

Algorithmes géométriques utilisés dans ElCanari

Pierre Molinaro

23 juin 2018

Table des matières

Table des matières	2
Liste des tableaux	4
Table des figures	5
1 Points	6
1.1 Distance entre deux points	6
1.2 Fonction product	6
1.3 Angle d'un vecteur avec l'horizontal	7
2 Rectangle horizontal	8
2.1 Construction d'un rectangle à partir de deux points	8
3 Cercle	9
3.1 Intersection entre deux cercles	9
3.2 Intersection avec un segment	9
4 Rectangle	11
4.1 Construction à partir d'un rectangle horizontal (CGRect)	11
4.2 Construction à partir de deux points et d'une hauteur	12
4.3 Construction à partir du centre, angle et taille	12
4.4 Cercle inscrit	12
4.5 Cercle circonscrit	13
4.6 Inclusion d'un point	13
4.7 Coordonnées des sommets	14
4.8 Intersection avec un cercle	14
4.9 Intersection avec un autre rectangle	15
5 Oblong	18
5.1 Point dans un oblong	19
5.2 Intersection avec un rectangle	19

TABLE DES MATIÈRES	3
5.3 Dessiner	20
5.4 Point dans un oblong, autre méthode	20

Liste des tableaux

Table des figures

Chapitre 1

Points

Dans ce chapitre, un point P est défini par ses coordonnées $(P.x, P.y)$. Les fonctions sont définies par une extension de `CGPoint` dans le fichier `extension-CGPoint.swift`.

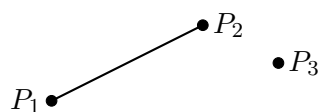
1.1 Distance entre deux points

Élémentaire!

```
extension CGPoint {  
    static func distance (_ p1 : CGPoint, _ p2 : CGPoint) -> CGFloat {  
        let dx = p1.x - p2.x  
        let dy = p1.y - p2.y  
        return sqrt (dx * dx + dy * dy)  
    }  
}
```

1.2 Fonction product

Cette fonction permet de savoir si un point P_3 est situé à *droite* (comme dans la figure ci-dessous) ou à *gauche* d'un segment P_1P_2 . Cette fonction est fondamentale pour de nombreux calculs, comme par exemple l'intersection de deux rectangles.



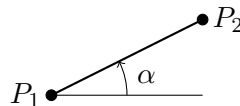
Pour cela, on calcule la composante verticale du produit vectoriel $\overrightarrow{P_1P_2} \wedge \overrightarrow{P_1P_3}$:

- positive, le point P_3 est à gauche du segment P_1P_2 ;
- négative, le point P_3 est à droite du segment P_1P_2 ;
- nulle, le point P_3 est aligné avec le segment P_1P_2 .

```
extension CGPoint {
  static func product (_ p1 : CGPoint, _ p2 : CGPoint, _ p3 : CGPoint) -> CGFloat {
    let dx2 = p2.x - p1.x
    let dy2 = p2.y - p1.y
    let dx3 = p3.x - p1.x
    let dy3 = p3.y - p1.y
    return dx2 * dy3 - dx3 * dy2
  }
}
```

1.3 Angle d'un vecteur avec l'horizontal

Étant donnés deux points P_1 et P_2 , il s'agit de déterminer l'angle α que fait le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ avec l'horizontale :



La fonction `atan2` renvoie l'angle en radian, et gère tous les cas particuliers (voir le *man* de cette fonction) :

- `atan2(+0, -0)` retourne $\pm\pi$;
- `atan2(+0, +0)` retourne ± 0 ;
- `atan2(+0, x)` retourne $\pm\pi$ pour $x < 0$;
- `atan2(+0, x)` retourne ± 0 pour $x > 0$;
- `atan2(y, +0)` retourne $+\pi/2$ pour $y > 0$;
- `atan2(y, +0)` retourne $-\pi/2$ pour $y < 0$.

```
extension CGPoint {
  static func angleInRadian (_ p1 : CGPoint, _ p2 : CGPoint) -> CGFloat {
    let width = p2.x - p1.x
    let height = p2.y - p1.y
    return atan2 (height, width) // Result in radian
  }
}
```

Chapitre 2

Rectangle horizontal

Par rectangle « horizontal », on entend un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes. Un tel rectangle est décrit par le type `CGRect`.

Dans ce chapitre, des additions à ce type sont présentées. Elles sont définies comme des extensions du type `CGRect`, et implémentées dans `extension-CGRect.swift`.

2.1 Construction d'un rectangle à partir de deux points

Cet initialiseur permet de construire un rectangle à partir de deux points; si les points sont confondus, la taille du rectangle est nulle.

```
extension CGRect {  
    init (point p1: CGPoint, point p2: CGPoint) {  
        origin = CGPoint (x: min (p1.x, p2.x), y: min (p1.y, p2.y))  
        size = CGSize (width: abs (p1.x - p2.x), height: abs (p1.y - p2.y))  
    }  
}
```


Chapitre 3

Cercle

Un cercle est caractérisé par son centre et son rayon. C'est un type qui n'existe pas en Cocoa, il est défini dans ElCanari par une structure non mutable. Ce type est implémenté dans `CanariCircle.swift`. Il est simplement construit à partir d'un point et d'un rayon.

```
struct CanariCircle {  
    let center : CGPoint  
    let radius : CGFloat  
  
    init (center : CGPoint, radius : CGFloat) {  
        self.center = center  
        self.radius = radius  
    }  
}
```

3.1 Intersection entre deux cercles

Élémentaire, il y a intersection si la distance entre les centres est inférieure ou égale à la somme des rayons.

```
func intersects (circle : CanariCircle) -> Bool {  
    let d = CGPoint.distance (self.center, circle.center)  
    return d <= (self.radius + circle.radius)  
}
```

3.2 Intersection avec un segment

L'intersection entre un cercle et un segment est plus compliquée, il y a plusieurs tests à faire :

- d'abord, on teste si la distance entre le centre du cercle et les extrémités du segment; si l'une de ces distances est inférieure au rayon du cercle, il y a intersection;
- ensuite, on calcule les coordonnées du centre du cercle dans le repère dont l'origine est le centre du segment, et l'axe des abscisses la direction du segment; il y a intersection si et seulement si :
 - la valeur absolue de l'ordonnée du centre est inférieure au rayon;
 - la valeur absolue de l'abscisse du centre est inférieure à la moitié de la distance entre les deux points.



```

func intersects (segmentFrom p1 : CGPoint, to p2 : CGPoint) -> Bool {
  var intersects = CGPoint.distance (p1, self.center) <= self.radius
  if !intersects {
    intersects = CGPoint.distance (p2, self.center) <= self.radius
  }
  if !intersects {
    let segmentAngle = CGPoint.angleInRadian (p1, p2)
    let segmentCenter = CGPoint (x: (p1.x + p2.x) / 2.0, y: (p1.y + p2.y) / 2.0)
    let tr = CGAffineTransform (rotationAngle: -segmentAngle)
      .translatedBy (x:-segmentCenter.x, y:-segmentCenter.y)
    let point = self.center.applying (tr)
    intersects = abs (point.y) <= self.radius
    if intersects {
      let segmentLength = CGPoint.distance (p1, p2)
      intersects = abs (point.x) <= (segmentLength * 0.5)
    }
  }
  return intersects
}

```

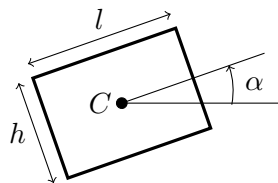
Chapitre 4

Rectangle

Il s'agit de rectangles d'orientation quelconque, ce qui généralise les rectangles « horizontaux » du [chapitre 2 page 8](#).

Un rectangle est caractérisé par :

- son centre C ;
- son angle α avec l'horizontal;
- sa largeur l ;
- sa hauteur h .



C'est un type qui n'existe pas en Cocoa, il est défini dans `ElCanari` par une structure non mutable. Ce type est implémenté dans `CanariRect.swift`.

```
struct CanariRect {  
    let center : CGPoint  
    let angle : CGFloat // In radians  
    let size : CGSize  
  
    ...  
}
```

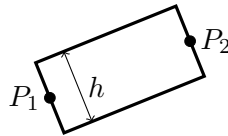
4.1 Construction à partir d'un rectangle horizontal (CGRect)

```

init (cgrect : CGRect) {
    center = CGPoint (x: NSMidX (cgrect), y: NSMidY (cgrect))
    size = cgrect.size
    angle = 0.0
}

```

4.2 Construction à partir de deux points et d'une hauteur



```

init (from p1 : CGPoint, to p2 : CGPoint, height : CGFloat) {
    center = CGPoint (x: (p1.x + p2.x) * 0.5, y: (p1.y + p2.y) * 0.5)
    size = CGSize (width: CGPoint.distance (p1, p2), height: height)
    angle = CGPoint.angleInRadian (p1, p2)
}

```

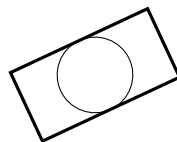
4.3 Construction à partir du centre, angle et taille

```

init (center : CGPoint, size : CGSize, angle : CGFloat) {
    self.center = center
    self.size = size
    self.angle = angle
}

```

4.4 Cercle inscrit

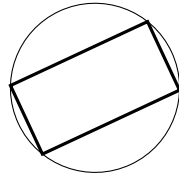


```

func inscribedCircle () -> CanariCircle {
    let radius = min (size.width, size.height) / 2.0
    return CanariCircle (center: self.center, radius: radius)
}

```

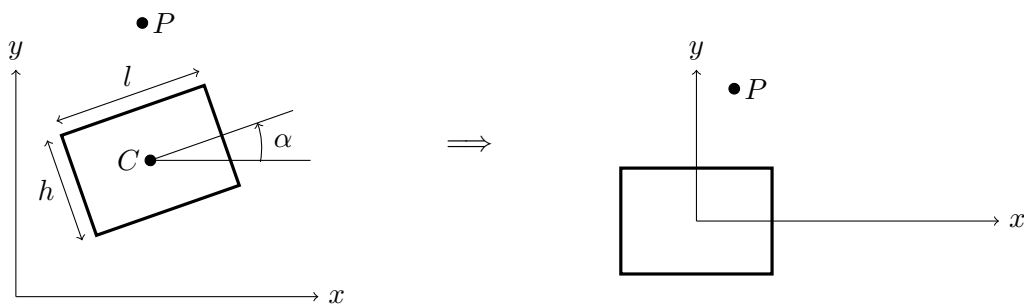
4.5 Cercle circonscrit



```
func circumCircle () -> CanariCircle {
    let radius = sqrt (size.width * size.width + size.height * size.height) / 2.0
    return CanariCircle (center: self.center, radius: radius)
}
```

4.6 Inclusion d'un point

Le test d'inclusion d'un point est plus délicat à mettre au point, bien que le code résultant soit court. Le principe est d'effectuer un changement de repère, de façon à obtenir les coordonnées du point testé dans le repère lié au rectangle, qui devient alors un rectangle horizontal. Tester l'appartenance du point devient élémentaire dans ce nouveau repère.



```
func contains (point p : CGPoint) -> Bool {
    let tr = CGAffineTransform (rotationAngle: -angle)
        .translatedBy (x:-center.x, y:-center.y)
    let point = p.applying (tr)
    return (abs (point.x) <= (size.width * 0.5))
        && (abs (point.y) <= (size.height * 0.5))
}
```

4.7 Coordonnées des sommets

La fonction suivante retourne dans un tableau les quatre sommets du rectangle. Le tableau est ordonné, on parcourt les sommets dans le sens trigonométrique.

```
func vertices () -> [CGPoint] { // Returns the four vertices in counterclock order
    let cosSlash2 = cos (angle) / 2.0
    let sinSlash2 = sin (angle) / 2.0
    let widthCos  = size.width  * cosSlash2
    let widthSin  = size.width  * sinSlash2
    let heightCos = size.height * cosSlash2
    let heightSin = size.height * sinSlash2
    return [
        CGPoint (x: center.x + widthCos - heightSin, y: center.y + widthSin + heightCos),
        CGPoint (x: center.x - widthCos - heightSin, y: center.y - widthSin + heightCos),
        CGPoint (x: center.x - widthCos + heightSin, y: center.y - widthSin - heightCos),
        CGPoint (x: center.x + widthCos + heightSin, y: center.y + widthSin - heightCos)
    ]
}
```

4.8 Intersection avec un cercle

Il y a intersection si :

- si le cercle contient le centre du rectangle;
- ou si le rectangle contient le centre du cercle;
- ou, à défaut, si le cercle présente une intersection avec l'un des quatre côtés du rectangle.

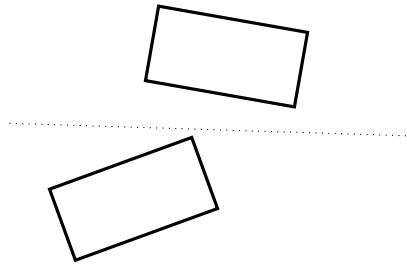
```
func intersects (circle : CanariCircle) -> Bool {
    //--- Intersection if circle contains rectangle center
    var intersects = CGPoint.distance (self.center, circle.center) <= circle.radius
    //--- Intersection if rectangle contains circle center
    if !intersects {
        intersects = self.contains (point: circle.center)
    }
    //--- Test intersection between circle and rectangle edge
    if !intersects {
        let vertices = self.vertices ()
        var i = 0
        while !intersects && (i < vertices.count) {
            intersects = circle.intersects (segmentFrom: vertices [i],
                                              to: vertices [(i+1) % vertices.count])
            i += 1
        }
    }
}
```

```

    }
  }
  return intersects
}
```

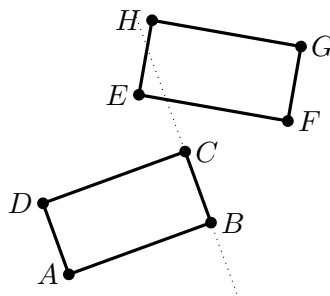
4.9 Intersection avec un autre rectangle

La méthode qui fait autorité est la méthode dite de *séparation d'axes*. Elle est illustrée dans la video <https://www.youtube.com/watch?v=WBy6AveIRR8>. En résumé, il n'y a pas intersection si il existe une droite pour laquelle un rectangle est complètement contenu dans un demi-plan, et l'autre rectangle complètement contenu dans l'autre demi-plan.



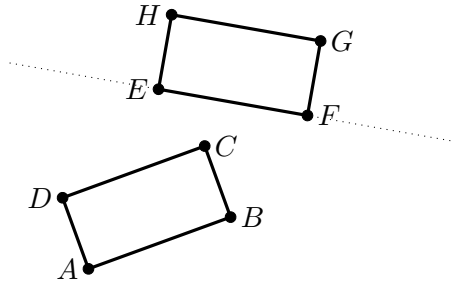
L'intérêt de la méthode est que l'on n'a pas besoin de construire une telle droite, qui d'ailleurs n'est pas unique dans le cas général.

Il faut commencer par construire les sommets des rectangles.



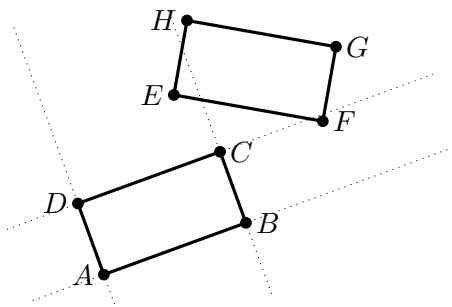
Ensuite, pour chaque côté du premier rectangle, on effectue le *test de séparation* : il est positif si les quatre sommets de l'autre rectangle sont « de l'autre côté ». Par exemple, on considère le côté BC , qui définit une droite qui partage le plan en deux. Par la fonction `CGPoint.product`, on calcule la composante verticale de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CD}$: son signe caractérise le demi-plan du premier rectangle. On calcule ensuite la composante verticale de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{CP}$, pour les quatre sommets P du second rectangle. On obtient un signe contraire pour les sommets F, G, H , mais le même signe pour le sommet E , ce qui fait échouer le test de séparation.

Le test de séparation réussit en considérant le segment EF :



Il faut donc effectuer le test de séparation pour chaque côté du premier rectangle **et** chaque côté du second rectangle. Il y a intersection si **tous** les tests de séparation échouent, donc pas d'intersection si un des tests réussit.

Il est indispensable de faire les tests pour les deux rectangles : en effet, ils peuvent échouer pour chaque côté du premier rectangle, alors qu'il n'y a pas intersection. Par exemple dans la figure suivante, les quatre tests d'isolation échouent pour les quatre côtés du rectangle $ABCD$.



Voici le code de la fonction.

```
func intersects (rect : CanariRect) -> Bool {
  //--- Method of separating axes (https://www.youtube.com/watch?v=WBy6AveIRRs)
  var intersects = true
  let vertices1 = self.vertices ()
  let vertices2 = rect.vertices ()
  do{
    var i = 0
    while intersects && (i < vertices1.count) {
      let ref = CGPoint.product (vertices1 [i],
                                vertices1 [(i+1) % vertices1.count],
                                vertices1 [(i+2) % vertices1.count])

      var outside = true
      var j = 0
      while outside && (j < vertices2.count) {
```



```
        let test = CGPoint.product (vertices1 [i],
                                     vertices1 [(i+1) % vertices1.count],
                                     vertices2 [j])

        outside = (ref * test) < 0.0
        j += 1
    }
    intersects = !outside
    i += 1
}
}
//---
if intersects {
    var i = 0
    while intersects && (i < vertices2.count) {
        let ref = CGPoint.product (vertices2 [i],
                                    vertices2 [(i+1) % vertices2.count],
                                    vertices2 [(i+2) % vertices2.count])

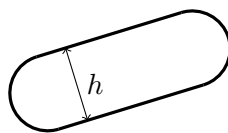
        var outside = true
        var j = 0
        while outside && (j < vertices1.count) {
            let test = CGPoint.product (vertices2 [i],
                                        vertices2 [(i+1) % vertices2.count],
                                        vertices1 [j])

            outside = (ref * test) < 0.0
            j += 1
        }
        intersects = !outside
        i += 1
    }
}
//---
return intersects
}
```

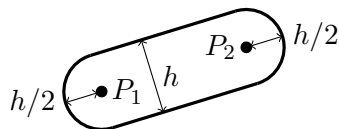
Chapitre 5

Oblong

Un oblong est un rectangle terminé par deux demi-cercles :



Un oblong est défini par deux points et la hauteur de la partie centrale, qui est aussi le diamètre des cercles d'extrémité :



```
struct CanariOblong {  
    let p1 : CGPoint  
    let p2 : CGPoint  
    let height : CGFloat  
  
    init (from p1 : CGPoint, to p2 : CGPoint, height : CGFloat) {  
        self.p1 = p1  
        self.p2 = p2  
        self.height = height  
    }  
    ...  
}
```

5.1 Point dans un oblong

Il suffit de tester successivement si :

- le point est dans le cercle de centre P_1 ;
- le point est dans le cercle de centre P_2 ;
- le point est dans le rectangle formé par la partie centrale;

```
func contains (point p : CGPoint) -> Bool {
  //--- p inside P1 circle
  var inside = CGPoint.distance (self.p1, p) <= (height / 2.0)
  //--- p inside P2 circle
  if !inside {
    inside = CGPoint.distance (self.p2, p) <= (height / 2.0)
  }
  //--- p inside rectangle
  if !inside {
    let r = CanariRect (from: self.p1, to: self.p2, height: self.height)
    inside = r.contains (point: p)
  }
  return inside
}
```

5.2 Intersection avec un rectangle

Il suffit de tester successivement si :

- le rectangle intersecte le cercle de centre P_1 ;
- le rectangle intersecte le cercle de centre P_2 ;
- le rectangle intersecte le rectangle formé par la partie centrale;

```
func intersects (rect : CanariRect) -> Bool {
  //--- rect intersects P1 circle
  let c1 = CanariCircle (center: self.p1, radius: self.height / 2.0)
  var intersects = rect.intersects (circle: c1)
  //--- rect intersects P2 circle
  if !intersects {
    let c2 = CanariCircle (center: self.p2, radius: self.height / 2.0)
    intersects = rect.intersects (circle: c2)
  }
  //--- rect intersects rectangle
  if !intersects {
    let r = CanariRect (from: self.p1, to: self.p2, height: self.height)
    intersects = rect.intersects (rect: r)
  }
}
```

```

    }
    return intersects
}

```

5.3 Dessiner

Pour dessiner un oblong, le plus simple est de tracer le segment P_1P_2 , avec l'épaisseur `height`. En précisant la terminaison `kCALineCapRound`, les deux demi-disques sont ajoutés au tracé. Si les points sont confondus, le tracé résulte en un disque.

```

func shape () -> CAShapeLayer {
    let mutablePath = CGMutablePath ()
    mutablePath.move (to: self.p1)
    mutablePath.addLine (to: self.p2)
    let newLayer = CAShapeLayer ()
    newLayer.path = mutablePath
    newLayer.lineWidth = self.height
    newLayer.lineCap = kCALineCapRound
    return newLayer
}

```

Pour le tracé effectif, il faut préciser sa couleur, par exemple :

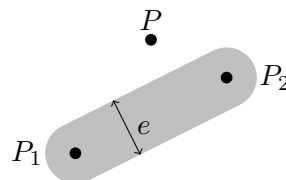
```

let oblong = CanariOblong (...)
let shapeLayer = oblong.shape ()
shapeLayer.strokeColor = NSColor.black.cgColor

```

5.4 Point dans un oblong, autre méthode

Cette technique n'est pas implémentée dans ElCanari.

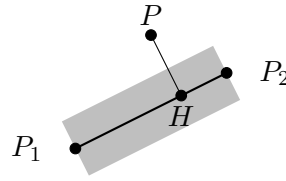


Il y a un cas particulier si les deux points sont confondus : il suffit alors de calculer la distance entre P et le point P_1 (ou P_2), et de la comparer avec $e/2$; ce n'est pas vraiment un cas particulier car le cas général commence par tester si point P dans le disque autour des extrémités.

Pour le cas général, on effectue trois tests :

- point P dans le disque autour de P_1 : calcul de la distance entre P et P_1 , et comparaison avec $e/2$;
- point P dans le disque autour de P_2 : calcul de la distance entre P et P_2 , et comparaison avec $e/2$;
- point P dans la partie centrale : c'est le plus compliqué, et est présenté ci-après.

On considère le point $H(H.x, H.y)$, projection de P sur P_1P_2 .



Le point P est dans la partie centrale si et seulement si :

- le point H est entre P_1 et P_2 ;
- la distance PH est inférieure à $e/2$.

Nous allons calculer les coordonnées de H , que l'on écrit sous la forme :

$$h.x = \frac{p_1.x + p_2.x}{2} - \lambda \frac{p_1.x - p_2.x}{2} \text{ et } h.y = \frac{p_1.y + p_2.y}{2} - \lambda \frac{p_1.y - p_2.y}{2}$$

Ceci assure que H est sur la droite P_1P_2 ; si $|\lambda| \leq 1$, H est entre P_1 et P_2 . Pour calculer λ , on va écrire que \overrightarrow{PH} et $\overrightarrow{P_1P_2}$ sont orthogonaux.

Ainsi :

$$\overrightarrow{HP} \begin{vmatrix} \frac{p_1.x + p_2.x}{2} - \lambda \frac{p_1.x - p_2.x}{2} - p.x \\ \frac{p_1.y + p_2.y}{2} - \lambda \frac{p_1.y - p_2.y}{2} - p.y \end{vmatrix} \overrightarrow{P_2P_1} \begin{vmatrix} p_1.x - p_2.x \\ p_1.y - p_2.y \end{vmatrix}$$

Pour que ces deux vecteurs soient orthogonaux :

$$\left(\frac{p_1.x + p_2.x}{2} - \lambda \frac{p_1.x - p_2.x}{2} - p.x \right) (p_1.x - p_2.x) = \left(\frac{p_1.y + p_2.y}{2} - \lambda \frac{p_1.y - p_2.y}{2} - p.y \right) (p_1.y - p_2.y)$$

D'où :

$$\lambda = \frac{(p_1.x + p_2.x - 2p.x)(p_1.x - p_2.x) + (p_1.y + p_2.y - 2p.y)(p_1.y - p_2.y)}{(p_1.x - p_2.x)^2 + (p_1.y - p_2.y)^2} = \frac{N}{D}$$

```

func segment (from p1 : CGPoint,
               to p2 : CGPoint,
               halfWidth : CGFloat,
               contains p : CGPoint) -> Bool {
//--- Near First point ?
    var contains = p.distanceTo (point: CGPoint (x: p1.x, y: p1.y)) < halfWidth
//--- Near Second point ?
    if !contains {
        contains = p.distanceTo (point: CGPoint (x: p2.x, y: p2.y)) < halfWidth
    }
//--- In segment ?
    if !contains && (( p1.x != p2.x) || (p1.y != p2.y)) {
        let dx = p1.x - p2.x
        let dy = p1.y - p2.y
        let N = (p1.x + p2.x - 2.0 * p.x) * dx + (p1.y + p2.y - 2.0 * p.y) * dy
        let D = dx * dx + dy * dy
        let lambda = N / D
        contains = abs (lambda) < 1.0
        if contains {
            let hx = (p1.x + p2.x) * 0.5 - lambda * dx * 0.5
            let hy = (p1.y + p2.y) * 0.5 - lambda * dy * 0.5
            contains = p.distanceTo (point: CGPoint (x: hx, y: hy)) < halfWidth
        }
    }
    return contains
}

```