Church-Turing These

Een nieuw paradijs

Pieter van Engelen

Radboud Universiteit Nijmegen

03-06-2022@Fontys, Sittard

- 1925 — Formulering *Entscheidungsproblem* in *Grundzüge der theoretischen Logik*
- 1928 — Onvolledigheidsstellingen van Gödel
- 1931 — Introductie van de λ-calculus (A. Church)
- 1932
- 1936 — Negatieve oplossing *Entscheidungsproblem*
- 1937 — Introductie *turing machine, halting problem* en negatieve oplossing *Entscheidungsproblem*
- 1939 — *Systems of logics based on ordinals* (Turing)
- 1944 — *Introductie Turing-degree* (E. Post)
- 1945 — *First Draft of a Report on the EDVAC* (von Neumann)

De These

Every *effectively calculable* function is *computable*

Church (1936), Turing (1937)

De protagonisten

Alonzo Church (1903 - 1995)
Princeton University, USA

De protagonisten

Alonzo Church (1903 - 1995)
Princeton University, USA

- Logicus, wiskundige

De protagonisten

Alonzo Church (1903 - 1995)
Princeton University, USA

- Logicus, wiskundige
- Van 1936 tot 1979 redacteur van *Journal of Symbolic Logic*

De protagonisten

Alonzo Church (1903 - 1995)
Princeton University, USA

- Logicus, wiskundige
- Van 1936 tot 1979 redacteur van *Journal of Symbolic Logic*
- 'Bedenker' van de λ-calculus

De protagonisten

Alonzo Church (1903 - 1995)

Princeton University, USA

- Logicus, wiskundige
- Van 1936 tot 1979 redacteur van *Journal of Symbolic Logic*
- 'Bedenker' van de λ-calculus
- Eerste-orde predicaat-logica is onbeslisbaar

De protagonisten

Alonzo Church (1903 - 1995)
Princeton University, USA

- Logicus, wiskundige
- Van 1936 tot 1979 redacteur van *Journal of Symbolic Logic*
- 'Bedenker' van de λ-calculus
- Eerste-orde predicaat-logica is onbeslisbaar
- Peano-arithmetiek is onbeslisbaar

De protagonisten

Alan Turing (1912 - 1954)
Cambridge & Manchester

- Grondlegger van

De protagonisten

Alan Turing (1912 - 1954)
Cambridge & Manchester

- Grondlegger van
  - Informatica

De protagonisten

Alan Turing (1912 - 1954)
Cambridge & Manchester

- Grondlegger van
  - Informatica
  - Artificiële intelligentie

De protagonisten

Alan Turing (1912 - 1954)

Cambridge & Manchester

- Grondlegger van
  - Informatica
  - Artificiële intelligentie
  - Morphogenetica

De protagonisten

Alan Turing (1912 - 1954)
Cambridge & Manchester

- Grondlegger van
  - Informatica
  - Artificiële intelligentie
  - Morphogenetica
- Legendarisch codebreaker

De protagonisten

Alan Turing (1912 - 1954)

Cambridge & Manchester

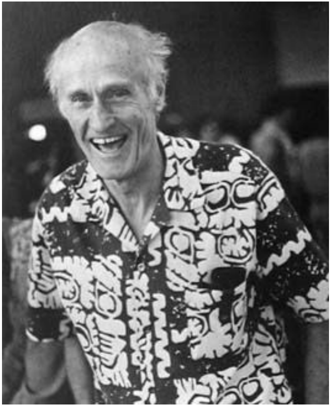
- Grondlegger van
  - Informatica
  - Artificiële intelligentie
  - Morphogenetica
- Legendarisch codebreaker
- Marathonloper

De protagonisten

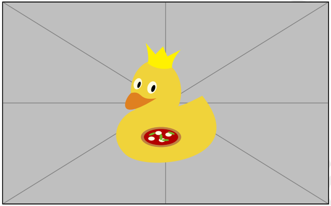
Alan Turing (1912 - 1954)
Cambridge & Manchester

- Grondlegger van
  - Informatica
  - Artificiële intelligentie
  - Morphogenetica
- Legendarisch codebreaker
- Marathonloper
- Homosexueel in een tijd dat het strafbaar was

De protagonisten



Stephen Kleene (1909-1994)



??? (1897 - 1954)

Das Entscheidungsproblem

Das Entscheidungsproblem

Vind een algoritme waarmee
de waarheid van een uitspraak in de eerste orde predikaatlogica
vast te stellen is.

(D. Hilbert & W. Ackermann, 1928, Grundzüge der theoretischen Logik)

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen
- de gebruikelijke operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \ldots$

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen
- de gebruikelijke operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \ldots$
- predikaten $P(x)$

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen
- de gebruikelijke operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \ldots$
- predikaten $P(x)$
- universele en existentiële kwantificatie $\forall, \exists$

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen
- de gebruikelijke operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \ldots$
- predikaten $P(x)$
- universele en existentiële kwantificatie $\forall, \exists$

Voorbeelden:

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen
- de gebruikelijke operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \ldots$
- predikaten $P(x)$
- universele en existentiële kwantificatie $\forall, \exists$

Voorbeelden:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} [m > n]$$

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen
- de gebruikelijke operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \ldots$
- predikaten $P(x)$
- universele en existentiële kwantificatie $\forall, \exists$

Voorbeelden:

$$\forall_{n\in\mathbb{N}}\exists_{m\in\mathbb{N}}[m > n]$$

$$\forall_{p,q\in\mathbb{Q}}\exists_{r\in\mathbb{Q}}[p < r < q]$$

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica
(extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen
- de gebruikelijke operatoren $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \ldots$
- predikaten $P(x)$
- universele en existentiële kwantificatie $\forall, \exists$

Voorbeelden:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} [m > n]$$

$$\forall_{p,q \in \mathbb{Q}} \exists_{r \in \mathbb{Q}} [p < r < q]$$

$$\exists_x [P(x) \wedge \forall_y \forall_{y'} [P(y) \wedge P(y') \rightarrow y = y']]$$

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica

Afspraak:

We hebben het alleen over predikaten en kwantificatie over de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica

Afspraak:

We hebben het alleen over predikaten en kwantificatie over de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$

Gezocht:

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica

Afspraak:

We hebben het alleen over predikaten en kwantificatie over de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$

Gezocht:

Algoritme

wat gegeven een uitspraak roept of die uitspraak `WAAR` of `ONWAAR` is.

Entscheidungsproblem

Eerste orde predikaatlogica

Afspraak:

We hebben het alleen over predikaten en kwantificatie over de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$

Gezocht:

Algoritme

wat gegeven een uitspraak roept of die uitspraak `WAAR` of `ONWAAR` is.

Probleem:

Wat is een algoritme?

Wat is een algoritme

Wat is een algoritme??

Reeds informeel bekend in de wiskunde

Wat is een algoritme

Wat is een algoritme??

Reeds informeel bekend in de wiskunde

- Grootste-gemene-deler van Euclides

Wat is een algoritme

Wat is een algoritme??

Reeds informeel bekend in de wiskunde

- Grootste-gemene-deler van Euclides
- Zeef van Eratosthenes

Wat is een algoritme

Wat is een algoritme??

Reeds informeel bekend in de wiskunde

- Grootste-gemene-deler van Euclides
- Zeef van Eratosthenes
- Gauss-eliminatie

Wat is een algoritme

Probleem: Nog geen *formele* definitie van een *algoritme*.

Wat is een algoritme

Probleem: Nog geen *formele* definitie van een *algoritme*.

Terug naar 1936.

Wat is een algoritme

Probleem: Nog geen *formele* definitie van een *algoritme*.

Terug naar 1936-ish.

Wat is een algoritme

Probleem: Nog geen *formele* definitie van een *algoritme*.

Terug naar 1936-ish.

- Turing machines

Wat is een algoritme

Probleem: Nog geen *formele* definitie van een *algoritme*.

Terug naar 1936-ish.

- Turing machines
- Recursietheorie

Wat is een algoritme

Probleem: Nog geen *formele* definitie van een *algoritme*.

Terug naar 1936-ish.

- Turing machines
- Recursietheorie
- λ-calculus

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

$$x, y, \ldots \in \Lambda \text{ (Variabelen)}$$

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

$$
\begin{aligned}
x, y, \ldots \in \Lambda &\text{ (Variabelen)} \\
M, N \in \Lambda \Rightarrow MN \in \Lambda &\text{ (Applicatie)}
\end{aligned}
$$

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

$$x, y, \ldots \in \Lambda \text{ (Variabelen)}$$
$$M, N \in \Lambda \Rightarrow MN \in \Lambda \text{ (Applicatie)}$$
$$x, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda \text{ (Abstractie)}$$

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

$$x, y, \ldots \in \Lambda \text{ (Variabelen)}$$
$$M, N \in \Lambda \Rightarrow MN \in \Lambda \text{ (Applicatie)}$$
$$x, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda \text{ (Abstractie)}$$

- $\lambda x.x$

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

$$
\begin{aligned}
x, y, \ldots \in \Lambda &\ \text{(Variabelen)} \\
M, N \in \Lambda \Rightarrow MN \in \Lambda &\ \text{(Applicatie)} \\
x, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda &\ \text{(Abstractie)}
\end{aligned}
$$

- $\lambda x.x$
- $\lambda xy.x$

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

$$
\begin{aligned}
x, y, \ldots \in \Lambda &\text{ (Variabelen)}\\
M, N \in \Lambda \Rightarrow MN \in \Lambda &\text{ (Applicatie)}\\
x, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda &\text{ (Abstractie)}
\end{aligned}
$$

- $\lambda x.x$
- $\lambda xy.x$
- $\lambda pqr.pr(qr)$

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

$$x, y, \ldots \in \Lambda \text{ (Variabelen)}$$
$$M, N \in \Lambda \Rightarrow MN \in \Lambda \text{ (Applicatie)}$$
$$x, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda \text{ (Abstractie)}$$

- $\lambda x.x$
- $\lambda xy.x$
- $\lambda pqr.pr(qr)$
- $(\lambda x.xx)A$

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

$$x, y, \ldots \in \Lambda \text{ (Variabelen)}$$
$$M, N \in \Lambda \Rightarrow MN \in \Lambda \text{ (Applicatie)}$$
$$x, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda \text{ (Abstractie)}$$

- $\lambda x.x$
- $\lambda xy.x$
- $\lambda pqr.pr(qr)$
- $(\lambda x.xx)A$
- $\lambda x.y$

De λ-calculus (*Church 1932*)

De programma's

$$x, y, \ldots \in \Lambda \text{ (Variabelen)}$$
$$M, N \in \Lambda \Rightarrow MN \in \Lambda \text{ (Applicatie)}$$
$$x, M \in \Lambda \Rightarrow (\lambda x.M) \in \Lambda \text{ (Abstractie)}$$

- $\lambda x.x$
- $\lambda xy.x$
- $\lambda pqr.pr(qr)$
- $(\lambda x.xx)A$
- $\lambda x.y$
- $\lambda fx.f(f(f(x))) \equiv \ulcorner 3 \urcorner$

De λ-calculus (*Church 1932*)

Actie

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow_\beta M[x := N]$$

De λ-calculus (*Church 1932*)

Actie

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow_\beta M[x := N]$$

Voorbeeld

De λ-calculus (*Church 1932*)

Actie

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow_\beta M[x := N]$$

Voorbeeld

$$(\lambda xyz.zxy)(\color{red}{\lambda x.xx}\color{black})(\color{blue}{\lambda x.x}\color{black})(\lambda xy.x) \rightarrow_\beta$$

De λ-calculus (*Church 1932*)

Actie

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow_\beta M[x := N]$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}(\lambda xyz.zxy)(\lambda x.xx)(\lambda x.x)(\lambda xy.x) &\to_\beta \\ (\lambda yz.z(\lambda x.xx)y)(\lambda x.x)(\lambda xy.x) &\to_\beta\end{aligned}$$

De λ-calculus (*Church 1932*)

Actie

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow_\beta M[x := N]$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}(\lambda xyz.zxy)(\lambda x.xx)(\lambda x.x)(\lambda xy.x) &\to_\beta \\ (\lambda yz.z(\lambda x.xx)y)(\lambda x.x)(\lambda xy.x) &\to_\beta \\ (\lambda z.z(\lambda x.xx))\lambda x.x(\lambda xy.x) &\to_\beta\end{aligned}$$

De λ-calculus (*Church 1932*)

Actie

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow_\beta M[x := N]$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}
(\lambda xyz.zxy)(\lambda x.xx)(\lambda x.x)(\lambda xy.x) &\to_\beta \\
(\lambda yz.z(\lambda x.xx)y)(\lambda x.x)(\lambda xy.x) &\to_\beta \\
(\lambda z.z(\lambda x.xx))\lambda x.x(\lambda xy.x) &\to_\beta \\
(\lambda xy.x)(\lambda x.xx))\lambda x.x &\twoheadrightarrow_\beta \lambda x.xx
\end{aligned}$$

De λ-calculus (*Church 1932*)

Actie

$$(\lambda x.M)N \longrightarrow_\beta M[x := N]$$

Voorbeeld

$$\begin{aligned}(\lambda xyz.zxy)(\lambda x.xx)(\lambda x.x)(\lambda xy.x) &\to_\beta \\ (\lambda yz.z(\lambda x.xx)y)(\lambda x.x)(\lambda xy.x) &\to_\beta \\ (\lambda z.z(\lambda x.xx))\lambda x.x(\lambda xy.x) &\to_\beta \\ (\lambda xy.x)(\lambda x.xx))\lambda x.x &\twoheadrightarrow_\beta \lambda x.xx\end{aligned}$$

Nu jij: $(\lambda xyz.zxy)$("the force")("is")("strong in you")

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

$$\mathcal{O}(x) = 0 \qquad \text{Nul}$$

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

$$\mathcal{O}(x) = 0 \qquad \text{Nul}$$

$$\mathcal{S}(x) = x + 1 \qquad \text{Successor}$$

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

$$\mathcal{O}(x) = 0$$ Nul

$$\mathcal{S}(x) = x + 1$$ Successor

$$\mathcal{P}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$$ Projectie

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

$$\mathcal{O}(x) = 0 \qquad \text{Nul}$$

$$\mathcal{S}(x) = x + 1 \qquad \text{Successor}$$

$$\mathcal{P}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i \qquad \text{Projectie}$$

$$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x})) \qquad \text{Functie compositie}$$

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

$\mathcal{O}(x) = 0$	Nul
$\mathcal{S}(x) = x + 1$	Successor
$\mathcal{P}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$	Projectie
$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$	Functie compositie

Primitieve recursie

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

$\mathcal{O}(x) = 0$	Nul
$\mathcal{S}(x) = x + 1$	Successor
$\mathcal{P}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$	Projectie
$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$	Functie compositie

Primitieve recursie

$f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$	0-geval

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

$\mathcal{O}(x) = 0$	Nul
$\mathcal{S}(x) = x + 1$	Successor
$\mathcal{P}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$	Projectie
$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$	Functie compositie

Primitieve recursie

$f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$	0-geval
$f(\vec{x}, n+1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$	Recursieve geval

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

$\mathcal{O}(x) = 0$	Nul
$\mathcal{S}(x) = x + 1$	Successor
$\mathcal{P}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$	Projectie
$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$	Functie compositie

Primitieve recursie

$f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$	0-geval
$f(\vec{x}, n+1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$	Recursieve geval

μ-**recursie**

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Initiële functies

$\mathcal{O}(x) = 0$	Nul
$\mathcal{S}(x) = x + 1$	Successor
$\mathcal{P}_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$	Projectie
$f(\vec{x}) = h(g_1(\vec{x}), \ldots, g_m(\vec{x}))$	Functie compositie

Primitieve recursie

$f(\vec{x}, 0) = g(\vec{x})$	0-geval
$f(\vec{x}, n+1) = h(\vec{x}, y, f(\vec{x}, y))$	Recursieve geval

μ-recursie

$$f(\vec{x}) = \mu y[g(\vec{x}, y) = 0]$$

"De kleinste y zodat $g(\vec{x}, y) = 0$"

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Voorbeelden

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Voorbeelden

$$\mathcal{P}(0) = 0$$
$$\mathcal{P}(n+1) = n$$

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

Voorbeelden

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P}(0) &= 0 \\
\mathcal{P}(n+1) &= n
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\min(x,0) &= x \\
\min(x,y+1) &= \mathcal{P}(\min(x,y))
\end{aligned}
$$

Recursietheorie (*Kleene 1935*)

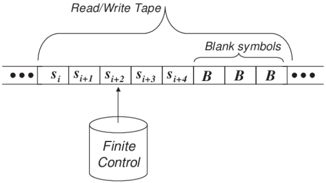
Voorbeelden

$$\mathcal{P}(0) = 0$$
$$\mathcal{P}(n+1) = n$$

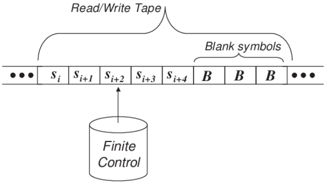
$$\min(x, 0) = x$$
$$\min(x, y+1) = \mathcal{P}(\min(x, y))$$

$$f(n) = \mu y[2y = n \vee 2y + 1 = n]$$

Turing machines (*Turing 1936*)



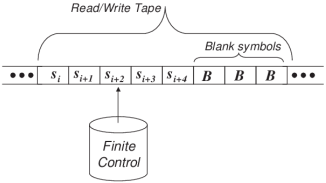
Turing machines (*Turing 1936*)



- Een eindig alfabet

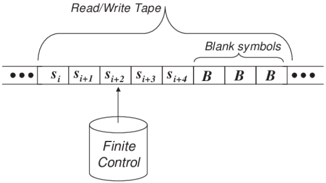
  $s_0, s_1, \dots, s_n$

Turing machines (*Turing 1936*)



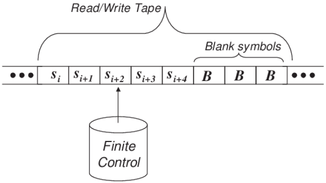
- Een eindig alfabet $s_0, s_1, \ldots, s_n$
- Een eindig aantal toestanden $q_0, q_1, \ldots, q_m$

Turing machines (*Turing 1936*)



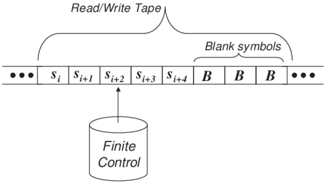
- Een eindig alfabet $s_0, s_1, \ldots, s_n$
- Een eindig aantal toestanden $q_0, q_1, \ldots, q_m$
- Een potentieel oneindige tape voor de symbolen

Turing machines (*Turing 1936*)



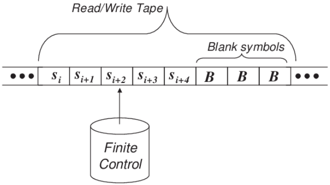
- Een eindig alfabet $s_0, s_1, \ldots, s_n$
- Een eindig aantal toestanden $q_0, q_1, \ldots, q_m$
- Een potentieel oneindige tape voor de symbolen
- De acties: L, R, s_i.

Turing machines (*Turing 1936*)



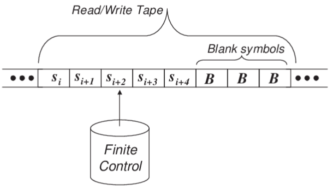
- Een eindig alfabet $s_0, s_1, \ldots, s_n$
- Een eindig aantal toestanden $q_0, q_1, \ldots, q_m$
- Een potentieel oneindige tape voor de symbolen
- De acties: L, R, s_i.
- Een eindige lijst van instructies

Turing machines (*Turing 1936*)



Voorbeeldinstructies

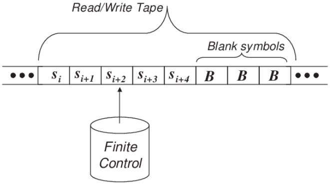
Turing machines (*Turing 1936*)



Voorbeeldinstructies

$q_0\mathbf{0}Rq_1$ Wanneer er in toestand q_0 een $\mathbf{0}$ op de tape staat, zet een stap naar rechts en ga in toestand q_1.

Turing machines (*Turing 1936*)



Voorbeeldinstructies

$q_0\mathbf{0}Rq_1$ Wanneer er in toestand q_0 een $\mathbf{0}$ op de tape staat, zet een stap naar rechts en ga in toestand q_1.

$q_4\mathbf{10}q_8$ Wanneer er in toestand q_4 een $\mathbf{1}$ op de tape staat, vervang de $\mathbf{0}$ door een $\mathbf{1}$ en ga in toestand q_8.

De equivalentie

$$\lambda - \text{definieerbaar} \overset{\text{(Turing 1937)}}{\Longrightarrow} \text{Turing berekenbaar}$$

De equivalentie

$$\lambda - \text{definieerbaar} \overset{\text{(Turing 1937)}}{\Longrightarrow} \text{Turing berekenbaar}$$

$$\text{Turing berekenbaar} \overset{\text{(Turing 1937)}}{\Longrightarrow} \mu - \text{recursief}$$

De equivalentie

$$\lambda - \text{definieerbaar} \overset{\text{(Turing 1937)}}{\Longrightarrow} \text{Turing berekenbaar}$$

$$\text{Turing berekenbaar} \overset{\text{(Turing 1937)}}{\Longrightarrow} \mu - \text{recursief}$$

$$\mu - \text{recursief} \overset{\text{(Kleene 1936)}}{\Longrightarrow} \lambda - \text{definieerbaar}$$

De equivalentie

De uitspraken:

De equivalentie

De uitspraken:

- Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is berekenbaar

De equivalentie

De uitspraken:

- Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is berekenbaar
- Er bestaat een λ-term F zdd $f(n) = m \Leftrightarrow F\ulcorner n \urcorner = \ulcorner m \urcorner$

De equivalentie

De uitspraken:

- Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is berekenbaar
- Er bestaat een λ-term F zdd $f(n) = m \Leftrightarrow F\ulcorner n \urcorner = \ulcorner m \urcorner$
- Er bestaat een μ-recursieve functie ϕ zdd $f(n) = m \Leftrightarrow \phi(n) = m$

De equivalentie

De uitspraken:

- Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is berekenbaar
- Er bestaat een λ-term F zdd $f(n) = m \Leftrightarrow F\ulcorner n \urcorner = \ulcorner m \urcorner$
- Er bestaat een μ-recursieve functie ϕ zdd $f(n) = m \Leftrightarrow \phi(n) = m$
- Er bestaat een T.M. zdd $f(n) = m \Leftrightarrow$ T.M.$_f$ geeft bij invoer $\ulcorner n \urcorner$ uitvoer $\ulcorner m \urcorner$

De equivalentie

De uitspraken:

- Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is berekenbaar
- Er bestaat een λ-term F zdd $f(n) = m \Leftrightarrow F\ulcorner n \urcorner = \ulcorner m \urcorner$
- Er bestaat een μ-recursieve functie ϕ zdd $f(n) = m \Leftrightarrow \phi(n) = m$
- Er bestaat een T.M. zdd $f(n) = m \Leftrightarrow$ T.M.$_f$ geeft bij invoer $\ulcorner n \urcorner$ uitvoer $\ulcorner m \urcorner$

zijn synoniem met elkaar.

Halting Problem

Iets met oneindigheid

Probleem:
Een algoritme kan eindeloos lang doorgaan, zonder een 'antwoord' te geven.

Halting Problem

Iets met oneindigheid

Probleem:
Een algoritme kan eindeloos lang doorgaan, zonder een 'antwoord' te geven.

λ-calculus $\quad (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$

Halting Problem

Iets met oneindigheid

Probleem:
Een algoritme kan eindeloos lang doorgaan, zonder een 'antwoord' te geven.

λ-calculus	$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
Recursietheorie	$f(n) = \mu y[y < 0]$

Halting Problem

Iets met oneindigheid

Probleem:
Een algoritme kan eindeloos lang doorgaan, zonder een 'antwoord' te geven.

λ-calculus	$(\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$
Recursietheorie	$f(n) = \mu y[y < 0]$
Turing machine	$\{q_0\mathbf{00}q_1, q_1\mathbf{00}q_0\}$

Halting Problem

Iets met oneindigheid

Probleem:
Een algoritme kan eindeloos lang doorgaan, zonder een 'antwoord' te geven.

Halting Problem

Iets met oneindigheid

Probleem:
Een algoritme kan eindeloos lang doorgaan, zonder een 'antwoord' te geven.

Oplossing:
Schrijf een algoritme wat van een gegeven algoritme P bepaalt of deze bij gegeven invoer n een antwoord geeft.

Halting Problem

Iets met oneindigheid

Probleem:
Een algoritme kan eindeloos lang doorgaan, zonder een 'antwoord' te geven.

Oplossing:
Schrijf een algoritme wat van een gegeven algoritme P bepaalt of deze bij gegeven invoer n een antwoord geeft.

Computer says no...

Halting Problem

Theorem (Halting Problem)

Er bestaat geen algoritme wat bepaalt of een gegeven algoritme P *stopt bij gegeven invoer* n.

Halting Problem

Theorem (Halting Problem)

Er bestaat geen algoritme wat bepaalt of een gegeven algoritme P stopt bij gegeven invoer n.

Proof.

Stel dat er een algoritme H bestaat (*), wat aan de voorwaarden voldoet.

$\square$

Halting Problem

Theorem (Halting Problem)

Er bestaat geen algoritme wat bepaalt of een gegeven algoritme P stopt bij gegeven invoer n.

Proof.

Stel dat er een algoritme H bestaat (*), wat aan de voorwaarden voldoet. Maak een nieuw algoritme H' op de volgende manier:

$$H'(n) = \begin{cases} \uparrow & \text{als } H(P,n) = 1 \\ 1 & \text{als } H(P,n) \uparrow \end{cases}$$

$\square$

Halting Problem

Theorem (Halting Problem)

Er bestaat geen algoritme wat bepaalt of een gegeven algoritme P stopt bij gegeven invoer n.

Proof.

Stel dat er een algoritme H bestaat (*), wat aan de voorwaarden voldoet. Maak een nieuw algoritme H' op de volgende manier:

$$H'(n) = \begin{cases} \uparrow & \text{als } H(P,n) = 1 \\ 1 & \text{als } H(P,n) \uparrow \end{cases}$$

Beschouw nu $H(H'(n))$. Wanneer H oneindig draait, is H' gedefinieerd, maar dan zou H juist niet oneindig moeten draaien. Tegenspraak. □

Halting Problem

Theorem (Halting Problem)

Er bestaat geen algoritme wat bepaalt of een gegeven algoritme P stopt bij gegeven invoer n.

Proof.

Stel dat er een algoritme H bestaat (*), wat aan de voorwaarden voldoet. Maak een nieuw algoritme H' op de volgende manier:

$$H'(n) = \begin{cases} \uparrow & \text{als } H(P,n) = 1 \\ 1 & \text{als } H(P,n) \uparrow \end{cases}$$

Beschouw nu $H(H'(n))$. Wanneer H oneindig draait, is H' gedefinieerd, maar dan zou H juist niet oneindig moeten draaien. Tegenspraak. We geven de aanname (*) de schuld. □

Entscheidungsproblem

Feit: Er zijn overaftelbaar veel onoplosbare problemen

Entscheidungsproblem

Feit: Er zijn overaftelbaar veel onoplosbare problemen

Nog zo een: Het is *niet* beslisbaar om van een gegeven programma P te zeggen of het uitvoer x geeft.

Entscheidungsproblem

Feit: Er zijn overaftelbaar veel onoplosbare problemen

Nog zo een: Het is *niet* beslisbaar om van een gegeven programma P te zeggen of het uitvoer x geeft.

Gevolg: Het *Entscheidungsproblem* is niet oplosbaar.

Universaliteits principe

Beslisbaar probleem $P \Longrightarrow$ T.M voor probleem P

Universaliteits principe

Beslisbaar probleem $P \Longrightarrow$ T.M voor probleem P

The ugly: Erg veel T.M.'s

Universaliteits principe

Beslisbaar probleem $P \Longrightarrow$ T.M voor probleem P

The ugly: Erg veel T.M.'s
Gezocht:

Universaliteits principe

Beslisbaar probleem $P \Longrightarrow$ T.M voor probleem P

The ugly: Erg veel T.M.'s
Gezocht:

One TM to rule them all

Universaliteits principe

One TM to rule them all

Hoe?

Universaliteits principe

One TM to rule them all

Hoe?

Proof.

Bereken een *beschrijvend getal* e per T.M M
(een soort Gödelcodering van T.M.'s)

□

Universaliteits principe

One TM to rule them all

Hoe?

Proof.

Bereken een *beschrijvend getal* e per T.M M
(een soort Gödelcodering van T.M.'s)
Maak een T.M. U, die een programma e en een invoer vraagt.

$\square$

Universaliteits principe

One TM to rule them all

Hoe?

Proof.

Bereken een *beschrijvend getal* e per T.M M
(een soort Gödelcodering van T.M.'s)
Maak een T.M. U, die een programma e en een invoer vraagt.
Nu geeft $U(e, n)$ het antwoord p op de tape precies wanneer M antwoord p geeft bij invoer n. □

Universaliteits principe

One TM to rule them all

Hoe?

Proof.

Bereken een *beschrijvend getal* e per T.M M
(een soort Gödelcodering van T.M.'s)
Maak een T.M. U, die een programma e en een invoer vraagt.
Nu geeft $U(e, n)$ het antwoord p op de tape precies wanneer M antwoord p geeft bij invoer n. □

Machine U noemen we een *Universele Turingmachine*.

Universaliteits principe

One TM to rule them all

Hoe?

Proof.

Bereken een *beschrijvend getal* e per T.M M
(een soort Gödelcodering van T.M.'s)
Maak een T.M. U, die een programma e en een invoer vraagt.
Nu geeft $U(e, n)$ het antwoord p op de tape precies wanneer M antwoord p geeft bij invoer n. □

Machine U noemen we een *Universele Turingmachine*.
In effect een *Interpreter*.

Tussentijdse terugblik

Terugblik

Tussentijdse terugblik

Terugblik

- Formele definitie van een algoritme

Tussentijdse terugblik

Terugblik

- Formele definitie van een algoritme
- *Berekenbaarheid*

Tussentijdse terugblik

Terugblik

- Formele definitie van een algoritme
- *Berekenbaarheid*
- Best veel onberekenbare problemen

Tussentijdse terugblik

Terugblik

- Formele definitie van een algoritme
- *Berekenbaarheid*
- Best veel onberekenbare problemen
- Reële getallen op een computer, foggeddaboudid.

Tussentijdse terugblik

Terugblik

- Formele definitie van een algoritme
- *Berekenbaarheid*
- Best veel onberekenbare problemen
- Reële getallen op een computer, foggeddaboudid.
- De droom van Hilbert in scherven

Tussentijdse terugblik

Terugblik

- Formele definitie van een algoritme
- *Berekenbaarheid*
- Best veel onberekenbare problemen
- Reële getallen op een computer, foggeddaboudid.
- De droom van Hilbert in scherven
- One machine to rule them all

Tussentijdse terugblik

Terugblik

- Formele definitie van een algoritme
- *Berekenbaarheid*
- Best veel onberekenbare problemen
- Reële getallen op een computer, foggeddaboudid.
- De droom van Hilbert in scherven
- One machine to rule them all

Op naar de These!

De These

Every *effectively calculable* function is *computable*
Church (1936), Turing (1937)
Elke *uitrekenbare* functie is *berekenbaar*

Concrete Turing Machines

Concrete Turing Machines

- Colossus (1943)

Concrete Turing Machines

- Colossus (1943)
- ENIAC (1946)

Concrete Turing Machines

- Colossus (1943)
- ENIAC (1946)
- Automatic Computing Engine (1945)

Concrete Turing Machines

- Colossus (1943)
- ENIAC (1946)
- Automatic Computing Engine (1945)
- EDVAC, EDSAC (1949)

Concrete Turing Machines

- Colossus (1943)
- ENIAC (1946)
- Automatic Computing Engine (1945)
- EDVAC, EDSAC (1949)

Belangrijk concept: *Stored Program Computer* (von Neumann, 1945)

To boldly go where no man has gone before

To boldly go where no man has gone before

- Orakel machines (Turing, 1939)

To boldly go where no man has gone before

- Orakel machines (Turing, 1939)
- Infinite state machines (discussie Gödel)

To boldly go where no man has gone before

- Orakel machines (Turing, 1939)
- Infinite state machines (discussie Gödel)
- Black hole

To boldly go where no man has gone before

- Orakel machines (Turing, 1939)
- Infinite state machines (discussie Gödel)
- Black hole
- Quantum computing

Quantum computing

Quantum computing

- Superpositie

Quantum computing

- Superpositie
- Interferentie

Quantum computing

- Superpositie
- Interferentie
- Verstrengeling

Quantum computing

- Superpositie
- Interferentie
- Verstrengeling

Gevolgen voor:

Quantum computing

- Superpositie
- Interferentie
- Verstrengeling

Gevolgen voor:

- Cryptografie

Quantum computing

- Superpositie
- Interferentie
- Verstrengeling

Gevolgen voor:

- Cryptografie
- Zoek algoritmen

Quantum computing

- Superpositie
- Interferentie
- Verstrengeling

Gevolgen voor:

- Cryptografie
- Zoek algoritmen
- Computationele biologie

Quantum computing

- Superpositie
- Interferentie
- Verstrengeling

Gevolgen voor:

- Cryptografie
- Zoek algoritmen
- Computationele biologie
- Machine learning?

Quantum computing

Church-Turing-Deutsch These

Een universele computer kan elk fysisch proces simuleren

Gandy 1980, Deutsch 1985

Quantum computing

Church-Turing-Deutsch These

Een universele computer kan elk fysisch proces simuleren
Gandy 1980, Deutsch 1985

Stelling

De klasse van *berekenbare functies*
is *gelijk* aan
de klasse van *quantum-berekenbare* functies.

Terugblik

Terugblik

- Kennis over algoritmen en berekenbaarheid

Terugblik

- Kennis over algoritmen en berekenbaarheid
- Van abstracte logica naar je broekzak

Terugblik

- Kennis over algoritmen en berekenbaarheid
- Van abstracte logica naar je broekzak
- Harde grenzen

Terugblik

- Kennis over algoritmen en berekenbaarheid
- Van abstracte logica naar je broekzak
- Harde grenzen
- *Mer à boire*

Terugblik

- Kennis over algoritmen en berekenbaarheid
- Van abstracte logica naar je broekzak
- Harde grenzen
- *Mer à boire*
- ??

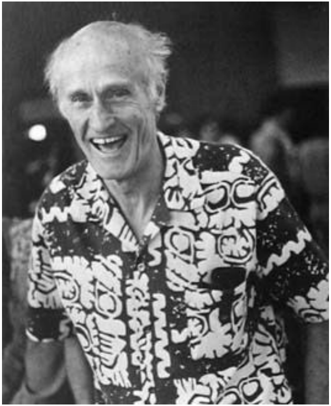
The End

Dankjewel voor je aandacht

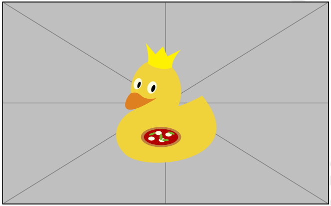
Contact: mail@pietervanengelen.nl

Tragiek in het paradijs

De protagonisten

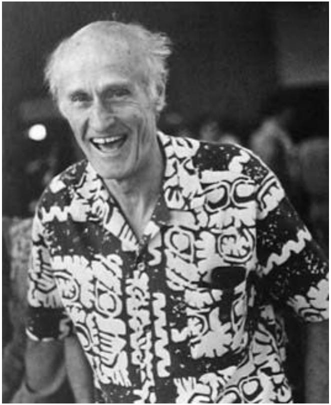


Stephen Kleene (1909-1994)

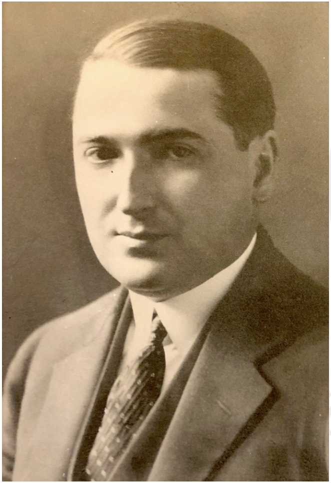


??? (1897 - 1954)

De protagonisten

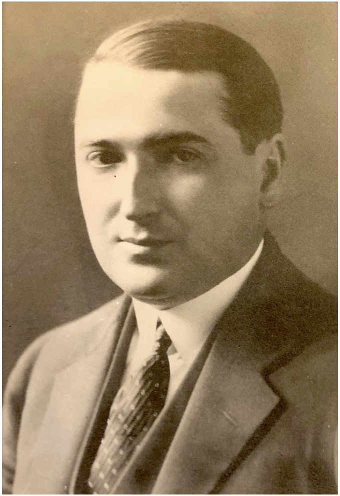


Stephen Kleene (1909-1994)

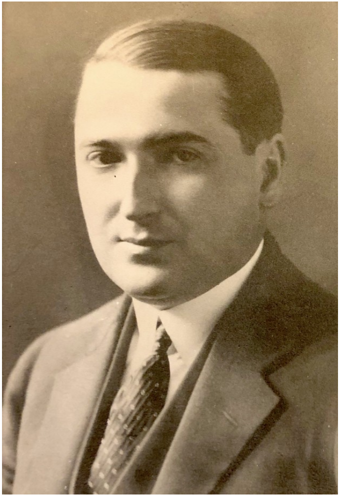


Emil Post (1897 - 1954)

Emil Leon Post

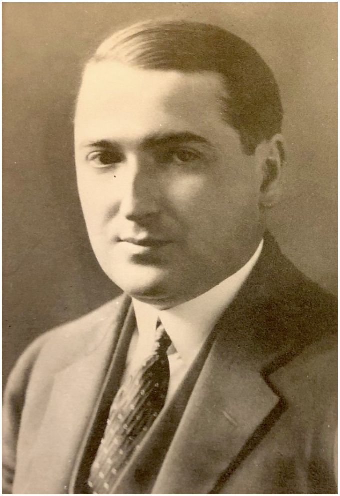


Emil Leon Post



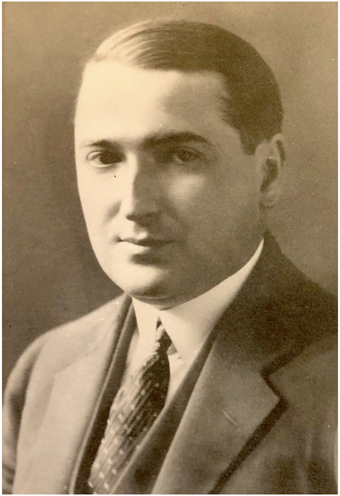
- Logicus en wiskundige

Emil Leon Post



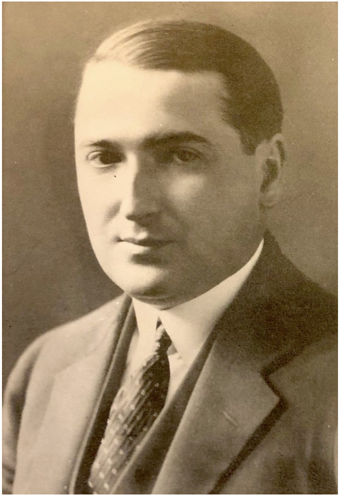
- Logicus en wiskundige
- Bewijs van volledigheid propositielogica uit *Principia Mathematica* (1919)

Emil Leon Post



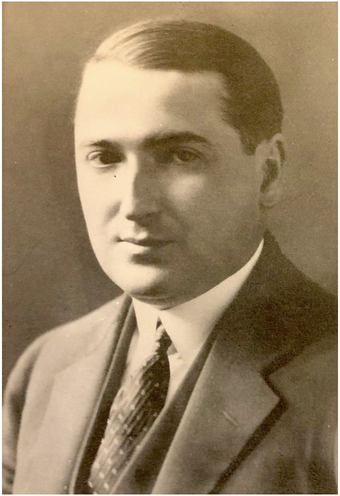
- Logicus en wiskundige
- Bewijs van volledigheid propositielogica uit *Principia Mathematica* (1919)
- Vond in 1920 aanwijzingen voor de Onvolledigheidsstellingen van Gödel en onbeslisbaarheidsresultaten van Church en Turing

Emil Leon Post



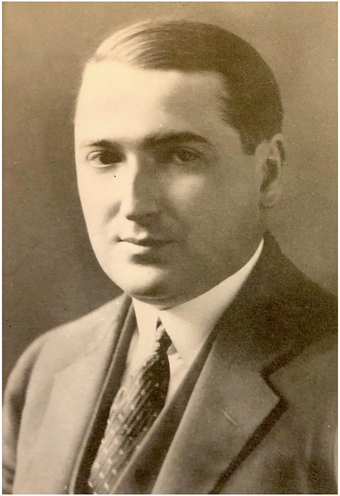
- Logicus en wiskundige
- Bewijs van volledigheid propositielogica uit *Principia Mathematica* (1919)
- Vond in 1920 aanwijzingen voor de Onvolledigheidsstellingen van Gödel en onbeslisbaarheidsresultaten van Church en Turing
- Bipolaire stoornis

Emil Leon Post



- Logicus en wiskundige
- Bewijs van volledigheid propositielogica uit *Principia Mathematica* (1919)
- Vond in 1920 aanwijzingen voor de Onvolledigheidsstellingen van Gödel en onbeslisbaarheidsresultaten van Church en Turing
- Bipolaire stoornis
- Finite Combinatory Processes (1936)

Emil Leon Post



- Logicus en wiskundige
- Bewijs van volledigheid propositielogica uit *Principia Mathematica* (1919)
- Vond in 1920 aanwijzingen voor de Onvolledigheidsstellingen van Gödel en onbeslisbaarheidsresultaten van Church en Turing
- Bipolaire stoornis
- Finite Combinatory Processes (1936)
- Turing-degree/Post's Theorem (1944)