

V353

Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Jan Philipp Jäkel
jan.jaekel@tu-dortmund.de

Piet Hoffmann
piet.hoffmann@tu-dortmund.de

Durchführung: 19.12.2017

Abgabe: 9.1.2018

TU Dortmund – Fakultät Physik

Inhaltsverzeichnis

1	Zielsetzung	3
2	Theorie	3
2.1	Die allgemeine Relaxationsgleichung	3
2.2	Anwendung auf den Auf- und Entladevorgang des RC-Schwingkreises . . .	3
2.3	Auf- und Entladevorgang mit periodischer Anregung	4
2.4	Der RC-Kreis als Integrator	5
3	Durchführung	5
3.1	Auf- und Entladevorgang	5
3.2	Frequenzabhängigkeit der Amplitude	6
3.3	Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	6
4	Auswertung	7
4.1	Bestimmung des RC-Glieds	7
4.2	Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung	7
4.3	Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung	9
4.4	RC-Glied als Integrator	12
5	Diskussion	12
	Literatur	12

1 Zielsetzung

Im allgemeinen soll das Relaxationsverhalten eines RC-Schwingkreises untersucht werden. Dabei wird die Phasenabhängigkeit des Schwingkreises beobachtet und überprüft ob der RC-Schwingkreis als Integrator fungieren kann.

2 Theorie

2.1 Die allgemeine Relaxationsgleichung

Wenn ein System ausgelenkt wird und nicht oszillatorisch in seinen Anfangszustand zurückkehrt, treten Relaxationserscheinungen auf. Die Geschwindigkeit der Rückkehr ist dabei proportional zu der Auslenkung:

$$\frac{dA}{dt} = c[A(t) - A(\infty)] \quad (1)$$

Durch Integration von 0 bis t ergibt sich:

$$\ln \frac{A(t) - A(\infty)}{A(0) - A(\infty)} = ct \quad (2)$$

Wird die e-Funktion auf die Gleichung angewendet ergibt sich:

$$A(t) = A(\infty) + [A(0) - A(\infty)] \exp(ct) \quad (3)$$

Wobei $c < 0$ sein muss, damit A beschränkt ist.

2.2 Anwendung auf den Auf- und Entladevorgang des RC-Schwingkreises

Der in Abbildung befindliche Kondensator soll aufgeladen sein, dann liegt zwischen den Platten eine Spannung

$$U_C = \frac{Q}{C} \quad (4)$$

an. Nach dem ohmschen Gesetz lässt sich der Strom durch

$$I = \frac{U_C}{R} \quad (5)$$

ausdrücken. Damit findet sich für den zeitlichen Verlauf der Ladung folgende Dgl.:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{RC}Q(t) \quad (6)$$

Mit $Q(\infty) = 0$ ergibt sich analog zu der Gleichung(3):

$$Q(t) = Q(0) \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \quad (7)$$

Für den Aufladevorgang gelten die Randbedingungen

$$Q(0) = 0 \quad (8)$$

und

$$Q(\infty) = CU_0. \quad (9)$$

Damit folgt für den zeitlichen Verlauf der Ladung:

$$Q(t) = CU_0 \exp\left(\frac{-t}{RC}\right) \quad (10)$$

Die Zeitkonstante ist ein Maß für die Geschwindigkeit der Relaxation des Systems. Hier ist diese $\frac{1}{RC}$.

2.3 Auf- und Entladevorgang mit periodischer Anregung

Liegt eine Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t) \quad (11)$$

an, so lässt sich mit folgendem Ansatz eine Lösung für das Problem finden:

$$U_c(t) = A(\omega) \cos(\omega t + \phi(\omega)) \quad (12)$$

Damit gilt für den Stromkreis, unter Einbezug des zweiten Kirchhoffschen Gesetzes:

$$U_0 \cos(\omega t) = A\omega RC \sin(\omega t + \phi) + A(\omega) \cos(\omega t + \phi) \quad (13)$$

Gleichung (13) muss für alle t gelten. Mit $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich dann:

$$0 = -\omega RC \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \quad (14)$$

Durch Umformung ergibt sich dann folgende Beziehung für die Phasenverschiebung:

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (15)$$

Mit $\omega t + \phi = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich für die Generatorspannung:

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (16)$$

Es ist durch Gleichung (16) erkennbar, dass das RC-Glied ein Tiefpass ist.

2.4 Der RC-Kreis als Integrator

Es gilt:

$$U(t) = RC \frac{dU_c}{dt} + U_c(t) \quad (17)$$

Unter der Voraussetzung $\omega \gg \frac{1}{RC}$ ist $|U_C| \ll |U|$. Somit lässt sich näherungsweise

$$U(t) = RC \frac{dU_C}{dt} \quad (18)$$

schreiben. Anders lässt sich dies als

$$U_C(t) = \int_0^t U(t') dt \quad (19)$$

schreiben. Die am Kondensator anliegende Spannung ist also proportional zu dem Integral der Generatorspannung.

3 Durchführung

3.1 Auf- und Entladevorgang

Um den Auf- und Entladevorgang zu untersuchen wird folgendes Schaltbild aufgebaut.

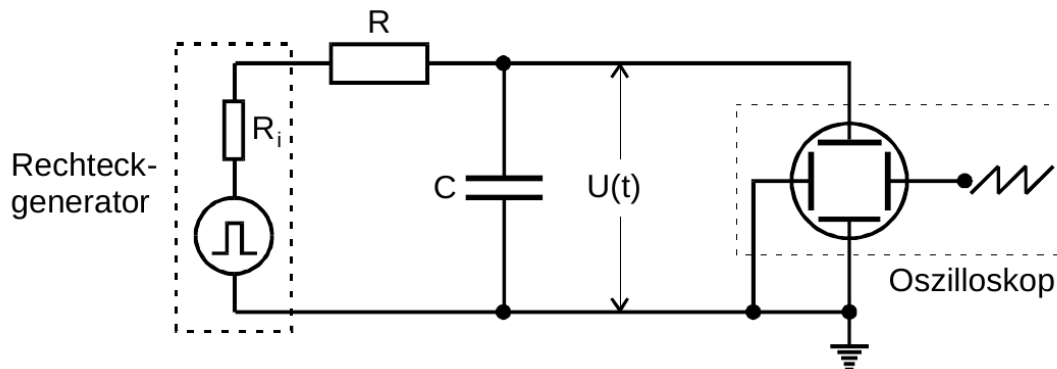


Abbildung 1: Aufbau der ersten Messung.

Dabei wird das RC-Glied an einen Rechteckgenerator angeschlossen und die resultierende Kondensatorspannung U_C mit einem Oszilloskop beobachtet, sodass sich ein stationäres Bild einstellt. Die Spannung wird zu mehreren Zeitpunkten innerhalb der Periode bei einer geeineten Frequenz abgelesen. Im Allgemeinen ist der Innenwiderstand des Generators zu beachten, welcher mit $R_i = 600 \Omega$ [1] angegeben ist. Wenn jedoch der Widerstand des RC-Glieds ausreichend hoch ist, kann ersterer vernachlässigt werden. Daher muss R ausgemessen werden, um die Ergebnisse des Versuchs beurteilen zu können.

3.2 Frequenzabhängigkeit der Amplitude

Es wird die Frequenzabhängigkeit der Amplitude der Kondensatorspannung bei Sinusförmiger Anregung des RC-Glieds untersucht. Dafür wird die Schaltung wie in Abbildung 2 gezeigt aufgebaut.

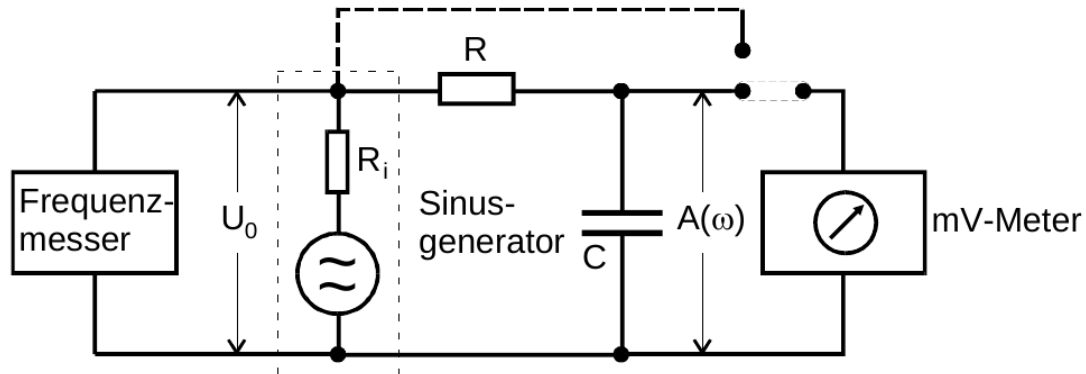


Abbildung 2: Aufbau der zweiten Messung.

Anstatt des Rechteckgenerators wird nun ein Sinusgenerator verwendet. Dieser wird im Verlauf der Messung auf verschiedene Frequenzen über mehrere Zehnerpotenzen hinweg eingestellt und die resultierende Amplitude der Kondensatorspannung gemessen. Auch hier ist der Innenwiderstand des Generators zu beachten.

3.3 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Im Gegensatz zur vorausgegangenen Messung wird nun auch die Generatorspannung gleichzeitig mit dem Oszilloskop beobachtet, sodass sich die Phasenverschiebung zwischen beiden messen lässt.

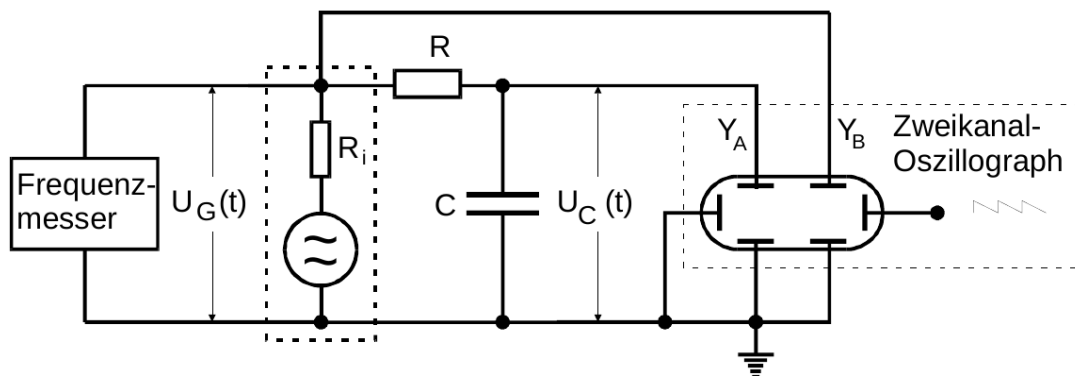


Abbildung 3: Aufbau der zweiten Messung.

Da sich der Phasenwinkel nicht direkt ablesen lässt wird einerseits der zeitliche Abstand

zwischen zwei entsprechenden Nulldurchgängen beider Spannungssignale, hier a , und zusätzlich die gesamte Periode, hier b , gemessen, woraus sich der Phasenwinkel nach

$$\phi = 2\pi \frac{a}{b} \quad (20)$$

ergibt. Auch hier wird Frequenz des Generators im Verlauf der Messreihe über mehrere Zehnerpotenzen variiert.

4 Auswertung

4.1 Bestimmung des RC-Glieds

Die Messung wird wie in der Durchführung beschrieben durchgeführt. Die so erhaltenen Messwerte befinden sich in Tabelle1 :

Tabelle 1: Kondensatorspannung bei fester Frequenz.

t/ms	U_C/V
0,2	14,00
0,4	11,10
0,6	8,64
0,8	6,72
1,0	5,36
1,2	4,08
1,4	3,20
1,6	2,48
1,8	1,92
2,0	1,60
2,2	1,28
2,4	0,96

Die Messwerte werden in der halblogarithmischen Abbildung aufgetragen. Es wird eine lineare Ausgleichsrechnung, mit Python, durchgeführt und aufgetragen. Diese hat eine Steigung von $m = (-1,03 \pm 0,14)/\text{ms}$ und einen y -Achsenabschnitt von $b = (2.75 \pm 0.19)$.

Die Steigung ist hier $\frac{1}{RC}$. Damit ist RC der Kehrwert der Steigung.

$$RC = (0,97 \pm 0,14) \text{ ms}$$

4.2 Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung

Die Messung wird wie in der Durchführung beschrieben ausgeführt. Die so erhaltenen Messwerte befinden sich in Tabelle2:

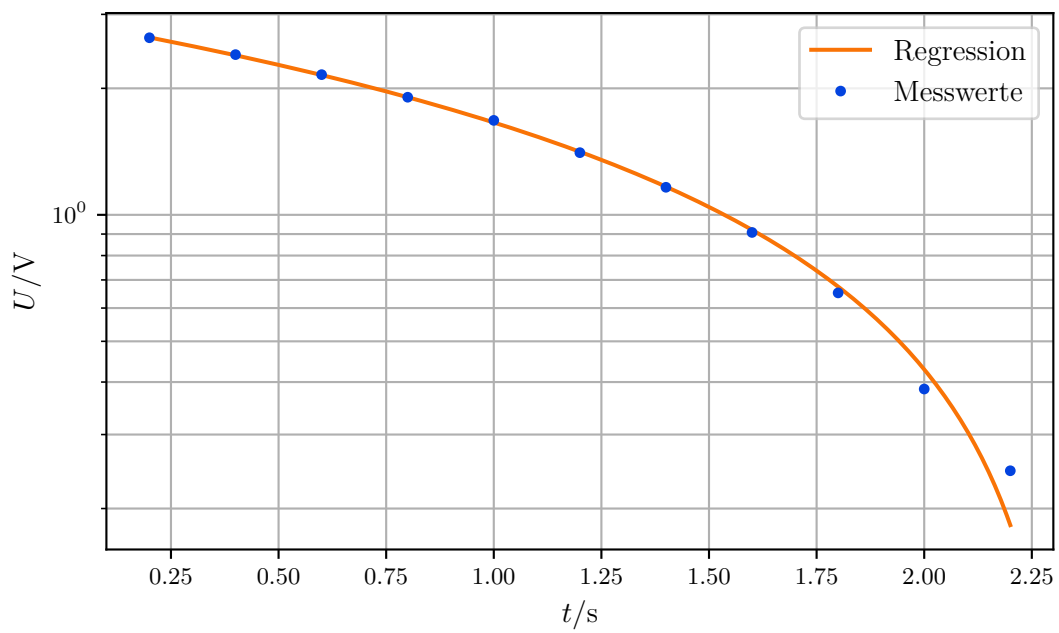


Abbildung 4: Messwerte und Ausgleichsgerade.

Tabelle 2: Kondensatorspannung bei variabler Frequenz.

f/Hz	U_C/V
10,00	12,670
12,08	12,670
14,94	12,750
17,96	12,830
20,01	12,830
30,00	12,860
50,00	12,510
80,50	11,960
100,00	11,480
200,36	9,110
300,00	7,290
500,00	4,790
799,36	3,170
1000,00	2,530
2000,00	1,290
3004,00	0,879
3500,00	0,768
5000,00	0,522
8000,00	0,327
10 000,00	0,263
20 000,00	0,131
50 000,00	0,053

Die Werte werden in Abbildung aufgetragen. Durch diese wird eine nichtlineare Ausgleichskurve, mit Gleichung (16), gezogen.

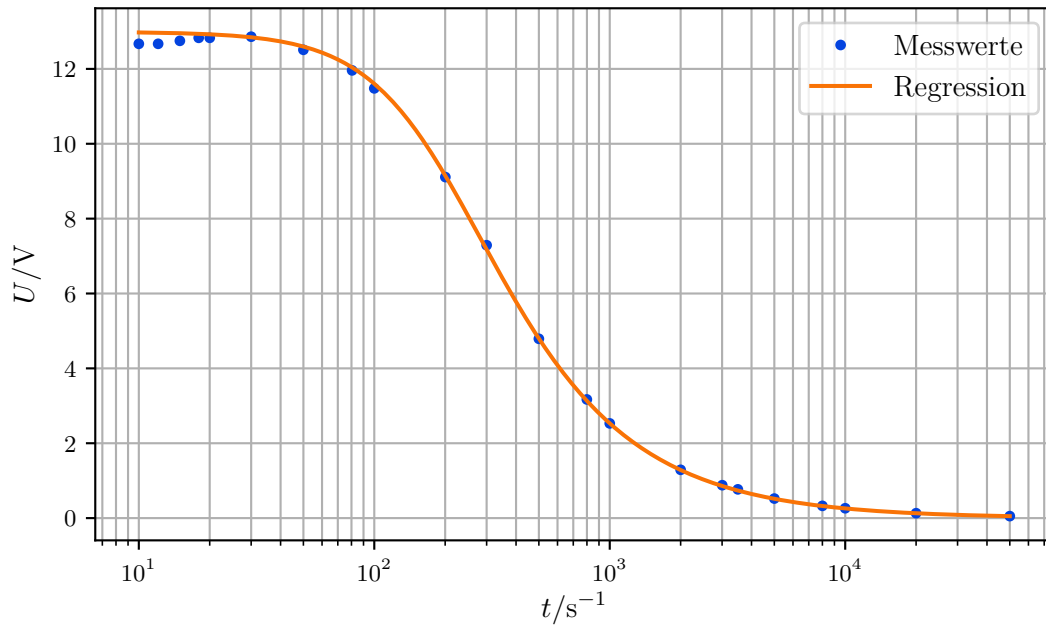


Abbildung 5: Messwerte.

4.3 Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung

Aus der Messung zu Untersuchung der Frequenzabhängigkeit der Phasenverschiebung zwischen dem Generator und der Kondensatorspannung ergeben sich die in Tabelle 3 aufgetragenen Werte. Aus den Messgrößen a und b wird nach Gleichung (20) der Phasenwinkel ϕ berechnet und ist ebenfalls angeführt.

Tabelle 3: Messwerte der Phasenverschiebung.

$a/\mu\text{s}$	$b/\mu\text{s}$	f/Hz	ϕ
800,00	47 400,00	21,09	0,106
800,00	19 980,00	50,08	0,252
760,00	10 000,00	100,00	0,478
620,00	5000,00	200,00	0,779
520,00	3330,00	300,00	0,981
376,00	2000,00	500,00	1,181
216,00	1000,00	1000,00	1,357
116,00	499,84	2000,00	1,458
68,00	285,60	3500,00	1,496
48,00	200,88	5000,00	1,501
24,00	99,84	10 000,00	1,510
12,20	50,00	20 000,00	1,533
4,88	20,01	50 000,00	1,532

In Abbildung 6 sind die Messwerte und eine Theoriekurve nach Gleichung (15) aufgetragen.

$$\phi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (21)$$

Es wird mit Python/SciPy ein Curve-Fit erstellt, der Fit-Parameter ist hierbei RC .

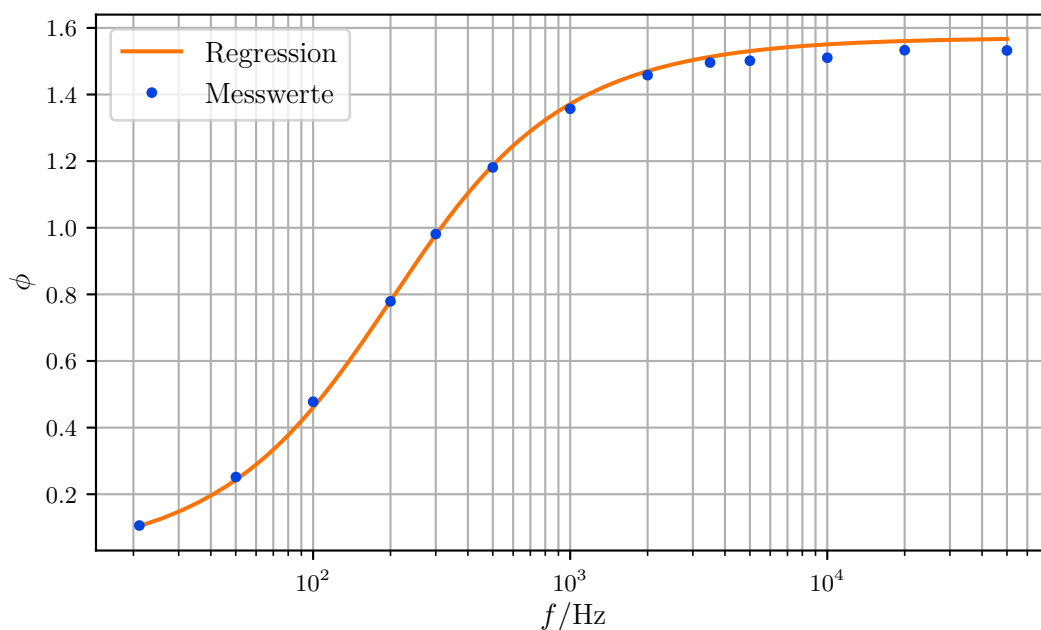


Abbildung 6: Messwerte und Curve-Fit der Phasenverschiebung.

Es ergibt sich

$$RC = (-0,801 \pm 0,010) \cdot 10^{-3} \text{ s.} \quad (22)$$

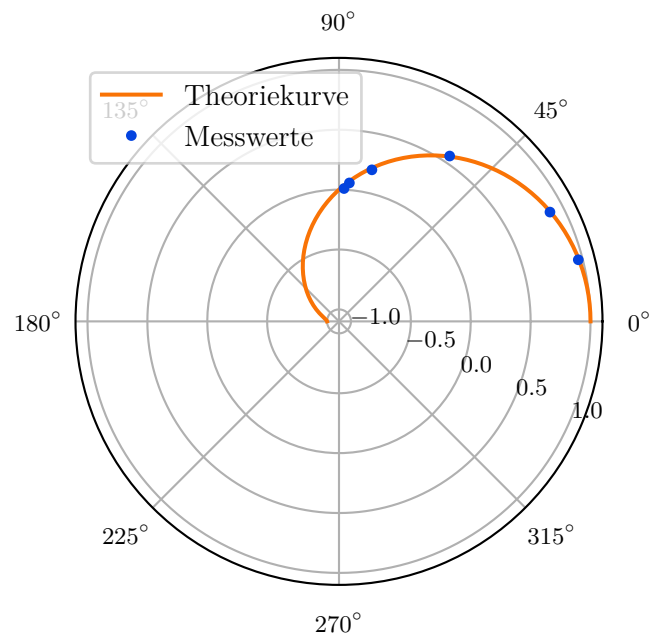
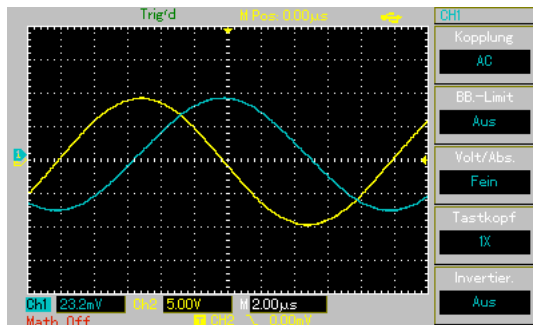
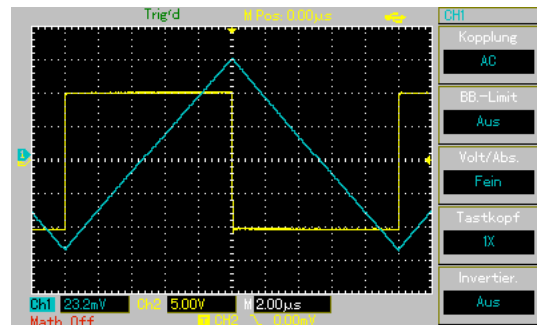


Abbildung 7: Relative Amplitude gegen Phasenverschiebung.

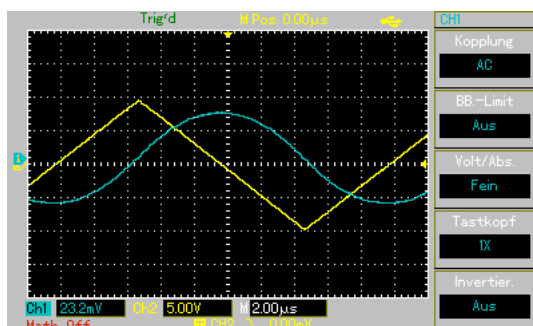
4.4 RC-Glied als Integrator



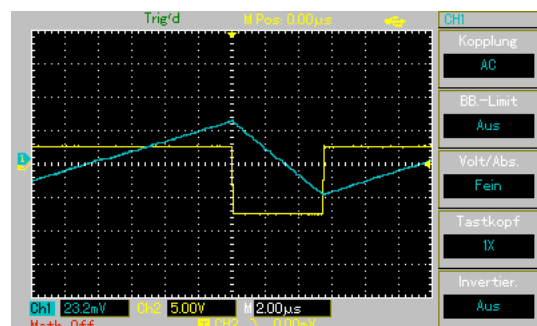
(a) .



(c) .



(b) .



(d) .

Abbildung 8: .

5 Diskussion

Literatur

- [1] Versuch 353: Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises. URL: <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf> (besucht am 08.01.2018).