

# Church-Turing These

## Een nieuw paradijs

Pieter van Engelen

Radboud Universiteit Nijmegen

03-06-2022

## De tijd

De protagonisten

## De situatie

Entscheidungsproblem

Berekenbaarheidsmodellen

De kracht van berekenbaarheid

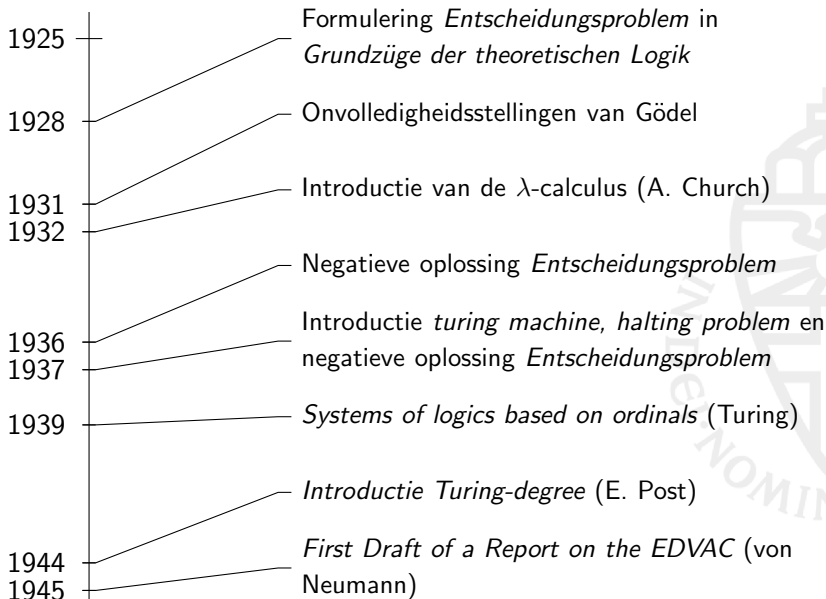
## De these

## Voorbij de these?

Hypercomputation

Quantum computing

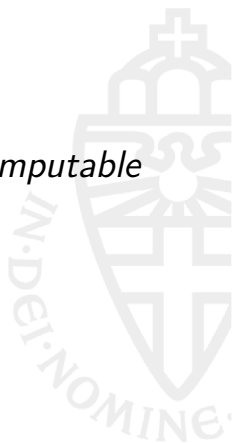




# De These

Every *effectively calculable* function is *computable*

Church (1936), Turing (1937)



## De protagonisten



Alonzo Church (1903 - 1995)  
*Princeton University, USA*

- Logicus, wiskundige
- Van 1936 tot 1979 redacteur van *Journal of Symbolic Logic*
- 'Bedenker' van de  $\lambda$ -calculus
- Eerste-orde predicaat-logica is onbeslisbaar
- Peano-arithmetiek is onbeslisbaar

# De protagonisten

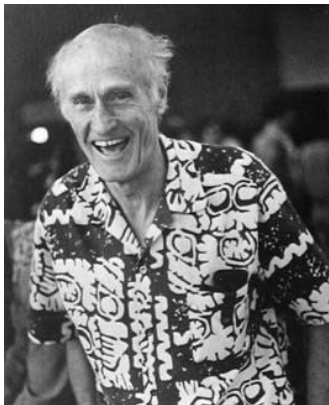


Alan Turing (1912 - 1954)

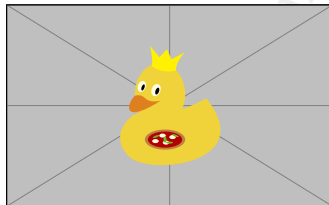
*Cambridge & Manchester*

- Grondlegger van
  - Informatica
  - Artificiële intelligentie
  - Morphogenetica
- Legendarisch codebreaker
- Marathonloper

## De protagonisten



Stephen Kleene (1909-1994)



??? (1897 - 1954)

# Das Entscheidungsproblem

## Das Entscheidungsproblem

Vind een algoritme waarmee  
de waarheid van een uitspraak in de eerste orde predikaatlogica  
vast te stellen is.

*(D. Hilbert & W. Ackermann, 1928, Grundzüge der theoretischen Logik)*



# Entscheidungsproblem

## Eerste orde predikaatlogica (extreem kort door de bocht)

Logica met

- variabelen
- de gebruikelijke operatoren  $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg, \dots$
- predikaten  $P(x)$
- universele en existentiële kwantificatie  $\forall, \exists$

Voorbeelden:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \exists_{m \in \mathbb{N}} [m > n]$$

$$\forall_{p, q \in \mathbb{Q}} \exists_{r \in \mathbb{Q}} [p < r < q]$$

$$\exists_x [P(x) \wedge \forall_y \forall_{y'} [P(y) \wedge P(y') \rightarrow y = y']]$$

# Entscheidungsproblem

## Eerste orde predikaatlogica

### *Afspraak:*

We hebben het alleen over predikaten en kwantificatie over de natuurlijke getallen  $\mathbb{N}$

### *Gezocht:*

**Algoritme** wat gegeven een uitspraak roept of die uitspraak WAAR of ONWAAR is.

### *Probleem:*

Wat is een algoritme?



# De $\lambda$ -calculus





# Recursietheorie





# Turing machines



# De equivalentie

$\lambda$  – definieerbaar  $\xRightarrow{\text{(Turing 1937)}}$  Turing berekenbaar

Turing berekenbaar  $\xRightarrow{\text{(Turing 1937)}}$   $\mu$  – recursief

$\mu$  – recursief  $\xRightarrow{\text{(Kleene 1936)}}$   $\lambda$  – definieerbaar

# De equivalentie

De uitspraken:

- Een functie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  is berekenbaar
- Er bestaat een  $\lambda$ -term  $F$  zdd  $f(n) = m \Leftrightarrow F \ulcorner n \urcorner = \ulcorner m \urcorner$
- Er bestaat een  $\mu$ -recursieve functie  $\phi$  zdd  $f(n) = m \Leftrightarrow \phi(n) = m$
- Er bestaat een T.M. zdd  $f(n) = m \Leftrightarrow \text{T.M.}_f$  geeft bij invoer  $\ulcorner n \urcorner$  uitvoer  $\ulcorner m \urcorner$

zijn synoniem met elkaar.



# Halting Problem







# Universaliteits principe



# De These

Every *effectively calculable* function is *computable*

Church (1936), Turing (1937)

Elke *uitrekenbare* functie is *berekenbaar*

De tijd  
De situatie  
De these  
Voorbij de these?  
Tragiek in het paradijs

Radboud Universiteit Nijmegen



# Hypercomputation

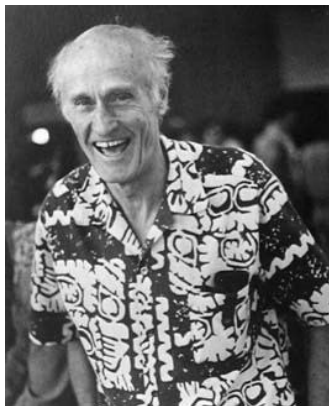




# Quantum computing



## De protagonisten



Stephen Kleene (1909-1994)



Emil Post (1897 - 1954)

