

Séance 3 – Rappels de probabilité et de statistique

Pierre Pora

Introduction

Rappel des épisodes précédents

- ▶ Nous avons exploré la séance précédente de façon un peu impressionniste ce que signifie, pour des économistes, travailler à partir de données quantitatives
 - ▶ Données qui peuvent être collectées par :
 - ▶ Des économistes eux-mêmes
 - ▶ La statistique publique
 - ▶ D'autres organismes
 - ▶ Données qui peuvent :
 - ▶ Avoir été collectées spécifiquement à des fins de recherche et d'information
 - ▶ Être issues d'un processus ayant d'autres finalités

L'objet de la séance

- ▶ Revenir sur les principaux concepts de probabilité et de statistique nécessaires pour la suite
- ▶ Sous une forme ou une autre, des concepts que vous devez avoir déjà rencontrés par le passé
- ▶ L'objet est de se remettre les idées en place
- ▶ Et de se (re)construire et consolider une intuition sur la façon dont tout ça fonctionne
- ▶ Présentation pas parfaitement rigoureuse et axiomatique
 - ▶ Tout un tas d'ouvrages font ça très bien

Motivation

Pourquoi un formalisme probabiliste ?

- ▶ Les quantités que nous essayons de mesurer ne sont (en général) pas connues de façon exacte
- ▶ Une des raisons les plus courantes : la distinction entre population d'intérêt et échantillon
 - ▶ Nous voulons connaître le taux de chômage pour l'ensemble des actifs au T1 2024
 - ▶ En supposant que l'enquête Emploi en continu mesure parfaitement ce que l'on veut, on connaît le taux de chômage dans l'échantillon de l'enquête à ce trimestre ($\sim 90,000$ personnes)
 - ▶ Ce n'est pas la même chose
 - ▶ Et on aurait pu obtenir une autre valeur avec un autre tirage de l'échantillon !

Pourquoi un formalisme probabiliste ?

- ▶ Un peu mieux que le Loto :
 - ▶ Si l'échantillonnage est bien fait, alors la mesure faite dans l'échantillon est informative sur la quantité d'intérêt
 - ▶ Et le formalisme probabiliste nous permet de quantifier à *quel point* la mesure faite dans l'échantillon est informative sur la quantité d'intérêt
 - ▶ Intuitivement, plus l'échantillon est grand, plus le risque de s'éloigner trop de la quantité d'intérêt est faible

Problème fondamental de l'inférence statistique

- ▶ On veut connaître une quantité qui se rapporte à une population très grande (éventuellement infinie)
- ▶ En utilisant des données collectées sur un échantillon fini de taille petite par rapport à la population
- ▶ On ne connaîtra jamais exactement la quantité d'intérêt
- ▶ Mais on peut se donner une idée raisonnable de sa valeur
- ▶ Et même avoir une idée raisonnable d'à quel point on peut se tromper dessus

Problème fondamental de l'inférence statistique

- ▶ Presque tout le semestre, je vais faire *comme si* la seule source d'incertitude était celle-ci
- ▶ Il y en a d'autres
 - ▶ Par exemple, dans un RCT où l'on réussirait à étudier toute la population
 - ▶ Incertitude liée au tirage de qui est concerné par le traitement
 - ▶ Cette incertitude se rapporte au problème fondamental de l'inférence causale : les effets causaux comparent des mondes possibles qui ne peuvent jamais être observés simultanément
 - ▶ Comme je ne parle pas de causalité ce semestre, on ne va pas beaucoup s'intéresser à ce cas

Problème fondamental de l'inférence statistique

- ▶ Historiquement, l'économétrie s'est surtout concentrée sur cette source d'incertitude là
- ▶ Les choses évoluent et la prise en compte d'autres sources d'incertitude progresse
 - ▶ En particulier l'incertitude découlant de l'assignation aléatoire
 - ▶ Abadie, Alberto, Susan Athey, Guido W. Imbens, et Jeffrey M. Wooldridge. 2020, "Sampling-Based versus. Design-Based Uncertainty in Regression Analysis." *Econometrica* 88 : 265-296.

L'objet du reste de la séance

- ▶ Revoir les différents concepts utiles pour permettre de donner un sens plus précis à tout ce qui précède

Variables aléatoires

Variable aléatoire

- ▶ Une variable aléatoire est la donnée de :
 - ▶ Une expérience aléatoire
 - ▶ Par exemple : tirer un ménage dans la population française
 - ▶ Et d'une règle qui associe une valeur au résultat de cette expérience
 - ▶ Par exemple : le niveau de vie de ce ménage
- ▶ Définition informelle !!
- ▶ Il faut bien les deux ingrédients
 - ▶ Si je refais le tirage d'un ménage
 - ▶ Et que je regarde encore son niveau de vie
 - ▶ C'est une autre variable aléatoire

Variable aléatoire

- ▶ Il n'y a pour l'instant aucune raison de se restreindre au cas particulier des variables aléatoires réelles
 - ▶ Celles qui prennent leurs valeurs dans \mathbb{R}
- ▶ Tirer un ménage et regarder le nom de la personne la plus âgée définit une variable aléatoire !

Variable indicatrice

- ▶ Lien entre des variables aléatoires quelconques et les variables aléatoires réelles
 - ▶ Etant donnée une v.a. quelconque
 - ▶ On peut définir la v.a. réelle qui part de la même expérience
 - ▶ Et vaut 1 si la valeur de la première vérifie une certaine propriété
 - ▶ Et 0 sinon
 - ▶ Variable indicatrice

Variable indicatrice

- ▶ Un exemple :
 - ▶ La variable aléatoire qui consiste à tirer une entreprise et à regarder son secteur au niveau le plus fin de la NAF rev. 2 (732 sous-classes)
 - ▶ Sur la même expérience on peut construire la variable aléatoire qui vaut 1 si l'entreprise appartient à la sous-classe "333.20B – Installation de machines et équipements mécaniques"
 - ▶ Et de même pour toutes les sous-classes
 - ▶ En fait la donnée la première variable est équivalente à celle de 731 variables indicatrices
- ▶ Idée extrêmement simple mais qui sert presque tout le temps !

Notion d'indépendance

- ▶ Deux variables aléatoires X et Y définies sur la même expérience aléatoire sont dites indépendantes lorsque, quelles que soient les parties A et B de leurs espaces d'arrivée respectifs, on a $\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{P}(Y \in B)$
- ▶ Généralisation à un nombre fini quelconque de variables aléatoires
- ▶ On peut noter $X \perp\!\!\!\perp Y$

Variables aléatoires réelles unidimensionnelles

Lois, distributions, quantiles

- ▶ La loi de probabilité d'une v.a. réelle est la fonction qui à chaque sous-ensemble (mesurable) de la droite réelle associe la probabilité, comprise entre 0 et 1, que les valeurs de cette variable aléatoire appartiennent à ce sous-ensemble.
- ▶ Autre terme ayant la même signification : distribution de cette variable aléatoire

Lois, distributions, quantiles

- ▶ Attention : la loi de probabilité d'une v.a. réelle ne suffit pas à la caractériser !
- ▶ Exemple : tirer aléatoirement un individu dans la population française
 - ▶ X vaut 1 lorsque l'âge de l'individu tiré est inférieur à l'âge médian, et 0 sinon
 - ▶ Y vaut 1 lorsque la taille de l'individu tiré est inférieure à la taille médiane, et 0 sinon
 - ▶ X et Y ont la même loi
 - ▶ mais X et Y sont deux v.a. différentes
 - ▶ il existe des individus qui sont à la fois jeunes ($X(\omega)=0$) et de grande taille ($Y(\omega)=1$)

Fonction de répartition, fonction quantile

- ▶ Répartition : Associe à chaque nombre réel x la probabilité que X prenne des valeurs inférieures ou égales x :
 - ▶ $F_X(x) := \mathbb{P}(X \leq x)$
- ▶ Quantile : fonction G du segment $[0, 1]$ dans la droite réelle achevée $\bar{\mathbb{R}}$. À tout q compris entre 0 et 1, la fonction quantile G associe le plus grand nombre $G(q)$ (y compris les deux infinis) tel que pour tout x , si $F(x)$ est supérieur ou égal à q , alors x est supérieur ou égal à $G(q)$
 - ▶ Médiane, quartiles, déciles etc.
- ▶ Deux variables aléatoires réelles ont la même loi de probabilité si et seulement si elles ont la même fonction de répartition, ou de façon équivalente si et seulement si elles ont la même fonction quantile

Espérance

- ▶ Lorsqu'une v.a. prend un nombre fini de valeurs, l'espérance est la moyenne de ces valeurs, avec des poids proportionnels à la probabilité que celle-ci prenne chacune d'entre elles
 - ▶ $\mathbb{E}[X] := \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{P}(X = x_i)$
 - ▶ Exemple : lancer d'un dé à six faces, v.a. résultat de ce lancer : l'espérance est $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = 3.5$
- ▶ Définition qui peut se généraliser à condition d'introduire l'intégrale de Lebesgue
 - ▶ On a autre chose à faire ici
 - ▶ Dans tout ce qui suit je suppose que toutes les espérances considérées sont bien définies

Propriétés de l'espérance

- ▶ Monotonie : si X et Y sont deux variables aléatoires réelles telles que pour tout résultat possible de l'expérience ω on ait $X(\omega) \leq Y(\omega)$, alors $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$
- ▶ Linéarité : si X et Y sont deux variables aléatoires réelles portant sur la même expérience
$$\mathbb{E}[\lambda X + \mu Y] = \lambda \mathbb{E}[X] + \mu \mathbb{E}[Y]$$
- ▶ L'espérance de X ne dépend que de la loi de X

Espérance \neq moyenne empirique

- ▶ L'espérance est un nombre réel !
 - ▶ Pas soumis à des fluctuations aléatoires
- ▶ La moyenne empirique est une opération qui porte sur un échantillon
 - ▶ Dépend donc du tirage de l'échantillon !
 - ▶ C'est une variable aléatoire

Espérance conditionnelle

- ▶ C'est une variable aléatoire !
- ▶ $\mathbb{E}[Y \mid X](\omega)$ est la moyenne des valeurs possibles de Y avec des poids égaux à la probabilité de réalisation de chacune de ces valeurs à l'intérieur de l'ensemble des résultats possibles ω' tels que $X(\omega') = X(\omega)$
 - ▶ Définition qui a du sens pour les v.a. avec un nombre fini de valeurs
 - ▶ Il existe des définitions plus générales \rightarrow pas traitées ici

Espérance conditionnelle

- ▶ Implication de cette définition : l'espérance conditionnelle ne peut pas varier plus finement que X !
 - ▶ $X(\omega) = X(\omega') \Rightarrow \mathbb{E}[Y | X](\omega) = \mathbb{E}[Y | X](\omega')$
- ▶ Au contraire il n'y a aucune restriction à ce que Y varie à l'intérieur des cellules définies par les valeurs de X
 - ▶ On peut dire que $\mathbb{E}[Y | X]$ est la meilleure façon de substituer à Y une v.a. qui ne varie pas plus finement que X
 - ▶ C'est (approximativement) la définition générale

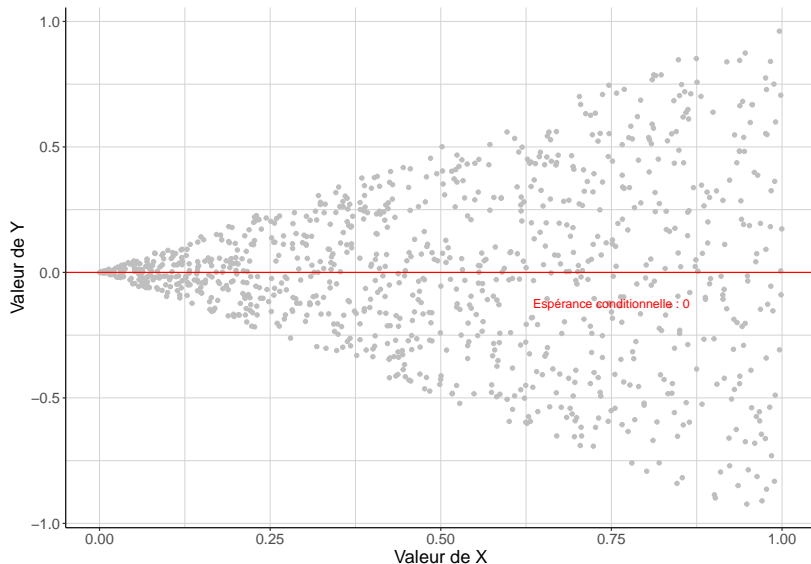
Espérance conditionnelle

- ▶ Exemple : tirage aléatoire équiprobable d'un-e salarié-e dans la population des salarié-e-s français-e-s, X est le sexe à l'état-civil, Y est le salaire de ce-tte salarié-e
 - ▶ $\mathbb{E}[Y \mid X]$ est :
 - ▶ le salaire moyen des femmes si c'est une femme
 - ▶ le salaire moyen des hommes si c'est un homme

Propriétés de l'espérance conditionnelle

- ▶ Monotonie et linéarité : pareil que pour l'espérance
- ▶ $\mathbb{E}[\phi(X)Y \mid X] = \phi(X)\mathbb{E}[Y \mid X]$
 - ▶ En particulier $\mathbb{E}[\phi(X) \mid X] = \phi(X)$
- ▶ Loi des espérances itérées : $\mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid X]] = \mathbb{E}[Y]$
 - ▶ Dans l'exemple précédent : le salaire moyen = la moyenne du salaire des femmes et du salaire des hommes avec des poids proportionnels à la part de chaque sexe dans l'emploi salarié
- ▶ Si X et Y sont indépendantes alors $\mathbb{E}[Y \mid X]$ est constante
 - ▶ La réciproque n'est pas vraie !

Espérance conditionnelle constante et variables pas indépendantes



Indépendance en moyenne

- ▶ Concept différent de l'indépendance \rightarrow ce qu'on vient de voir
- ▶ Y est indépendante en moyenne de X si $\mathbb{E}[Y \mid X]$ est constante égale à l'espérance $\mathbb{E}[Y]$
 - ▶ Concept qui n'est pas symétrique !
 - ▶ Dans le contre-exemple précédent Y est indépendante en moyenne de X mais X n'est pas indépendante en moyenne de Y

Probabilité conditionnelle

- ▶ On peut définir la probabilité conditionnelle à partir de l'espérance conditionnelle !
 - ▶ $\mathbb{P}(A \mid B) := \mathbb{E}[X_A \mid X_B = 1]$ où X_A et X_B sont les variables indicatrices des événements A et B
- ▶ Permet de retrouver la formule de Bayes $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Variance et écart-type

- ▶ Variance : $\mathcal{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
- ▶ Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{\mathcal{V}(X)}$
- ▶ Cas particulier souvent utile : les variables dichotomiques
 - ▶ $\mathcal{V}(X) = \mathbb{E}[X] \{1 - \mathbb{E}[X]\}$
- ▶ Ne dépend que de la loi de X

Variance et écart-type

- ▶ Quantifie en un sens la dispersion des variables aléatoires autour de leur moyenne
 - ▶ Variance nulle \Leftrightarrow v.a. constante
 - ▶ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :
$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}[X]| \geq \alpha) \leq \frac{\mathcal{V}(X)}{\alpha^2}$$

Covariance et corrélation

- Covariance :

$$\mathcal{C}(X, Y) := \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

- Corrélation : $\rho_{XY} := \frac{\mathcal{C}(X, Y)}{\sqrt{\mathcal{V}(X)\mathcal{V}(Y)}}$

- Mesure essentiellement la même chose mais ne dépend pas de la variance des variables

- Sans unité

- Entre -1 et 1

- Mesurent le “lien” entre deux v.a.

- $\rho_{XY} \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow \exists(\alpha, \beta) Y = \alpha + \beta X \quad \beta \neq 0$

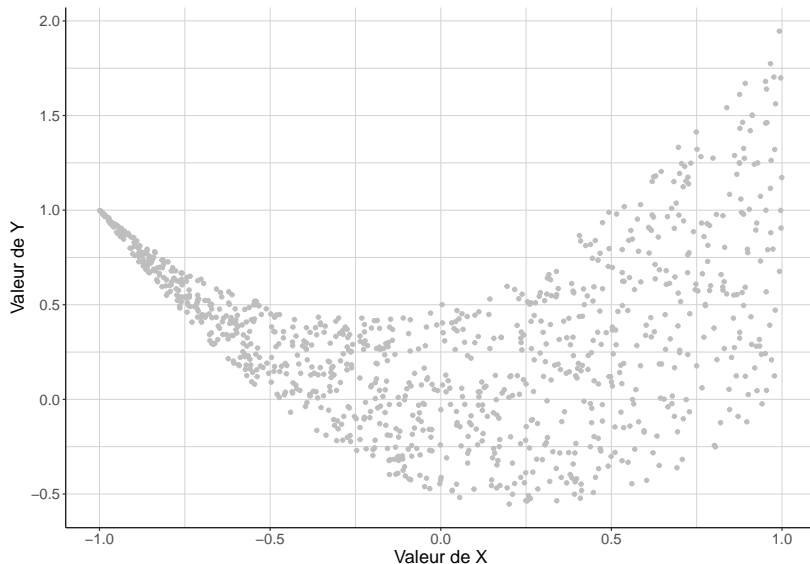
Covariance : propriétés

- ▶ Bilinéarité : $\mathcal{C}(\lambda X + \mu Y, Z) = \lambda \mathcal{C}(X, Z) + \mu \mathcal{C}(Y, Z)$
- ▶ Symétrie : $\mathcal{C}(X, Y) = \mathcal{C}(Y, X)$
- ▶ Positivité : $\mathcal{C}(X, X) \geq 0$
 - ▶ $\mathcal{C}(X, X) = \mathcal{V}(X)$

Indépendance, indépendance en moyenne et variables non-corrélées

- ▶ Si X est indépendante en moyenne de Y alors $\mathcal{C}(X, Y) = 0$
 - ▶ Simple application de la loi des espérances itérées
- ▶ La réciproque n'est pas vraie !!
- ▶ Indépendance \Rightarrow Indépendance en moyenne \Rightarrow variables non-corrélées
 - ▶ Ce sont bien trois concepts différents !

Corrélation nulle mais ni indépendance en moyenne ni indépendance



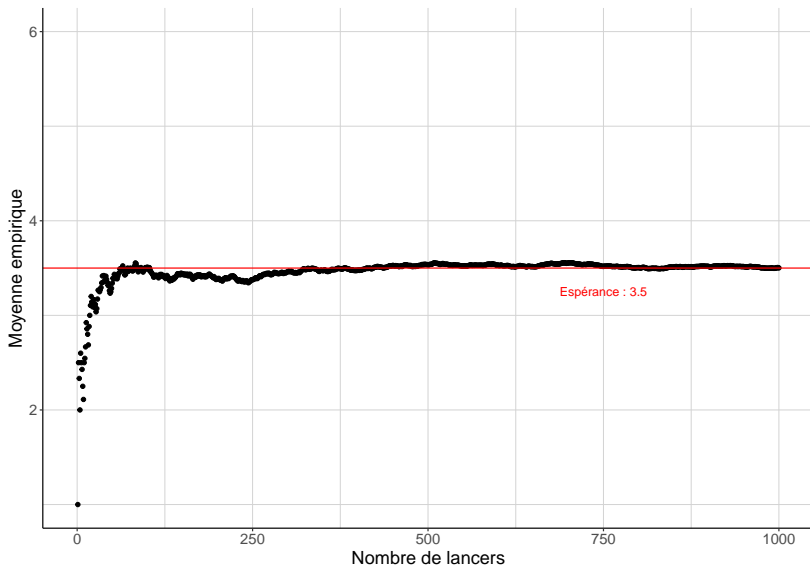
Etude de la moyenne empirique

- ▶ Première quantification de l'incertitude dans le cadre évoqué en début de séance
- ▶ On tire un nombre n d'individus dans une population (virtuellement) infinie, indépendamment les uns des autres
- ▶ Et pour chacun d'eux, on regarde une même quantité
- ▶ Cela définit n v.a. X_1, \dots, X_n
- ▶ Toutes ces v.a. ont la même loi : définie par la distribution de la quantité X dans la population
 - ▶ Mais elles ne sont pas égales entre elles !
 - ▶ On peut noter $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X_1] = \dots = \mathbb{E}[X_n]$
 - ▶ Et $\mathcal{V}(X) = \mathcal{V}(X_1) = \dots = \mathcal{V}(X_n)$

Etude de la moyenne empirique

- ▶ Définition de la moyenne empirique : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$
 - ▶ C'est une v.a. !!
- ▶ Linéarité de l'espérance $\Rightarrow \mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X]$
- ▶ Indépendance $\Rightarrow \mathcal{V}(S_n) = \frac{1}{n} \mathcal{V}(X)$
 - ▶ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev $\Rightarrow S_n$ est d'autant plus concentrée autour de $\mathbb{E}[X]$ que n est grand
 - ▶ C'est (une version de) la loi des grands nombres !
- ▶ La moyenne empirique dans l'échantillon est un estimateur de l'espérance, i.e. de la moyenne prise dans toute la population

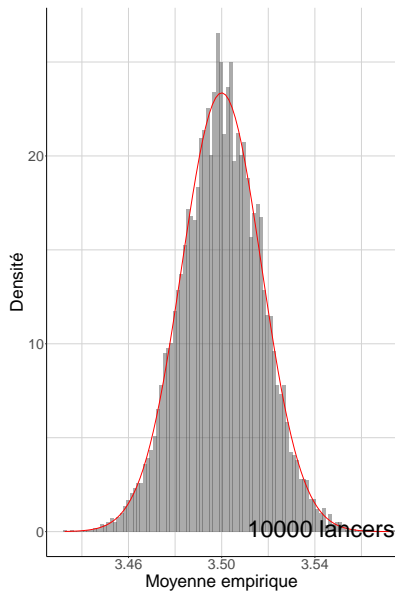
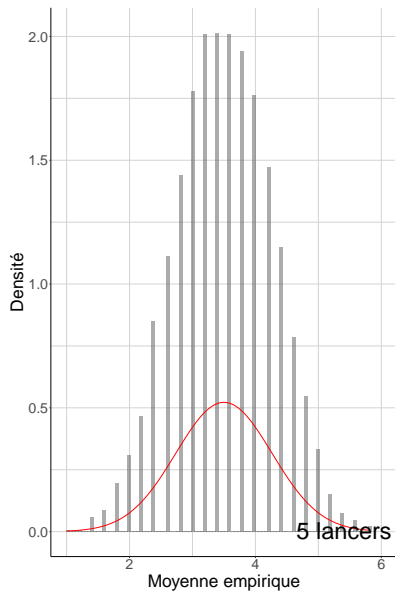
Une simulation pour l'exemple



Etude de la moyenne empirique

- ▶ Résultat fondamental !
 - ▶ Explique pourquoi on peut avoir une information raisonnable sur des quantités impossibles ou très difficiles à mesurer (e.g. moyennes sur une population très grande) en ayant recours à des échantillons beaucoup plus modestes
- ▶ Raffinement : quand $n \rightarrow \infty$, $\sqrt{\frac{n}{\mathcal{V}(X)}} \{S_n - \mathbb{E}[X]\}$ s'identifie à la loi normale centrée $\mathcal{N}(0, 1)$
 - ▶ Théorème central limite
 - ▶ Approximation asymptotique de l'erreur d'estimation
 - ▶ Utilisé en permanence pour construire des tests statistiques

On continue avec la simulation



Variables aléatoires réelles multidimensionnelles

Variable aléatoire réelle multidimensionnelle

- ▶ Ca marche exactement comme les v.a. réelles unidimensionnelles sauf qu'il y a plusieurs dimensions
- ▶ Une expérience aléatoire + une règle qui la lie à une valeur qui a la forme d'un vecteur ou d'une matrice
 - ▶ Exemple : le tirage d'un salarié dans la population des salariés français et le vecteur de son revenu salarial, de ses heures rémunérées et de son salaire horaire
- ▶ Une fois qu'on a dit ça on a presque tout dit !

Espérance

- ▶ $\mathbb{E}[(X_1 \dots X_d)'] = (\mathbb{E}[X_1] \dots \mathbb{E}[X_d])'$
- ▶ Toutes les propriétés de linéarité, monotonie etc. se transfèrent immédiatement au cas multidimensionnel

Rappel de calcul matriciel

- ▶ XX' matrice carrée de taille $d \times d$ dont le coefficient à la ligne i colonne j est le produit de la i -ème composante par la j -ème composante ($X_i X_j$)
- ▶ A ne pas confondre avec $X'X = \sum_{i=1}^d X_i^2$

Matrice de variance-covariance

► $\mathcal{V}(X) = \mathbb{E} \left[\{X - \mathbb{E}[X]\} \{X - \mathbb{E}[X]\}' \right]$

► $\mathcal{V}(X)_{ij} = \mathcal{C}(X_i, X_j)$

► C'est une matrice symétrique

Matrice de variance-covariance

- ▶ On peut s'en servir pour quantifier la dispersion des v.a. multidimensionnelles

- ▶ Idée : $\{X - \mathbb{E}[X]\}' \{X - \mathbb{E}[X]\} = \sum_{i=1}^d \{X_i - \mathbb{E}[X_i]\}^2$
norme euclidienne de l'écart à $\mathbb{E}[X]$ (au carré)

- ▶ Inégalité de Bienaymé-Tchebychev multidimensionnelle :

$$\mathbb{P} \left(\sqrt{\{X - \mathbb{E}[X]\}' \{X - \mathbb{E}[X]\}} \geq \alpha \right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^d \mathcal{V}(X_i)$$

Matrice de variance-covariance

- ▶ $\mathcal{V}(X)$ est inversible si et seulement si ses composantes et la v.a. constante égale à 1 sont linéairement indépendantes (au sens de l'algèbre linéaire !)
 - ▶ Cas unidimensionnel
 - ▶ $\mathcal{V}(X)$ inversible $\Leftrightarrow \mathcal{V}(X) \neq 0$
 - ▶ Cas bidimensionnel
 - ▶ $\mathcal{V}(X)$ non-inversible $\Leftrightarrow \det(\mathcal{V}(X)) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{C}(X_1, X_2) = \pm \sqrt{\mathcal{V}(X_1)\mathcal{V}(X_2)} \Leftrightarrow \rho_{X_1 X_2} \in \{-1, 1\}$
- ▶ Résultat qui a l'air idiot mais essentiel pour définir les moindres carrés ordinaires

Matrice de variance-covariance

- ▶ Esquisse d'une preuve élémentaire et inélégante
 - ▶ Sens direct : on suppose $\mathcal{V}(X)$ inversible
 - ▶ On suppose que l'on a une v.a. réelle unidimensionnelle $Z = \sum_{i=1}^d \lambda_i X_i$ constante
 - ▶ Cela implique que pour tout j $\mathcal{C}(X_j, Z) = 0$
 - ▶ Mais $\mathcal{C}(X_j, Z) = \sum_{i=1}^d \mathcal{C}(X_j, X_i) \lambda_i$: produit de la j -ème ligne de $\mathcal{V}(X)$ par $\lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_d)'$
 - ▶ Donc $\mathcal{V}(X)\lambda = 0$
 - ▶ L'inversibilité permet de conclure $\lambda = 0$

Matrice de variance-covariance

- ▶ Suite de la preuve élémentaire et inélégante
 - ▶ Sens indirect : on suppose que les coefficients de toute combinaison linéaire constante des composantes de X sont nuls
 - ▶ On considère une combinaison linéaire nulle des lignes de $\mathcal{V}(X)$: $\forall j \sum_{i=1}^d \lambda_i \mathcal{C}(X_i, X_j) = 0$
 - ▶ On considère la v.a. $Z = \sum_{i=1}^d \lambda_i X_i$
 - ▶ Linéarité + réarrangement de la somme :
$$\mathcal{V}(Z) = \sum_{j=1}^d \lambda_j \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i \mathcal{C}(X_i, X_j) \right)$$
 - ▶ Donc $\mathcal{V}(Z) = 0$, ce qui implique $\lambda = 0$
 - ▶ Autrement dit $\mathcal{V}(X)$ est inversible

Matrice de variance-covariance

- ▶ Une esquisse de preuve moins laide mais qui repose sur des résultats peut-être pas connus à ce stade
 - ▶ $\mathcal{V}(X)$ est symétrique donc elle est diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale
 - ▶ Comme la variance de toute combinaison linéaire des composantes de X est positive ou nulle, ses valeurs propres ne peuvent être que positives ou nulles
 - ▶ La variance d'une combinaison linéaire non-triviale ne peut être nulle que si une des valeurs propres est nulle
- ▶ L'étude des matrices symétriques est classique et utile pour de nombreuses applications en économie et en statistique → régressions, analyse en composantes principales, caractérisation des optimums locaux etc.
 - ▶ Et ce type de résultat intervient presque toujours !

Matrice de variance-covariance

- ▶ Une extension utile pour la suite : un résultat proche tient pour $\mathbb{E}[XX']$
 - ▶ $\mathbb{E}[XX']$ est inversible si et seulement si toutes les composantes de X sont linéairement indépendantes
 - ▶ Différence avec le cas précédent : la v.a. constante égale à 1 ne tient pas de rôle particulier

Etude de la moyenne empirique

- ▶ Loi des grands nombres sur le même principe que dans le cas unidimensionnel
- ▶ TCL : $\sqrt{n} \{X - \mathbb{E}[X]\}$ s'identifie dans la limite d'un grand nombre d'observations à la loi normale centrée de matrice de variance-covariance $\mathcal{V}(X)$
 - ▶ De nouveau un résultat qui sert en permanence pour quantifier l'erreur que l'on commet en estimant l'espérance par la moyenne empirique

C'est tout pour aujourd'hui

- ▶ Séance un peu dense de catalogage de différents concepts
- ▶ Il fallait en passer par là
- ▶ Les prochaines séances introduiront progressivement les outils de régression linéaire en utilisant ce vocabulaire et surtout en revenant à des considérations plus pratiques