Méthode de décomposition de domaine : Méthode de Jacobi

ISIMA 3F4

J. Koko

1 Problème modèle

Considérons un domaine bidimensionnel rectangulaire $\Omega = (a_x,\ b_x) \times (a_y,\ b_y)$, de bord Γ. On note $\boldsymbol{x} = (x, y)$ un point générique de $\mathbb{R}^2$. Notre problème modèle est

Trouver $u : \Omega \to \mathbb{R}$ solution de

$$\alpha u(\boldsymbol{x}) - \nu \Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \ \text{ dans } \Omega, \tag{1}$$

$$u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}) \ \text{ sur } \Gamma \tag{2}$$

où les fonctions $\alpha \geq 0$, $\nu > 0$ et f sont les données du problèmes. On s'intéresse à l'approximation du problème (1)-(2) par différences finies et décomposition de domaine.

2 Différences finies 5 points

On discrétise le problème (1)-(2) à l'aide de subdivisions de taille $h_x = (b_x - a_x)/(m+1)$ et $h_y = (b_y - a_y)/(n+1)$, de sorte que $\boldsymbol{x}_{ij} = (a_x + ih_x, a_y + jh_y)$, pour $i = 0, \ldots, m+1$, $j = 0, \ldots, n+1$ et $u_{ij} = u(\boldsymbol{x}_{ij})$. En appliquant l'approximation des différences finies en 5 points à l'équation (1) obtient le système linéaire suivant

$$\alpha u^k_{i,j} - \frac{\tilde{\nu}}{h_x^2}\left[u^k_{i-1,j} - 2u^k_{i,j} + u^k_{i+1,j}\right] - \frac{\tilde{\nu}}{h_y^2}\left[u^k_{i,j-1} - 2u^k_{i,j} + u^k_{i,j+1}\right] = \tilde{f}^k_{i,j}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n, \tag{3}$$

$$u^k_{i,j} = g_{i,j}, \quad i = 0, m+1 \text{ ou } j = 0, n+1 \tag{4}$$

Les valeurs de $\tilde{f}_{i,j}$ et $\tilde{g}_{i,j}$ sont données.

3 Méthode de Jacobi

On peut résoudre, le systèmes (3)-(4) sans expliciter la matrice sous-jaccente en utilisant des méthodes itératives simples. La méthode de Jacobi est l'une de ces méthodes. En partant d'une solution initiale u^0 (compatible avec les conditions aux limites), on calcule de manière itérative

$$u^{k+1}_{ij} = \frac{1}{\lambda}\Big[\tilde{f}_{ij} + \frac{\tilde{\nu}}{h_x^2}(u^k_{i-1,j} + u^k_{i+1,j}) + \frac{\tilde{\nu}}{h_y^2}(u^k_{i,j-1} + u^k_{i,j+1})\Big], \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n. \tag{5}$$

où on a posé

$$\lambda = \alpha + \frac{2\tilde{\nu}}{h_x^2} + \frac{2\tilde{\nu}}{h_y^2}.$$

On arrête les calculs quand l'erreur relative sur u devient petite, c'est-à-dire

$$\sum_{ij}\big(u^k_{ij} - u^{k-1}_{ij}\big)^2 < \varepsilon^2 \sum_{ij}\big(u^k_{ij}\big)^2$$

Ce qui se traduit en C par une mise à jour de la forme

```
for (i=1; i<m+1; i++)
    for (j=1; j<n+1; j++){
        ux = u[m*(i-1)+j]+u[m*(i+1)+j];
        uy = u[m*i+j-1]+u[m*i+j+1];
       un[m*i+j]=(f[m*i+j]+nux*ux+nuy*uy)/lam;
    }
```

4 Décomposition de domaine

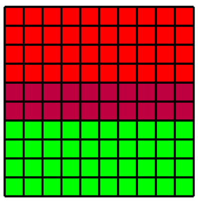
En décomposition de domaine, la méthode de Jacobi correspond à la méthode de Schwarz parallèle. Supposons Ω_i $(i = 1, 2)$ une décomposition *avec récouvrement* de Ω, $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$. On pose $S_1 = \partial\Omega_1 \cap \Omega_2$ et $S_2 = \Omega_1 \cap \partial\Omega_2$. La méthode de Jacobi consiste à résoudre itérativemement dans les sous-problèmes parallèles

$$\alpha u_1^\ell(\boldsymbol{x}) - \nu\Delta u_1^\ell(\boldsymbol{x}) = f_1(\boldsymbol{x}) \text{ dans } \Omega_1, \quad (6)$$
$$u_1^\ell(\boldsymbol{x}) = g_1(\boldsymbol{x}) \text{ sur } \Gamma_1 \quad (7)$$
$$u_1^\ell(\boldsymbol{x}) = u_2^{\ell-1}(\boldsymbol{x}) \text{ sur } S_1 \quad (8)$$

et

$$\alpha u_2^\ell(\boldsymbol{x}) - \nu\Delta u_2^\ell(\boldsymbol{x}) = f_2(\boldsymbol{x}) \text{ dans } \Omega_2, \quad (9)$$
$$u_2^\ell(\boldsymbol{x}) = g_2(\boldsymbol{x}) \text{ sur } \Gamma_2 \quad (10)$$
$$u_2^\ell(\boldsymbol{x}) = u_1^{\ell-1}(\boldsymbol{x}) \text{ sur } S_2 \quad (11)$$

En pratique, il suffit de décomposer la matrice u en blocs de lignes ou de colonnes qui se superposent (suivant le langage de programmation choisi).



Une fois les deux systèmes (6)-(8) et (9)-(11) résolus dans chaque sous-domaine par la méthode de Jacobi, les valeurs sur S_1 et S_2 sopnt mises à jour. On arrête les itérations quand l'erreur relative sur u_1 et u_2 devient "petite".

5 Le TP

Ecrire une une fonction en C qui calcule une solution approchée de (1)-(2) par différences finies avec la méthode de Jacobi (5). La fonction doit être suffisamment générique pour être utilisée dans la décomposition de domaine. On prendra comme problème modèle l'EDP suivante

$$-\Delta u(\boldsymbol{x}) = (a^2 + b^2)w_0(x, y) \text{ dans } (0,\ 1)^2 \quad (12)$$
$$u(\boldsymbol{x}) = w_0(x, y) \text{ sur le bord de } (0,\ 1)^2 \quad (13)$$

où $w_0(x, y) = \sin(ax)\cos(by)$. La solution exacte de (12)-(13) est $u = w_0$. On prendra, comme constantes, $a = b = 6.28$.