

## Opgave 1

2. Gelijkheid in alle gevallen, behalve als  $(a, b) = (3; 0,3)$

3. Exact: 1,2,3,4,5 en 0,5

Niet exact: 0,1 0,2 en 0,4

$$1,6 \cdot 2^{-4} \quad 1,6 \cdot 2^{-3} \quad (1,6 \cdot 2^{-2})$$

$$0,3 = (1,2 \cdot 2^{-2})$$

IEEE 754 format:

$$\begin{array}{c} \pm 1, \underbrace{\ast \ast \dots \ast}_{52 \text{ bits}} \cdot 2^e \end{array} \quad \begin{array}{l} \bullet \text{ 1 sign-bit} \\ \bullet -1023 \leq e < 1024 \rightarrow 11 \text{ bit} \\ \bullet 52 \text{ bits voor mantisse} \end{array}$$

- Voor 0,1 0,2 en 0,4:  $fl(x) > x$

$$fl(x) = \underbrace{1.1001100110011\dots}_2 \cdot \begin{cases} 2^{-4} & 0,1 \\ 2^{-3} & 0,2 \\ 2^{-2} & 0,4 \end{cases}$$

Dus  $fl(x) = x(1 + \varepsilon_1)$  met  $\boxed{\varepsilon_1 > 0}$

$$|\varepsilon_1| < \varepsilon_{\text{mach}}$$

- Voor 0,3:  $fl(0,3) < 0,3$

$$fl(0,3) = \underbrace{1.00110011\dots}_2 \cdot 2^{-2} = 0,3 \cdot (1 + \varepsilon_1) \text{ met } \boxed{\varepsilon_1 < 0,1}$$

4. Het script gaat na of

$$fl(a) \cdot fl(0,1) \stackrel{?}{=} fl(0,1a) = fl(b)$$

$$\Leftrightarrow a(1+\varepsilon_a) \cdot 0,1(1+\varepsilon_0) \stackrel{?}{=} 0,1a(1+\varepsilon_1)$$

$$\Leftrightarrow 0,1a(1+\varepsilon_a + \varepsilon_0 + \cancel{\varepsilon_0\varepsilon_a}) \stackrel{?}{=} 0,1a(1+\varepsilon_1)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_a + \varepsilon_0 \stackrel{?}{=} \varepsilon_1 \quad \text{met } |\varepsilon_i| < \varepsilon_{\text{mach}}$$

5. Uit 3.:  $fl(0,3) = 0,3(1+\varepsilon_1)$  met  $\underline{\varepsilon_1 < 0}$

Voor  $a = 1, 2, 3, 4, 5$   $fl(a) = a$  of  $\varepsilon_a = 0$

Ten slotte  $fl(0,1) = 0,1(1+\varepsilon_0)$  met  $\boxed{\varepsilon_0 > 0}$

Dus voor  $(a,b) = (3, 0,3)$  geldt  $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$

In de andere gevallen is  $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$

want in 3. werd aangetoond dat de relatieve fout op de floating-point voorstellingen van 0,1, 0,2 en 0,4 gelijk is aan die van 0,1.

Geval  $(a,b) = (5, 0,5)$  Nog niet verklard want

$$\begin{cases} \varepsilon_a = 0 \\ \varepsilon_0 \neq 0 \\ \varepsilon_1 = 0 \end{cases}$$

Toch zegt het script 'positief'!?

$\hookrightarrow$  Komt door fout in 4

Verbetende versie (vervolg) kan dit wel verklaren

$$4. \text{ If } [f_\ell(a) \cdot f_\ell(0,1)] \stackrel{?}{=} f_\ell(0,1a)$$

$$\Leftrightarrow [a(1+\varepsilon_a) \ 0,1(1+\varepsilon_0)](1+\varepsilon_2) \stackrel{?}{=} 0,1a(1+\varepsilon_1)$$

$$\Leftrightarrow 0,1a(1+\varepsilon_a + \varepsilon_0 + \varepsilon_2 + O(\varepsilon^2)) \stackrel{?}{=} 0,1a(1+\varepsilon_1)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_a + \varepsilon_0 + \varepsilon_2 \stackrel{?}{=} \varepsilon_1$$

$(a, b)$	$\varepsilon_a$	$+ \varepsilon_0$	$+ \varepsilon_2$	$\stackrel{?}{=} \varepsilon_1$	Script?
1; 0,1	0	$>0$	0	$>0$	+
2; 0,2	0	$>0$	0	$>0$	+
3; 0,3	0	$(>0)$	$(>0)^\Delta$	$(<0)$	-
4; 0,4	0	$>0$	0	$>0$	+
5; 0,5	0	$>0$	$<0^*$	0	+

\* Afnonding doet de gelijkheid weer kloppen

\* Afnonding doet de gelijkheid weer kloppen

$\Delta$  Vergelijk ieee754(0,3) met ieee754(3 · 0,1)

$$\Rightarrow f_\ell(0,3) < f_\ell(3 \cdot f_\ell(0,1)) \Rightarrow \varepsilon_2 > 0$$