

Opgave 1

2. Gelijkheid in alle gevallen, behalve als $(q, l) = (3; 0,3)$
3. Exact: 1,2,3,4,5 en 0,5

Niet exact: 0,1 0,2 en 0,4

$$1,6 \cdot 2^{-4} \quad 1,6 \cdot 2^{-3} \quad 1,6 \cdot 2^{-2}$$

$$0,3 = (1,2 \cdot 2^{-2})$$

IEEE 754 format:

$$\begin{array}{l} \text{+} \quad 1, \underbrace{* * \dots *}_{52 \text{ bits}} \cdot 2^e \\ \text{-} \end{array} \quad \begin{array}{l} \bullet 1 \text{ sign-bit} \\ \bullet -1023 \leq e \leq 1024 \rightarrow 11 \text{ bit} \\ \bullet 52 \text{ bits voor mantisse} \end{array}$$

- Voor 0,1 0,2 en 0,4 : $fl(x) > x$

$$fl(x) = \underbrace{1.1001100110011 \dots}_{> 1,6} \cdot \begin{cases} 2^{-4} & 0,1 \\ 2^{-3} & 0,2 \\ 2^{-2} & 0,4 \end{cases}$$

$$\text{Dus } fl(x) = x(1 + \epsilon_1) \text{ met } \boxed{\epsilon_1 > 0}$$

$$|\epsilon_1| < \epsilon_{mach}$$

- Voor 0,3 : $fl(0,3) < 0,3$

$$fl(0,3) = \underbrace{1.00110011 \dots}_{< 1,2} \cdot 2^{-2} = 0,3 \cdot (1 + \epsilon_1) \text{ met } \boxed{\epsilon_1 < 0}$$

4. Het script gaat na of

$$fl(a) \cdot fl(0,1) \stackrel{?}{=} fl(0,1a) = fl(b)$$

$$\Leftrightarrow a(1+\varepsilon_a) \cdot 0,1(1+\varepsilon_0) \stackrel{?}{=} 0,1a(1+\varepsilon_1)$$

$$\Leftrightarrow 0,1a(1+\varepsilon_a + \varepsilon_0 + \cancel{\varepsilon_0 \varepsilon_a}) \stackrel{?}{=} 0,1a(1+\varepsilon_1)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_a + \varepsilon_0 \stackrel{?}{=} \varepsilon_1 \quad \text{met } |\varepsilon_i| < \varepsilon_{mach}$$

5. Uit 3.: $fl(0,3) = 0,3(1+\varepsilon_1)$ met $\boxed{\varepsilon_1 < 0}$

Voor $a = 1, 2, 3, 4, 5$ $fl(a) = a$ of $\varepsilon_a = 0$

Ten slotte $fl(0,1) = 0,1(1+\varepsilon_0)$ met $\boxed{\varepsilon_0 > 0}$

Dus voor $(a,b) = (3; 0,3)$ geldt $\varepsilon_0 \neq \varepsilon_1$

In de andere gevallen is $\varepsilon_0 = \varepsilon_1$

want in 3. werd aangetoond dat de relatieve fout op de floating-point voorstellingen van 0,1 0,2 en 0,4 gelijk is aan die van 0,1.

Geval $(a,b) = (5; 0,5)$ Nog niet verklaard want $\begin{cases} \varepsilon_a = 0 \\ \varepsilon_0 \neq 0 \\ \varepsilon_1 = 0 \end{cases}$

Toch zegt het script 'positief'!?

↳ Komt door fout in 4

Verbeterde versie (vervolg) kan dit wel verklaren

$$4. fl[fl(a) \cdot fl(0,1)] \stackrel{?}{=} fl(0,1a)$$

$$\Leftrightarrow [a(1+\varepsilon_a) \cdot 0,1(1+\varepsilon_0)](1+\varepsilon_2) \stackrel{?}{=} 0,1a(1+\varepsilon_1)$$

$$\Leftrightarrow 0,1a(1+\varepsilon_a+\varepsilon_0+\varepsilon_2+O(\varepsilon^2)) \stackrel{?}{=} 0,1a(1+\varepsilon_1)$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_a + \varepsilon_0 + \varepsilon_2 \stackrel{?}{=} \varepsilon_1$$

(a, b)	ε_a	$+$	ε_0	$+$	ε_2	$\stackrel{?}{=} \varepsilon_1$	Script?
1; 0,1	0		>0		0	>0	+
2; 0,2	0		>0		0	>0	+
3; 0,3	0		>0		$>0^\Delta$	<0	-
4; 0,4	0		>0		0	>0	+
5; 0,5	0		>0		$<0^*$	0	+

* Afronding doet de gelijkheid weer kloppen

Δ Vergelijk $ieee754(0,3)$ met $ieee754(3 \cdot 0,1)$

$$\Rightarrow fl(0,3) < fl(3 \cdot fl(0,1)) \Rightarrow \varepsilon_2 > 0$$