Church-Turing These

Een nieuw paradijs

Pieter van Engelen

Radboud Universiteit Nijmegen

03-06-2022

De tijd
- De protagonisten

De situatie
- Entscheidungsproblem
- Berekenbaarheidsmodellen
- De kracht van berekenbaarheid

De these

Voorbij de these
- Hypercomputation
- Quantum computing

1925	
1928	Formulering *Entscheidungsproblem* in *Grundzüge der theoretischen Logik*
1931	Onvolledigheidsstellingen van Gödel
1932	Introductie van de λ-calculus (A. Church)
1936	Negatieve oplossing *Entscheidungsproblem*
1937	Introductie *turing machine, halting problem* en negatieve oplossing *Entscheidungsproblem*
1939	*Systems of logics based on ordinals* (Turing)
1944	*Introductie Turing-degree* (E. Post)
1945	*First Draft of a Report on the EDVAC* (von Neumann)

De These

Every *effectively calculable* function is *computable*

Church (1936), Turing (1937)

De protagonisten

Alonzo Church (1903 - 1995)

Princeton University, USA

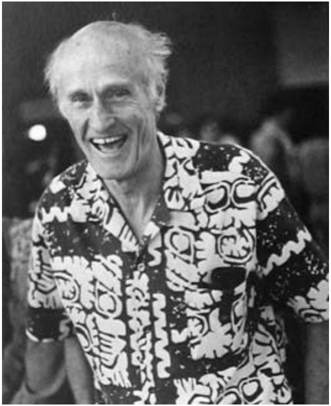
- Logicus, wiskundige
- Van 1936 tot 1979 redacteur van *Journal of Symbolic Logic*
- 'Bedenker' van de λ-calculus
- Eerste-orde predicaat-logica is onbeslisbaar
- Peano-arithmetiek is onbeslisbaar

De protagonisten

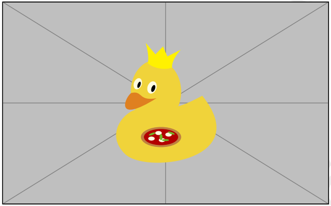
Alan Turing (1912 - 1954)
Cambridge & Manchester

- Grondlegger van
  - Informatica
  - Artificiële intelligentie
  - Morphogenetica
- Legendarisch codebreaker
- Marathonloper

De protagonisten



Stephen Kleene (1909-1994)



??? (1897 - 1954)

Das Entscheidungsproblem

Das Entscheidungsproblem

Vind een algoritme waarmee
de waarheid van een uitspraak in de eerste orde predikaatlogica
vast te stellen is.

(D. Hilbert & W. Ackermann, 1928, Grundzüge der theoretischen Logik)

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen
- de gebruikelijke operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \ldots$
- predikaten $P(x)$
- universele en existentiële kwantificatie $\forall, \exists$

Voorbeelden:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} [m > n]$$

$$\forall_{p,q \in \mathbb{Q}} \exists_{r \in \mathbb{Q}} [p < r < q]$$

$$\exists_x [P(x) \wedge \forall_y \forall_{y'} [P(y) \wedge P(y') \rightarrow y = y']]$$

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica

Afspraak:

We hebben het alleen over predikaten en kwantificatie over de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$

Gezocht:

Algoritme wat gegeven een uitspraak roept of die uitspraak `WAAR` of `ONWAAR` is.

Probleem:

Wat is een algoritme?

De λ-calculus

Recursietheorie

Turing machines

De equivalentie

$$\lambda - \text{definieerbaar} \overset{\text{(Turing 1937)}}{\Longrightarrow} \text{Turing berekenbaar}$$

$$\text{Turing berekenbaar} \overset{\text{(Turing 1937)}}{\Longrightarrow} \mu - \text{recursief}$$

$$\mu - \text{recursief} \overset{\text{(Kleene 1936)}}{\Longrightarrow} \lambda - \text{definieerbaar}$$

De equivalentie

De uitspraken:

- Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is berekenbaar
- Er bestaat een λ-term F zdd $f(n) = m \Leftrightarrow F\ulcorner n \urcorner = \ulcorner m \urcorner$
- Er bestaat een μ-recursieve functie ϕ zdd
  $f(n) = m \Leftrightarrow \phi(n) = m$
- Er bestaat een T.M. zdd
  $f(n) = m \Leftrightarrow$ T.M.$_f$ geeft bij invoer $\ulcorner n \urcorner$ uitvoer $\ulcorner m \urcorner$

zijn synoniem met elkaar.

Halting Problem

Universaliteits principe

De These

Every *effectively calculable* function is *computable*

Church (1936), Turing (1937)

Elke *uitrekenbare* functie is *berekenbaar*

Hypercomputation

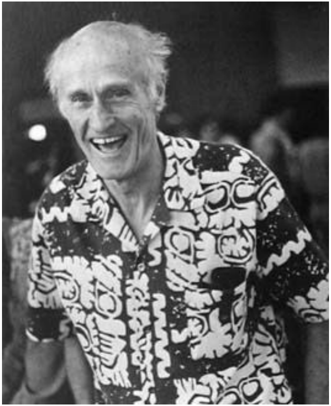
Oracle machines
Infinite state
Transfiniete recursie

Quantum computing

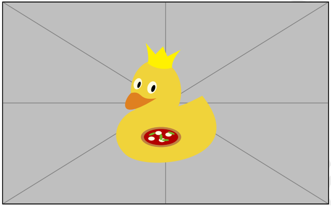
Church Turing Deutsch
Wat doet quantum computing

Tragiek in het paradijs

De protagonisten

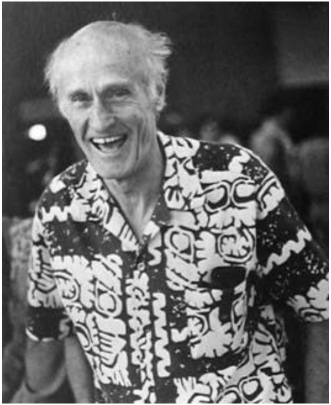


Stephen Kleene (1909-1994)

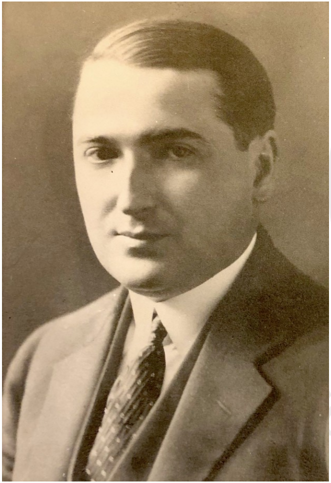


??? (1897 - 1954)

De protagonisten



Stephen Kleene (1909-1994)



Emil Post (1897 - 1954)