Dans le domaine temporel, il n'est pas possible de convertir directement la deuxième condition (explicitée en 2.2.2) en une équation qui dépend seulement de la pression acoustique. Par contre, dans le domaine fréquentiel, l'équation 2.1.1 devient :

$$-i\rho\omega\vec{v}(\vec{r}) - \alpha\rho B\vec{v}(\vec{r}) = \vec{\nabla}p \quad (2.2.3)$$

Il est donc possible d'obtenir une relation directe entre le vecteur de vitesse et le gradient de la pression. Dans le domaine fréquentiel, la condition 2.2.2 devient donc :

$$\frac{\vec{\nabla}p_1(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{12}(\vec{r})}{\rho_1(\alpha_1 B_1 + i\omega)} \Big|_{\vec{r}=\text{Interface}} = \frac{\vec{\nabla}p_2(\vec{r}) \cdot \vec{n}_{12}(\vec{r})}{\rho_2(\alpha_2 B_2 + i\omega)} \Big|_{\vec{r}=\text{Interface}} \quad (2.2.4)$$

Au niveau de la condition initiale, la forme que celle-ci prendra va dépendre de l'équation et de la méthode utilisée. Si la simulation est dans le domaine temporel, le champ de vitesse sera considéré nul dans tout le domaine de simulation tout comme la pression acoustique (aussi appelée suppression). Le moment  $t = t_0$  correspondra donc au début de l'impulsion appliquée par la source du sonar. Si la simulation se déroule dans le domaine fréquentiel, il n'y a pas de condition initiale. Le champ d'une source ponctuelle agira comme terme source. Pour simuler une source ponctuelle, des ondes cylindriques/sphériques seront utilisées. La source utilisée aura donc la forme suivante présentée à la relation 2.2.5 où la source (S) est centrée à la position  $(x_0, y_0)$  [6].

$$S(x, y) = \frac{\exp\left(\frac{i\omega\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{c}\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} \quad (2.2.5)$$

### 2.2.1 Couches absorbantes

Comme il s'agit d'un problème de simulation sur un domaine dit «infini», les ondes acoustiques doivent pouvoir quitter la cellule de simulation sans être réfléchies sur les limites. Pour simuler un domaine infini, il est possible d'utiliser un PML, Perfectly Matched Layer [7], qui simule l'infini en absorbant toute onde se rendant aux limites du domaine de simulation. La technique consiste à appliquer une couche de frontière absorbante aux extrémités du domaine. Lorsqu'une onde entre dans la couche, elle est atténuée et diminue exponentiellement. Même si l'onde, une fois arrivée à la limite du domaine, était toujours non négligeable, elle serait encore une fois diminuée lors de la réflexion dans la couche et à ce moment-là de retour dans le domaine elle sera très faible et imperceptible par la simulation. Cette technique donne alors l'illusion d'un domaine infini pour les ondes.

Pour utiliser un PML, l'espace loin du domaine de simulation est considéré comme étant homogène, soit de l'eau de densité constante, et cette espace est linéaire et invariant dans le temps [8]. À l'aide de ces suppositions, on peut présenter la solution de l'équation d'onde sous la forme d'une superposition d'ondes planes :

$$p(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}, \omega} P_{\vec{k}, t} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \quad (2.2.6)$$

où  $P_{\vec{k}, t}$  est la constante d'amplitude,  $\omega$  la fréquence angulaire et  $\vec{k}$  le vecteur d'onde. Bien entendu, le domaine de  $\vec{r}$  sera dans les réels, mais si pour la couche de PML le domaine augmentait dans les complexes, on se retrouverait avec une solution qui diminuerait exponentiellement. Ainsi, dans la couche absorbante, pour  $\vec{k} > 0$ , l'amplitude de l'onde diminuera avec la distance parcourue.

#### 2.2.1.1 Domaine fréquentiel

Pour bien définir ce domaine, on redéfinira les variables  $x'$  et  $y'$  dans le domaine 2D de la simulation. La variable  $y'$  sera définie selon le même principe que  $x'$ , alors pour simplifier la démarche mathématique, seul le cas de  $x'$  sera traité dans le développement mathématique suivant. On définit  $x'(x) = x + if(x)$  où  $x$  est la partie réelle de la position et  $f(x)$  est une fonction quelconque définissant la déformation de la couche absorbante. Ce changement de variable permet de réécrire les équations en terme de  $x$  en remplaçant toute dérivée :  $\partial x$  par  $(1 + i\frac{\partial f}{\partial x'})\partial x'$ . Il a également été montré dans la théorie que poser  $\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\sigma_x(x')}{\omega}$  où  $\sigma_x(x')$  est une fonction d'Heaviside égal à zéro dans le domaine d'étude et positive à l'intérieur de la couche absorbante et  $\omega$  la fréquence de l'onde est plus pratique dans les calculs. Il est important d'inclure la fréquence de l'onde dans le changement de variable, car sinon les ondes ayant une fréquence plus élevée diminueraient bien plus rapidement que celle plus faible.

#### 2.2.1.2 Domaine temporel

Dans le domaine temporel, il faut trouver une façon d'utiliser la dépendance de  $\frac{1}{\omega}$  sans connaître  $\omega$ . Pour ce faire, il faut multiplier de part et d'autre l'équation d'onde par  $1 + i\sigma_x/\omega$  et faire quelques étapes d'algèbres présentées ci-dessous :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= a \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} = -i\omega \vec{u} & \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= a \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} (1 + i\sigma_x/\omega) = -i\omega \vec{u} (1 + i\sigma_x/\omega) \\ a \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} &= -i\omega \vec{u} + \sigma_x \vec{u} & \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= a \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} - \sigma_x \vec{u} \end{aligned}$$

où  $a$  est une constante qui dépend de la situation physique modélisée. Comme dans le domaine fréquentiel, pour  $\sigma_x > 0$ , l'amplitude de l'onde diminuera jusqu'à devenir négligeable une fois dans la couche absorbante.

## 2.3 Valeurs typiques de géométrie et matériaux

Dans la littérature, la valeur de la densité de l'eau est  $\rho_{eau} = 998.30 \text{ kg/m}^3$ . Pour  $\rho_{bois}$ , une moyenne des densités de tout type de bois humide à 20% est effectué pour obtenir :  $\rho_{bois} = 640.72 \text{ kg/m}^3$  [9, 10]. Le coefficient d'atténuation  $\alpha$  n'est pas similaire à l'absorption, mais il s'agit de la réciproque du coefficient de viscosité. Dans la littérature, sa valeur est  $\alpha_{eau} = 1.18 \text{ Pa}^{-1}\text{s}^{-1}$  et le bois est considéré comme un milieu avec perte donc  $\alpha_{bois} = 3.21 \times 10^{-4} \text{ Pa}^{-1}\text{s}^{-1}$  [3, 11]. Pour le module d'élasticité  $B$ , la valeur pour l'eau est de  $B_{eau} = 2.15 \times 10^9 \text{ Pa}$  et, pour le bois, une valeur moyenne de  $B_{bois} = 10 \times 10^9 \text{ Pa}$  [12, 13] est obtenue.

Le domaine de simulation aura une dimension carrée d'environ 40 m avant d'entrer dans les couches absorbantes. Un maillage carré sera utilisé. La distance entre l'émetteur et le récepteur sera d'environ 1 m. Un objet se trouvera dans la simulation ayant 3 géométries possibles. Il sera constitué d'un rectangle d'environ 5 m de large et 10 m de long. La première géométrie sera purement rectangulaire alors que la deuxième géométrie aura une pointe triangulaire qui sera ajoutée devant le bateau. L'angle  $\alpha$  de la pointe variera entre 20 et 100 °. La troisième aura un devant circulaire dont le rayon  $R$  variera entre la moitié de la largeur et 2 fois la largeur du bateau. La figure 2 présente ces deux géométries.

Afin de simuler des fréquences typiques d'un sonar, un plage de fréquences allant de 100Hz à 10kHz sera utilisée. La valeur des pas de discréétisation sera déterminée en fonction de la méthode choisie. En effet, certaines méthodes imposent des restrictions sur le pas de discréétisation (ex : les méthodes d'Euler explicite). De manière générale, plus la fréquence sera élevée, plus le pas de discréétisation devra être petit. Au minimum, 2 point par longueur d'ondes seront nécessaires. Comme la longueur d'onde est donnée par  $\lambda = \frac{c}{f}$ , pour une onde se déplaçant à approximativement 1500 m/s, si la fréquence est 1000 Hz, le pas de discréétisation devrait être inférieur à 75 cm. Pour une source émettant à 10 kHz, le pas devrait être inférieur à 7.5 cm. Ces valeurs représentent des bornes inférieures et il est possible que la méthode utilisée nécessite des pas de discréétisation plus faibles.

## 3 Méthodes de résolution

### 3.1 Les différentes approches

Il existe une multitude de méthodes pour résoudre des problèmes comme celui décrit ci-haut. La plupart des méthodes décrites dans cette section ont d'abord été appliquées en électromagnétisme. Les deux premières méthodes seront discutées avec plus de détails alors que les deux autres méthodes sont mentionnées à titre indicatif. Elles sont peu susceptibles d'être utilisées en raison de leur difficulté d'implémentation.

#### 3.1.1 Approche 1 : Différences finies dans le domaine du temps (FDTD)

La différence finie dans le domaine temporelle (FDTD) est une méthode numérique populaire pour résoudre l'évolution des équations électromagnétiques [14, 15]. Comme son nom l'indique, il s'agit d'utiliser la discréétisation en différences finies du domaine spatial et du domaine temporelle dans sa résolution. La méthode a la particularité d'employer l'intégration Leapfrog (saute-mouton), une variante de l'intégration de Verlet, pour sa propagation. La méthode FDTD s'applique aisément pour ce problème.

L'application à ce problème passerait par la définition d'une impulsion acoustique initiale modulée de sorte à contenir les fréquences à l'étude. Un maillage définissant le milieu de propagation est ensuite créé avec les obstacles voulus. L'onde est alors propagée dans le temps avec des pas discrets et interagit avec le milieu. Il sera possible de voir toutes les étapes de propagation de l'onde.

Cette méthode a le désavantage d'être lente et dispendieuse en mémoire puisque chaque étape de propagation dépend du pas d'avant et les paramètres de maillage sont importants. Elle nécessite aussi une attente de la propagation complète (décroissance des champs) de l'impulsion pour observer un résultat voulu. Toutefois, les résultats obtenus

sont intuitifs et faciles à interpréter puisqu'ils peuvent représenter des variables physiques réelles. La méthode FDTD est aussi plus simple à implémenter pour des situations avec des géométries complexes.

### 3.1.2 Approche 2 : Différences finies dans le domaine fréquentiel (FDFD)

La méthode FDFD est l'analogue fréquentiel de la FDTD [16]. Il existe différentes façons d'implémenter cette méthode. Dans ce rapport, deux variantes du FDFD seront détaillées : la méthode «avec sources» et la méthode «sans source» (aussi appelée analyse des valeurs propres). De manière générale, un des avantages de la méthode FDFD comparativement à la méthode FDTD est qu'il est plus simple d'y implémenter la dispersion et des milieux anisotropiques [16].

#### Méthode avec source : Réponse fréquentielle d'une structure [6]

Il s'agit de la méthode classique d'implémentation de la FDFD. Dans cette méthode, la géométrie est définie et un maillage est créé. Les équations décrivant le phénomène physique dans le domaine fréquentiel (ex : l'équation de Helmholtz) sont discrétisées et appliquées sur les différents points du maillage. Ensuite, le système est transformé en système matriciel ayant la forme  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Ce problème n'est pas intéressant en soit car sa solution permet seulement de trouver un champ nul partout. Comme les problèmes à modéliser implique généralement des sources, celles-ci doivent être inclus dans le calcul. En incluant les sources, on retrouve un problème du type  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Le champ  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  est déterminée. Des méthodes itératives ou des méthodes utilisant les matrices creuses ( $A$  est souvent une matrice creuse) peuvent être utilisées pour résoudre le système. Le terme  $\mathbf{b}$  est le vecteur source. Une méthode fréquemment utilisée est celle du champ diffus et du champ total (appelé TF/SF [6]) où le champ diffus ne contient pas le champ provenant directement de la source alors que le champ total a une signification physique et contient les sources.

Cette méthode permettrait donc de déterminer la réponse à une excitation de fréquence  $\omega$  de notre région de simulation contenant de l'eau et l'objet à détecter. La solution serait une distribution spatiale de l'intensité de la pression. Ainsi, en considérant l'intensité du champ dans la région correspondant au détecteur du sonar, il serait possible de quantifier la SER (ou un concept analogue) à une fréquence donnée. Un des désavantages de cette méthode est qu'il faudrait simuler les fréquences individuellement. Il est également possible de simuler une gamme de fréquences (typique d'une impulsion), mais cela complexifie la génération du vecteur source  $\mathbf{b}$  [6].

#### Méthode sans source : Analyse des valeurs propres (Eigenvalues analysis)

La méthode sans source s'intéresse aux modes résonnantes qui existent dans la cellule de simulation [17]. Ainsi, si un mode est résonnant, une excitation à cette fréquence générera un champ intense dans la cavité. Il s'agit d'une méthode souvent utilisée dans les problèmes de cavités électromagnétiques ou de guides d'onde. Contrairement à la méthode avec sources qui cherche la réponse à certaines fréquences, cette méthode tente de déterminer les fréquences/modes qui généreraient une réponse résonnante.

La méthode consiste à résoudre un système d'équations du type  $(A - \omega I)\mathbf{x} = 0$  où  $A$  est une matrice générée à l'aide de la discrétisation des équations, des propriétés de l'espace (exemple : la densité du milieu) et de l'application des conditions frontières et  $I$  est une matrice identité. Encore une fois, comme il s'agit d'un problème dans le domaine fréquentiel, on suppose une dépendance harmonique de la pression. Il s'agit donc d'un problème aux valeurs propres où la fréquence  $\omega$  est une valeur propre et où  $\mathbf{x}_\omega$  est un vecteur propre représentant la distribution spatiale de la pression. Le principal défi d'implémentation de cette méthode repose dans la construction de la matrice  $A$ .

L'interprétation des résultats de cette méthode est toutefois plus complexe. En effet, cette méthode permet de déterminer le nombre de modes résonnantes et la distribution spatiale (le vecteur propre) de l'intensité pour chaque mode résonnant (la valeur propre). Cela ne permet pas toutefois de déterminer dans quel proportion ces modes sont présents car les vecteurs propres sont définis à un facteur de proportionnalité près. Bien qu'il soit possible de comparer les géométries en fonction du nombre de fréquences résonnantes à l'intérieur d'une certaine plage de fréquence, une méthode plus rigoureuse devrait être développée afin de calculer la SER. Une méthode pour analyser

les fréquences obtenues devrait également être développée car certaines fréquences n'auront pas de significations physiques clairement définies (ex : des fréquences résonnantes purement imaginaires) [18].

Un des avantages de cette méthode est que toute l'information est disponible après la résolution du problème de valeurs propres. Contrairement à la méthode FDTD, une seule itération est nécessaire.

### 3.1.3 Approche 3 : Méthode des moments (MoM ou BEM)

La méthode des moments ou méthode des éléments frontières consiste à formuler les EDPs en formes intégrales et de les résoudre d'une manière similaire à la méthode des tirs à l'aide des conditions limites [19]. Les problèmes peuvent être séparés en sous-éléments de volume pour la résolution d'intégrales. Cette méthode est compatible avec les problèmes formulés avec des fonctions de Green puisque ceux-ci sont des convolutions et impliquent naturellement des intégrales. La méthode des moments est une méthode coûteuse en mémoire. La méthode nécessite des discrétisations de grands domaines en tenant compte des conditions limites.

### 3.1.4 Approche 4 : Méthode des éléments finis (FEM)

La méthode des éléments finis consiste à résoudre des problèmes d'ingénierie contenant des EDPs avec des sous-domaines [20]. Les sous-domaines sont des morceaux du problème initial répondant chacun aux EDPs de départ et connectés entre eux à l'aide des conditions frontières. Ces différents sous-domaines forment un grand système d'équations où la résolution se fait par minimisation d'erreur. Le rassemblement de ces sous-domaines forment la solution au problème de départ.

Les éléments finis permettent de résoudre beaucoup de problèmes d'ingénierie complexes. La qualité de la résolution dépend de la subdivision en sous-domaine, mais la méthode est capable de converger avec une bonne fidélité vers les situations réelles. Toutefois, il est difficile d'implémenter cette méthode à partir du début et les études sur les théories des éléments finis sont encore très abondantes. Les implantations se font plutôt à l'aide de logiciels commerciaux.

## 3.2 Choix d'une approche et d'une méthode

Toutes les méthodes proposées ont des avantages et des inconvénients pour la résolution du problème. Pour ce projet, les critères privilégiés pour le choix de la méthode sont :

- La facilité d'implémentation
- L'interprétabilité des résultats
- La rapidité de la méthode

Ces critères sont déterminants pour la réussite du projet. En effet, la principale contrainte étant le temps, il est important que la méthode choisie soit facile et rapide à implémenter. Ensuite, afin de répondre de manière convaincante à la problématique, les résultats physiques doivent être facilement interprétables. Finalement, la rapidité et l'efficacité des méthodes est un critère important, car les ressources de calcul sont limitées. L'exactitude et la précision sont également des éléments à considérer pour être en mesure de solutionner la problématique.

Au niveau de la facilité d'implémentation, la méthode temporelle est modérément difficile à implémenter. En effet, comme il y a une propagation temporelle (1 dimension) et spatiale (2 dimensions), les différences finies seront relativement complexes. De plus, la nécessité d'utiliser la formulation avec les équations couplées (pour pouvoir appliquer les conditions aux interfaces) complexifie le problème, car il y aura 3 inconnues par noeuds du maillage ( $p$ ,  $v_x$  et  $v_y$ ). La méthode fréquentielle avec source, quant à elle, est relativement simple à implémenter. La formulation fréquentielle permet l'utilisation d'un système d'équation où  $p(\vec{r})$  est la seule inconnue. Le principal défi reposera dans l'implémentation de la source. La méthode sans source est plus complexe à implémenter, car le problème doit être formulé en problème de valeurs propres. Cela représente un défi de taille au niveau de la modélisation. Les deux autres méthodes, la méthode des moments et la méthode des éléments finis, sont difficiles à implémenter. En effet, l'utilisation des fonctions de Green et la division en sous-domaine sont complexes.

Au niveau de l'interprétabilité des résultats, la méthode FDTD est celle qui est le plus facilement interprétable. Il est facile de traduire la variation du champ dans le temps à un point donné en intensité ou en SER. La méthode FDFD avec source est relativement simple à interpréter. La distribution spatiale du champ obtenue correspond à la réponse en régime permanent. La méthode FDFD sans source est moins appropriée pour ce problème. En effet, comme cette méthode suppose qu'il n'y a pas de source et que les modes résonnantes ne seront pas toutes des solutions physiques au problème, les résultats seront difficile à interpréter et à convertir en SER. Les résultats des deux autres méthodes ne sont pas particulièrement difficiles à interpréter. Par contre, comme ces méthodes sont conceptuellement plus complexes, il serait plus difficile d'identifier les erreurs dans le code. En effet, le manque d'intuition sur les solutions attendues complexifient le «déverminage» (*debugging*).

Finalement, au niveau des performances, la méthode FDTD nécessite beaucoup de mémoire en raison du grand nombre d'inconnues par noeuds et du maillage en 3 dimensions (2 dimensions spatiales et une dimension temporelle). La méthode FDFD avec source est très rapide car elle nécessite une seule résolution du système  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  pour chaque fréquence. Quant à elle, la méthode FDFD sans source est également rapide. En effet, la résolution du problème de valeurs propres génèrent toutes les solutions. Les deux dernières méthodes nécessitent beaucoup de mémoire. De plus, la méthode des éléments finis utilisent une méthode itératives. Malgré la convergence rapide, cela ajoute une source d'erreurs.

Le tableau 1 illustre de manière quantitative l'analyse réalisée dans les paragraphes précédents. Pour chaque critère, une note de 1 à 3 est attribuée à la méthode où 3 est le pointage le plus élevé. Une note de 3 signifie que la méthode performe bien pour ce critère alors qu'une note de 1 signifie une mauvaise performance dans ce critère. Le total des points est fait et cela permet de comparer quantitativement les méthodes.

TABLEAU 1 – Comparaison des différentes approches

Approches	Implémentation	Interprétabilité	Rapidité	Total
Domaine temporel	2	3	2	7
Domaine fréquentiel : Avec source	3	2	3	8
Domaine fréquentiel : Sans source	2	1	3	6
Méthode des moments	1	2	2	5
Éléments finis	1	2	2	5

Suite à cette analyse, l'approche qui sera adoptée pour ce projet est la méthode des différences finies dans le domaine fréquentiel avec source (FDFD-Avec source).

### 3.2.1 Choix d'un langage de programmation et des outils numériques

Le langage de programmation qui sera utilisé pour ce projet est Python. Ce langage a été choisi pour sa polyvalence, pour la quantité de ressources et de références facilement accessibles en ligne et parce qu'il s'agit d'un langage dans lequel les membres de l'équipe sont confortables en plus d'être «open source». Malgré tous ces avantages, un des désavantages de Python est qu'il s'agit d'un langage interprété. Les langages interprétés sont moins rapides que les langages compilés comme le C ou le C++. Comme la performance n'est pas un aspect critique pour ce projet, la facilité d'utilisation a été priorisée.

Un autre langage qui était intéressant pour ce projet est Matlab. Matlab est optimisé pour les opérations matricielles comme celles qui devront être réalisées dans la méthode FDFD avec source. Bien que celle-ci ne soit pas directement intégré dans Python, des librairies permettant d'accéder à des fonctionnalités très similaires à celles de Matlab sont offertes dans des librairies Python gratuites comme Scipy [21] et Numpy [22]. Par exemple, ces librairies permettent de réaliser des résolutions de systèmes linéaires à l'aide de matrices creuses. En somme, outre la facilité d'utilisation,

Matlab ne dispose donc pas d'avantages notables pour les calculs et les opérations qui seront nécessaires pour la résolution du problème décrit dans ce rapport. Matlab a également le désavantage d'être un logiciel payant et d'être de moins en moins utilisé dans l'industrie. Il est donc plus intéressant pour les membres de l'équipe de perfectionner leurs connaissances dans un langage qu'ils sont susceptibles d'utiliser sur le marché du travail. Python s'impose donc comme un choix logique.

## 4 Mise en oeuvre

Cette section présentera les différentes étapes reliées à la mise en oeuvre de la simulation. Dans un premier temps, une discréétisation des équations pour chaque type de points sera présentée. Ensuite, une méthode résolution appellée la méthode du champ total et champ diffus (TF/SF pour *Total Field/Scattered Field* sera introduite. Finalement, la méthode permettant de calculer la surface équivalent radar sera présentée.

La grille physique de la situation est celle qui représente la situation physique. Elle compte plusieurs types de points. Pour chaque type des points, l'équation à appliquer sera légèrement différente. Un numéro a été associée à chaque type de points Les types de points peuvent être regroupées en 4 grandes catégories :

- **Les points de type 0** : Ces points correspondent aux conditions aux limites du domaine. Il s'agit donc de points où la pression doit être nulle.
- **Les points 1 et 2** : Ces points correspondent à des points d'un milieu homogène. Pour le point 1, ce milieu est de l'eau alors que pour le point 2, le milieu est du bois.
- **Les points 3 à 13** : Ces points correspondent à des points des conditions frontières aux interfaces. 11 situations possibles ont été identifiées pour les conditions frontières. Ces situations seront détaillées dans la section 4.1.2.
- **Les points 14 à 21** : Ces points correspondent à des points de couches absorbantes. Il existe donc 8 situations différentes pour celles-ci. Ces situations seront détaillées dans la section 4.1.4.

La figure 3 représente une carte physique. Chaque point d'un type particulier est représenté par une couleur différente.

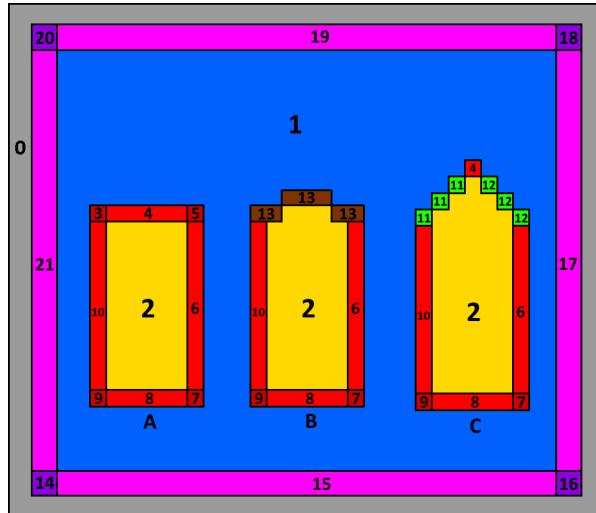


FIGURE 3 – La carte physique avec un bateau rectangulaire : La source n'a pas un numéro de points attributés mais elle a été ajoutée à titre indicatif

## 4.1 Discréétisation des équations

Des formules de différences finies ont été utilisées pour la discréétisation des équations. Afin d'alléger le traitement, la notation suivante a été adoptée pour l'équation :

$$\nabla^2 p + k^2 p = S \quad (4.1.1)$$

où  $k^2 = \rho(\frac{\omega^2}{B} + 2i\omega\alpha)$  et où  $S$  représente un terme source qui est déterminé par la forme de la source (ex : un source d'ondes cylindriques). Le terme source sera traité dans la section 4.2. Écrit sous cette forme, l'équation a la forme d'une équation d'Helmholtz.

Dans la discréétisation, les indices  $i$  et  $j$  sont utilisées pour représenter respectivement les coordonnées spatiales en  $x$  et  $y$  d'une variable. Ainsi,  $p_{i,j}$  correspond à la pression au point  $i \cdot dx$  en  $x$  et  $j \cdot dy$  en  $y$ . Les valeurs de  $i$  peuvent aller de 0 à  $N_x - 1$  alors que les valeurs de  $j$  varient de 0 à  $N_y - 1$ . Cette situation est représentée à la figure 4. Pour simplifier les développements, le pas de discréétisation en  $x$  est considéré comme étant le même que le pas de discréétisation en  $y$  :  $d_x = d_y = h$

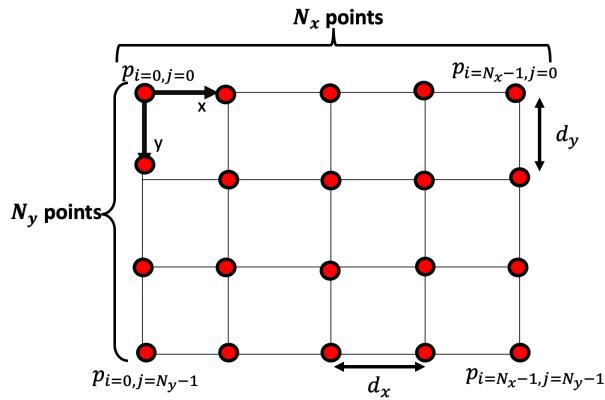


FIGURE 4 – Schématisation du maillage pour la discréétisation des équations

Le laplacien a été discréétisé avec une formule à 9 points respectant la symétrie radiale (la source ponctuelle émet des ondes cylindriques/sphériques) d'ordre 2. La formule utilisée est la suivante :

$$\begin{aligned} \nabla^2 f &= \frac{p_{i-1,j-1} + p_{i-1,j+1} + 4p_{i-1,j} + 4p_{i,j-1} - 20p_{i,j}}{6h^2} && \text{Laplacien à 9 points} \\ &+ \frac{4p_{i+1,j} + 4p_{i,j+1} + p_{i+1,j-1} + p_{i+1,j+1}}{6h^2} + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Pour l'application des conditions frontières, il était nécessaire d'appliquer un gradient. En fonction de la situation, ce gradient devait être avant ou arrière. Les formules utilisées pour les gradients sont les suivantes :

$$\vec{\nabla} f = \frac{(p_{i-2,j} - 2p_{i-1,j} + 3p_{i,j})}{2h} \hat{x} + \frac{(p_{i,j-2} - 2p_{i,j-1} + 3p_{i,j})}{2h} \hat{y} + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{Gradient arrière} \quad (4.1.3)$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{(-3p_{i,j} + 2p_{i+1,j} - p_{i+2,j})}{2h} \hat{x} + \frac{(-3p_{i,j} + 2p_{i,j+1} - p_{i,j+2})}{2h} \hat{y} + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{Gradient avant} \quad (4.1.4)$$

Pour le laplacien et le gradient, des formules d'ordre 2 ont été utilisées pour faciliter l'implémentation sans trop compromettre la précision. Une fois discréétisée, les équations avaient toutes la forme générale suivante :

$$a_1 p_{i-2,j} + a_2 p_{i-1,j+2} + a_3 p_{i-1,j} + a_4 p_{i-1,j-1} + a_5 p_{i,j-2} + a_6 p_{i,j-1} + a_7 p_{i,j} + a_8 p_{i,j+1} + a_9 p_{i,j+2} + a_{10} p_{i+1,j-1} + a_{11} p_{i+1,j} + a_{12} p_{i+1,j+1} + a_{13} p_{i+2,j} = S_{i,j} \quad (4.1.5)$$

où les coefficients  $a_k$  sont les coefficients qui se retrouvent dans la matrice A.

Pour chaque type de situations (milieu homogène, conditions frontières et couches absorbantes), un pseudo-code d'implémentation sera présenté. Dans chaque pseudo-code, la structure sera similaire. Voici quelques variables ou concepts qui reviendront fréquemment :

- **Type** : Le type d'un point. Chaque situation a un type. La variable Type indique donc la situation dans laquelle le point se trouve et permet de déterminer l'équation qui s'y applique.
- **A** : La matrice A de la méthode FDFD. Il s'agit d'une matrice de dimensions  $(N_x \cdot N_y)$  par  $(N_x \cdot N_y)$ . Chaque ligne de la matrice contient donc tous les points de la matrice physique. Le lien entre une position «physique» d'un point et sa position dans la ligne est donnée par la fonction **pos(i,j)**.
- **pos(i,j)** : La fonction pos(i,j) est la fonction permettant de lier les coordonnées de la matrice physique aux coordonnées dans la matrice A. La relation utilisée est  $\text{pos}(i,j) = i + (j \cdot N_x)$ . Ainsi, si on s'intéresse au point (i,j) et que l'équation pour ce point est  $2p_{i+1,j} + p_{i,j} - 2p_{i,j-1} = 0$ , alors la ligne pos(i,j) contiendra un coefficient 1 à la colonne pos(i,j), un coefficient 2 à la colonne pos(i+1,j) et un coefficient -2 à la colonne pos(i,j-1).
- **position**: Il s'agit d'un vecteur de positions déterminées par la fonction pos(i,j).
- **coeff** : Il s'agit d'un vecteur de coefficients. L'ordre des coefficients est le même que celui de position.

L'exemple 2 ci-dessous illustre comment l'application des coefficients peut se faire à l'aide des différentes variables et fonctions énoncées ci-haut.

```

1 position=[pos(i,j), pos(i+1,j), pos(i,j-1)]
2 coeff=[1,2,-2]
3 # L: Ligne, C=Colonne
4 L=pos(i,j)
5 for i,C in enumerate(position):
6     A[L,C]=coeff[i]
```

EXTRAIT DE CODE 1 – Exemple de l'utilisation des vecteurs position et coeff

#### 4.1.1 Les équations discrétisées : Milieu homogène

Les points d'un milieu homogène correspondent aux points de type 1 et 2. L'indice m est utilisé pour représenter le milieu. Pour les points 1, le milieu est de l'eau (m=1). Pour les points 2, le milieu est du bois (m=2). Dans les deux cas, le développement est le même, seules les constantes permettant de calculer k change. Pour un gradient à 9 points, cette relation est :

$$\frac{p_{i-1,j-1} + p_{i-1,j+1} + 4p_{i-1,j} + 4p_{i,j-1} - (20 - 6h^2k_m^2)p_{i,j} + 4p_{i+1,j} + 4p_{i,j+1} + p_{i+1,j-1} + p_{i+1,j+1}}{6h^2} = 0 \quad (4.1.6)$$

Le pseudocode pour l'implémentation des équations dans ce milieu est :

```

1 # Gradient à 9 points
2 position=[p(i-1,j-1),p(i-1,j),p(i-1,j+1),p(i,j-1),p(i,j),p(i,j+1),p(i+1,j-1),p(i+1,j),p(i+1,j+1)]
3 coeff=[1,4,1,4,-20+6*h**2*k**2,4,1,4,1]
4 ### Suite : Aller appliquer ces coefficients sur les points tel que décrit dans l'extrait de
      code 2
```

EXTRAIT DE CODE 2 – Implémentation des équations pour un milieu homogène

#### 4.1.2 Les équations discrétisées : Conditions frontières aux interfaces

Les conditions frontières aux interfaces s'appliquent dans les régions où il y a un passage entre l'eau et le bois. En fonction de la situation géométrique, les équations varieront. En effet, dans certains cas, un gradient avant doit être appliquée alors que d'autres, un gradient arrière doit être appliquée. L'équation de base pour les conditions frontières peut être écrites ainsi :

$$\frac{\nabla p_m \cdot \hat{n}}{\gamma_m} = \frac{\nabla p_n \cdot \hat{n}}{\gamma_n} \quad (4.1.7)$$

où les indices m et n représentent deux milieux distincts à définir fonction du cas traité,  $\gamma_m = \rho_m(\alpha_m B_m + i\omega)$  et  $\hat{n} = n_x \hat{x} + n_y \hat{y}$  où  $n_x^2 + n_y^2 = 1$

En considérant le milieu m comme étant le milieu où le gradient est arrière et le milieu n le milieu où le gradient utilise une formule avant, l'équation générale est :

$$\begin{aligned} \frac{n_x}{\gamma_m} p_{i-2,j} - \frac{4n_x}{\gamma_m} p_{i-1,j} + \frac{n_y}{\gamma_m} p_{i,j-2} - \frac{4n_y}{\gamma_m} p_{i,j-1} \\ + \frac{3(\gamma_m + \gamma_n)(n_x + n_y)}{\gamma_m \gamma_n} p_{i,j} - \frac{4n_x}{\gamma_n} p_{i+1,j} + \frac{n_x}{\gamma_n} p_{i+2,j} - \frac{4n_y}{\gamma_n} p_{i,j+1} + \frac{n_y}{\gamma_n} p_{i,j+2} = 0 \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Quant à la condition 2.2.1 (continuité de la pression aux interfaces), il n'est pas nécessaire de la traiter explicitement car celle-ci est automatiquement respectée. En effet, comme les interfaces sont considérées comme étant située directement sur le noeud, la pression de part et d'autre de l'interface est intrinsèquement continue.

Le cas le plus simple, celui du bateau rectangulaire, est illustré à la figure 5. Les 8 différentes situations sont numérotées de 3 à 10. Le tableau 2 explicite les différents cas avec les milieux et les valeurs des normales pour chaque point. Par exemple, pour la situations 3, pour que le gradient dans l'eau utilise seulement des points de l'eau ( $\gamma$  est défini pour un seul milieu), en se basant sur la définition des axes de la figure 5, un gradient arrière doit être utilisée dans l'eau. Le milieu m est donc de l'eau. Pour le bois, c'est l'inverse. Comme il s'agit d'un coin, la normale est mal définie. La convention utilisée pour traiter cette normale est que la normale pointe vers l'eau avec un angle de 45° par rapport aux axes x et y.

Situation	Milieu m (arrière)	Milieu n (avant)	$n_x$	$n_y$
3	Eau	Bois	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$
4	Eau	Bois	0	-1
5	Bois	Eau	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$
6	Bois	Eau	1	0
7	Bois	Eau	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
8	Bois	Eau	0	1
9	Eau	Bois	$\frac{-1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
10	Eau	Bois	-1	0

TABLEAU 2 – Les différentes situations des conditions frontières pour un bateau rectangulaire

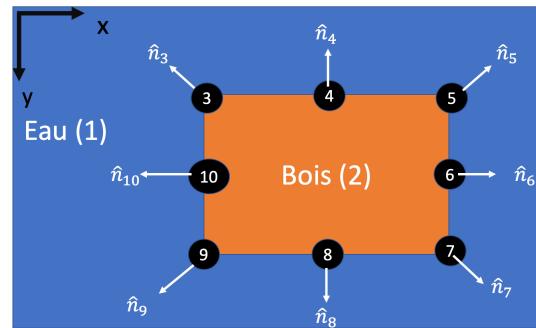


FIGURE 5 – Les différents types de points pour un bateau en bois rectangulaire. Les points 3 à 10 représentent des cas spécifiques de conditions frontières

L'utilisation d'un bateau avec une pointe triangulaire ou une pointe circulaire génère des cas supplémentaires. Ceux-ci sont illustrés à la figures 6.

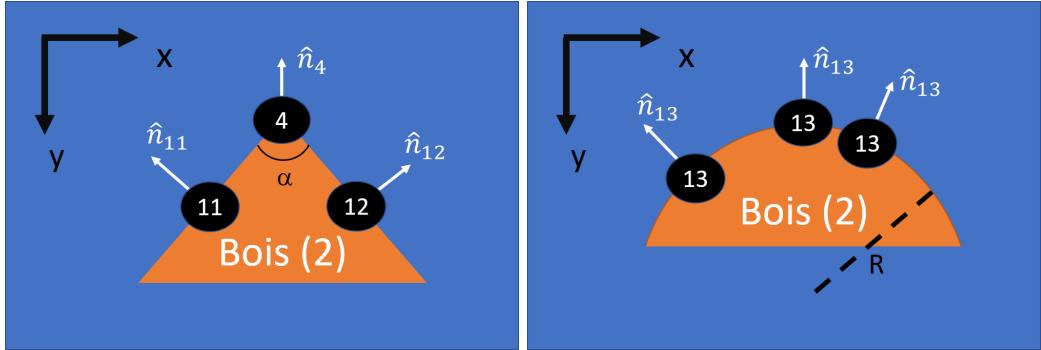


FIGURE 6 – À droite : Les différents types de points pour une pointe triangulaire À gauche : Les conditions frontières pour la pointe triangulaire. À gauche : Les différents type de points pour une pointe circulaire

Comme le sommet du triangle sera toujours centré avec le bateau, les points constituant la frontière du sommet seront donc de la situation 4, car la normale pointera vers les  $y$  négatifs. Par contre, 3 nouvelles situations s'ajoutent aux 8 situations présentées dans le tableau 2. La situation 11 s'applique pour tous les points se trouvant sur le côté gauche du triangle et la situation 12 pour ceux du côté droit. La normale de ces points est calculé à partir de l'angle  $\alpha$  qui détermine la forme du triangle. Ainsi avec les équations 4.1.9 et 4.1.10 on obtient les coefficients  $n_x$  et  $n_y$  des points dans la situation 11. Pour la situation 12, il ne suffit que d'inverser le signe du coefficient  $n_x$  de la situation 11 et de garder le même  $n_y$ .

$$n_{11x} = -\cos(\alpha/2) \quad (4.1.9)$$

$$n_{11y} = -\sin(\alpha/2) \quad (4.1.10)$$

Il est possible de remarquer sur la figure 6 que la normale  $\hat{n}_{13}$  varie selon la position du point sur la frontière de la pointe circulaire. Ainsi dans le code, les coefficients de la normale sont calculés en fonction de la position du point. Ce calcul est effectué à partir des équations 4.1.11 et 4.1.12 où  $(c_x, c_y)$  sont les coordonnées du centre du cercle, de rayon  $R$ , qui donne la pointe circulaire et les indices  $(i, j)$  sont les coordonnées du points sur la frontière.

$$n_{13x} = \frac{i - c_x}{R} \quad (4.1.11)$$

$$n_{13y} = \frac{j - c_y}{R} \quad (4.1.12)$$

```

1 omega=..
2 # Paramètres de l'eau et du bois
3 rho_eau=... , B_eau=... , alpha_eau=... , Gamma_eau=rho_eau*(alpha_eau*B_eau+1j*omega)
4 rho_bois=... , B_bois=... , alpha_bois=... , Gamma_bois=rho_bois*(alpha_bois*B_bois+1j*omega)
5
6 if Type==3:
7     Gamma_m=Gamma_eau
8     Gamma_n=Gamma_bois
9     nx=-1/2**1/2, ny=-1/2**1/2
10 elif Type==4:
11     Gamma_m=Gamma_eau
12     Gamma_n=Gamma_bois
13     nx=0, ny=-1
14 ## Traiter les autres cas...
15 elif Type==11:

```

```

16 Gamma_m=Gamma_eau
17 Gamma_n=Gamma_bois
18 nx=np.cos(alpha/2), ny=-np.sin(alpha/2)
19 ## Traiter les autres cas...
20 position=[pos(i-2,j),pos(i-1,j),pos(i,j-2),pos(i,j-1),pos(i,j),pos(i+1,j),pos(i+2,j),pos(i,j+1),
21 pos(i,j+2)]
21 coeff=[nx/Gamma_m,-4*nx/Gamma_m,ny/Gamma_m,-4*ny/Gamma_m,(nx+ny)*(Gamma_m+Gamma_n)/(Gamma_m+
Gamma_n),-4*nx/Gamma_n,nx/Gamma_n,-4*ny/Gamma_n,ny/Gamma_n]

```

EXTRAIT DE CODE 3 – Implémentation des conditions frontières aux interfaces

#### 4.1.3 Les équations discrétisées : Conditions frontières aux limites de la cellule

Des conditions doivent également être appliquées aux limites du domaine. Dans cette simulation, la condition utilisée suppose que la pression est nulle aux limites du domaine. L’application de cette condition est relativement simple. Ainsi, pour les points situées aux limites du domaine, l’équation qui s’applique est :

$$p_{i,j} = 0 \quad (4.1.13)$$

L’implémentation de cette condition est présentée dans l’extrait de code 4.

```

1 # Si le point i,j est situé aux limites de la cellule
2 A[pos(i,j),pos(i,j)]=1

```

EXTRAIT DE CODE 4 – Implémentation des conditions aux limites

#### 4.1.4 Les équations discrétisées : Les couches absorbantes

L’utilisation des couches absorbantes est nécessaires pour simuler un domaine infini. L’extérieur du domaine est borné par une condition frontière  $p = 0$  tel que mentionné dans la section 4.1.3. Concrètement, cela signifie que la pression sera atténuée suffisamment dans les couches absorbantes pour que celle-ci soit nulle aux limites du domaine. Les couches absorbantes sont importantes dans la simulation en domaine fréquentiel puisque celle-ci résout pour un état stationnaire. Sans celles-ci, l’état stationnaire va toujours présenter des réflexions. L’équation pour une PML est décrite sous une forme générale par :

$$\frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma_x} \frac{\partial p}{\partial x} \right) + \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\gamma_y} \frac{\partial p}{\partial y} \right) + k^2 p = 0, \quad (4.1.14)$$

où  $\gamma_\xi = 1 + \frac{i}{k} \frac{1}{|\xi_0 - \xi|}$  pour  $\xi = x, y$  représente le coefficient d’atténuation par PML. Le terme  $|\xi_0 - \xi|$  détermine la distance jusqu’à la limite de la simulation  $p = 0$  afin d’offrir une atténuation progressive. Les couches absorbantes ne doivent pas contenir de sources puisqu’il s’agit d’une pseudo-zone qui simule la propagation infinie.

Sous la forme discrétisée, l’équation est :

$$\left( \frac{\beta_x}{2\gamma_x^2 \Delta x} + \frac{1}{\gamma_x^2 \Delta x^2} \right) p_{i-1,j} + \left( \frac{\beta_y}{2\gamma_y^2 \Delta y} + \frac{1}{\gamma_y^2 \Delta y^2} \right) p_{i,j-1} + \left( k^2 - \frac{2}{\gamma_x^2 \Delta x^2} - \frac{2}{\gamma_y^2 \Delta y^2} \right) p_{i,j} \quad (4.1.15)$$

$$+ \left( -\frac{\beta_x}{2\gamma_x^2 \Delta x} + \frac{1}{\gamma_x^2 \Delta x^2} \right) p_{i+1,j} + \left( -\frac{\beta_y}{2\gamma_y^2 \Delta y} + \frac{1}{\gamma_y^2 \Delta y^2} \right) p_{i,j+1} = 0, \quad (4.1.16)$$

où  $\beta_\xi = \frac{i(\xi_0 - \xi)}{|\xi_0 - \xi|^2 (k |\xi_0 - \xi| + i)^2}$  pour  $\xi = x, y$  est utilisé pour alléger l’écriture.

La forme générale du PML est adaptée en fonction des emplacements sur la cellule de simulation. Les PMLs se situant sur les bordures ont le terme  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1$  pour l’axe perpendiculaire à la propagation infinie (e.g le type 21 à la figure 3 va avoir  $\beta_y = 0$  et  $\gamma_y = 1$ ). Les PMLs se situant sur les coins convergent cette forme. Ainsi, le pseudo-code associé aux PMLs est de la forme :

```

1 if Type == 21:
2     x0 = 0
3     Beta_x = 1j*(x0-x)/(np.abs(x0-x)**2*(k*np.abs(x0-x)+1j))
4     Beta_y = 0
5     Gamma_x = 1+1j/k/(np.abs(x0-x))
6     Gamma_y = 1
7
8     Position = [p(i-2,j),p(i-1,j),p(i,j-2),p(i,j-1),p(i,j),p(i+1,j),p(i+2,j),p(i,j+1),p(i,j+2)]
9     Coeff = [0,Beta_x/2*h/((Gamma_x**2)+1/((Gamma_x**2)),0,Beta_y/2*h/((Gamma_y**2)+1/((Gamma_y**2)),
-2/((Gamma_y)**2)-2/((Gamma_x)**2)+k**2*h**2,-Beta_x/2*h/((Gamma_x**2)+1/((Gamma_x**2)),
0,-Beta_y/2*h/((Gamma_y**2)+1/((Gamma_y**2)),0]

```

EXTRAIT DE CODE 5 – Exemple de définition des PMLs

## 4.2 La méthode du champ total/champ diffus(TF/SF)

La méthode du champ total/champ diffus est une formulation couramment utilisée dans les problèmes avec une source. Une résolution avec une source génère une solution contenant le champ de la source, ce qui peut rendre les effets d’interaction imperceptibles. La méthode TF/SF permet de faire ressortir le champ diffus en mettant en évidence des zones de la cellule de simulation différentes du champ total (qui inclut le champ de la source). Cela facilite l’interprétation surtout dans le cadre d’étude de SER. L’implémentation de la méthode consiste à modifier le vecteur  $\mathbf{b}_{source}$  associé à la source en attribuant des zones de champ total et champ diffus par un masque  $Q$ . (Une zone SF a une valeur 1 à la position de la matrice et une zone TF une valeur 0.) Ainsi les zones de champ total sont décrites par  $\mathbf{b}_{TF} = (I - Q)\mathbf{b}_{source}$  et ceux du champ diffus par  $\mathbf{b}_{SF} = Q\mathbf{b}_{source}$ . L’équation à résoudre devient :

$$A\mathbf{x} = QAb_{TF} - (I - Q)b_{SF}, \quad (4.2.1)$$

le premier terme à droite est la correction apportée par le champ diffus et le deuxième terme à droite est la correction apportée par le champ total. (Il n’y a pas d’erreur des indices TF et SF, car il faut voir comme l’effet du masque  $Q$  associé aux zones diffuses appliqué à la source TF et vice-versa.) Il s’agit d’une façon compacte d’écrire la différence entre le champ total sans l’objet et le champ total avec l’objet. En forme de résolution matricielle  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , le nouveau vecteur  $\mathbf{b}$  peut s’écrire :

$$\mathbf{b} = (QA - AQ)\mathbf{b}_{source} \quad (4.2.2)$$

## 4.3 La résolution du système $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Une fois que tous les coefficients de la matrice  $A$  et du vecteur  $\mathbf{b}$  ont été déterminés, une résolution du système permet de trouver la distribution spatiale de la pression en régime permanent. La méthode classique de résolution consisterait à inverser la matrice  $A$  pour obtenir la solution  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ . L’inversion de matrices est toutefois une procédure qui nécessite un grand nombre d’opérations (complexité de  $\mathcal{O}(N^3)$ ) pour une matrice de dimensions  $N$  par  $N$  avec l’algorithme de Gauss-Jordan [23]). Il est également possible de remarquer que la matrice  $A$  comporte un très grand nombre de 0. En effet, chaque ligne contient au plus 9 coefficients non nuls. Cela suggère donc que l’utilisation de matrices creuses est appropriée.

L’approche utilisée dans la simulation est d’initialiser directement une matrice creuse pour la matrice  $A$ . Le système est ensuite résolu à l’aide de la fonction `spsolve` de Scipy. Cette fonction utilise une variante de la décomposition LU pour la résolution (approximativement 3 fois plus rapides qu’une résolution par inversion [24]). L’utilisation de matrices creuses accélère substantiellement le processus de résolution.

Une fois le système résolu, le vecteur solution permet d’extraire la distribution spatiale de la pression. La pression «physique» est représentée par la partie réelle des pressions du vecteur  $\mathbf{x}$ .

## 4.4 Le calcul de la SER

L'implémentation de surface équivalente radar est basée sur la relation 2.1.7. Un pseudo-code de l'implémentation est présenté à l'extrait de code 6.

```

1 P_incidente=0
2 P_recu=0
3 Distance_Bateau_Source= ...
4 # Points dans un rayon de 1 m autour de la source
5 Points=[...]
6 for point in Points:
7     P_incidente=P_incidente+Source[point]
8     P_diffuse=P_diffuse+Scattered_Field[point]
9 SER=P_diffuse/P_incidente*Distance_Bateau_Source**2

```

EXTRAIT DE CODE 6 – Implémentation de la SER

## 4.5 Ordre de grandeurs des paramètres utilisés

Pour les simulations effectuées dans les sections suivantes, les valeurs utilisées sont présentées au tableau 3.

Symbol	Nom du paramètre	Valeur
$\rho_{\text{eau}}$	Densité de l'eau	998.30 kg/m <sup>3</sup>
$\rho_{\text{bois}}$	Densité du bois	640.72 kg/m <sup>3</sup>
$\alpha_{\text{eau}}$	Coefficient d'atténuation de l'eau	1.18 Pa <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>
$\alpha_{\text{bois}}$	Coefficient d'atténuation du bois	$3.21 \times 10^{-4}$ Pa <sup>-1</sup> s <sup>-1</sup>
$B_{\text{eau}}$	Module d'élasticité de l'eau	$2.15 \times 10^9$ Pa
$B_{\text{bois}}$	Module d'élasticité du bois	$10^{10}$ Pa
$f$	Plage de fréquences du sonar	100Hz à 10 kHz
$L$	Largeur et longueur de la zone de simulation	40 m
$N_x$	Nombre de points dans chaque direction	500 à 2500
$dx$	Plage de pas de discréttisation	1.6 cm à 8 cm
$\alpha$	Angle de la pointe du triangle	$\pi/4$ rad à $7\pi/8$ rad
$R$	Rayon du cercle	2.5 m à 5 m

TABLEAU 3 – Valeurs des paramètres utilisés dans la simulation

## 5 Évaluation de la performance du code numérique

Le code peut être divisée en 3 étapes principales :

1. L'initialisation : Dans cette étape, les différents paramètres de simulation sont déclarés, le champ émis par la source est calculé, une carte physique de la situation est créée. La construction de la matrice A et le calcul de ses coefficients en font également partie.
2. La résolution : Cette étape consiste à résoudre le système matriciel  $Ax = b$  et à retourner une carte bidimensionnelle de la distribution du champ dans l'espace.
3. Le traitement et l'affichage : Cette partie du code a pour but de calculer différentes valeurs en lien avec les résultats comme la SER et d'afficher les résultats de manière compréhensible et élégante.

L'étape d'affichage n'est pas absolument nécessaire dans la mesure où, pour solutionner la problématique, seule la SER est nécessaire. L'affichage permet toutefois de d'identifier les erreurs et facilite l'interprétation. Les tests de performance seront donc réalisés avec l'affichage car il s'agit de la façon dont le code est utilisé en pratique.

Pour réaliser les tests, afin de s'affranchir de la dépendance avec les performances de l'ordinateur où le test est effectué, un environnement «Google Colab» a été utilisé. Ces environnements dans le nuage (*cloud*) permettent de rouler des codes sous forme de cahier Jupyter. Les environnements utilisés étaient des environnements offrant 4 coeurs de calcul et 25.5 Gb de mémoire vive.

Le premier test réalisé avait pour but de déterminer la répartition du temps entre ces différentes étapes. Pour ces tests, les paramètres utilisées sont des paramètres courants permettant d'obtenir une résolution de qualité moyenne. Ainsi, la grille physique utilisée avait une dimension en points de 700 x 700, des dimensions physiques de 40 m par 40 m, 10 couches absorbantes ont été utilisées, la source était une source d'ondes cylindriques, une seule fréquence était simulée (1000 Hz) et le bateau était de type rectangulaire avec une taille de 5 m par 10 m. Les résultats de ce test sont présentés à la figure 7A) et permettent de voir que l'initialisation et la résolution nécessite, en part égale, la majorité du temps (95.5% du temps total). Le traitement et l'affichage est l'étape qui nécessite le moins de temps avec 4.5% alors que l'initialisation et la résolution nécessitent respectivement 46.7% et 48.8% du temps total. Une analyse plus en détails de la répartition du temps pour l'initialisation est présentée à la figure 7B). Cette analyse a révélé que le calcul des coefficients des PML nécessite 12% du temps total alloué à l'initialisation, l'initialisation de la matrice creuse A nécessite 58% du temps, l'initialisation du vecteur source  $\mathbf{b}$  nécessite 6% alors l'initialisation de la source nécessite 24% du temps total. Au niveau de la mémoire, une simulation dans ces conditions nécessitent 2.4 Gb de mémoire vive.

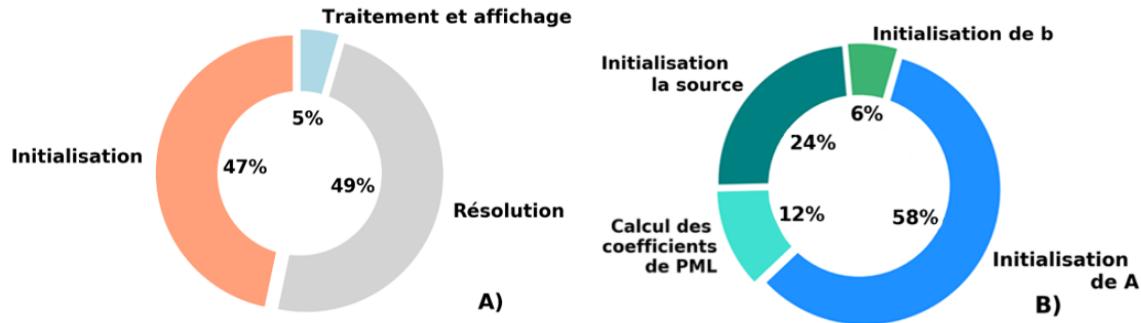


FIGURE 7 – En A, les grandes étapes du code sont présentées ainsi que leur pourcentage du temps d'utilisation, en B il s'agit d'une analyse plus en détail de la répartition de l'initialisation.

## 5.1 Impact des différents paramètres de simulation

Parmi les différents paramètres de simulation, certains sont susceptibles d'avoir un impact significatif sur le temps de calcul de la simulation. Plusieurs paramètres seront donc testés afin d'en étudier l'impact.

Le paramètre le plus susceptible d'avoir un impact est le nombre de points dans une dimension  $N = N_x = N_y$ . Comme la cellule est carrée, il y aura  $N^2$  points physiques. La matrice A contenant les coefficients des équations discrétilisées sera donc de dimension  $N^2 \cdot N^2$ . Pour tester l'impact de  $N^2$  sur le temps de calcul, les mêmes conditions que pour le test de répartition générale (voir figure 7) sont utilisées. Les résultats de ce test sont présentés à la figure 8. Les temps nécessaires à chaque étape en fonction du nombre de points physiques ( $N^2$ ) y sont affichés. Le graphique de gauche de la figure illustre la forte croissance du temps de calcul nécessaire pour la résolution avec nombre de points de la carte physique. Comme la résolution d'un système linéaire évolue généralement en  $\mathcal{O}(N_{mat}^3)$ , cette augmentation est attendue. Les données ne permettent toutefois pas d'identifier une relation cubique entre les dimensions de la matrice A et le temps de résolution. Sur le même graphique, il est possible de voir que le temps d'initialisation est proportionnel au nombre d'éléments de la matrice physique. Cela est logique car chaque noeud physique correspond à un ensemble de coefficients et le nombre de coefficients ne varie pas. Ainsi, le nombre d'opérations croît linéairement avec le nombre de noeuds. Quant à lui, le temps d'affichage semble croître de manière linéaire avec le nombre de noeuds.

Comme les matrices à traiter aux étapes d'affichage sont de dimensions  $N \cdot N$ , il est logique que le temps soient proportionnel à  $N^2$

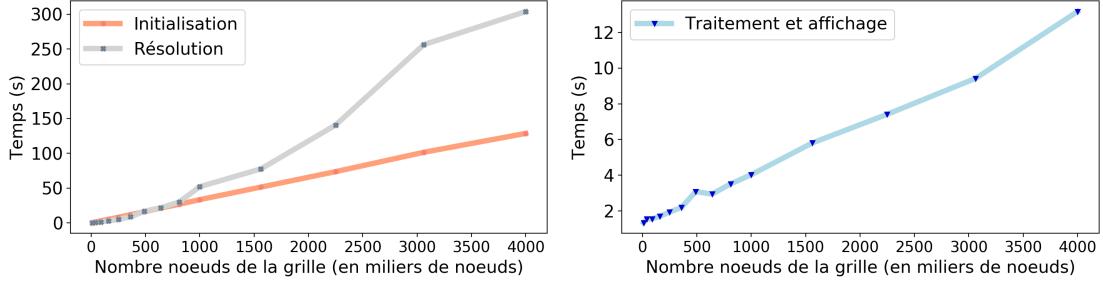


FIGURE 8 – Le temps nécessaire pour les étapes d'initialisation, de résolution et de traitement et affichage en fonction du nombre de noeuds de la grille.

Il est également intéressant de se pencher sur l'utilisation de la mémoire vive en fonction du nombre de noeuds. Un graphique illustrant la relation entre le nombre de points et la mémoire vive maximale utilisée est présenté à la figure 9. Il est possible de voir que la relation entre la mémoire maximale semble être linéaire jusqu'à 2.5 millions de noeuds (correspondant à une grille physique carrée d'approximativement 1500 points par 1500 points). Il y a ensuite une augmentation légèrement plus rapide. Pour des simulations ayant un plus grand nombre de points, la mémoire maximale utilisée correspondait à la mémoire maximale du système testé.

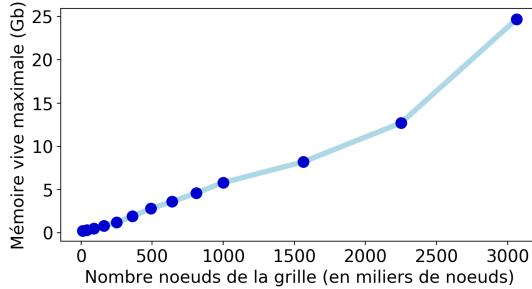


FIGURE 9 – Utilisation de la mémoire vive en fonction du nombre de points de la grille.

Il est important de noter qu'un version préliminaire du code n'utilisant pas de matrice creuse directement lors de l'initialisation avait des performances significativement inférieures au code utilisant des matrices creuses. Sans matrice creuse, il était impossible de tester des simulations dont le nombre de points dans une direction  $N_x$  était supérieur à 175 sans faire échoué le test (la demande en mémoire vive était trop grande et l'environnement Colab mettait fin à la simulation). Avec des matrices creuses, cette limite était de 2500 points. L'utilisation de matrices creuses améliore significativement les performances.

Toutes les équations ont été discrétisées avec des différences finies d'ordre 2. Il serait alors attendu d'avoir alors une convergence d'ordre 2. L'erreur a été définie en prenant la différence entre la valeur maximale de la cellule de simulation à deux pas de discréttisation différents :

$$Err(h) = |p_{max}(2h) - p_{max}(h)|. \quad (5.1.1)$$

Les simulations ayant servies à l'analyse de convergence sont présentées à l'annexe à la figure 21. Les erreurs ainsi que le calcul de l'ordre de convergence sont présentés au tableau 4. Le graphique présenté à la figure 10 permet d'observer l'erreur en fonction du pas de discréttisation. Il est à noter que la valeur de l'erreur peut apparaître grande pour des

pas assez grands. Deux explications peuvent expliquer cette grandeur. La première est que la dimension représentée est plutôt grande ce qui fait que les grands pas de grille ne sont pas des représentations fidèles. La deuxième est que l'unité approprié pour les ondes acoustiques est plutôt en décibel, ce qui peut donc réduire considérablement la valeur.

$i$	$h$ (m)	$ Err $ (Pa)	$n = \frac{\log(Err_i) - \log(Err_{i+1})}{\log(h_i) - \log(h_{i+1})}$
1	0.8	124.95	2.07
2	0.4	29.78	1.95
3	0.2	7.69	1.99
4	0.1	1.94	1.98
5	0.05	0.49	-

TABLEAU 4 – Analyse de la convergence avec différents pas de grille.

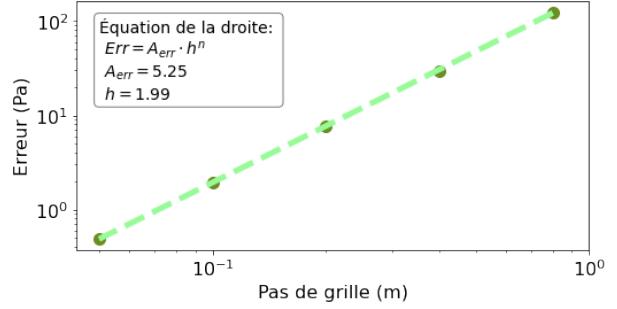


FIGURE 10 – La convergence de la simulation se fait à l'ordre 2.

## 6 Résultats

Cette section présentera les résultats obtenus pour différents types de géométrie et des variantes de cette géométrie. Après avoir présenté les résultats obtenus, une brève discussion des résultats sera faite. Pour l'affichage des distributions spatiales de la pression, afin d'amplifier les phénomènes et de les rendre plus facilement visualisables, le coefficient d'absorption a été diminué d'un facteur 10. Par contre, pour les calculs de SER, la vraie valeur a été conservée.

Pour chaque géométrie, la structure de présentation des résultats sera similaire. Les distributions de pression pour deux variations de la géométrie à deux fréquences différentes (250 et 2500 Hz) seront présentées. Ensuite, une analyse de la SER pour ces deux géométries sera présentée. Finalement, une carte de chaleur (*heat map*) illustrant la relation entre les paramètres de la géométrie, la fréquence et la SER sera présentée. Afin d'alléger la visualisation, les échelles seront omises pour les graphiques. L'échelle utilisée est présentée à la figure 11. Sur cette échelle, le rouge représente une valeur élevée, le vert une valeur moyenne alors que le bleu représente une valeur faible.



FIGURE 11 – L'échelle utilisée pour les distributions spatiales de la pression et les cartes de la SER

### 6.1 Bateau rectangulaire

Le cas le plus simple qui a été testé est celui d'un bateau rectangulaire pour différentes fréquences et différentes largeurs. La figure 12 présente des résultats de simulations pour deux fréquences différentes (250 Hz et 2500 Hz). Il est possible de voir, en comparant les sous-figures A) et B) que la distribution de la pression diffuse («scattered field») varie fortement en fonction de la fréquence. Tel qu'attendu, les ondes de pression ré-émises sont de fréquences élevées lorsque la source est de fréquence élevée. Sur les figures, un cercle rouge indique la région où la SER est calculée. Le centre de ce cercle correspond à la position de la source. Bien que la différence soit relativement faible, il est également possible de voir, en comparant la sous-figure A) à C) et la B) à la D) que les réflexions semblent être plus intenses et occupent une région plus large pour le bateau plus large.

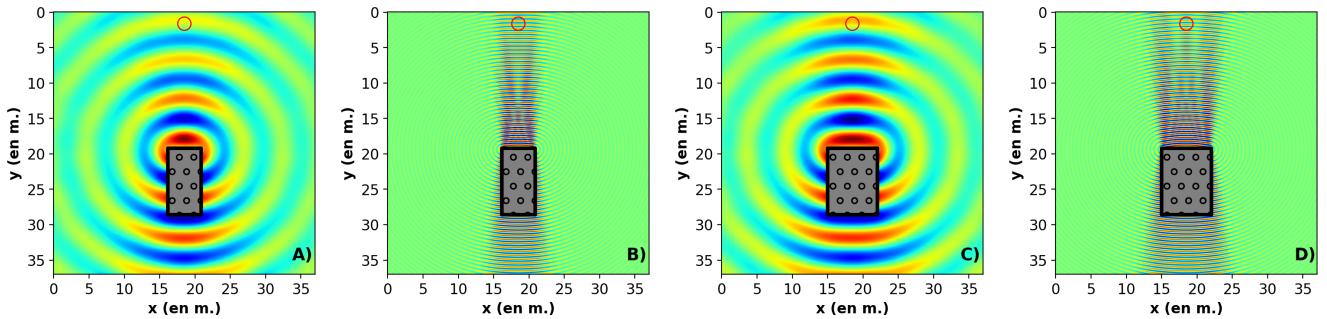


FIGURE 12 – La distribution de la pression diffuse pour un bateau de forme rectangulaire. En A) et B), un bateau de 5 m de largeur et 10 m de longueur est utilisé alors qu'un bateau de 7.5 m de large et 10 m de long est utilisé pour la sous-figure C) et D). La fréquence utilisée est de 250 Hz pour A) et C) et de 2500 Hz pour B) et D).

Il est possible de calculer la SER pour deux bateaux ayant des largeurs différentes pour une plage de fréquence donnée. La figure 13 présente les résultats de ces simulations pour une plage de fréquences allant de 100 Hz à 10 kHz pour un bateau dont la largeur varie entre 5 et 7.5 m et dont la longueur de varie de 10 à 12m. À basse fréquence, les comportements diffèrent selon les dimensions du bateau. À haute fréquence ( $>5000$  Hz), le comportement est similaire et les courbes sont superposées pour les bateaux de 10 m de long. De plus, les valeurs moyennes de SER se situent entre de  $1.88 \text{ m}^2$  et  $2.09 \text{ m}^2$ .

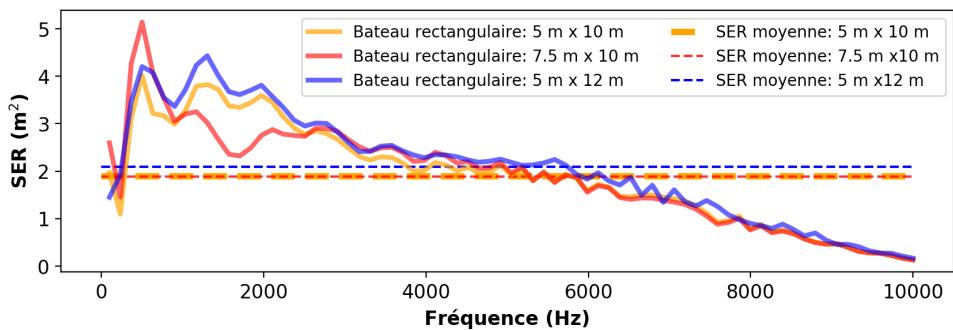


FIGURE 13 – Évolution de la SER en fonction de la fréquence pour des bateaux de largeurs différentes.

## 6.2 Bateau avec une pointe triangulaire

La figure 14 présente la distribution spatiale pour 2 angles différents (45 et 60 degrés) et 2 fréquences différentes. Il est facile de voir que l'angle de la pointe a un impact sur la direction des angles réfléchies. Plus l'angle est grand, plus la situation s'approche de celle d'un bateau rectangulaire et plus les ondes semblent être redirigées vers la source.

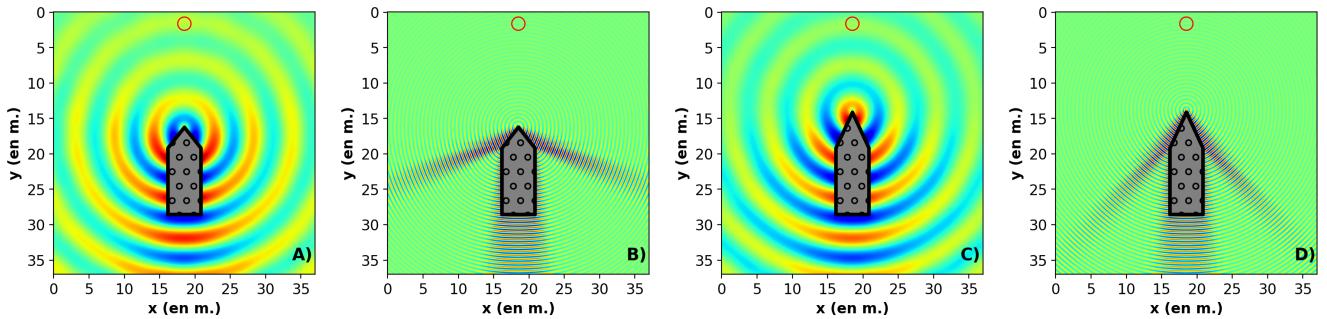


FIGURE 14 – La distribution de la pression diffuse pour des bateaux ayant une pointe triangulaire. En A) et B), un bateau dont l'angle de la pointe est de  $\pi/2.5$  est utilisé alors qu'un bateau dont l'angle de la pointe est de  $\pi/4$  est utilisé pour la sous-figure C) et D). La fréquence utilisée est de 250 Hz pour A) et C) et de 2500 Hz pour B) et D).

La relation entre la SER et la fréquence pour différents angles de pointe est présentée à la figure 15. Les trois bateaux ont des profils de SER différents à haute et basse fréquence. La tendance générale est que la SER est élevée à basse fréquence et, outre l'apparition de quelques pics, celle-ci décroît et devient pratiquement nulle à 10 000 Hz. Les valeurs moyennes de SER se situent entre 0.17 et 0.24  $\text{m}^2$ .

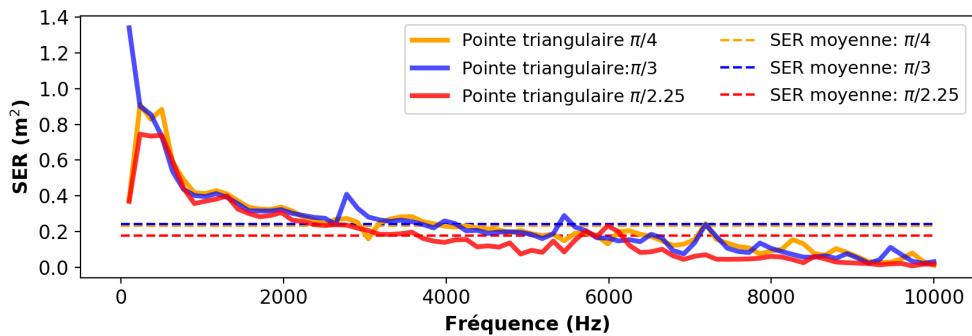


FIGURE 15 – Évolution de la SER en fonction de la fréquence pour des bateaux ayant des pointes triangulaires avec des angles différents.

### 6.3 Bateau avec une pointe circulaire

La figure 16 présente les résultats pour des bateaux ayant une pointe circulaire tel que défini dans la figure 2. Le rayon de l'arc de cercle utilisé pour la pointe est défini en fonction de la largeur du navire. Les distributions spatiales pour 2 rayons différents et pour 2 fréquences différentes sont présentées. En comparant la sous-figure B) à la sous-figure D), il est possible de voir que le bateau dont le rayon est plus petit semble disperser les ondes vers les côtés alors que celui ayant un rayon plus faible semble réfléchir plus d'ondes vers la source.

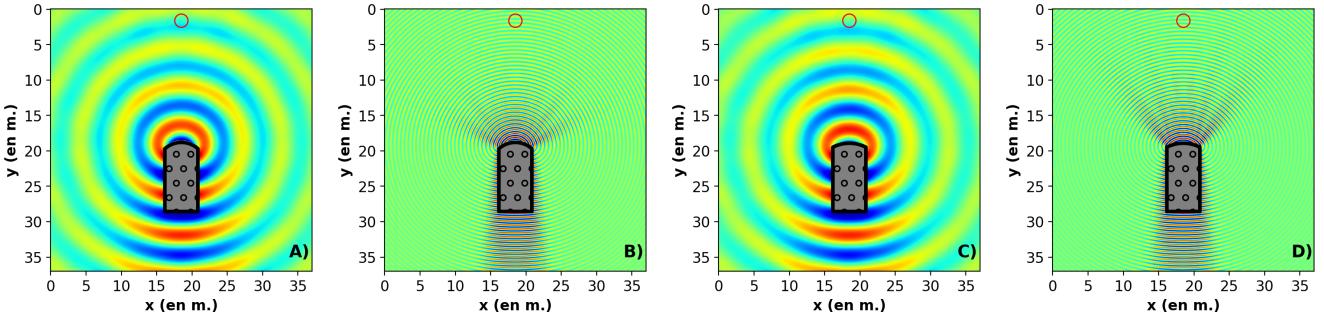


FIGURE 16 – La distribution de la pression diffuse pour un bateau avec une pointe circulaire. En A) et B), un bateau dont le rayon de la pointe est de  $0.75 \cdot$  Largeur est utilisé alors qu'un bateau dont le rayon de la pointe de  $1.1 \cdot$  Largeur est utilisé en C) et D). La fréquence utilisée est de 250 Hz pour A) et C) et de 2500 Hz pour B) et D).

Une analyse de la SER en fonction de la fréquence pour les deux géométries est présentée à la figure 17. La tendance générale est que la SER diminue avec l'augmentation de la fréquence. Les spectres des bateaux de rayon  $0.75 \cdot$  Largeur et  $1.0 \cdot$  Largeur sont similaires alors que celui du bateau ayant un rayon de  $0.5 \cdot$  Largeur a des valeurs plus élevées et un plus grand nombre de pics. Les valeurs moyennes se situent entre  $0.75$  et  $1.05 \text{ m}^2$ .

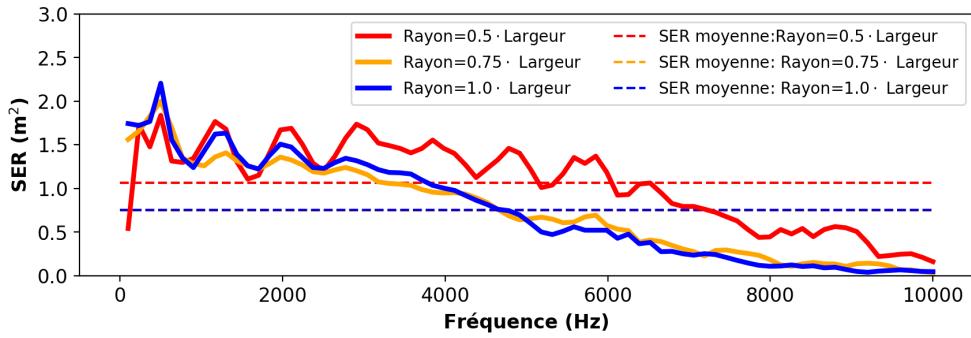


FIGURE 17 – Évolution de la SER en fonction de la fréquence pour des bateaux ayant des pointes circulaires de rayons différents. Les SER moyennes des bateaux dont les pointes ont des rayons de  $0.75 \cdot$  Largeur et de  $1.0 \cdot$  Largeur sont les mêmes (les droites sont donc superposées).

## 6.4 Discussion

Les résultats obtenus semblent être en accord avec les résultats attendus. En effet, ceux-ci varient fortement avec la fréquence et la géométrie de l'objet. Premièrement, il est possible de remarquer que, à basse fréquence (les sous-figures A) et C) des figures 12,14 et 16), la géométrie de l'objet semble avoir moins d'impact sur la distribution spatiale de la pression alors que, à haute fréquence (les sous-figures B) et D) des figures 12,14 et 16), il est plus facile de voir l'impact des changements de la géométrie. Pour un bateau avec une pointe triangulaire, l'effet est particulièrement flagrant.

L'analyse des graphiques de SER (figures 13, 15 et 17) permet de voir que, de manière générale, la SER diminue avec l'augmentation de la fréquence. L'étude du spectre de SER des bateaux de forme rectangulaire est intéressante car elle permet d'observer deux régimes. Dans le régime basse fréquence, la SER varie en fonction de la forme. À ces fréquences, la longueur d'onde est comparable à la taille de l'objet. La forme de l'objet semble avoir un plus grand impact. Par contre, dans les hautes fréquences, les longueurs d'onde sont plus petites et la largeur du bateau ne semble pas avoir d'impact (les courbes des bateaux de 5 m de large sont superposées à haute fréquence). Le spectre

à haute-fréquence semble être relié aux résonances internes du bateau. L'observation de ces spectres suggèrent que les modes de résonance sont liés à la longueur du bateau et non à sa largeur. Selon cette hypothèse, un balayage à haute fréquence permettrait d'identifier la longueur d'un bateau.

Pour les bateaux triangulaires, plusieurs pics dans la SER sont visibles. La position de ces pics semble dépendre de l'angle. Ainsi, il serait théoriquement possible d'identifier l'angle de la pointe d'un bateau à partir du signal reçu par le détecteur. Ces spectres pourraient aussi permettre de choisir une fréquence d'émission pour un système visant à détecter certains types de bateau. Par exemple, si les bateaux militaires ont un profil plus effilée (ex : une pointe avec un angle de  $\pi/4$ ) alors que les bateaux commerciaux ont un profil plus plat (ex : une pointe avec un angle de  $\pi/2.25$ ), un balayage entre 2500 et 3500 Hz serait suffisant pour détecter les bateaux militaires. Une analyse plus rigoureuse serait toutefois nécessaire pour voir si les autres paramètres comme la longueur du bateau sont susceptibles de déplacer ce pic.

Une analyse similaire peut être faite pour les bateaux avec un devant circulaire. Un des éléments qui distingue le spectre de SER des bateaux avec devants circulaires est que la SER du bateau dont la pointe possède un rayon correspondant à la moitié de la largeur du bateau (signal en rouge de la figure 17) est beaucoup plus élevée et que de nombreux pics sont présents. Il semblerait que le fait que la pointe soit un demi-disque complet ait un impact (les autres pointes ne sont pas des demi-disques complets) sur les modes de résonance interne. Le signal semble également être périodique. Il est donc probable que les pics correspondent aux différentes harmoniques du même mode de résonance.

Il est également possible de comparer les ordres de grandeur des SER en fonction de la forme du navire. Bien que les simulations ne couvrent pas tous les paramètres possibles, il est tout de même possible d'en extraire certaines tendances. Les bateaux ayant les SER moyennes les plus élevées sont les bateaux de type rectangulaire (entre 1.88 m<sup>2</sup> et 2.09 m<sup>2</sup>) alors que les valeurs les plus faibles étaient celles pour les bateaux avec les pointes triangulaires (entre 0.17 et 0.24 m<sup>2</sup>). Ainsi, en négligeant les autres contraintes comme l'hydrodynamique, il serait possible d'affirmer que les bateaux rectangulaires sont plus facilement détectable alors que les bateaux triangulaires sont les plus difficiles à détecter. Cette information permettra de déterminer la forme du bateau en fonction de l'application désirée.

## 7 Évaluation de la qualité des résultats

La propagation de l'onde acoustique sans bateau est présenté à la figure 18. Les PMLs sont présents et il est facile d'identifier le caractère harmonique de la source par la présence des cercles concentriques alternant entre un signal fort et un signal faible.

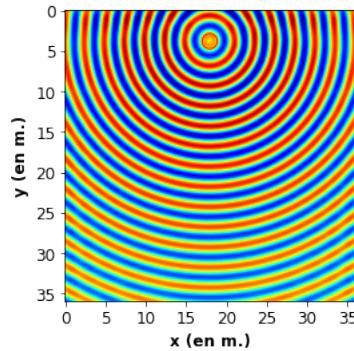


FIGURE 18 – Propagation dans l'espace libre

La figure 19 montre le champ diffus à partir du bateau. Les images valident bien les résultats et montrent l'effet

attendu des différents angles de la pointe du bateau. En suivant le signal diffus de plus grande intensité, il est possible de voir qu'il réfléchit sur les parois du bateau avec un angle complémentaire à la pointe du bateau.

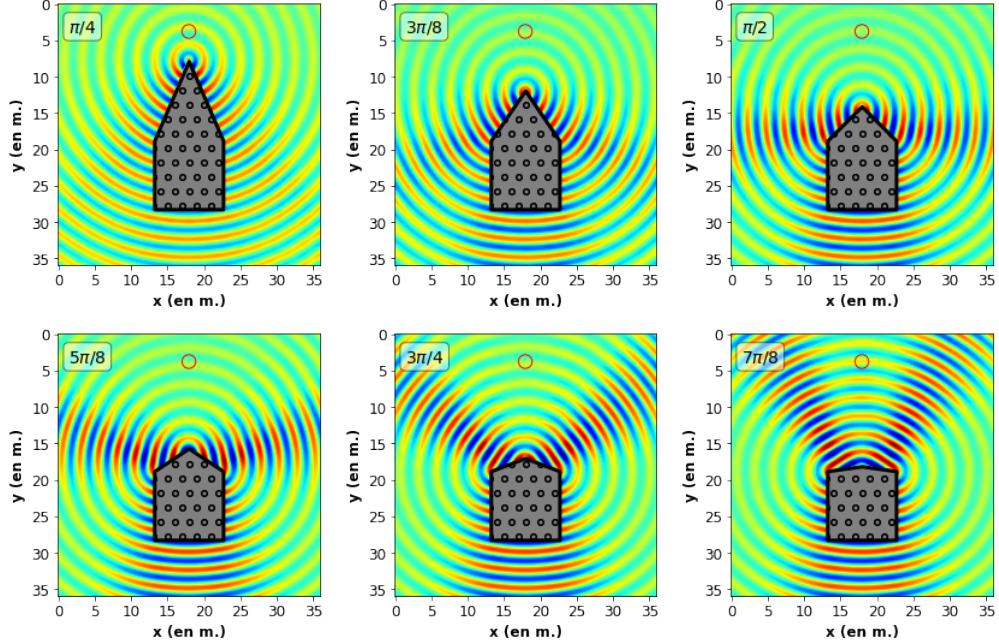


FIGURE 19 – Effet du champ diffus en fonction des angles.

L'implémentation des PMLs est importante dans la simulation du domaine fréquentiel puisqu'elle résout pour le régime permanent. La figure 20 montre l'importance du PML. La sous-figure de gauche illustre le cas sans PML. Il est possible d'observer que les multiples réflexions sur les parois de la cellule créent ainsi une carte de résonances. Le coefficient d'atténuation de l'eau  $\alpha$  a été mis à 0 afin d'accentuer les effets de la présence et de l'absence des couches absorbantes.

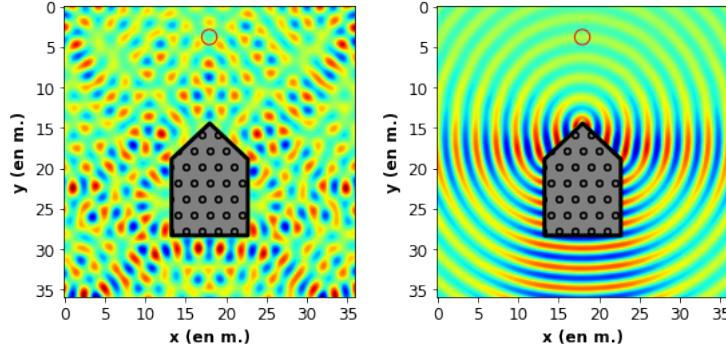


FIGURE 20 – Comparaison entre une simulation sans PML (gauche) et avec PML (droite). Le coefficient d'atténuation de l'eau  $\alpha$  a été mis à 0 afin d'accentuer les effets. Pour les deux simulations, la fréquence de l'onde est à 557 Hz et l'angle de la pointe est de  $\frac{\pi}{2}$ .

## 8 Défis surmontés

Dans le cadre du projet, plusieurs défis ont été surmontés. Dans le contexte actuel de la pandémie occasionnée par le virus SARS-CoV-2 provoquant la maladie du COVID-19, les rencontres d'équipe ont dû être effectuées à distance à l'aide des plateformes de partage vidéo Zoom et Via. Ces rencontres à distance ont rendu l'écriture d'un code en équipe plus difficile et les rencontres à distances étaient parfois limitées par la connexion Internet. Également, l'implémentation des couches absorbantes PML s'est avérée plus complexe que prévue. Plusieurs révisions du code et l'ajout de nombreuses couches (le nombre de couches utilisées était de 10) ont été nécessaires pour obtenir une bonne absorption des ondes incidentes. Le langage de programmation *Python* a posé quelques difficultés, car nous n'étions pas tous très à l'aise avec ce langage. Finalement, le calcul de la SER fut modifié plusieurs fois pour obtenir un calcul qui donnait des valeurs cohérentes avec la simulation. Les équations de la théorie ont du être adaptées à notre simulation, car il n'était pas possible de placer la source à une distance tendant vers l'infini. Surmonter ces défis a rendu le projet encore plus intéressant et enrichissant.

## 9 Améliorations possibles

Il serait possible d'apporter de nombreuses améliorations aux codes de simulation. Dans cette section, les modifications susceptibles d'avoir le plus d'impact seront présentées.

Premièrement, il aurait été intéressant de tester un plus grand espace des paramètres. Par exemple, la source aurait pu être déplacée par rapport au navire pour caractériser la SER latérale. Il aurait également été intéressant de tester un plus grand nombre de géométries. Des géométries arbitraires pourraient également être testées.

Deuxièmement, du travail additionnel pourrait être fait pour vérifier la validité des résultats. Une meilleure connaissance des ordres de grandeur des pressions impliquées serait nécessaire. Après avoir confirmé que les pressions impliquées sont bonnes, il serait possible d'améliorer la méthode de calcul de la SER. En effet, pour caractériser des surfaces plus complexes, la méthode actuelle où la distance utilisée est la distance la plus courte entre la source et le bateau semble peu rigoureuse. Par exemple, l'utilisation de la position du centre de masse du bateau pourrait être une alternative intéressante.

Finalement, au niveau de la performance du code, il serait possible de paralléliser certaines sections de l'initialisation et des balayages de fréquences pour le calcul de la SER. Cela diminuerait le temps nécessaire pour les calculs. Un autre ajout intéressant serait d'intégrer la possibilité de diviser le domaine de simulation en plusieurs sous-domaines. Cela permettrait de simuler des domaines plus grands ou de simuler des fréquences beaucoup plus élevées.

## 10 Conclusion

L'objectif de ce projet était de déterminer les géométries qui maximisent ou minimisent la SER de navires pour un système sonar sous-marin. Les modèles mathématiques nécessaires à la simulation informatique, la méthode de résolution utilisée, la discrétisations de ces équations, l'évaluation de la performance du code, la présentation des résultats et l'évaluation de la qualité de ces derniers y sont présentés. Dans l'ensemble, les résultats et de la performance du code de simulation sont satisfaisants. Les PMLs sont parfaitement fonctionnelles et il est possible d'observer l'influence de la forme d'un objet sur la surface équivalente radar. Selon les simulations, la forme qui maximisera la SER serait un bateau de forme rectangulaire très large et long. Pour la forme qui minimisera la SER, il s'agirait d'un bateau avec une pointe triangulaire dont l'angle  $\alpha$  est très petit pour disperser le plus l'onde loin du détecteur. L'objectif du projet est donc satisfait.

## Références

- [1] M. Skolnik, *Introduction to radar systems, second edition*, McGraw-Hill Inc, 1980.
- [2] G. Penn, “Csc401 :natural language computing (what is sound ?).” <http://www.cs.toronto.edu/~gpenn/csc401/soundASR.pdf>, 2010. [En ligne ; Page disponible le 29 janvier 2020].
- [3] T. K. Katsibas and C. S. Antonopoulos, “An efficient pml absorbing medium in fdtd simulations of acoustic scattering in lossy media,” in *2002 IEEE Ultrasonics Symposium, 2002. Proceedings.*, **1**, pp. 551–554, IEEE, 2002.
- [4] S. Lacroix, “Notes de cours : Physique des ondes.” non publié.
- [5] T. Rossing, *Springer handbook of acoustics*, Springer Science & Business Media, 2007.
- [6] R. C. Rumpf, “Simple implementation of arbitrarily shaped total-field/scattered-field regions in finite-difference frequency-domain,” *Progress In Electromagnetics Research* **36**, pp. 221–248, 2012.
- [7] J.-P. Berenger *et al.*, “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves,” *Journal of computational physics* **114**(2), pp. 185–200, 1994.
- [8] S. G. Johnson, “Notes on perfectly matched layers (pmls),” 2007.
- [9] S. Ernst Schmidt, “Properties of water and steam in si-units,” *IEEE Transactions on antennas and propagation* , 1969.
- [10] E. ToolBox, “Wood species - moisture content and weight.” [https://www.engineeringtoolbox.com/weigt-wood-d\\_821.html](https://www.engineeringtoolbox.com/weigt-wood-d_821.html), 2005. [En ligne ; Page disponible le 14 février 2020].
- [11] E. ToolBox, “Water - dynamic and kinematic viscosity.” [https://www.engineeringtoolbox.com/water-dynamic-kinematic-viscosity-d\\_596.html?vA=25&units=C#](https://www.engineeringtoolbox.com/water-dynamic-kinematic-viscosity-d_596.html?vA=25&units=C#), 2004. [En ligne ; Page disponible le 21 février 2020].
- [12] E. ToolBox, “Bulk modulus and fluid elasticity.” [https://www.engineeringtoolbox.com/bulk-modulus-elasticity-d\\_585.html](https://www.engineeringtoolbox.com/bulk-modulus-elasticity-d_585.html), 2004. [En ligne ; Page disponible le 21 février 2020].
- [13] D. W. Green, J. E. Winandy, and D. E. Kretschmann, “Mechanical properties of wood,” *Wood handbook : wood as an engineering material. Madison, WI : USDA Forest Service, Forest Products Laboratory, 1999. General technical report FPL ; GTR-113 : Pages 4.1-4.45* **113**, 1999.
- [14] K. Yee, “Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwell’s equations in isotropic media,” *IEEE Transactions on antennas and propagation* **14**(3), pp. 302–307, 1966.
- [15] S. D. Gedney, “Introduction to the finite-difference time-domain (fdtd) method for electromagnetics,” *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics* **6**(1), pp. 1–250, 2011.
- [16] E. N. Glytsis, A. D. Papadopoulos, and T. T. Koutserimpas, “Review and accuracy comparison of various permittivity-averaging schemes for material discontinuities in the two-dimensional fdfd method : implementation using efficient computer graphics techniques,” *Applied optics* **57**(25), pp. 7303–7313, 2018.
- [17] M. Albani and P. Bernardi, “A numerical method based on the discretization of maxwell equations in integral form (short papers),” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques* **22**(4), pp. 446–450, 1974.
- [18] D.-I. D. J. Schöberl and M. Rechberger, “Numerical methods for the simulation of acoustic resonances.”
- [19] S. Kagami and I. Fukai, “Application of boundary-element method to electromagnetic field problems (short papers),” *IEEE transactions on microwave theory and techniques* **32**(4), pp. 455–461, 1984.
- [20] A. C. Polycarpou, “Introduction to the finite element method in electromagnetics,” *Synthesis Lectures on Computational Electromagnetics* **1**(1), pp. 1–126, 2005.
- [21] “SciPy.” <https://www.scipy.org/>. Accédé le : 2020-02-15.
- [22] “NumPy.” <https://numpy.org/>. Accédé le : 2020-02-15.
- [23] P. Danziger, “Complexity.” <https://math.ryerson.ca/~danziger/professor/MTH108/Handouts/gauss-complexity.pdf>, 2004. [En ligne ; Page disponible le 07 avril 2020].
- [24] U. of Chicago, “2.4 solving systems of linear equations.” <https://www.mcs.anl.gov/~anitescu/CLASSES/2012/LECTURES/S310-2012-lect3.pdf>, 2012. [En ligne ; Page disponible le 07 avril 2020].

## Annexe 1

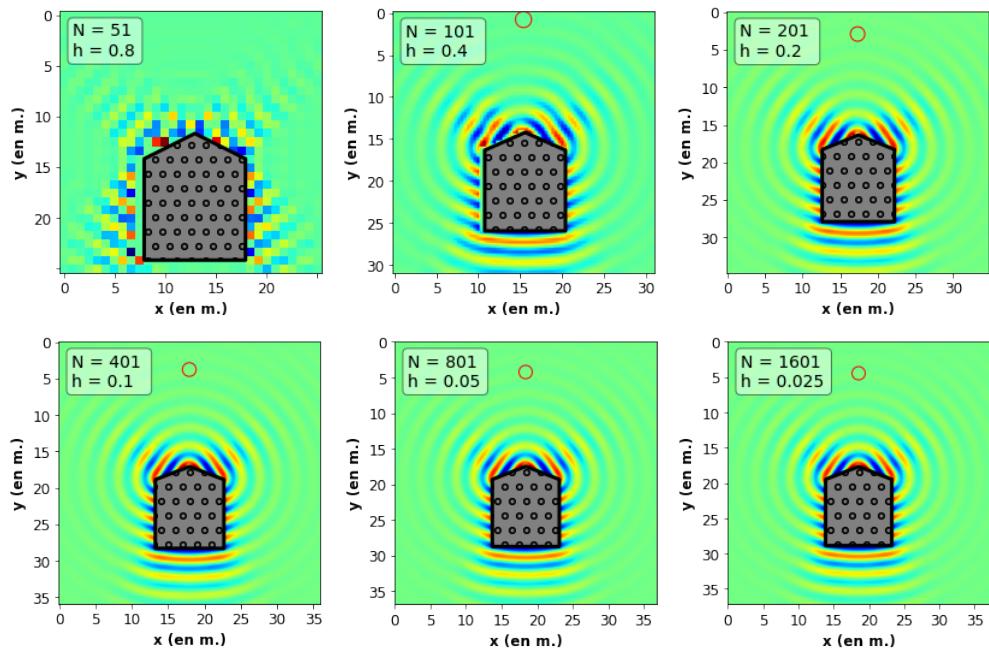


FIGURE 21 – Simulation effectuée avec différents paramètres de maille. Le bateau apparaissant plus large et la source déplacé dans les simulations à petits pas est simplement un effet de la programmation, mais n'affecte pas le phénomène physique.