

Les motifs cachés de l'univers

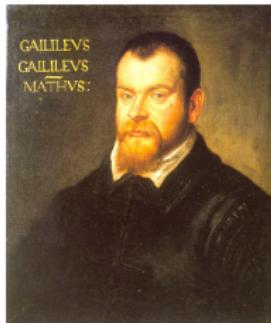
Quand la géométrie dévoile les secrets de l'Univers

Pierre Vanhove



Lycée Faidherbe, Lille
8 janvier 2026

Le géométrie : le langage de la Nature



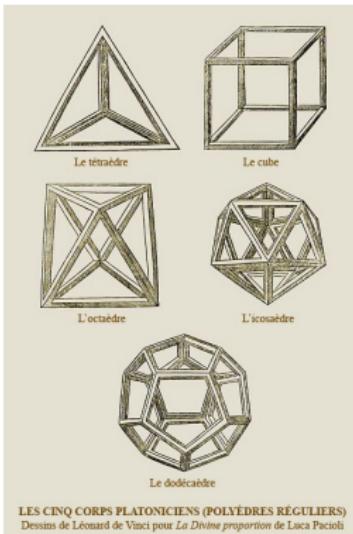
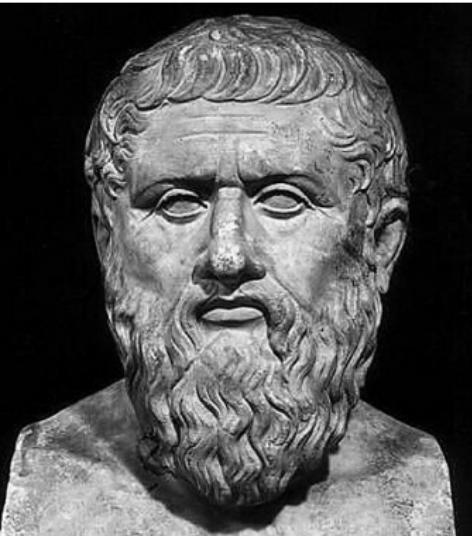
Galilée (1564-1642)

La philosophie est écrite dans ce grand livre qui se tient constamment ouvert devant nos yeux, je veux dire l'univers. (...) Cette philosophie, elle est écrite en langue mathématique.

Ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques, sans le moyen desquelles il est impossible de saisir humainement quelque parole, et sans lesquelles on ne fait qu'errer vainement dans un labyrinthe obscur.

Des figures géométriques parfaites

Dans le Timée, Platon associe les cinq polyèdres réguliers aux éléments fondamentaux et à l'Univers lui-même

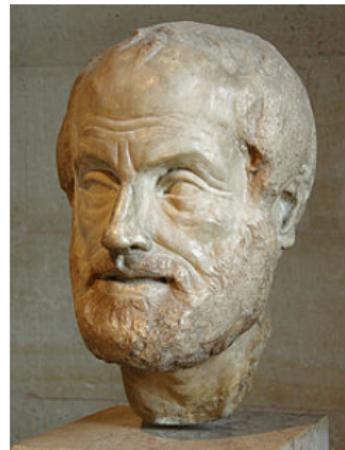


- Tétraèdre = Feu
- Cube = Terre
- Octaèdre = Air
- Icosaèdre = Eau
- Dodécaèdre = Univers

Platon (-427, -347)

Les sphères célestes d'Aristote

La sphère est considérée comme la forme la plus parfaite, elle doit nécessairement régir les mouvements célestes

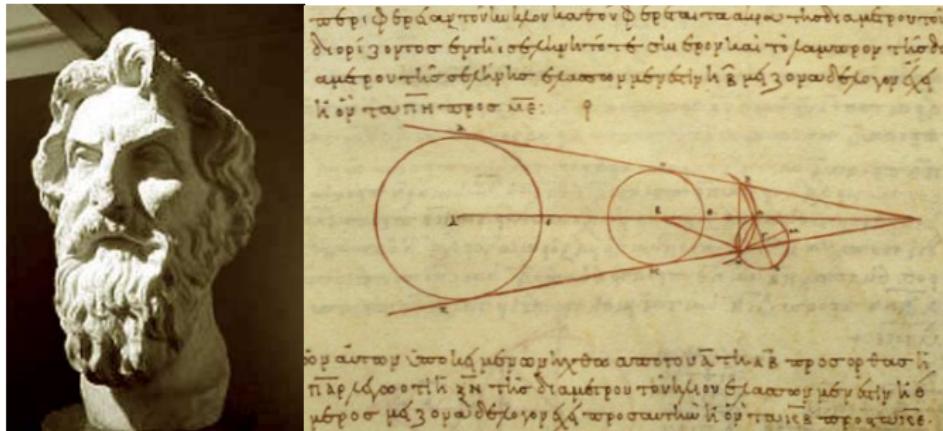


Aristote (-384, -322)

Aristote imaginait l'Univers comme une série de sphères concentriques cristallines, chacune portant un astre.

La Terre immobile au centre, puis la Lune, le Soleil, les planètes, et enfin la sphère des étoiles fixes.

La géométrie pour comprendre le monde



Aristarque de Samos (310–230 av. J.C.) utilisa le théorème de Thalès pour estimer le rayon de la Lune, du Soleil et leur distance à la Terre

Grâce aux éclipses, il calcule que la Lune est 3 fois plus petite que la Terre et située à 20 rayons terrestres, alors que le Soleil est six fois plus gros que la Terre et éloigné de 380 rayons terrestres

Il conclut logiquement que la Terre tourne autour du Soleil.

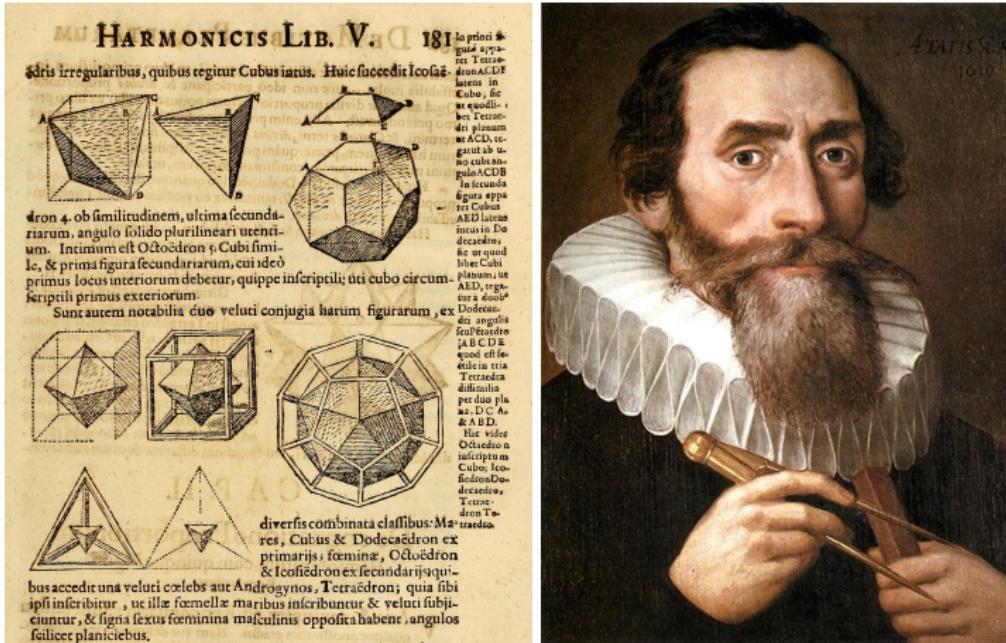
L'Almageste : une bible géométrique



Suivant Aristote, Ptolémée propose un système mathématique cohérent du mouvement des Astres

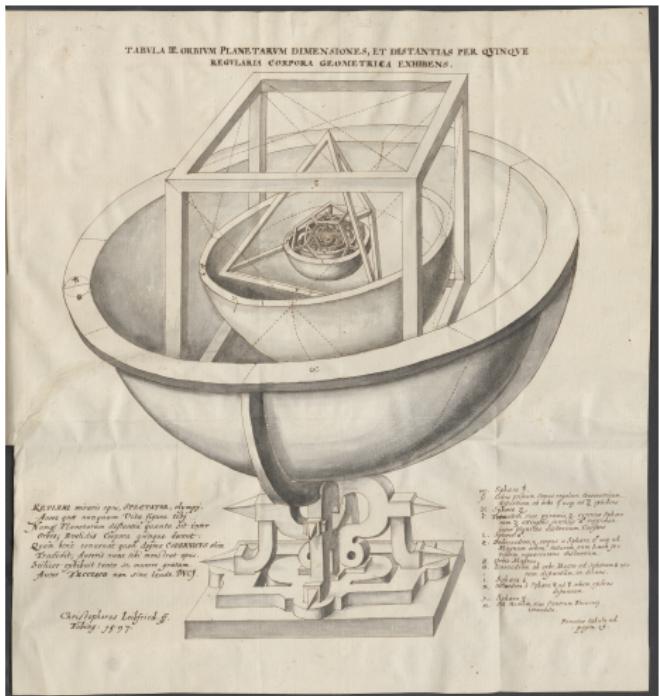
Son œuvre monumentale « Almageste » est un chef-d'œuvre de géométrie appliquée à l'astronomie qui sera *la référence* pendant 1700 ans !

Kepler < Mysterium Cosmographicum > (1595)



L'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630) était pythagoricien dans l'âme, obsédé par la perfection des solides Platoniciens

Kepler « Mysterium Cosmographicum » (1595)



Il découvrit que chacun des cinq solides Platoniciens pouvait être inscrit et circonscrit de manière unique par des sphères.

Les sphères correspondaient aux dimensions relatives de l'orbite de chaque planète autour du Soleil

Mercure = octaèdre

Vénus = icosaèdre

Mars = dodécaèdre

Jupiter = tétraèdre

Saturne = cube

La Terre qu'il présente comme l'image de Dieu, sert de séparation entre deux solides.

La musique des sphères

En 1619, dans le livre « Harmonice Mundi » Kepler réalise la correspondance complète entre données astronomiques et théorie musicale pour conclure :

*En conséquence, des consonances parfaites se trouvent : entre les mouvements convergents de **Saturne et de Jupiter**, l'octave; entre les mouvements convergents de **Jupiter et de Mars**, l'octave et la tierce mineure environ; entre les mouvements convergents de **Mars et de la Terre**, la quinte; entre leur périhélie, la sixte mineure; entre les mouvements extrêmes convergents de **Vénus et Mercure**, la sixte majeure; entre le divergent ou même entre le périhélique, la double octave.*

La musique des sphères

HARMONICIS LIB. V.

207

mnia (infinita in potentia) permeantes actu : id quod aliter a me non potuit exprimi, quam per continuam seriem Notarum intermedia-



Play

Musique produite par Willie Ruff et John Rodgers

Mars attaque !

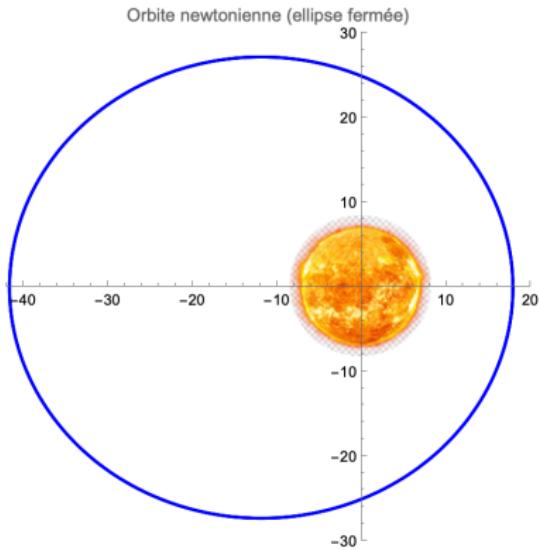
En utilisant les relevés de Tycho Brahe, Kepler réalise que l'orbite de Mars n'est pas compatible avec l'harmonie des sphères.



Puisque la divine Providence nous a donné Tycho Brahe, un observateur si précis que son travail révèle une erreur de 8 minutes d'arc dans les calculs de Ptolémée, il est juste que nous reconnaissons ce don de Dieu avec gratitude... Ces 8 minutes montrent le chemin vers une réforme complète de l'astronomie.

Mars attaque !

Il décrouvre que les orbites ne sont pas des cercles parfaits

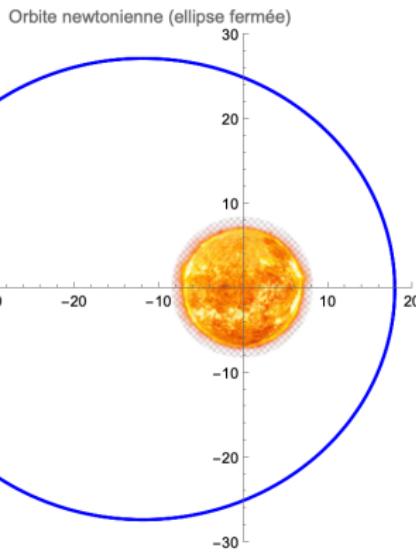


J'ai d'abord cru que j'avais un œuf à la main, mais les calculs m'ont forcé à accepter que l'orbite de la planète était une ellipse parfaite.

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F$$

Trajectoires elliptiques

Newton a donné une formulation mathématique de la gravitation dont il déduit les trajectoires des planètes données par Kepler



Conservation de l'énergie total somme de l'**énergie cinétique** et **potentielle**

$$E_{\text{total}} = \frac{m}{2} \left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr(t)^2} - \frac{G_N M m}{r(t)}$$

Conservation du moment cinétique
 $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$

$$L = mr(t)^2 \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

Trajectoires elliptiques

Après un changement de variable
 $t \rightarrow \varphi(t)$ et en posant

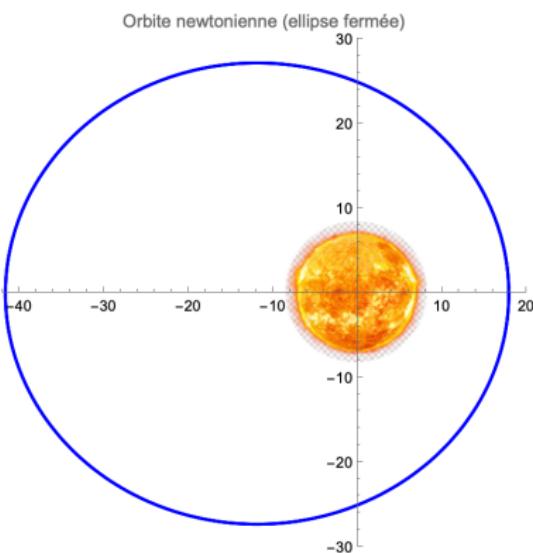
$$x(\varphi) = 1/r(\varphi); \quad y(\varphi) = \frac{d(1/r(\varphi))}{d\varphi}$$

la relation de conservation de l'énergie donne

$$x(\varphi)^2 - \frac{2G_N M m^2}{L^2} x(\varphi) + y(\varphi)^2 = \text{Constante}$$

qui est l'équation d'une ellipse dans le plan $(x(\varphi), y(\varphi))$

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey = F$$



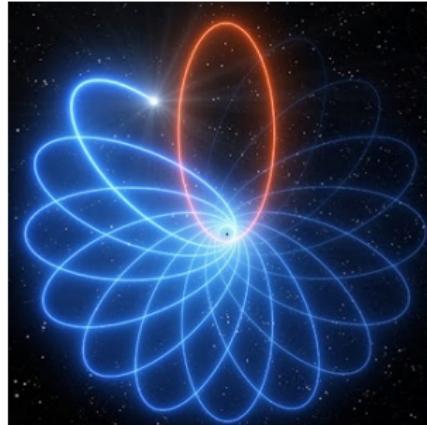
L'anomalie de Mercure

Urbain Le Verrier découvre que la trajectoire de Mercure ne suit pas les orbites elliptiques et les lois de la mécanique céleste formulées par Newton mais présente une précession



« Nulle planète n'a demandé aux astronomes plus de soins et de peine que Mercure, et ne leur a donné en récompense tant de soucis, tant de contrariétés. »

« Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences, » (1843)



En novembre 1915, Albert Einstein présente sa théorie de la gravitation : la relativité générale

Wenn G eine Skalar ist, dann $\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = T_{ik}$ Tensor 7. Rang.

$$T_{ik} = \left(\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} - \sum_{\ell} \left\{ \begin{smallmatrix} i & l \\ k & \end{smallmatrix} \right\} T_{\ell k} \right) - \sum_{\ell k} \left\{ \begin{smallmatrix} i & l \\ k & \end{smallmatrix} \right\} - \left\{ \begin{smallmatrix} i & k \\ k & \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} l & j \\ k & \end{smallmatrix} \right\}$$

Tensor

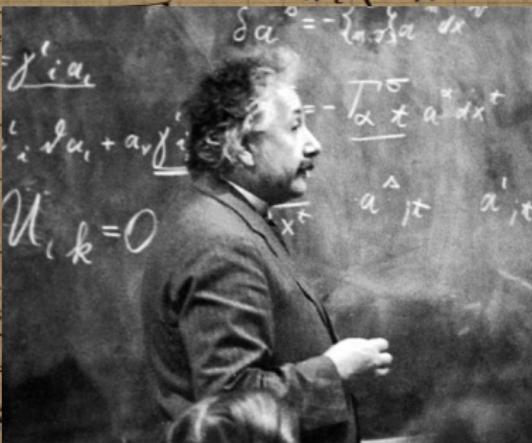
Weitere Voraussetzung:
 $\frac{\partial \left\{ \begin{smallmatrix} i & l \\ k & \end{smallmatrix} \right\}}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(g_{kl} \right)$

Wir setzen voraus:
 $- \sum_i \delta_{ki} \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x_i \partial x_l} = 0$

Ferner $\left\{ \begin{smallmatrix} i & n \\ l & \end{smallmatrix} \right\} \left\{ \begin{smallmatrix} l & j \\ k & \end{smallmatrix} \right\} = - \delta_{ln} \delta_{kj} \left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x_i \partial x_l} \right)$

$\begin{matrix} \alpha & k & l & \beta \\ \alpha & \beta & k & l \end{matrix}$

Hinweis
 $\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x_j \partial x_i}$



$\delta g^{ij} = - \left\{ \begin{smallmatrix} i & j \\ m & n \end{smallmatrix} \right\} \frac{\partial^2 g_{mn}}{\partial x^i \partial x^j}$

her Gravitations-
tensors

des glaice

$$\frac{\partial g_{ik}}{\partial x_k}$$

$$g_{ik} \left(\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^k \partial x^j} \right)$$

$$g_{ik} g_{jk} \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^i \partial x^k}$$

$$- \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k}$$

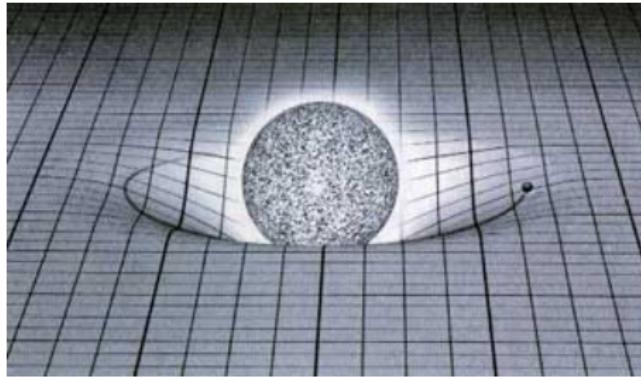
$$\text{oder } - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i}$$

$$\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} \right)$$

Il a profondément changé notre vision de l'espace et du temps

$$+ \sim \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} L + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} L - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^i} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^k} \right)$$

La gravitation comme courbure de l'espace-temps



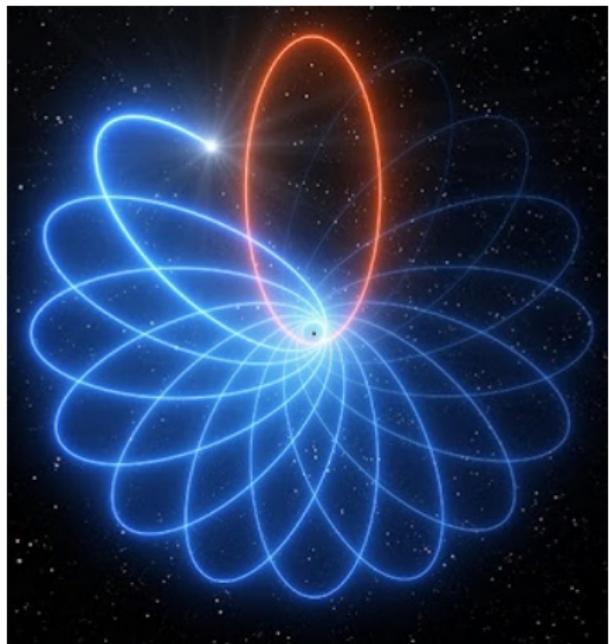
L'espace tout entier est la scène du champ gravitationnel :
un corps n'est pas attiré par un autre corps mais se déplace librement dans un espace-temps courbé

Les corps suivent des mouvements naturels en réagissant aux propriétés de l'espace-temps.

L'anomalie de Mercure

Fin 1915, Einstein explique la précession de l'orbite de Mercure par la déformation de l'espace-temps par le Soleil

$$\begin{aligned}
 & -D_{\mu\nu}(g) \\
 & \sim g_{\mu\nu} + \frac{c}{\lambda} \frac{\epsilon^2 A^2}{\lambda^4} + \frac{c^2 A^2}{\lambda^4} \\
 & - \frac{1}{F_A} \frac{2(g_{\mu\nu} - g)}{2x_\mu} \frac{2g_{\mu\nu}}{2x^\nu} \\
 & \quad \begin{matrix} \theta = \pi/2 & 2 & 3 \\ \alpha = \pi/2 & 2 & 3 \end{matrix} \\
 & - \frac{1}{8} \left(1 + \frac{c}{\lambda} \frac{A}{\alpha} \right) \left\{ \frac{2\sqrt{2}}{2x} \frac{2g_{\mu\nu}}{2x^\nu} + \dots \right\} \\
 & - \frac{c^2}{8} \left(1 + \frac{c}{\lambda} \frac{A}{\alpha} \right) \left\{ \frac{2}{2x} \frac{A}{\alpha} \frac{x}{r} \frac{A}{\alpha} \frac{x}{r} + \dots \right\} \\
 & - c_0^2 \left(1 + \frac{c}{\lambda} \frac{A}{\alpha} \right) \cdot \frac{A^2}{\lambda^4} \\
 & \frac{- \sum g_{\mu\nu} g_{\mu\nu} \frac{2g_{\mu\nu}}{2x_\mu} \frac{2g_{\mu\nu}}{2x^\nu}}{\lambda^2} \\
 & \sum g_{\mu\nu} \frac{2g_{\mu\nu}}{2x_\mu} \frac{2g_{\mu\nu}}{2x^\nu} \\
 & \frac{c^2}{c^2} \left(1 + \frac{A}{\alpha} \right) \left[\left(\frac{A}{\alpha} \frac{x}{r} \right)^2 + \dots \right] \\
 & \frac{c^2}{c^2} \left[\frac{A^2}{\alpha^2} \right] \\
 & - 2\lambda \frac{A^2}{\alpha^2} = - \frac{3}{2} \frac{c^2 A^2}{\lambda^2} \\
 & \sum \frac{2g_{\mu\nu}}{2x_\mu} \frac{2g_{\mu\nu}}{2x^\nu} = 0 \\
 & - \frac{1}{2} \sum g_{\mu\nu} \frac{2g_{\mu\nu}}{2x_\mu} \frac{2g_{\mu\nu}}{2x^\nu} = \frac{3}{2} \frac{c^2 A^2}{\lambda^2} \\
 & + \frac{1}{2} c^2 \frac{A^2}{\alpha^2} \frac{A^2}{\lambda^2} = \frac{A^2}{\lambda^2}
 \end{aligned}$$



Orbites en relativité d'Einstein

Dans la théorie d'Einstein une planète suit une **géodésique** de l'espace-temps courbe, et son mouvement ressemble à celui en théorie de Newton mais dans un **potentiel effectif modifié**

La relation de conservation de l'énergie s'écrit alors (dans la limite où la correction relativiste est faible)

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dr(t)}{dt} \right)^2 + \frac{L^2}{2mr(t)^2} - \frac{G_N M m}{r(t)} - \frac{G_N M m L^2}{c^2 r(t)^3} = E_{\text{total}}$$

- ▶ Apparition du **terme induit par la déformation de l'espace temps** selon la théorie d'Einstein, le terme en $1/r^3$.
- ▶ Ce terme devient négligeable dans la limite non relativiste $c \rightarrow \infty$.
On retrouve l'équation Newtonienne du problème de Kepler.

Orbites en relativité d'Einstein

Comme précédemment changeons de variable
 $t \rightarrow \varphi(t)$ et posons

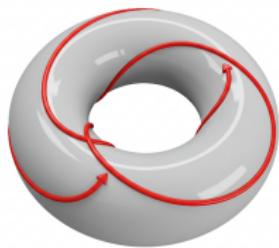
$$x(\varphi) = 1/r(\varphi); \quad y(\varphi) = \frac{d(1/r(\varphi))}{d\varphi}$$

La relation de conservation de l'énergie se réécrit

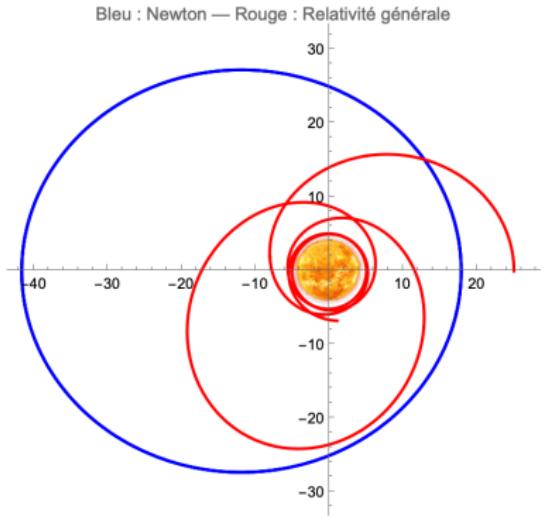
$$y(\varphi)^2 + \frac{x(\varphi)^2}{L} - \frac{2G_N M m^2 x(\varphi)}{2L^2} - \frac{2G_N M m^2}{c^2} x(\varphi)^3 = \text{Cste}$$

qui est une trajectoire dessinée sur un tore

$$y^2 + a_1 xy + a_3 y = x^3 + a_2 x^2 + a_4 x + a_6$$



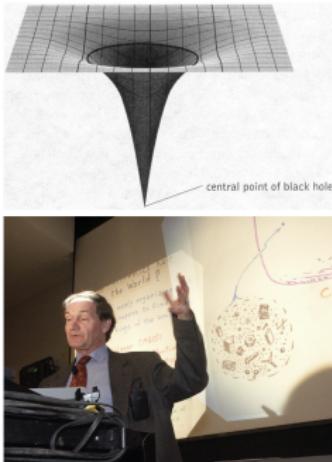
La trajectoire d'un planète dans la théorie d'Einstein n'est plus donnée une simple ellipse mais obtenue à partir d'une fonction spéciale transcendante, dites elliptiques, introduites par Jacob Bernoulli, à la fin du XVII^e siècle.



Les trajectoires sont plus riches que celles dans la théorie Newtonienne avec en particulier la possibilité d'une chute en spirale

Deux conséquences fondamentales de la théorie de la gravité d'Einstein :

Black holes



Gravitational waves



Roger Penrose 2020

“ Pour la découverte que la formation des trous noirs est une prédition robuste de la théorie de la relativité générale”



Rainer Weiss, Barry Barish and Kip Thorne 2017

“pour des contributions décisives aux détecteur d'onde gravitationnelles LIGO ”

Depuis le 14 septembre 2015 les collaborations LIGO/VIRGO/KAGRA ont détecté plus de 300 signaux d'ondes gravitationnelles avec 290 confirmés majoritairement dus à la coalescence de deux trous noirs

10 Years Later: LIGO Hears Loud and Clear



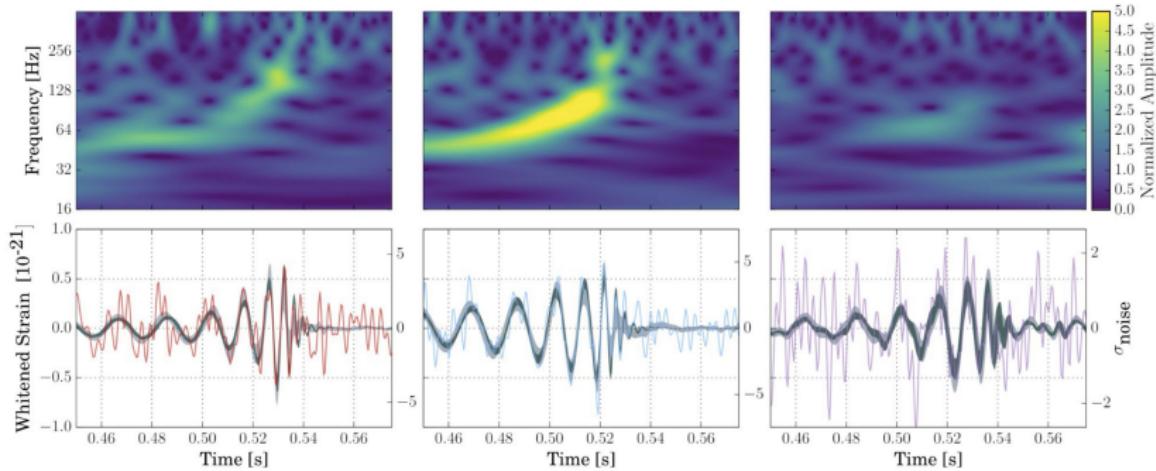
Entendre les trous noirs

En dix ans la qualité du signal détecté a été grandement améliorée grâce à l'amélioration de la sensibilité des détecteurs réduisant le bruit de fond et des algorithmes plus efficaces permettent d'isoler le signal du bruit instrumental.



Play

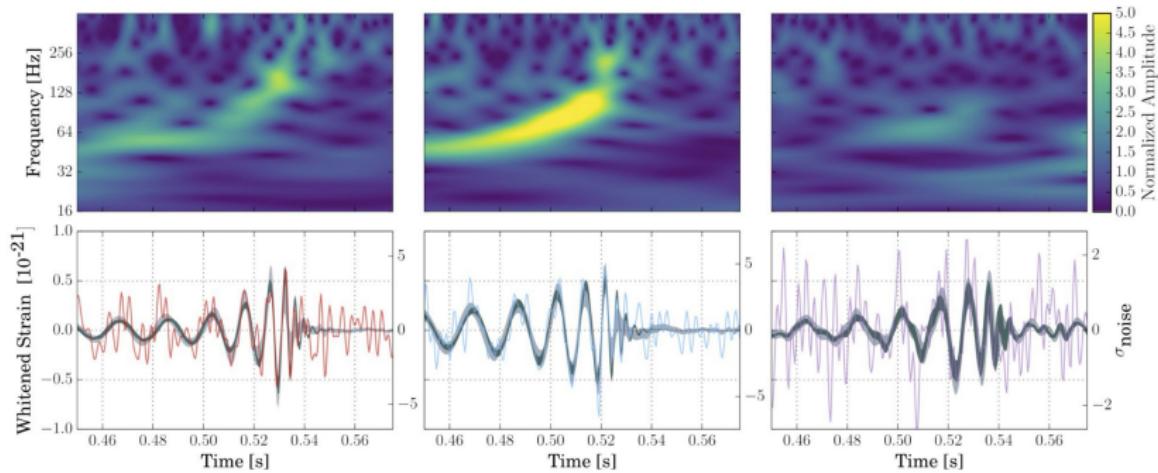
Déetecter l'infinitésimal



Les ondes gravitationnelles produisent des déformations de l'espace-temps infinitésimales - de l'ordre de 10^{-21} , soit mille fois plus petit que le diamètre d'un proton.

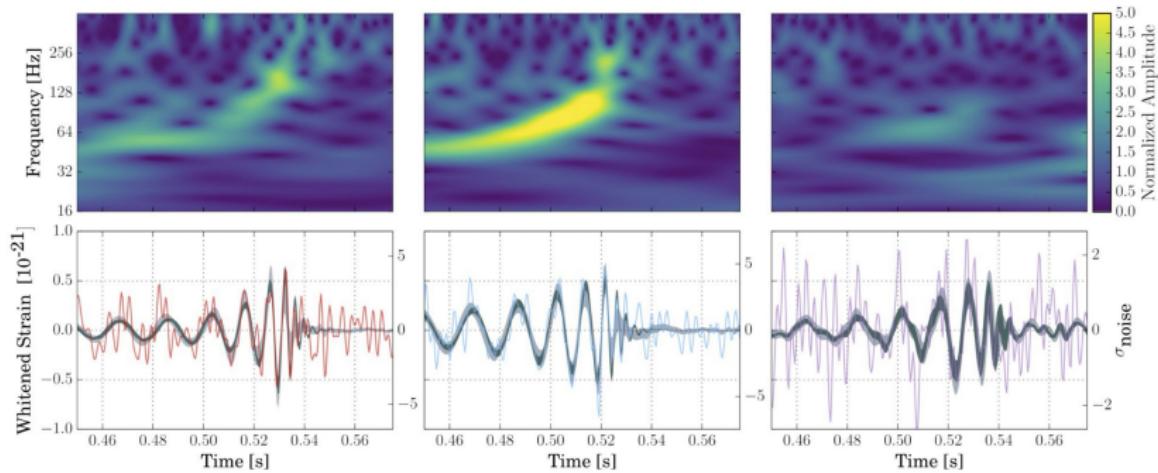
L'analyse des données des ondes gravitationnelles représente un défi technique extraordinaire car le signal est noyé dans le bruit sismique, thermique, quantique et technique des détecteurs

Un espace de paramètres gigantesque



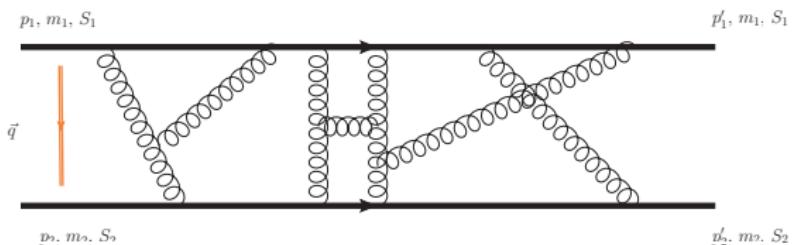
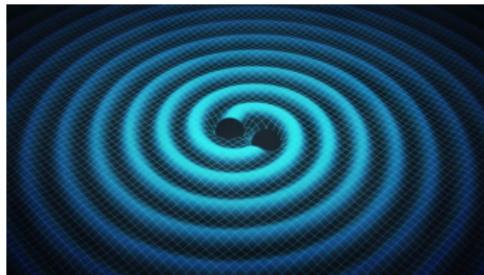
Pour extraire un signal, on doit le corréler avec des modèles théoriques
Chaque événement dépend de nombreux paramètres : masses des objets, leurs spins, orientation, distance, position dans le ciel ...

Un espace de paramètres gigantesque



Pour analyser juste quelques minutes de données, il faut tester environ 250 000 templates différents, ce qui demande une puissance de calcul colossale.

C'est comme comparer une chanson de 3 minutes à 250 000 autres chansons pour voir laquelle correspond le mieux, mais en faisant cette comparaison des millions de fois par seconde sur un flux de données continu.



Il y a 10 ans des physiciens ont réalisé que les calculs d'orbites de trous noirs ressemblent mathématiquement à des calculs de diffusion de particules!

L'astuce : on peut traiter l'interaction gravitationnelle entre deux trous noirs comme une « collision » de particules, et utiliser les techniques de Feynman développées pour la physique des particules.

C'est révolutionnaire parce qu'avec les intégrales de Feynman, on obtient des formules analytiques beaucoup plus rapidement et précisément.

Intégrales de Feynman

Les intégrales de Feynman qui apparaissent dans les calculs d'onde gravitationnelles ont pour représentation mathématique

$$\int_{\Delta} \frac{dx_1 \cdots dx_n}{\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n; \gamma)^{\alpha}}$$

- ▶ Le domaine d'intégration est l'orthant positif
 $\Delta := \{x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$
- ▶ $\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n; \gamma)$ est un polynômes homogène en les x_1, \dots, x_n :
 $\mathcal{P}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n; \gamma) = \lambda^{-n/\alpha} \mathcal{P}(x_1, \dots, x_n; \gamma)$
- ▶ $\gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}$ est le facteur relativiste fonction de la vitesse relative des deux trous noirs

L'intégrale présente des singularités lorsque

$$\mathcal{P}(x_1, \dots, x_n; \gamma) = 0$$

Singularité des intégrales de Feynman

Les singularités de l'intégrande déterminent la nature
« géométrique » de l'intégrale

Dans le cas des trajectoires Kepleriennes nous avons $\gamma \simeq 1$ et
l'équation de l'ellipse

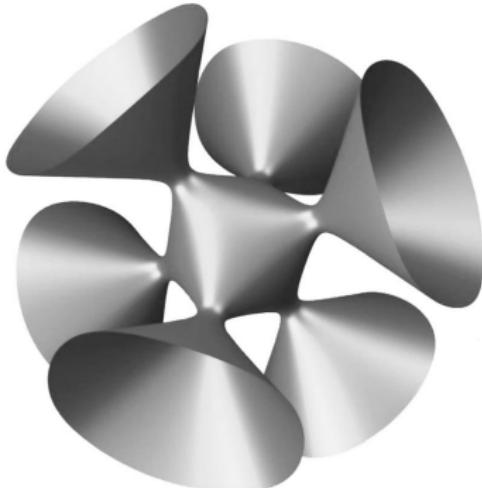
$$\mathcal{P}_{\text{Kepler}}(x, y) = x^2 + a_1 x + y^2 = 0$$

Pour les corrections de relativité générale à la trajectoire des planètes
nous avons l'équation suivante

$$\mathcal{P}_{\text{Einstein}}(x, y) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + y^2 = 0$$

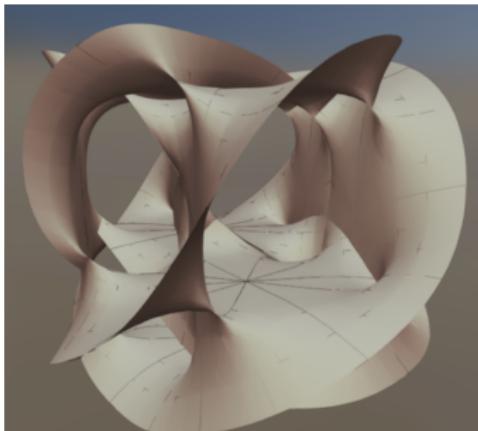
Qui est celle d'une courbe elliptique associée à un tore

Aux ordres supérieur apparaissent des polynômes plus compliqués



Polynôme homogène de degré 4

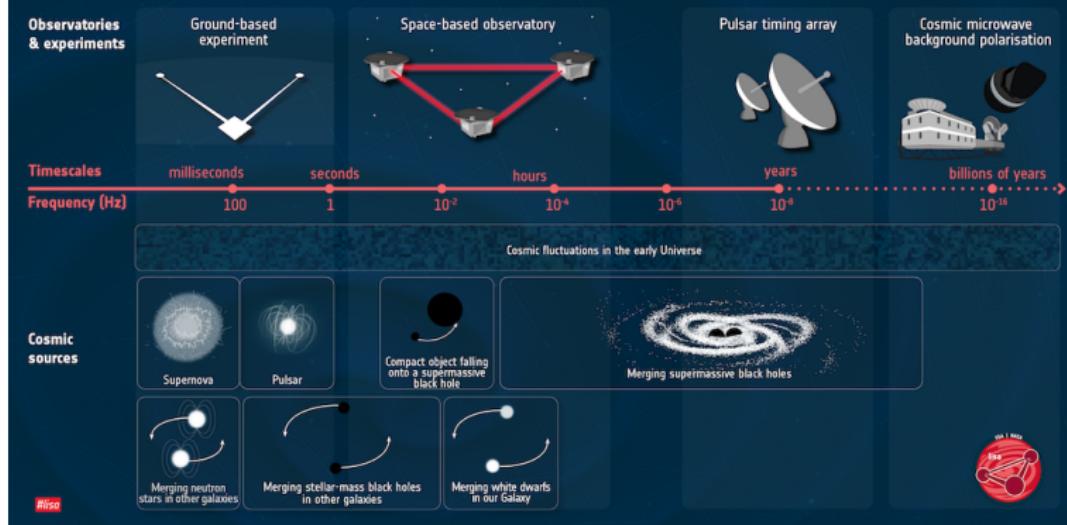
$$\sum_{i_1+i_2+i_3+i_4=4} c_{i_1,i_2,i_3,i_4} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4} = 0$$



Polynôme homogène de degré 5

$$\sum_{i_1+i_2+i_3+i_4+i_5=5} c_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3} x_4^{i_4} x_5^{i_5} = 0$$

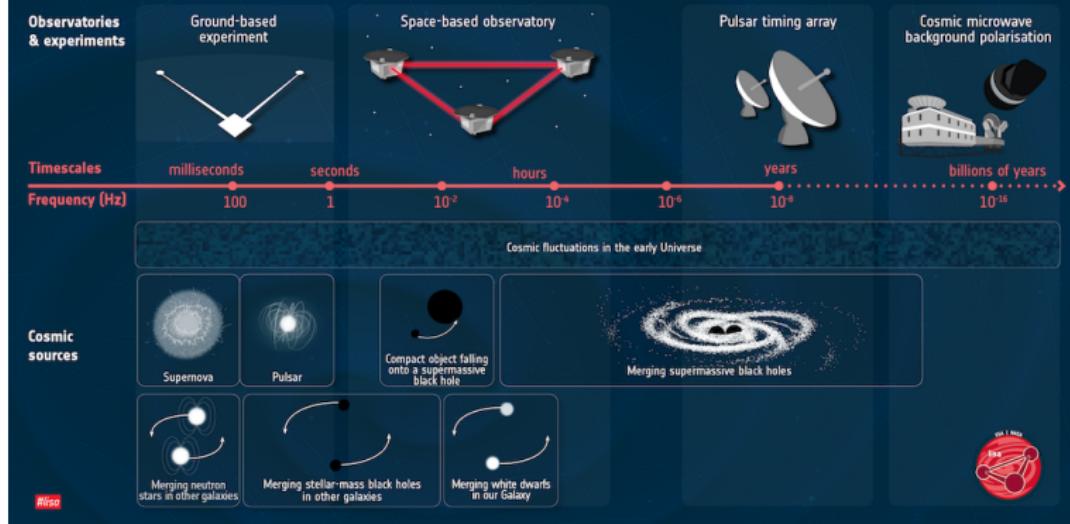
THE SPECTRUM OF GRAVITATIONAL WAVES



L'analyse de la structure géométrique des variétés algébriques permet d'améliorer les modèles utilisés pour calculer précisément les formes d'onde gravitationnelles

- ▶ Identifier du nombre minimale d'intégrales à calculer
- ▶ Obtention de résultats analytiques exacts et numériques de haute précision avec un faible coût calculatoire

THE SPECTRUM OF GRAVITATIONAL WAVES



Ils permettent de développer une nouvelle génération de modèles capables d'extraire plus d'information physique des détections futures, notamment avec les détecteurs de prochaine génération comme Einstein Telescope et LISA et nous renseigner sur la nature de la gravitation dans l'Univers.

Géométrie Algébrique

$$x^3 + y^3 + z^3 = 1$$

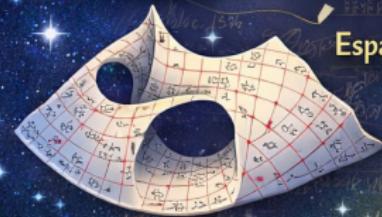


Surface K3

$$H_{(2,1)}$$



Espace Calabi-Yau

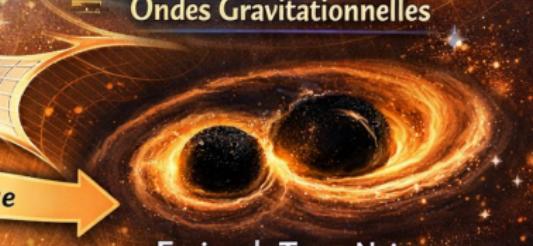


• Hypersurface Algébrique

Ondes Gravitationnelles



Ondes Gravitationnelles



Fusion de Trous Noirs

