TP: ADMM pour les moindres déviations absolues (Least absolute deviations)

ISIMA 3F4 - Master Mathématiques

J. Koko

1 Problème

On considère dans ce TP une variante du problème des moindres carrés où on remplace la norme ℓ_2 par la norme ℓ_1. On a alors le problème

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \| Ax - b \|_1 \tag{1}$$

où A est une matrice $m \times n$ ($m \gg n$) de rang n, $b \in \mathbb{R}^m$. Pour appliquer l'algorithme ADMM, on remplace (1) par

$$\min \| z \|_1 \tag{2}$$

$$Ax - z = b. \tag{3}$$

2 ADMM

Soit $r > 0$ un réel positif. L'algorithme ADMM pour résoudre (2)-(3) produit les itérations suivantes :

$$x^{k+1} = (A^\top A)^{-1} A^\top (b + z^k - u^k) \tag{4}$$

$$z^{k+1} = S_{1/r}(Ax^{k+1} - b + u^k) \tag{5}$$

$$u^{k+1} = u^k + Ax^{k+1} - z^{k+1} - b. \tag{6}$$

Dans (5), S est l'opérateur de seuillage (*soft thresholding operator*) défini par

$$S_\kappa(a) = \begin{cases} a - \kappa & \text{si } a > \kappa \\ 0 & \text{si } |a| \leq \kappa \\ a + \kappa & \text{si } a < -\kappa \end{cases} \tag{7}$$

Dans (4), x^{k+1} est calculer en résolvant le système linéaire

$$(A^\top A) x^{k+1} = A^\top (b + z^k - u^k)$$

dont la matrice est constante au cours des itérations. Elle pourra donc être factorisée, une fois pour toutes, à l'initialisation.

3 TP

Le but du TP est d'écrire une function MATLAB `lav` qui effectue les moindres déviations absolues avec ADMM. On commencera par écrire la fonction `sto` qui fait le seuillage des composantes d'un vecteur passé en paramètre comme le seuil κ.

Tester le code avec le modèle $y = a + tb$ et les données

t	-1	-.75	-.5	0	0.3	.5	1
y	4	5.25	1	5	6.75	7	9

Comparer le résultat avec celui des moindres carrés classiques.