

Invariance modulaire, théorie des champs et trous noirs

Pierre Vanhove

Mathematic Park
8 octobre 2016, Institut Henri Poincaré, Paris

Physique et Mathématique : deux approches

Physique : expériences :

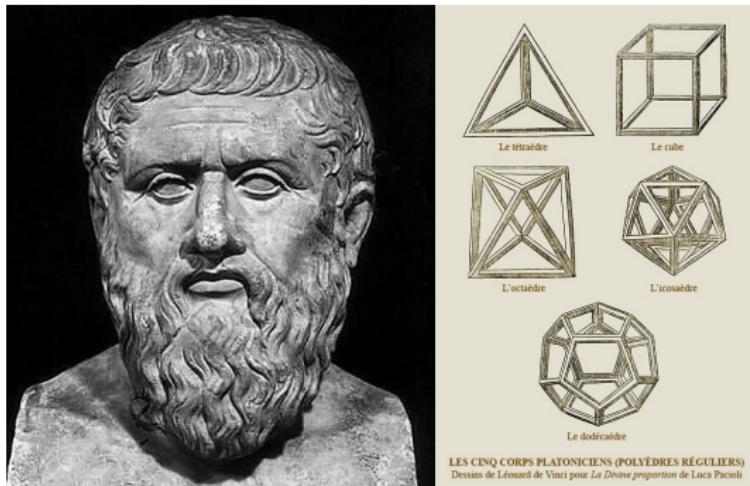
étude des propriétés fondamentales du monde réel en particulier ses changements et ses mouvements



Aristote (-384, -322)

Physique et Mathématique : deux approches

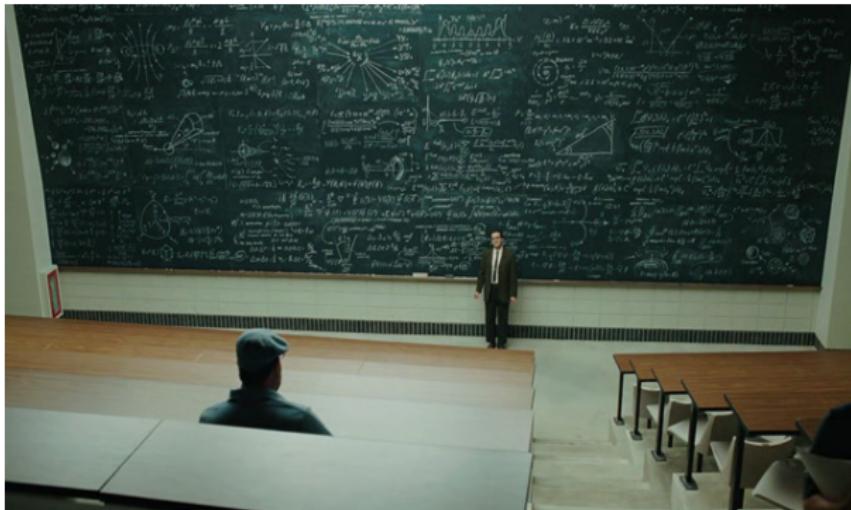
Mathématique : abstraction extrême
sans contact réel nécessaire avec la nature



Platon (-427, -347)

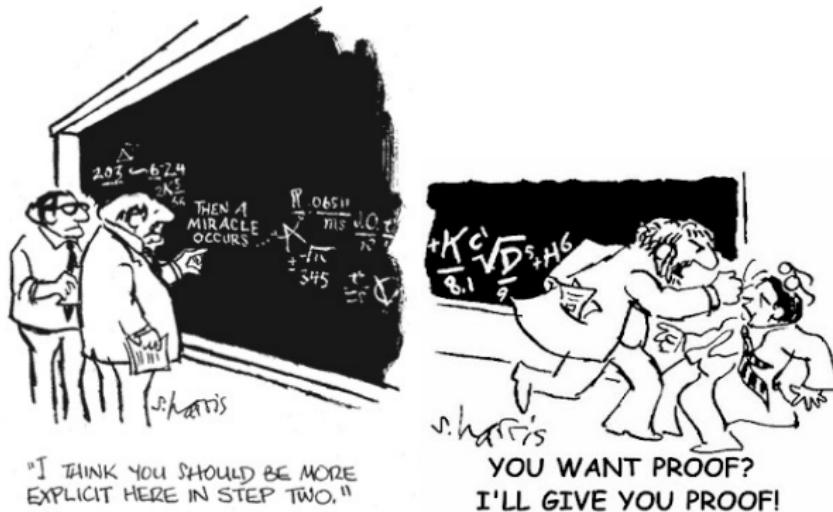
Physique et Mathématique : deux approches

Elles peuvent paraître similaire aux non initiés



Physique et Mathématique : deux approches

Les mathématiciens prouvent des théorèmes et sont en quête de preuves rigoureuses



En physique la rigueur est moins importante

La mathématique : un langage naturel

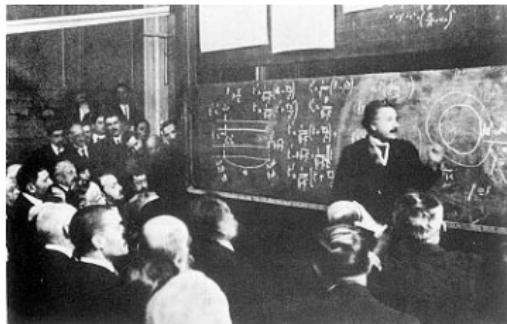
Henri Poincaré (1854-1912) était un grand physicien mathématicien



Toutes les lois (de la nature) sont donc tirées de l'expérience ; mais pour les énoncer il faut une langue spéciale ;...

Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine ? C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure.

La Physique : une mathématique appliquée ?



Le 25 novembre 1915, Einstein formule de la relativité générale

$$\begin{aligned} [{}^{\mu\nu}_{\nu}] &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\ell}}{\partial x_\nu} + \frac{\partial g_{\nu\ell}}{\partial x_\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x_\ell} \right) - \frac{\partial [{}^{\ell\mu}_{\ell\mu}]}{\partial x_\nu} - \frac{\partial [{}^{K\mu}_{K\mu}]}{\partial x_\nu} \\ ({}^{\mu K}, {}^{\ell m}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{\mu m}}{\partial x_\nu \partial x_\ell} + \frac{\partial^2 g_{\ell m}}{\partial x_\nu \partial x_\mu} - \frac{\partial^2 g_{\mu\ell}}{\partial x_\nu \partial x_m} - \frac{\partial^2 g_{\ell m}}{\partial x_\mu \partial x_\nu} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{grossmann} \\ \text{levi civita} \\ \text{minkowsky} \end{array} \right\} \\ &\quad + \sum_{\sigma\delta} \delta_{\mu\sigma} \left([{}^{\ell m}_{\sigma\ell}] [{}^{\mu\sigma}_{\delta\mu}] - [{}^{\ell\mu}_{\sigma\ell}] [{}^{\mu m}_{\delta\mu}] \right) \end{aligned}$$

pour cela il doit maîtriser les géométries non-Euclidiennes et le formalisme tensoriel associé

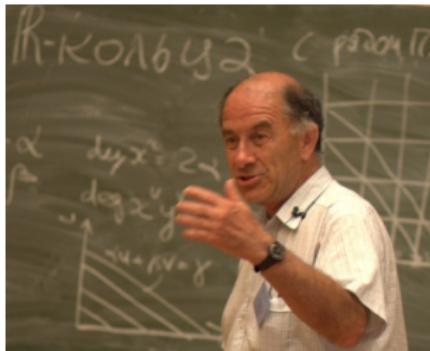
La Physique : une mathématique appliquée ?

Einstein devance le grand mathématicien David Hilbert qui déclare



N'importe quel gamin des rues de Göttingen comprend mieux la géométrie à quatre dimensions qu'Einstein, mais c'est lui qui a fait la révolution conceptuelle de la physique.

La Physique : une mathématique appliquée ?

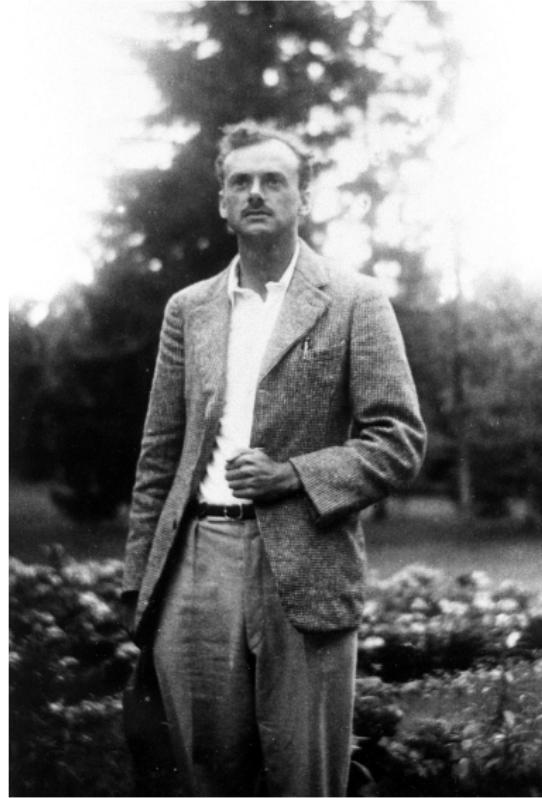


Pour Vladimir Arnol'd (1937-2010) les mathématiques font partie de la physique.

La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles

Les mathématiques sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher

La mécanique quantique

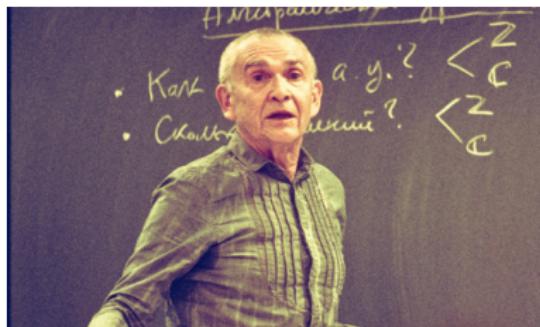


Les progrès continus de la physique demandent pour leur formulation théorique des notions mathématiques de plus en plus avancées.

Ce qui n'était attendu par les scientifiques (...) fût la forme particulière des progrès mathématiques nécessaires pour cela (...)

(Dirac 1931)

La mécanique quantique et mathématique



Les idées les plus profondes de la théorie des nombres présentent une ressemblance frappante avec celles de la physique théorique moderne.

Comme la mécanique quantique, la théorie des nombres fournit des modèles de relation entre le discret et le continu qui ne sont pas du tout évidents, et met en valeur le rôle des symétries cachées.

(Yuri Manin, *Mathematics as Metaphor*, 2007)

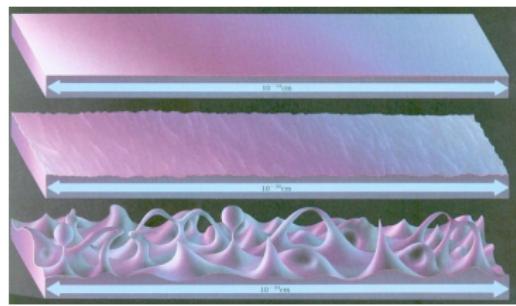
Quantification

Selon le principe de correspondance lorsque $\hbar \rightarrow 0$ on retrouve la physique classique



$\hbar = 0$

$\hbar \gg 1$

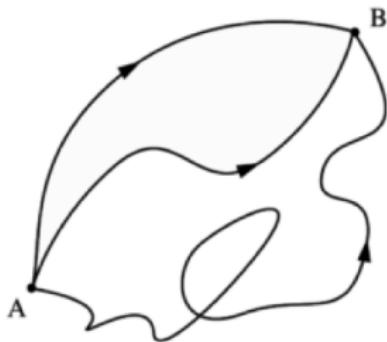


classique

quantique

Théorie des champs

Feynman dit que la physique classique contient suffisamment d'information pour savoir comment la quantifier



Son raisonnement utilise l'intégrale de chemin associant un poids $\exp(iS/\hbar)$ à chaque trajectoire classique

Théorie des champs : scepticisme



Jean Dieudonné

Mais c'est lorsqu'on aborde les théories mathématiques qui sont à la base de la mécanique quantique que l'attitude de certains physiciens dans le maniement de ces théories confine véritablement au délire. (...)

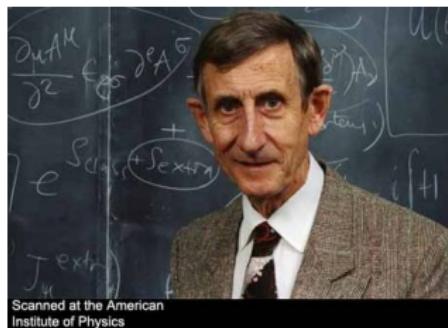
On se demande ce qui peut rester dans l'esprit d'un étudiant lorsqu'il a absorbé cette invraisemblable accumulation de non-sens, une véritable "bouillie pour les chats" !

Ce serait à croire que les physiciens d'aujourd'hui ne sont à l'aise que dans le flou, l'obscur et le contradictoire.

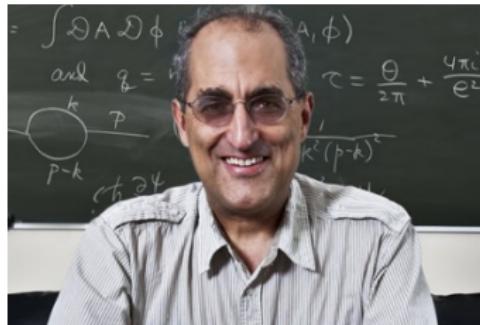
Théorie des champs : désespoir ?

I am acutely aware of the fact that the marriage between mathematics and physics, which was so enormously fruitful in past centuries, has recently ended in divorce

(Freeman Dyson, in a 1972 lecture)



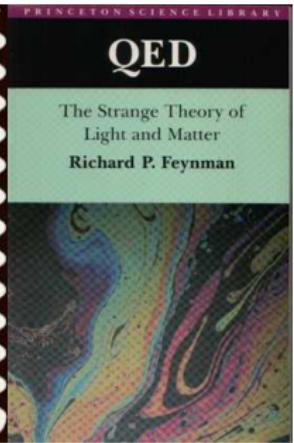
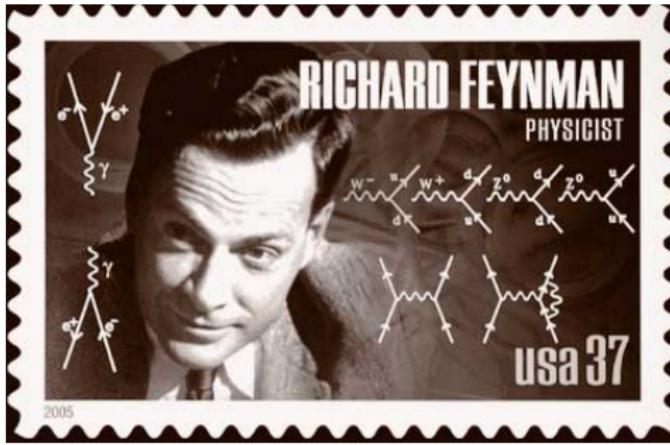
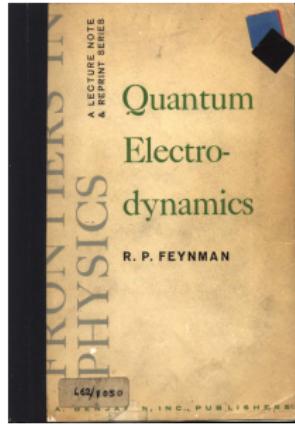
Théorie des champs : désespoir ou pas



This stuff [basics of Quantum Field Theory] is not impossible to learn;
after all we teach it to physics graduate students in a year.

Edward Witten, from the 1997 IAS year on QFT

Théorie des champs : succès



Feynman a développé son formalisme pour l'*électrodynamique quantique* : la quantification de l'interaction entre la lumière et la matière

Théorie des champs : succès

Ce raisonnement très physique satisfait la communauté des physiciens

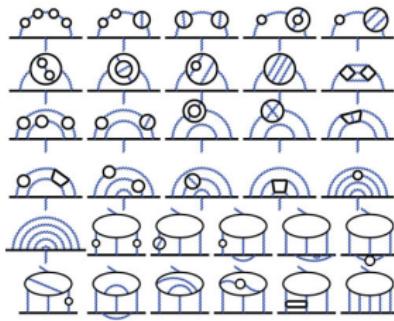


Permet un accord avec l'expérience à une précision inégalée apportant des tests de précision en physique des particules

$$\begin{array}{lll} g_{\text{exp}} & = & 2 \times 1.001159652180 \\ g_{\text{theor}} & = & 2 \times 1.001159652181 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{expérience} \\ \text{théorie} \end{array}$$

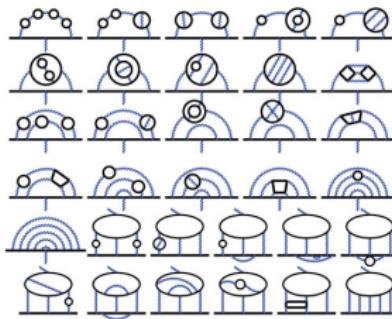
Théorie des champs : succès

Ce résultat de QED est l'un des test de précision confirmant l'adéquation de la théorie de l'électrodynamique quantique avec l'expérience à une précision inégalée de 10^{-12}



La QED est une des théories physiques avec le meilleur accord expérimental

Théorie des champs : Calculs perturbatifs



Ce résultat est obtenu par un calcul en perturbation

$$\frac{g_{\text{theor}} - 2}{2} = \sum_{n=1}^5 \left(\frac{e^2}{\hbar c 4\pi^2 \epsilon_0} \right)^n c_{2n}$$
$$\frac{e^2}{\hbar c 4\pi^2 \epsilon_0} = \frac{1}{137.035999074(44) \times \pi} \simeq 2.33 10^{-3}$$

Théorie des champs : Calculs perturbatifs

Jusqu'à l'ordre 10 en perturbation ce résultat demande à évaluer 12672 intégrales de Feynman

$$c_2 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$c_4 = \frac{3}{4}\zeta(3) - \zeta(2)\log(2) + \frac{\zeta(2)}{2} + \frac{197}{144} \simeq -0.3285$$

$$\begin{aligned} c_6 &= \frac{83\zeta(2)\zeta(3)}{12} - \frac{215\zeta(5)}{24} + \frac{25}{18} [24a_4 + \ln(2)^4 - 6\zeta(2)\ln(2)^2] \\ &\quad - \frac{239\zeta(4)}{24} + \frac{139\zeta(3)}{18} - \frac{596\zeta(2)\log(2)}{3} + \frac{17101\zeta(2)}{135} + \frac{28259}{5184} \simeq 1.181 \end{aligned}$$

$$c_8 \simeq -1.9097$$

$$c_{10} \simeq 7.795$$

$$\zeta(p) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} \quad a_4 = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n n^4}$$

Théorie des champs : Calculs perturbatifs

La magnitude des coefficients augmente assez rapidement et le signe est alterné

$$c_2 = 0.5, \quad c_4 \simeq -0.3285, \quad c_6 \simeq 1.1812, \quad c_8 \simeq -1.9097, \quad c_{10} \simeq 7.795$$

On montre que les coefficients de la série ont le comportement

$$c_n \simeq (-1)^n n! \quad n \rightarrow \infty$$

Théorie des champs : Calculs perturbatifs

La magnitude des coefficients augmente assez rapidement et le signe est alterné

$$c_2 = 0.5, \quad c_4 \simeq -0.3285, \quad c_6 \simeq 1.1812, \quad c_8 \simeq -1.9097, \quad c_{10} \simeq 7.795$$

On montre que les coefficients de la série ont le comportement

$$c_n \simeq (-1)^n n! \quad n \rightarrow \infty$$

Quel est le sens de cette série tronquée divergente ? Comment est-il possible que l'accord avec l'expérience soit si bon ?

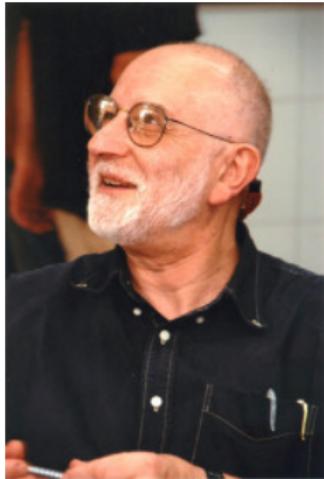
Séries divergentes



N. H. Abel

Divergent series are the invention of the devil, and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever

Séries divergentes



Series don't diverge for no reason ; it is not a capricious thing. The divergence of a series must reflect its cause.

M. V. Berry, Stokes and the Rainbow, Newton Institute Lecture, 2003

Théorie des champs : Séries divergentes

Considérons l'intégrale suivante

$$\mathcal{I}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\phi^2 - \lambda\phi^4} d\phi$$

C'est la version en dimension zéro d'une théorie de champs scalaire.

Pour $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ l'intégrale est convergente et donnée par

$$\mathcal{I}(\lambda) = \frac{e^{\frac{1}{32\lambda}} K_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{32\lambda}\right)}{(8\lambda)^{\frac{1}{2}}}$$

avec $K_\nu(z)$ la fonction de Bessel modifiée

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^{+\infty} e^{-x - \frac{z^2}{4x}} \frac{dx}{x^{1+\nu}} \quad \operatorname{Re}(z) > 0$$

Théorie des champs : Séries divergentes

Un développement perturbatif en puissance de λ de l'intégrale

$$\mathcal{I}(\lambda) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\phi^2} \phi^{4n} d\phi$$

Le coefficient de $(-\lambda)^n$ est

$$c_n = \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\phi^2} d\phi \right)}_{= \sqrt{2\pi}} \langle (\phi^4)^n \rangle$$

avec

$$\langle (\phi^4)^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\phi^2} (\phi^4)^n d\phi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\phi^2} d\phi} = \frac{(4n)!}{(2n)! 4^n}$$

et la fonction factorielle $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$

Théorie des champs : Séries divergentes

Comme pour le cas de la QED nous avons une séries divergente à coefficients alternés

$$\mathcal{I}(\lambda) = \sqrt{2\pi} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{\lambda}{4}\right)^n \frac{(4n)!}{n!(2n)!}$$

En appliquant la formule de Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(1/n)) \quad n \gg 1$$

aux coefficients c_n de la série on déduit que le rayon de convergence R est nul

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 16n = +\infty \implies R = 0$$

Théorie des champs : Séries divergentes

Comme pour le cas de la QED nous avons une séries divergente à coefficients alternés

$$\mathcal{I}(\lambda) = \sqrt{2\pi} \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{\lambda}{4}\right)^n \frac{(4n)!}{n!(2n)!}$$

En appliquant la formule de Stirling

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} (1 + O(1/n)) \quad n \gg 1$$

aux coefficients c_n de la série on déduit que le rayon de convergence R est nul

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n-1}} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} 16n = +\infty \implies R = 0$$

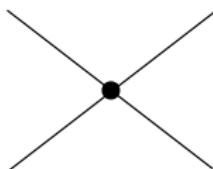
On peut comprendre l'origine du caractère asymptotique de la série en examinant les graphes de Feynman associé au développement perturbatif

Graphes de Feynman : Combinatoire

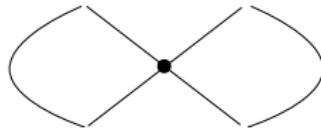
Le coefficient

$$\langle (\phi^4)^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\phi^2} (\phi^4)^n d\phi}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\phi^2} d\phi} = \frac{(4n)!}{4^n(2n)!}$$

est le nombre de manières indépendantes de connecter n vertex quadri-valents

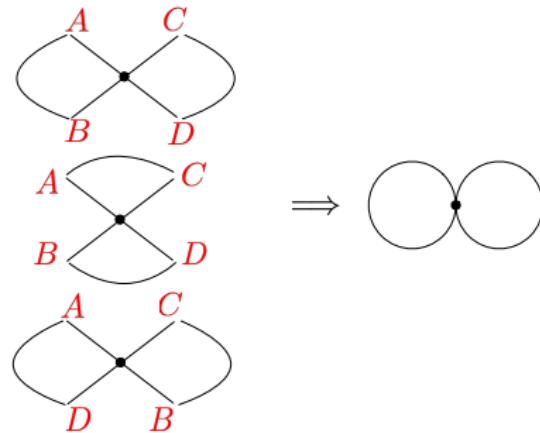


par un propagateur



Graphes de Feynman : Combinatoire

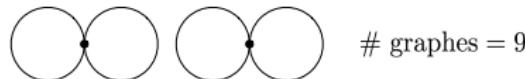
Au premier ordre en perturbation on a un vertex quadri-valent



$\langle \phi^4 \rangle = 3$ manières de connecter les lignes externes

Graphes de Feynman : Combinatoire

Au deuxième ordre il faut dénombrer toutes les manières de connecter deux vertex quadri-valents



pour un total de

$$\langle (\phi^4)^2 \rangle = 9 + 72 + 24 = 105$$

Graphes de Feynman : Combinatoire

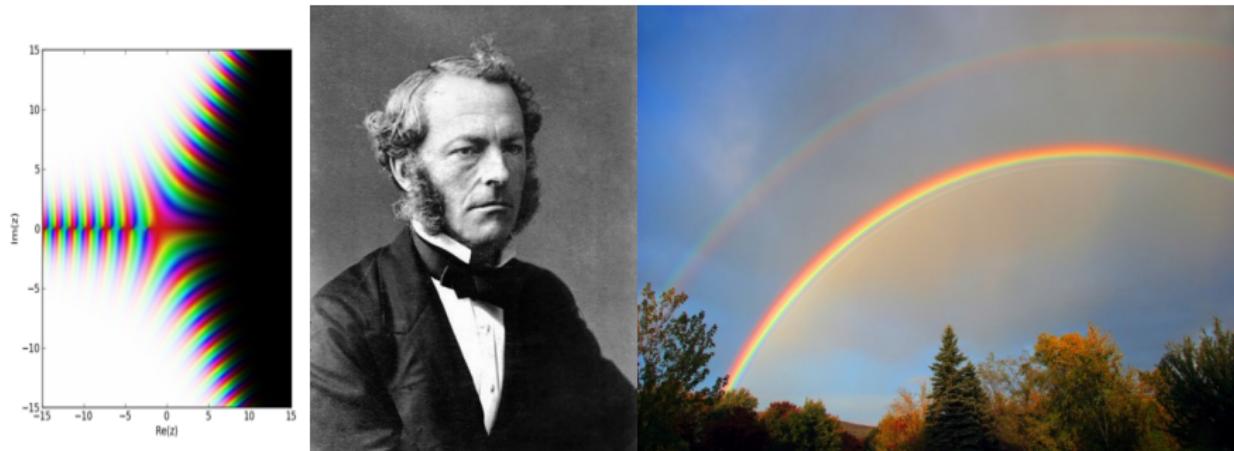
$$\mathcal{I}(\lambda) = \sqrt{2\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \langle (\phi^4)^n \rangle$$

n	$\langle (\phi^4)^n \rangle$
1	3
2	105
3	10395
4	2027025
5	654729075

Ainsi la croissance exponentielle des coefficients est due aux facteurs de symétrie reflétant le nombre de manière indépendante de contracter les pattes externes

Séries divergentes et phénomène de Stokes

Les séries divergentes (asymptotiques) présentent un phénomène particulier connu sous le nom de phénomène de Stokes dû aux travaux du mathématicien anglais Sir George Gabriel Stokes



Séries asymptotiques et phénomène de Stokes

Le développement asymptotique de la fonction de Bessel est valable pour $|z| \rightarrow \infty$ et $|\arg(z)| < \frac{3\pi}{2}$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \frac{4\nu^2 - 1}{1! \times 8z} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 2^2)}{2! \times (8z)^2} + \mathcal{O}(1/z^3) \right)$$

Cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$z^2 f''(z) + z f'(z) - (z^2 + \nu^2) f(z) = 0$$

qui a deux solutions indépendantes $K_\nu(z)$ et $I_\nu(z)$ distinguées par leur comportement pour $|z| \rightarrow \infty$ et $|\arg(z)| < \frac{3\pi}{2}$

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + O(|z|^{-1}) \right) \quad I_\nu(z) \propto \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \left(1 + O(|z|^{-1}) \right)$$

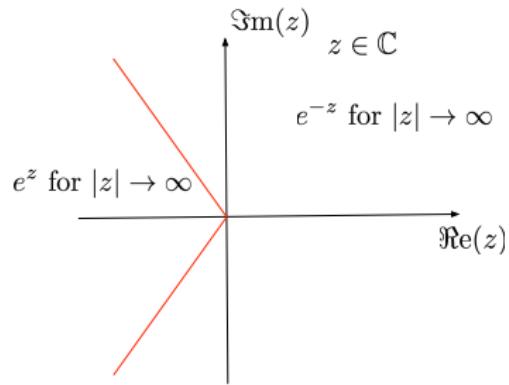
Séries asymptotiques et phénomène de Stokes

Ces solutions ne sont pas univaluées dans le plan complexe
Leur comportement asymptotique aux grands z change
dramatiquement selon la position dans le plan complexe

$$K_\nu(x e^{i\pi}) = e^{-i\pi\nu} K_\nu(x) - i\pi I_\nu(x) \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}^+$$

Pour $|\arg(z)| > \frac{3\pi}{2}$ la partie imaginaire *croit* exponentiellement

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{Im} K_\nu(-x) \propto -\sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^x$$



Séries asymptotiques et phénomène de Stokes

L'ambiguïté due au caractère asymptotique de la série en λ est $\exp(-1/\lambda)$ pour $\lambda \ll 1$.

C'est une situation générique en théorie quantique des champs ou en théorie des cordes où la série perturbative est une série *asymptotique*

$$f(g) \approx \sum_{n \geq 0} c_n g^{2n} + \sum_{k \geq 1} \sum_{m \geq 0} c_{(m,k)} g^m g^{-b_k} e^{-k \frac{A}{g^\beta}}$$

avec des coefficients se comportant comme ($\alpha, \beta, \gamma > 0$)

$$c_n = (-\alpha)^n (\beta n + \gamma - 1)! (1 + O(1/n)) \quad n \rightarrow \infty$$

Alors

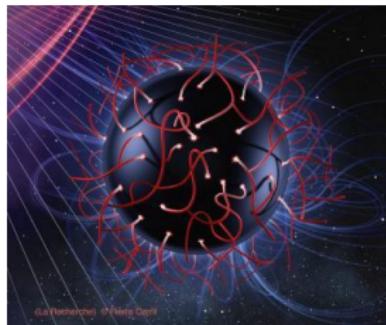
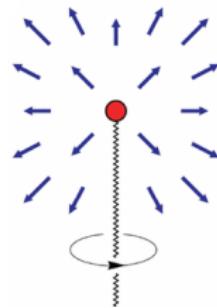
$$\text{Im } f(-g) \sim \frac{\pi}{\beta} \left(\frac{1}{\alpha g} \right)^{\frac{\gamma}{\beta}} e^{-\left(\frac{1}{\alpha g} \right)^{\frac{1}{\beta}}}$$

Typiquement en théorie des champs $\beta = 1$ et en théorie cordes $\beta = 1, 2$

Interprétations physique

L'ambiguïté exponentielle est *nécessaire* pour la cohérence des théories quantiques

Elle est due à des effets non-perturbatifs fondamentaux tel que

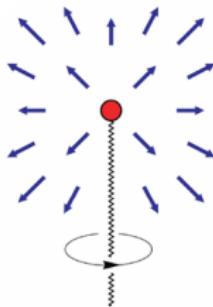


- ▶ les monopôles magnétiques et la quantification des charges électriques
- ▶ Les contributions d'objet étendus en théorie des cordes (trous noirs microscopiques)

Quantification de la charge

L'équation de Schrödinger pour la fonction d'onde de l'électron

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\vec{\partial} + ie\vec{A} \right)^2 \Psi(t, \vec{x}) = i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \vec{x})}{\partial t}$$



- Monopôle magnétique de charge g

$$\vec{A}_+ - \vec{A}_- = \vec{\partial} \left(\frac{g}{2\pi} \phi \right) = \vec{\partial} \chi$$

- La fonction d'onde se transforme

$$\Psi(t, \vec{x}) \rightarrow e^{-ie\chi} \Psi(t, \vec{x}) = e^{-ieg\frac{\phi}{2\pi}} \Psi(t, \vec{x})$$

La charge électrique e et la charge magnétiques g

$$e = \int_{S^2} \vec{E} = \int_{S^2} (\vec{\partial} \chi - \partial_t \vec{A}) \quad g = \int_{S^2} \vec{B} = \int_{S^2} \vec{\partial} \times \vec{A}$$

Quantification de la charge

La fonction d'onde est *univaluée* si la condition de quantification de Dirac est satisfaite

$$eg \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Un dyon $d_1 = (e_1, g_1)$ a une charge électrique et magnétique

Deux dyons satisfont à la relation de quantification

$$e_1g_2 - e_2g_1 \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Quantification de la charge

Sous la transformation

$$\begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} \rightarrow \gamma \begin{pmatrix} e \\ g \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

la condition de quantification

$$\begin{aligned} e_1g_2 - e_2g_1 &= (e_1 \ g_1) \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \\ &= (ad - bc) (e_1 \ g_1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_2 \\ g_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est invariante si $ad - bc = 1$ donc si γ appartient au groupe modulaire

$$\gamma \in PSL(2, \mathbb{Z}) := \left\{ \gamma \in \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \& ad - bc = 1 \right\} / \{\mathbb{I}, -\mathbb{I}\}$$

Invariance modulaire

Une fonction invariante modulaire est $f(\tau)$ une fonction définie dans le plan complexe supérieur $\{\tau \mid \operatorname{Re}(\tau) \in \mathbb{R}, \operatorname{Im}(\tau) > 0\}$ telle que

$$f(\tau + 1) = f(\tau) \quad f\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^w f(\tau)$$

w est le poids qui peut bien sûr être nul

Les transformations

$$\tau \rightarrow \tau + 1 \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

satisfont $(ST)^3 = S^2 = 1$ et engendrent le groupe modulaire

En conséquence

$$f\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^w f(\tau), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z} \quad ad - bc = 1$$

Invariance modulaire

Par exemple $\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi\tau}{12}} \phi(e^{2i\pi\tau})$ avec

$$\frac{1}{\phi(x)} = \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x^n} = 1 + \sum_{n \geq 1} p(n)x^n$$

où $p(n)$ est le nombre de partitions de n .

Satisfait

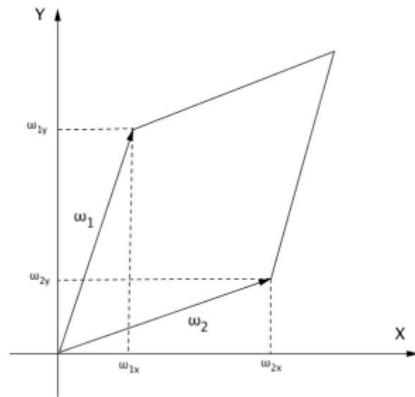
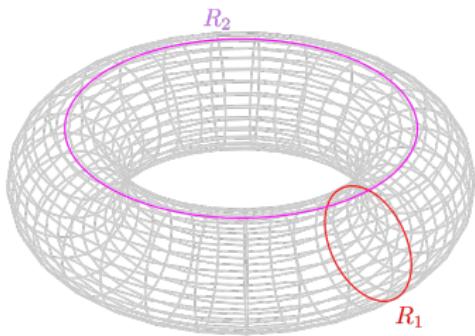
$$\eta(\tau + 1) = \eta(\tau); \quad \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}} \eta(\tau)$$

Ceci a pour conséquence que si $\tau = i\beta$ (où $\beta \in \mathbb{R}$ est l'inverse d'une température) alors

$$\eta(i\beta) \simeq \beta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi\beta}{12}} \longrightarrow p(n) \simeq \frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}}{4\sqrt{3n}}$$

Boson libre

On s'intéresse maintenant au cas du boson libre $\phi(x, y)$ sur un tore



Aire du tore $A [= R_1 R_2]$ et structure complexe $\tau [= \tau_1 + i \frac{R_1}{R_2}]$
Coordonnées sur le tore $z = x + \tau y$ alors le champs est périodique

$$\begin{array}{lll} \phi(x+1, y) &= \phi(x) & \phi(x, y+1) = \phi(x, y) \\ \phi(z+1) &= \phi(z) & \phi(z+\tau) = \phi(z) \end{array}$$

Boson libre

Le champs $\phi(x, y)$ est composé en mode le long du tore selon

$$\phi(x, y) = \sum_{n, m \in \mathbb{Z}^2} c_{n, m} \varphi_{n, m}(x, y)$$

où

$$\varphi_{n, m}(z) = e^{2i\pi(nx+my)} = e^{\frac{\pi}{\text{Im}(\tau)}(n(z-\bar{z})+m(z\bar{\tau}-\bar{z}\tau))}$$

sont des fonctions propres du Laplacien

$$-\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi_{n, m}(z) = \lambda_{n, m} \varphi_{n, m}(z) \quad n, m \in \mathbb{Z}$$

Les valeurs propres du laplacien sur le tore sont

$$\lambda_{n, m} = \frac{\pi^2}{\text{Im}(\tau)^2} |n + m\tau|^2$$

Boson libre

Les fonctions propres forment une base orthonormée par rapport à l'intégration sur le tore

$$\int_0^1 \int_0^1 \varphi_{n,m}(x, y) \left(-\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right) \varphi_{p,q}(x, y) dx dy = \delta_{n,p} \delta_{m,q}$$

alors l'intégrale sur les configurations sur champ sur la tore

$$\mathcal{Z}(\tau) = \sqrt{\text{Im}(\tau)} \int \delta \left(\int d^2 x \phi / \sqrt{\text{Im}(\tau)} \right) e^{-\frac{1}{2} \int d^2 x \phi \Delta \phi} \mathcal{D}\phi$$

devient une intégrale sur les coefficients $c_{n,m}$

$$\mathcal{Z}(\tau) = \sqrt{\text{Im}(\tau)} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{n,m} \lambda_{n,m} c_{n,m}^2} \prod_{n,m} dc_{n,m} = \sqrt{\text{Im}(\tau)} \prod'_{n,m} \left(\frac{2\pi}{\lambda_n} \right)^{\frac{1}{2}}$$

où l'on exclut le cas où $\lambda_{n,m} = 0$ dans le produit

Boson libre

Donc

$$\log \mathcal{Z}(\tau) = \frac{1}{2} E'(0, \tau)$$

où la séries d'Eisenstein

$$E(s, \tau) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z} \setminus (0,0)} \frac{\operatorname{Im}(\tau)^s}{|m+n\tau|^{2s}}$$

est une fonction invariante modulaire

$$E\left(s, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = E(s, \tau), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1$$

Boson libre

Donc

$$\log \mathcal{Z}(\tau) = \frac{1}{2} E'(0, \tau)$$

Comment $E(s, \tau + 1) = E(s, \tau)$ on peut faire un développement de Fourier en modes $\exp(2i\pi n \operatorname{Re}(\tau))$ avec $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} E(s, \tau) &= 2\zeta(2s) \operatorname{Im}(\tau)^s + 2\sqrt{\pi} \frac{\zeta(2s-1)\Gamma(s-\frac{1}{2})}{\Gamma(s)} \operatorname{Im}(\tau)^{1-s} \\ &+ 4\sqrt{\operatorname{Im}(\tau)} \sum_{n \neq 0} \frac{\sigma_{2s-1}(|n|)}{|n|^{s-\frac{1}{2}}} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|\operatorname{Im}(\tau)) e^{2i\pi n \operatorname{Re}(\tau)} \end{aligned}$$

Boson libre

On trouve que

$$E'(0, \tau) = -2 \log(\tau_2 |\eta(\tau)|^2)$$

donc la fonction modulaire

$$\mathcal{Z}(\tau) = \frac{1}{\text{Im}(\tau) |\eta(\tau)|^2}$$

telle que

$$\mathcal{Z}(\tau + 1) = \mathcal{Z}(\tau); \quad \mathcal{Z}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \mathcal{Z}(\tau)$$

La théorie des cordes

$$S_{\text{eff}}^{(D)}(g_{\mu\nu}, A_\mu, \dots)$$

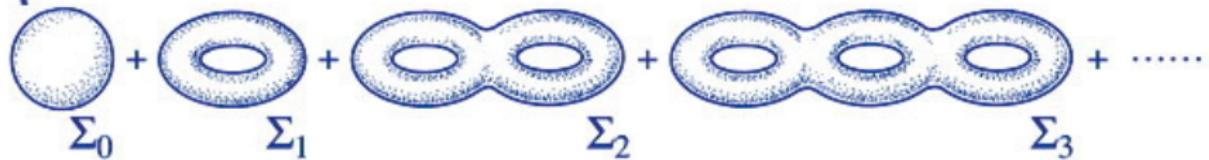
2-dimensional lagrangian

$$= \sum_{\Sigma_\gamma} e^{-\phi \chi(\Sigma_\gamma)} \int_{M(\Sigma_\gamma)} d\psi dX \dots e^{\int d^2 z \mathcal{L}_{2d}(\psi, X, \dots, g_{\mu\nu}, A_\mu, \dots)}$$

$$= \int d^D x \sqrt{g} e^{-2\phi} \underbrace{[R + \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots]}_{\text{general relativity}} + \mathcal{O}(m_{\text{planck}}^{-1})$$

gauge theory, etc

small string corrections



Quantification de la charge des trous noirs

Le secteur gravitationnel de la théorie des cordes est une extension de la théorie d'Einstein de la gravitation.

Par exemple on a dans un espace-temps à dix dimensions

$$\mathcal{L}_{2b} = \frac{|-g|^{\frac{1}{2}}}{2\kappa_{10}^2} \left(\mathcal{R} - \frac{1}{2} \frac{\partial_\mu \Omega \partial^\mu \bar{\Omega}}{\text{Im}(\Omega)^2} \right)$$

où la valeur du champ complexe Ω paramétre les configurations de la théorie

Quantification de la charge des trous noirs

Classiquement la théorie est invariant sous les transformations

$$\Omega \rightarrow \tilde{\Omega} = \frac{a\Omega + b}{c\Omega + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

car

$$\begin{aligned} \frac{\partial_\mu \tilde{\Omega} \partial^\mu \bar{\tilde{\Omega}}}{\text{Im}(\tilde{\Omega})^2} &= \left(\frac{(ad - bc)\partial_\mu \Omega}{(c\Omega + d)^2} \right) \left(\frac{(ad - bc)\partial^\mu \bar{\Omega}}{(c\bar{\Omega} + d)^2} \right) \left(\frac{|c\Omega + d|^2}{(ad - bc)\text{Im}(\Omega)} \right)^2 \\ &= \frac{\partial_\mu \Omega \partial^\mu \bar{\Omega}}{\text{Im}(\Omega)^2} \end{aligned}$$

Quantification de la charge des trous noirs

Cette théorie a des solutions d'énergie finie totalement localisées portant une charge électrique et une charge magnétique

$$e = \int_{S^9} \star d\text{Re}(\Omega); \quad g = \oint d\text{Re}(\Omega)$$

La quantification de la théorie impose la condition de quantification

$$eg \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Seul le groupe de discret $SL(2, \mathbb{Z})$ laisse invariant la théorie quantique, c'est-à-dire les transformations telles que

$$a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1$$

Instantons en théorie des cordes

La théorie des cordes induit des corrections à la théorie d'Einstein données par des fonctions de Ω invariantes sous l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$
Aux premiers ordres apparaissent les fonctions

$$E\left(s, \frac{a\Omega + b}{c\Omega + d}\right) = E(s, \Omega), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1$$

Elles contiennent des informations sur les interactions perturbative et non-perturbatifs

$$E(3/2, \Omega) = \text{Im}(\Omega)^{-\frac{1}{2}} \left(2\zeta(3) \text{Im}(\Omega)^2 + 4\zeta(2) \right) + \mathcal{O}(e^{-\text{Im}(\Omega)})$$



Instantons en théorie des cordes

La théorie des cordes induit des corrections à la théorie d'Einstein données par des fonctions de Ω invariantes sous l'action de $SL(2, \mathbb{Z})$
Aux premiers ordres apparaissent les fonctions

$$E\left(s, \frac{a\Omega + b}{c\Omega + d}\right) = E(s, \Omega), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1$$

Elles contiennent des informations sur les interactions perturbative et non-perturbatifs

$$E(3/2, \Omega) = \text{Im}(\Omega)^{-\frac{1}{2}} \left(2\zeta(3)\text{Im}(\Omega)^2 + 4\zeta(2) \right) + \mathcal{O}(e^{-\text{Im}(\Omega)})$$

Les termes en $e^{-\text{Im}(\Omega)}$ sont des contributions non-perturbatives quand $\text{Im}(\Omega) \gg 1$ qui correspondent à des contributions de trous noirs microscopiques

Entropie de trou noir

La partie non-perturbative permet de compter les degrés de liberté microscopiques des trous noirs (supersymétriques)

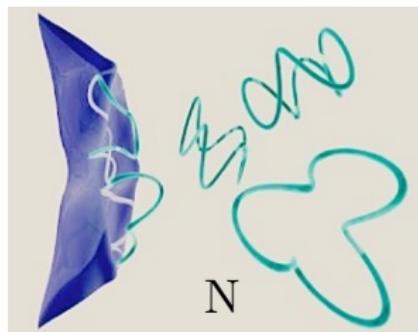
$$\sum_{n \equiv -1 \pmod{4}} d_{\text{micro}}(n) q^{\frac{n}{4}} = \frac{\theta(q)}{\eta(q)^6} = q^{-\frac{1}{4}} \left(1 + 8q + 39q^2 + 152q^3 + \dots \right)$$

$$\theta(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} \quad \eta(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)$$

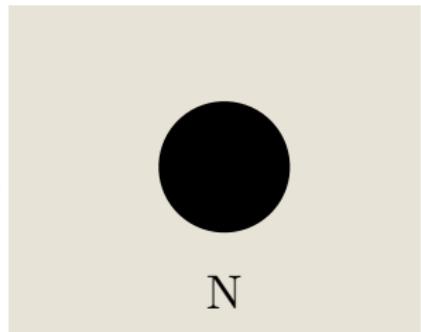
$$\begin{aligned} d_{\text{micro}}(N) &= 2\pi \left(\frac{4}{\sqrt{N}} \right)^{\frac{7}{2}} I_{\frac{7}{2}}(\pi \sqrt{N}) \left(1 + \mathcal{O}(e^{-\frac{\pi \sqrt{N}}{2}}) \right) \\ &= e^{\pi \sqrt{N}} \left(1 - \frac{15}{4} \log N + \mathcal{O}(1/N) \right) \end{aligned}$$

Entropie de trou noir

Microscopic



Macroscopic



$$g_s N \ll 1 \quad g_s \quad g_s N \gg 1$$

Strominger-Vafa '96

$$d_{\text{micro}}(N) = e^{\pi\sqrt{N}} + \dots \quad (N \rightarrow \infty)$$

Bekenstein-Hawking '74

$$S_{\text{BH}}^{\text{class}} = \frac{A_{\text{H}}}{4\ell_{\text{Pl}}^2} = \pi\sqrt{N}$$

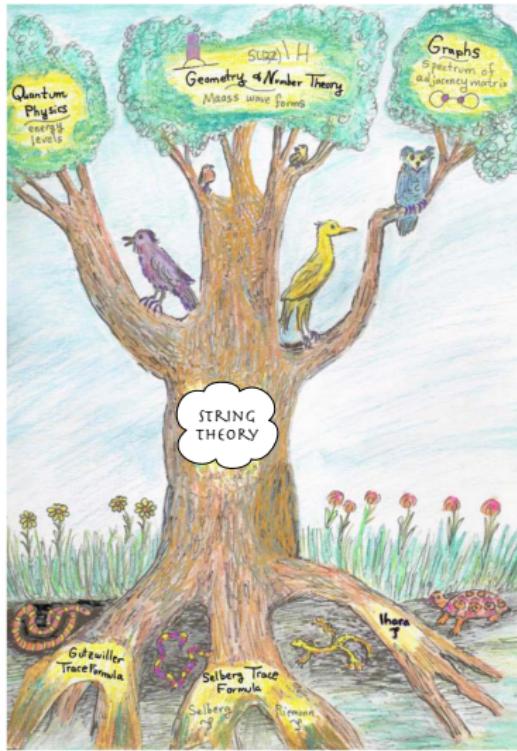
(©Sameer Murthy)



Il est tout à faire remarquable que les symétrie modulaire ait une interprétation physique si naturelle en théorie des champs et en théorie des cordes

Il a y encore beaucoup à comprendre entre la relation théorie des champs, théorie des cordes et les symétries modulaire (ou automorphes en général)

adapted from Terras



adapted from Terras



There are five elementary arithmetical operations : addition, subtraction, multiplication, division, and ... modular forms. souvent attribué à Martin Eichler