

SNU Dept. of Phys.

Guide Manual for
Intermediate Physics
Experiment :
- Course I

THE 1st EDITION

Kim Sol, M. Kim, S. Hong, S. Shin, Y. Lee

Contents

Contents	i
1 들어가기에 앞서	1
1.1 실험 물리에 입문하는 분들에게	1
1.2 중급물리실험 I 강좌	4
1.3 실험 목록	6
1.4 Brief History	10
2 Single Photon Interference	13
2.1 실험 목적	14
Wave-Particle Duality	14
통계와 오차 해석, 실험 검정	16
2.2 배경 이론	20
2.3 장비 소개	36
2.4 Task List	55
TASK A : Align (기본 단계)	58
TASK B : 결맞는 회절-간섭 실험 (Task 4개)	67
TASK C : 레이저의 특성 측정 (Task 1개)	71
TASK D : PMT Preparation (Task 3개)	72
TASK E : Bulb-Detector Calibration (Task 2개)	75
TASK F : Single-Photon Limit에서의 회절-간섭 실험 (Task 4개)	77
TASK G. Single Photon Regime Test (Task 2개)	79
마무리 : 실험 후 정리 (순서 그대로 지킬 것 ; PMT 실험에서 슬릿을 교체할 때 매번 시 행해야 한다.)	81
3 Lock-In Amplifier and Hall Effect	85
3.1 실험 목적	86
Signal Preporcessing	86
Measurement of Magnetic Field	87
3.2 배경 이론	87
Filter	87
Lock-in detection	89
Hall Effect	92
Linear Senser	94
3.3 장비 소개	96
Basic AC Electronics	96
Teachspin 사 Lock-In Amp Kit	97
Hall Effect Element	98
3.4 실험 절차	100
Lock-In Amplifier 구성요소 실습	100

Lock-In Amplifier 실험	104
4 Optical Tweezers	113
4.1 실험 목적	113
4.2 배경 이론	114
Optical Tweezers의 원리	114
브라운 운동	118
4.3 실험	121
주의 사항	121
실험 기구	122
실험 과정	124
5 Chaotic Pendulum	135
5.1 실험 목적	135
5.2 배경 이론	136
Equation of Motion for Complex Pendulum	136
상 전이 이론	139
위상 공간	142
Chaotic Phase	145
5.3 장비 소개	146
역학계	147
Capstone 소프트웨어 사용법	149
5.4 실험 절차 - Task List	150
A. Potential Characterization from a Damped Pendulum	152
B. Thermodynamics and Phase Diagram	158
C. Heating and Chaotic Behavior in Driven System	167
6 Photoluminescence	177
6.1 실험 목적	177
6.2 배경 이론	178
6.3 실험	181
주의사항(반드시 숙지할 것)	181
실험기구	185
실험과정	190
6.4 Task List	197
해야할 일	197
Data Analysis and Fit	199
생각해 볼 거리	207
7 실험 시 주의 사항	211
7.1 SPI	212

7.2	LI+H	213
7.3	OT	214
7.4	CP	215
7.5	PL	216
8	데이터 처리 및 보고서 작성 가이드	219
8.1	데이터 처리	219
	오차와 불확실도	219
	회귀 분석	221
8.2	좋은 그래프와 나쁜 그래프 : Plotting Guide	225
	Bad example	226
	Better example	227
	matplotlib example	228
	평가	230
8.3	TeX과 조판	231
8.4	아티클과 레터, Supplemental Material	233
8.5	영문 보고서 작성 시 참고 사항	235
8.6	마무리하며	237
9	우수 보고서 예시	239

1.1 실험 물리에 입문하는 분들에게

1.1 실험 물리에 입문하는 분들에 게	1
1.2 중급물리실험 I 강좌	4
1.3 실험 목록	6
1.4 Brief History	10

물리학은 우주의 작동 원리를 찾아내는 학문입니다. 누가 가르쳐 준 것처럼 어딘가에 세상 만물의 법칙이 새겨져 있으면 참 좋았겠지만, 슬프게도 "누군가 알려 준" 법칙은 없습니다. 따라서 어떠한 법칙이 성립하고, 어느 범위 내에서 유효한지 가정하고 실험을 통해 입증해내야 유효한 물리 이론으로 인정받게 됩니다. 이러한 특성은 물리학의 논리 구조를 수학을 비롯한 타 학문과 상이하게 만들게 됩니다. 정량적인 검증이 요구되면서도, 이론을 세우기 위한 강력한 공리계가 있는 것이 아니므로 언제든지 의심받고 기각될 수 있으며, 심지어는 이론의 완결성을 보장할 수 없는 경우도 많습니다. 이러한 상황에서 물리학 이론을 발전시키는 데에는, 충분히 합리적인 최소한의 기본 가정(Postulates)들만으로 공리계를 구성하고, 실험을 통해 어느 범위까지 이러한 가정이 성립하는지 밝혀내야 합니다. 가령 뉴턴이나 라그랑주/해밀턴 역학의 경우 광속보다 충분히 느리고, 양자 현상이 무시될 수 있는 영역에서 잘 사용될 수 있지만 그렇지 않은 경우 다른 가정 없이 실험 결과를 설명할 수 없습니다. 이때 필요로 하는 새로운 이론은 여러 후보 중에서 괜찮아 보이는 것을 하나 고를 수 있는데, 그 때 가장 강력한 기준이 되는 것은 "이론을 입증하기 위한 실험"입니다. 기존 이론이 예측하는 모델(모형)로는 실험 결과를 정량적으로 잘 맞게 설명할 수 없는데, 새로운 이론을 가정하였을 때 여러 범위의 실험 결과를 잘 반영하는 모형을 세울 수 있다면 기존 이론을 기각하고, 새로운 이론을 뒷받침하는 실험적 근거가 확보되는 것입니다. 그럼에도 불구하고, 이는 이론이 적용되

는 범위만을 조정하는 것이기 때문에 기존 이론이 틀렸거나 잘못된 것이 아닌, "이 경우에 사용될 수 없음"을 밝히는 것입니다. 따라서 물리학의 발전은 실험 결과를 설명하기 위한, 혹은 상상에서 비롯된 이론적 예측과, 그를 기각하거나 뒷받침해줄 실험의 상호작용을 거쳐 이루어지게 됩니다.

하지만 모든 실험에는 오차가 있습니다. 이론적인 예측과 잘 맞으면 대충 몇 퍼센트 내의 오차율로 잘 맞는다고 주장할 수 있겠으나, 만약 실험 결과가 이론의 예측과 얼마나 멀어야 이론이 유의하지 않다는 것을 보일 만한 근거로 사용될 수 있을까요? 이러한 분석에 대해서는 실험이 얼마나 정확하고 정밀한지를 알려주는 척도와, 실제 이론과 실험 간의 차이의 크기를 비교해야 합니다. 실험값이 10으로 얻어졌으며 오차범위는 ± 2 인데 이론과의 편차가 5 정도라면, 이론을 이 경우에 적용하는 데에는 유의할 만한 차이가 있음을 시사합니다. 물리학에서 postulate의 수는 최소한으로 가정하는 것이 좋으므로, 이러한 기본 가정들은 대개 Universality를 가지도록 설계됩니다. 즉, 질량이 1인 물체에 적용할 때만 성립하거나, 10인 물체에 적용할 때 성립하는 이론이 아닌, 임의의 질량 m 에 대해 힘 F 를 가하면 얼마나의 가속도가 얻어지는지를 일반성을 두고 $a = F/m$ 으로 가정하는 것이 바람직합니다. 이렇게 설계된 이론이 질량이 7인 물체에 대해 실험 결과와 유의할 만한 차이가 나는 예측 결과를 준다면, 이러한 기본가정은 Universality를 가진다고 하기 힘들어질 것입니다. 그만큼, 실험을 통해 어떠한 가정을 증명해 내는 것은 어려운 일이지만, 이론을 기각해 내는 데는 강력한 칼날이 되어 줍니다. 이로 인해 잘 설계된 실험을 수행하는 것은 이론을 잘 재단하여 물리학을 발전시키고, 우주를 지배하는 원리에 대해 이해하는 데 큰 기여를 하게 됩니다. 이때, 오차가 작게 발생하도록 잘 설계된 실험 일수록 이론과 더 작은 차이도 분간해 낼 수 있으므로 더 분해능이 좋은 검정도구가 되게 됩니다. 이러한 실험은 근사적으로는 잘 맞지만, 아주 작은 차이 때문에 새로운 이론의 필요성을 뒷받침해 줄 근거가 부족할 때 아주 중요합니다. 대표적으로, 이 교재가 편집되고

있는 2022년에는 뮤온의 $g - 2$ 값과 약한 상호작용에서의 W 보존의 질량 문제가 표준 모형의 예측과 유의미하게 다른 결과를 가지는데, 기존의 이론적 이해를 기각시킬 정도로 정밀한 실험을 더 해내기 위해 많은 연구가 이루어지고 있습니다. 이처럼 실험을 잘 설계해 내는 것은 이론 물리학자들의 상상을 실제 학문으로 발전시키는 데 아주 중요한 핵심 작업이 됩니다.

따라서, 오차를 줄이기 위해, 강력한 역량을 가질 수 있도록 실험을 설계하고, 물리학의 여러 분야 전반에 걸쳐 유용하게 사용되는 각종 테크닉을 익혀 실험을 수행하고, 데이터를 수집하기 위한 전기적, 기계적 장비에 대해 심도 있는 이해를 가지며, 정량적인 오차 분석 및 이론과의 회귀 분석을 거쳐, 학계에 양식을 갖춰 보고하는 과정이 실험을 통해 물리학이 발전해 나가는 과정입니다. 이런 과정을 위해서는, 먼저 이론적인 상황을 잘 이해하고 있어야 하며, 실험 장비 및 샘플에 대한 깊은 이해를 토대로 어느 정도 크기와 규모의 물리계를 준비해서, 어떤 조건 하에 무엇을 재서 어떤 분석을 할지 잘 설계해 내야 강력한 실험 결과를 얻어낼 수 있습니다. 물리학 전공의 학부 과정에서 물리 실험을 체계적으로 배워 볼 수 있는 기회가 많지 않은데, 중급물리실험 1 강좌의 경우 이러한 부분을 염두에 두고 다음과 같은 테스크를 수행할 수 있도록 설계되었습니다.

- ▶ 광학적, 전기적 측정에 의한 실험 자료 수집에 사용되는 테크닉
- ▶ 민감한 실험 장비를 교정하고 오차를 줄이는 데 필요한 실험 설계 및 분석 기법 연습
- ▶ 물리학 전반에 걸쳐 역사적으로 중요한 의미를 가지는 실험들의 재현
- ▶ 오차 분석 및 정량적인 회귀 분석을 통해 이론과 실험값의 비교
- ▶ 기존 이론과 새로운 이론이 데이터에 잘 부합하는지 비교하기 위한 통계적인 검정 연습
- ▶ One-column article, 혹은 Two-column letter 양식의 조판된 보고서 작성을 통한 실험 결과의 보고 연습

- ▶ 실험 결과의 경향성 및 이론과의 편차 등을 잘 보여줄 수 있는
그래프 플로팅 등 visualize 스킬의 연습

한 학기 동안 수행하기에 어렵고 힘든 부분들이 많겠지만, 이 교재에서 제공하는 course material을 참고하여, 물리학 발전에 실험이 기여하는 lifecycle을 경험해 볼 수 있는 기회가 되기를 바랍니다.

1.2 중급물리실험 I 강좌

중급물리실험 I 강좌는 서울대학교 물리천문학부 3학년 전공 필수 교과목으로, 물리학 학부과정에서 처음으로 접하게 되는 필수 이수 실험강좌입니다. 이에 따라 본 강좌의 목적은 (1) 물리학을 구성하는 여러 가지 분야를 접해 보고, (2) 중요한 역사적 의미를 가지는 물리학 실험을 재현해 보며, (3) 주먹구구식으로 넘어갔던 일반물리학 실험에서의 실험설계 및 데이터 처리 방법을 체계화된 정량적 방법으로 바꾸어 연습할 수 있도록 하는 것에 있습니다. 2021년부터 다양한 물리학 실험을 체험해 볼 수 있는 목적으로 2학년 2학기의 현대물리학실험이 신설되었는데, 이에 따라 중급물리실험에서는 데이터 처리 및 회귀분석을 적극적으로 사용할 수 있도록 실험 태스크가 설계되고 제시되었습니다. 본 교재에서는 중급물리실험 I 강좌에서 사용될 5가지 실험을 진행하는 방법 및 실험 시 주의 사항, 실험 자료를 분석하기 위한 단계별 태스크 등을 다루고 있으며, 각 실험에 대한 디테일 대신 여러 분야의 실험 전반에 걸친 데이터 분석 및 처리 기법을 소개하기 위해 별도의 교본인 **Error Analysis for Experimental Physicists (2021)**를 함께 제공하고 있습니다.

강좌의 평가 요소는 매 학기 달라질 수 있으나, 크게 다음의 네 가지로 구분됩니다.

1. 출석 및 태도
2. 퀴즈
3. 보고서
4. 기말 발표

2022학년도의 운영 방침을 예시로 들면, 매 실험이 시작하는 날의 첫 1시간 동안을 의무 출결 시간으로 정하였습니다. 이 시간 동안 자리를 지켜야 출석을 인정해 주었는데, 조원 모두가 모였을 때 실험을 같이 숙지하고, 같이 시작하도록 독려하기 위함이었습니다. 시작 시간 후 약 10분 후, 10분간의 퀴즈를 시행하였는데, 이는 실험 시작 전 매뉴얼 및 교본을 충실히 숙지하여 실험 장비를 안전하게 사용할 준비가 되었는지 확인하기 위한 차원이었습니다. 25분이 지나면 각 처리, 1시간이 지나도 출석하지 않은 경우 결석처리하였습니다. 자세한 출결 관리 사항은 매 학기 강좌 방침에 따라 달라질 수 있으나, 대개 3~4인이 한 팀을 이루어 날짜를 맞춰 함께 출석 후 실험을 진행하도록 운영되었습니다.

보고서의 경우, one-column article 내지는 two-column article의 양식을 갖추어 실험 결과를 보고하도록 하였습니다. 학술적인 조판을 위해 *LATEX* 연습 및 사용을 적극적으로 권장하였으나, 강제 하지는 않았습니다. 만약 *TeX*을 사용하여 조판하지 않은 경우에도, 잘 갖춰진 양식과 퀄리티를 요구하여 pdf 파일로 제출할 수 있도록 지도하였습니다. 보고서의 형식은 엄밀하게 채점되지 않았으나, 보고서의 퀄리티는 정성적으로 평가되었습니다. 매뉴얼의 태스크를 충실히 수행하였으나 약간의 실수가 있거나 완성도가 약간 부족한 경우 기본 점수를 부여하였고, 실험적으로 굉장히 세심한 노력을 기울였거나, 아주 가시성이 좋은 플롯을 제시하였거나, 이론 개발 및 통계적 분석을 철저히 해서 실험을 더 잘 반영할 수 있는 보고서를 제시한 경우에는 추가 점수를 주어, 다른 부분에서의 감점 및 실수를 만회할 기회를 주었습니다. 그 결과 2021년 및 2022년에 완성도가 굉장히 높은 보고서들을 받을 수 있었으며, 참고를 위해 이들을 첨부

하였는데 이후의 섹션에서 확인할 수 있습니다.

이외에도 실험의 참여율을 평가하기 위해 Log Book 작성이 강제되었고, 언제 누가 어떤 실험을 수행하였는지, 소모품이나 실험 기자재 상에 부족함이나 문제가 있는지 등을 성실히 기입하여 이어 받는 조의 불편이 없도록 운영하였습니다. 또한 실험의 raw data 및 detailed 이론 전개, 실험 자료의 처리 과정 등을 별도의 SM (Supplementary/Supplemental Material)을 통해 제출할 수 있도록 권장하여, 퀄리티를 평가하지는 않았으나 메인 보고서 작성의 분량을 조절해, 필수적인 논리 전개가 더 잘 보일 수 있도록 가독성을 높이기 위한 차원으로 권장되었습니다.

기말 발표의 경우, 한 학기 동안 수행한 실험들을 정리하여 발표해 보는 시간을 가지도록 했는데, 강좌 운영의 세부방침에 따라 추가실험을 요구하기도, 혹은 기존에 수행한 매뉴얼대로의 실험을 설명하는 것을 요구하기도 하였습니다. 후자의 경우에도 매뉴얼에서 제공한 태스크가 풍성하여, 조별로 큰 편차를 가지고 서로의 경험을 공유하는 데 도움이 되었습니다. 실험에서 배운 테크닉을 활용한 추가실험을 제시하거나, 개선 방안을 제시하는 것도 권장되었습니다.

1.3 실험 목록

중급물리실험 I 강좌에서 다루게 되는 실험은 다음 다섯 가지 실험 중 상황에 맞게 4가지를 선택하여 이루어집니다. 비슷한 광학 실험임을 고려하여, OT와 PL 중 하나를 택일하여 강좌를 진행할 수 있을 것입니다. 2021학년도에는 SPI, LI+H, OT, PL 실험을 진행하였으며 2022학년도에는 SPI, LI+H, OT, CP 실험을 진행하였습니다.

실험의 범위는 물리학에서 다루어지는 여러 연구 분야를 접해볼 수 있고, 데이터 획득 및 처리에 대한 경험과, 그를 통해 underlying physics를 찾아내고 검정할 수 있게 하는 데 목적을 두고 있습니다. 다음은 본 교재에서 다루는 실험 목록입니다.

- ▶ SPI (Single Photon Interference)
- ▶ LI+H (Lock in Amplifier and Hall Effect)
- ▶ OT (Optical Tweezers)
- ▶ CP (Chaotic Pendulum)
- ▶ PL (Photoluminescence)

Single Photon Interference 실험은 결맞는 레이저 광원과, 아주 약한 전구를 이용하여 간섭 및 회절 무늬를 만들어 보는 실험입니다. 이론은 단순하지만, 실험과 이론식이 어떻게 달라지는지 알아볼 수 있으며, 틀어지기 쉬운 광학 장비들을 정밀하게 정렬(align)하는 연습을 하게 됩니다. 이러한 과정 속에서 데이터를 직접 뽑아 보고, 회귀 분석을 통해 실험 조건에 따라 어떤 현상이 영향을 주고, 어떤 현상이 무시될 수 있는지 배울 수 있습니다. 궁극적으로는, 광자 하나도 간섭무늬를 만들 수 있음을 실험적으로 알아내기 위한 통계적 처리 방법과 실험 설계를 경험해 보는 것을 목적으로 합니다. 실제 실험에서 얻어진 간섭무늬는 이론식과 잘 맞지 않는데, 이러한 요인에는 백그라운드 문제, 슬릿의 동질성, 가리개 (Blocker)의 위치 차이 등이 영향을 줍니다. 기하광학과 파동광학 사이에서, 슬릿의 위치를 조절하며 가리다 보면 새로운 현상도 관측할 수 있습니다. 여러가지 회귀기법을 연습해 보고, 물리학에서 중요한 의미를 가지는 입자-파동 이중성에 대한 개념을 실험적으로 이해하는 기회가 되기를 바랍니다.

Lock In Amplifier는 특정 주파수의 신호를 걸러내는 Setup입니다. 이는 알고 있는 신호와 믹싱한 후 저역통과 필터를 통과시키는

구성으로 이루어져 있는데, 최적의 검출을 위해 위상차나 이득(Gain) 등을 조절할 수 있도록 설계된 Kit를 사용할 수 있습니다. 이 실험에서는 Lock-In Amplifier 키트를 구성하는 여러 일렉트로닉스들의 특성 및 한계를 측정하고, 실험에 사용할 수 있는 구간을 찾아 실제 신호를 잡음으로부터 걸러내는 연습을 하게 됩니다. 그 결과, 고체 물리에서 굉장히 중요한 의미를 가지는 **Hall 효과**를 GaAs 시료를 이용해 Lock-In 증폭기와 함께 사용함으로서 직접 관측해 보고, 알고 있는 자기장의 이론식과 비교해 보는 태스크를 수행할 수 있습니다. 예를 들어, 자석을 점 쌍극자로 가정하는 것과 직육면체의 균일하게 자화된 자성체로 가정하는 것은 약간 다른 회귀 모델을 주는데, 이 둘이 분간할 수 있는 차이를 주는지 실험을 통해 비교해볼 수 있습니다. 이에 따라 락인 검출 및 오차 처리를 연습하여, 굉장히 미약한 신호를 랩에 산재하는 전원/접지 및 라디오파 방사 등의 잡음으로부터 걸러내 정량적으로 측정해 보는 실험을 하게 됩니다.

광집게 (Optical Tweezer)는 초점 맷沁 Gaussian 레이저 빔을 이용하여 유전체 물체를 붙잡는 장치를 실험합니다. 이러한 원리는 양자 산란을 풀어서 빛과 입자의 상호작용이 입자에 전달하는 평균 충격량을 구할 수도 있으며, 전자기파 이론을 사용하여 에너지가 최소가 되는 위치를 찾아 Trapping을 보일 수도 있습니다. 이외에, 기하 광학 영역에서도 굴절되는 방향을 고려하여 빛의 세기가 최대가 되는 지점으로 Trapping force를 받는다는 것을 알 수 있습니다. Optical Tweezer가 작동할 수 있는 영역은 파장보다 약간 큰 물체에서부터, 원자 스케일까지 내려가는데, 이러한 광범위한 스케일 영역은 기하 광학에서부터 파동광학, 양자 광학의 영역에 걸쳐서까지 널리 쓰일 수 있는 테크닉임을 의미합니다. 따라서 큐벳을 붙잡는 양자 컴퓨터 및 세포의 이동 등에 사용될 수 있어, 미시적인 세상을 Manipulate 하는 혁신적인 툴로서 사용되고 있습니다. (2018년 노벨 물리학상, Ashkin) 이 실험에서는 658nm 파장의 붉은 레이저광을 광학기기 및 대물렌즈를 이용하여 샘플면에 집광시키고, Optical Tweezing이 여러 가지 시료에 대해 적용됨을 확인합니다. 그 결과로 만진 샘플의

브라운 운동을 분석하는 것을 통해 이미징 셋업을 통한 데이터 추출 및 통계 처리에 대한 연습을 할 수 있습니다.

Chaotic Pendulum은 비선형 진자를 이용해 여러 가지 개형의 퍼텐셜 속에서 움직이는 역학계의 Time Evolution 및 Phase를 확인하는 실험입니다. 퍼텐셜 우물이 두 개 있고, 그 상대적인 높이를 바꿀 수 있을 때 한쪽 우물은 True Ground State가 되고, 한쪽 우물은 Metastable State가 됩니다. 이러한 상황에서, 초기에 아주 큰 에너지를 가지고 진자가 운동을 시작하면 양쪽 우물을 둘 다 지나며 간혀 있는 Doubly Trapped 상을 가지게 됩니다. 이때 외부 요인 혹은 조절할 수 있는 Knob을 통해 감쇠를 주게 되면 시간에 따라 계의 에너지가 낮아지며, Ground State / Metastable State로 빠지게 되는데, 이때 빠지는 비율 (Selectivity)는 위상 공간 상에서의 면적, 즉 "역학적 엔트로피"에 의존하는 값을 가지게 됩니다. 이러한 특성 덕분에, 식어가는 비선형 진자는 열역학적 상사를 가지게 되는데, 역학적 에너지와, 위상공간을 그려 정의되는 역학적 엔트로피를 이용해 계의 가짜 온도를 정의할 수 있습니다. 그 결과, 온도에 따른 에너지, 즉 비열을 분석할 수 있고 이런저런 재미있는 현상을 볼 수 있습니다. 상전이의 종류와 전이점 근처에서의 여러 중요한 현상들을 열역학계가 아닌 시스템에서 체험해 볼 수 있고, Landau Theory와 어떻게 다른지 비교하면서 복잡한 물리계의 상 분석을 하는 방법을 체험해 볼 수 있습니다. 이외에도 감쇠하는 진자에서 마찰과 저항의 요인을 걷어내고 퍼텐셜 개형을 얻는 방법, 여러 요인의 마찰이 섞인 것을 실험식을 통해 Characterize하는 방법을 통해 이러한 분석을 위한 데이터 전처리 기법도 익히게 됩니다. 더 나아가, 강제진동이 있는 영역에서는 한쪽 우물에 빠졌던 계가 다른 계로 건너갈 수 있는 기회를 얻게 되는데, 이런 경우 Chaotic한 거동이 나타날 수 있습니다. 이러한 상태를 분석해보는 경험도 하게 됩니다. 배울 것이 많은 실험이지만, 태스크가 과도할 수 있으므로 나이도 조절의 목적으로 해당 매뉴얼에는 필수 태스크 및 선택 태스크를 구분해 두었습니다.

Photoluminescence는 빛을 받은 시료가 들뜬 상태의 전자 배치로 올라갔다가 빠르게 낮은 에너지 상태로 떨어지면서 빛을 방출하는 것을 의미합니다. 이는 Triplet stability 혹은 dipole-forbidden transition 등으로 매우 안정한 준안정상태가 존재해 오랜 시간동안 천천히 빛을 발하는 인광과 구분되는 시간 간격을 가지고 있습니다. 이러한 현상은 빛에 의한 펌핑과, 이어지는 Metastable state에서의 광자 방출 등으로 기술될 수 있습니다. 이 실험에서는 루비 및 로다민 염료 시료를 이용하여 532nm 파장의 초록색 레이저를 맞은 시료가 어떠한 색깔의 빛을 내는지 분광 분석합니다. 또한 시료를 진공 하에서 극저온 영역으로 냉각함으로서 PL 스펙트럼이 어떻게 변화하는지를 보고 중요한 고체물리 이론들이 잘 맞는지 비교해 볼 수 있습니다. Debye 이론과 Stokes Sideband에 대해 알고 있으면 아주 좋습니다. 이러한 과정에서 극저온 영역을 접근하기 위한 실험적 테크닉으로서 진공 apparatus 및 헬륨냉동기 기반의 cryostat을 사용하는 것을 연습해 보게 됩니다.

1.4 Brief History

매뉴얼은 2021년 이전까지 전해져 오던 가이드 매뉴얼들을 취합하여 2021년 담당조교인 김솔, 이연재, 신승환 및 2022년 담당조교인 김솔, 김명현, 김태훈, 박재형, 홍승주 의 수업 운영에서 축적된 내용들을 반영하여 정리한 것입니다. 이전 매뉴얼들의 저자분들께 감사드리며, 각 섹션별로 거쳐간 조교들 칸에 affiliation을 추가하였습니다. Optical Tweezer 및 Chaotic Pendulum은 각각 2021년, 2022년에 새로 도입된 실험입니다. 이에 따라 각각 신승환 및 김솔 조교가 해당 매뉴얼의 초판을 편집하였습니다. 새로 도입된 실험들이므로 난이도 밸런스를 맞추는 과정에서, Optical Tweezer의 경우 기존 실험들보다 약간 쉽게, Chaotic Pendulum의 경우 약간 어렵게 기획되었습니다.

2020년까지는 Hall 효과를 실험하기 위해 직접 반도체 Wafer에 Contact를 만드는 실험이 존재했었으나, 과도한 로드 및 데이터 처리 측면에서 정량적으로 배워갈 점이 적다는 면에서 배제되고 락인 실험과 통합되었습니다. 이처럼 담당 교수님의 추진방향에 따라 빠지고 들어오는 실험들이 있는데, 본 교본은 **실험 테크닉의 학습을 위해 과도한 어려움이 필요한 설계보다는 오차 및 통계처리를 배우기 좋고, 데이터 분석을 통해 재미있는 물리 현상을 많이 볼 수 있는 설계를** 지향하며 해당 관점에서 유의미한 교육적 가치가 있을 실험들을 선정, 체계화하여 정리한 것입니다. 이러한 과정에서 난이도가 올라가거나 내려간 실험들이 있는데, 너무 어려운 태스크가 있는 실험들의 경우 필수적으로 모든 태스크를 다 수행하지 않더라도 좋은 성적을 받을 수 있도록 채점 및 운영하는 것이 좋으므로 해당 권장사항에 대한 내용을 매뉴얼들에 포함시켰습니다. 다만, 2021 및 2022년의 경우 매뉴얼에 있는 태스크를 능가하는 보고서를 쓴 비율이 전체 수강생의 약 10% 정도, 약간의 실수는 있지만 매뉴얼의 태스크를 다 수행한 비율이 50~70% 정도, 포기하고 수강취소한 학생들이 5명 정도 있었습니다. 이러한 점을 고려하여, 풍성한 material을 제공하되 변별이 가능한 선에서, 너무 부담을 늘리지 않게 강좌의 채점 기준이 잡혀서 운영되면 좋겠습니다.

2

Single Photon Interference

거쳐간 조교들

예전 매뉴얼

김대원, 강명균 작성

2012. 03. 이무송 개정

2017. 03. 신지원 개정

2019. 03. 김경호 개정

2018. 03. 김동욱 개정 - PCIT 고장 시 매뉴얼

2019. 04. 김광탁 개정 - PCIT 고장 시 매뉴얼

현재 매뉴얼

2021. 02. 김솔 재작성

2022. 06. 김솔 개정

이 교본에서 요구되는 통계 처리 및 회귀 분석을 위해 함께 제공되는 교재인 Error Analysis for Experimental Physicists를 참고할 필요가 있다.

* 일부 문장은 예전 매뉴얼 조교들의 텍스트 및 이미지를 그대로 가져온 것이 있으며 거쳐간 조교들에 여러 버전의 매뉴얼을 편집해 준 전 조교들을 명시하였음. 직접 참고한 버전으로는 2019년 실험에 사용된 PCIT 정상 / PCIT 고장 시 매뉴얼 2본을 참고하였음. 과거

2.1 실험 목적	14
Wave-Particle Duality . . .	14
통계와 오차 해석, 실험 검정	16
2.2 배경 이론	20
2.3 장비 소개	36
2.4 Task List	55
TASK A : Align (기본 단계)	58
TASK B : 결맞는 회절-간섭 실험 (Task 4개)	67
TASK C : 레이저의 특성 측정 (Task 1개)	71
TASK D : PMT Preparation (Task 3개)	72
TASK E : Bulb-Detector Calibration (Task 2개)	75
TASK F : Single-Photon Limit에서의 회절-간섭 실험 (Task 4개)	77
TASK G. Single Photon Regime Test (Task 2개) . . .	79
마무리: 실험 후 정리 (순서 그대로 지킬 것; PMT 실험에서 슬릿을 교체할 때 매번 시 행해야 한다.)	81

매뉴얼 및 추가적인 정보에 대한 문의는 kspc@snu.ac.kr로 문의 바람. Apparatus의 detailed description은 Teachspin 사의 영문 매뉴얼을 참고하면 되나, 본 교본만으로 self-consistent하게 사용될 수 있도록 내용을 정리하였음.

2.1 실험 목적

Wave-Particle Duality

양자역학이 처음 만들어질 때, 그리고 양자역학을 처음 배우는 사람들에게 가장 먼저 비고전적인 거동을 가르쳐 주는 현상은 파동-입자 이중성이다. 역사적으로 빛의 이중성에 대한 이해를 찾는 것이 양자역학의 태동기에 매우 중요한 역할을 하였음을 잘 알려진 사실이며, 이후 전자의 파동성을 연구하면서 물질파 이론 및 양자역학의 지배방정식을 찾는 시작이 되었다. 전자의 파동성은 띠 구조 및 고체에 대한 이론을 발전시키는 근간이 되었으며, 이후 페르미온과 보존의 양자통계 거동이 다르게 나타남을 이해하면서 반도체 및 초전도체 등 여러 응집물질의 현상을 이해하고 제어할 수 있게 되면서 인류 문명은 새로운 시대를 맞이하게 되었다. 응집물질을 기술하는 데 널리 사용되는 2차양자화 기법은 파동을 양자화하여 입자성을 정량적으로 볼 수 있게 해 주었는데, 이를 통해 다체 입자계의 물리학을 이해하는 도구로서 입자물리학 및 응집물리(고체물리) 분야를 발전시키는 근간이 되었다. 이처럼 세상을 이루는 물질인 페르미온과, 그들 사이의 상호작용인 보존, 그리고 기본입자와 상호작용이 섞여 만들어진 여러 컴포지트 보존/페르미온들이 얹혀 만들어낸 우주의 작동 기작을 이해하기 위해서는 기본 입자들의 양자장을 다루는 이론이 매우 중요해진다. 이러한 이해는 표준 모형을 만들고 보정하기 위한 기본 언어가 되고 있다. 이처럼 우주를 이루는 기본입자들과 그

상호작용을 밝혀내는 게이지 장 이론으로부터, 양자 파동 현상을 보이는 다체 입자계를 기술하기까지 물리학의 분야 전반에서 입자와 파동 사이의 현상을 다루기 위해 양자역학 및 양자 장 이론이 널리 사용된다. 이후 물질의 파동성을 극적으로 보여주는 사례로서, 매우 차가운 중성원자를 이용한 보즈-아인슈타인 응축이 관측됨에 따라 기본입자보다 큰 물질들도 입자-파동 이중성 및 양자 현상을 보임이 확인되었다. 한편 최근에는 양자 광학이 발달하면서, 양자 얹힘을 연구하기 위한 도구로서 단일 광자(Single Photon)를 발생시키고 그를 사용하는 연구들이 널리 진행되고 있다. 이처럼 오늘날까지도 빛, 혹은 물질의 파동-입자 이중성을 이해하는 것은 물리 연구의 전 영역에서 중요한 의미를 가지고 있다.

이 실험에서는 유명한 이중슬릿 간섭 실험을 재현하되, 광원의 세기를 극히 낮추어 거의 개별 광자 수준의 관측을 할 수 있다. 이로써 빛의 이중성이라는 패러독스에 바로 직면할 수 있게 된다. 파장을 가진 전자기파의 특성과, 각자 에너지를 갖고 개별적으로 날아오는 광자의 특성은 서로 크게 다를 수밖에 없는데, 과연 이중슬릿을 지나게 하는 경우 어떤 결과를 얻게 될 것인가? 이 실험을 통해 특정 시점에 실험장비 내에 있을 광자가 1개 미만인 영역에서 어떠한 간섭 무늬가 얻어지는지 확인해보고, 이를 통해 파동-입자 이중성 및 양자 장 현상에 대한 이해를 깊게 할 수 있을 것이다.

만약 빛의 세기를 아주 줄였는데도 간섭무늬가 얻어진다면, 광자 하나가 두 슬릿을 동시에 통과한다는 데 대한 충분한 근거가 되는가? 광자는 보존인데, 보존의 수밀도를 아주 작게 줄이면 어떤 현상이 일어나는가? 양자광학을 좀 더 공부해 보면 Fock state와 Coherent state의 차이를 알아볼 수 있다. 이 실험을 통해 얻은 조건은 어디에 해당하는가? 진짜 싱글포톤을 만들어내려면 어떤 실험을 해야 할 것인가? 이러한 고민들에 대한 답을 찾아 보고, 실험을 설계해 보며 가능한 여러 가지 이론들을 실험과 비교해서 날카로운 결론을 얻어보기를 바란다.

통계와 오차 해석, 실험 검정

물리학실험 1, 2 강좌를 수강할 때, 지구의 중력가속도 등과 같은 기초적인 물리량을 측정할 경우, 알려진 값과 전혀 다른 값을 얻은 경험이 있을 것이다. 이는 실험계가 가진 불확실성을 최소화하여 참값에 가까운 측정치를 얻기 위한 실험 설계가 충분히 되지 않았기 때문이다. 그러나 본 실험은 빛의 입자성과 파동성을 판가름하는, 이중성을 논하는 중요한 검정이 필요하므로 정밀하고 정확한 실험이 필요하다. 이에 실험 오차 해석과, 그를 기반으로 한 실험 검정의 중요성을 알 수 있다.

실험 검정의 예시는 아르키메데스(Archimedes) 시기로 올라간다. 금 세공업자가 순금 왕관에 은을 혼입해 원가를 줄이려 했다는 혐의를 입었다는 스토리는 과학사를 공부한 모두가 한 번쯤 들어보았을 것이다. 그 유명한 Eureka가 역사에 남게 된 이 야기이기도 한 유명한 일화가 바로 인류 문명사에서의 실험 검정이 시작된 출발점이다. 은은 금보다 밀도가 낮으므로, 은을 섞으면 합금의 밀도가 낮아진다. (합금의 쌍임구조 및 Intermetallic Compound의 형성에 따라 그렇지 않은 경우도 있으나, 비체적이 선형적으로 더해진다고 가정하면 은을 섞으면 밀도가 낮아진다.) 이에 따라, 물에 담구어 잠긴 부피를 이용, 왕관의 밀도를 측정하면 은이 얼마나 들어있는지 역산할 수 있다.

이론적으로는 완벽한 스토리이지만, 실제 실험 – 특히 고대 그리스 시기에서는 – 아주 불확실할 수밖에 없는 결과를 얻을 것이다. 넘친 물이 모두 모이지 않을 가능성, 물이 증발할 가능성, 물의 표면장력, 왕관을 넣을 때 튀긴 물, 질량측정의 비선형성 (그 시절 저울의 측정 불확실도를 감안한다면!) 등을 고려한다면, 실험 결과로 얻어지는 밀도는 아주 부정밀한 값일 것이다. 이를 오차 막대로 표현하여, 유의 수준 1σ 의 불확실도 범위를 잡아 준다면, 실제 왕관의 밀도가

어느 정도 범위 안에 들어온다고 주장했을 때, 그 주장이 틀릴 확률(유의수준 ; Significance Level)이 약 32%가 되는 범위임을 의미한다. 이 범위를 측정치의 신뢰구간이라 하며, 이를 나타낸 물리량을 불확실도라 한다.

금덩어리와 왕관을 같은 측정 방법으로 밀도를 측정했다고 하자. 이 때, 밀도의 신뢰구간 (Confidence Interval)^{o)}이 겹친다면, 왕관과 금의 밀도는 같을 수도, 다를 수도 있는 것이다! 이럴 경우에는 어떤 결론을 내려야 하는가? 두 측정치가 “충분히 멀면” 두 물질은 다른 물질이라 할 수 있는데, 그 크기의 기준은 무엇을 사용해야 하는가? 이 질문에 대한 답이 실험 검정과 오차 해석학으로부터 나온다. 자세한 불확실도 추산 방법과 실험 검정 방법은 함께 지금되는 교본 Error Analysis for Experimental Physicists를 참고하여 계산하여라.

간단한 답은, 우리가 내린 결론이 "틀릴 확률을 얼마만큼 허용할 것인가"에 따라 주장의 세기 (신빙성)가 달라진다는 것이다. 부정밀한 실험을 해도, 틀릴 확률을 아주 많이 허용한다면 두 물체의 밀도가 다르다 주장할 수 있을 것이며, 정밀한 실험을 한다면 틀릴 확률을 아주 조금만 허용한다고 해도 두 물체의 밀도가 다르다고 주장 할 수 있을 것이다. 이는 통계학 시간에 배웠을 가설 검정과 그 원리를 같이 한다.(다만 실제 실험계는 정규분포보다는 t-분포에 가깝게 거동한다.) 귀무가설을 두 물체의 밀도가 같다고 선언했을 때, 이를 기각하기 위한 충분히 강력한 실험적 근거가 있다면 (두 물체의 측정된 밀도차이가 실험계의 불확실도보다 충분히 크다면) 대립가설인 두 물체의 밀도가 다르다 (양측검정) 가 채택된다. 대소 비교를 원할 경우, 기준을 바꾸어 단측검정 (금이 왕관보다 밀도가 크다) 대립가설을 채택할 수도 있다. 이와 같이 실험계의 불확실성을 통제를 통해 얻어내는 것은, 실험을 통해 어떠한 가설을 채택하거나, 기각하기 위한 강한 근거를 얻는 발판이 된다. 가령, 빛이 파동과 같은 간섭무늬를 나타내었는데도 빛이 입자임을 주장하기 위해서는, 단위 시간당 지나가는 광자의 수가 실험계 불확실성을 고려하더라도 두 개

이상이 될 수 없음을 실험 검정을 통해 충분한 강도로 주장할 근거가 있어야 한다는 것이다. 유의 수준의 선정은 실험자마다, 실험마다, 연구 대상마다 제각기 다르지만, 본 실험에서는 **불확실도 산출에 1σ** 의 **유의 수준을 사용하도록 한다. 또한, p-value를 통한 실험 검정 시의 검정기준은 $p = 0.05$ 로 한다.** (이는 유의확률 2시그마에 해당하며, 주장한 결과가 틀릴 확률이 5%임을 의미한다.)

빛의 입자와 파동성

양자역학의 태동 이전, 뉴턴의 프리즘 분광 실험, 영의 이중 슬릿 실험, 프레넬 및 맥스웰의 전자기파 이론 등, 광학의 발전 과정 및 전자기학과 합쳐지는 과정에서 빛이 전자기 파동임이 널리 받아들여 졌었다. 그러나 현대 물리학의 등장과 함께 아인슈타인의 광전 효과, 흑체 복사의 스펙트럼 분포, 콤프턴 산란 등의 실험적 근거가 빛의 입자성을 보여주었다. 오늘날, 양자역학은 물질도 양자 파동방정식을 따라 물질파 파동 현상을 가질 수 있으며, 파동도 quasiparticle excitation이나 field quantization 등을 통해 입자처럼 기술될 수 있음이 양자장 이론에 의해 널리 사용되어 왔다. 즉 입자와 파동은 본질적으로 같은 것을 서로 다른 물리적 언어로 기술한 것일 뿐이라는 것이 오늘날의 이해이다. 그렇다면, 빛이 입자이면서 동시에 파동으로 거동한다는 것을 보이려면 어떤 실험들을 설계하여 어떤 결과를 얻어야 하는가? 그렇게 얻은 결과는 빛의 이중성을 주장하기에 충분한가? 본 실험은 이 질문에 대한 답을 얻을 수 있는 실험적 검정(Test)을 수행함으로서, 유의 수준에 따라 빛이 특정 상황에서 입자인지, 파동인지 통계적인 유의성을 밝혀내는 것을 목적으로 한다. 이를 통해 연구자로서 반드시 숙지해야 할 p-value 검정과 불확실도 처리 기법, 회귀 처리 등에 숙련되도록 한다. 또한 새로운 이론을 적용하였을 때, 기존 이론보다 실험 결과를 잘 설명해낼 수 있는지를 직접 겪어 보고 물리학의 역사상 중요한 발견이 이루어지는 순간을 직접 겪어 보기의 순간을 바란다.

주의. 이전에는 이 실험의 오차 분석과 실험 검정을 중요시하지 않은 결과, 특히 입자성-파동성 Duality에 대한 결론 도출 부분에서 소설을 쓰는 수강생이 많았다. 이전 매뉴얼에도 잘못되거나 이상한 서술이 많이 있었으며, 제조사인 Teachspin 사의 매뉴얼에도 약간의 함정이 있다. 철저하게 실험 결과와 통계에 기반하여 결론을 도출하도록 주의하라. 과학 연구를 시작하게 하는 것은 상상과 믿음에 대한 희망이지만, 과학 연구의 열매를 맺는 것은 정량화된 통계와 정밀한 실험적 관측이다. 본 실험의 경우 **참값과 정확한 값을 제외한 모든 물리량에 불확실도를 기입하고 (회귀 분석 시에도 가급적), 같다 / 다르다의 판별 구분을 내릴 때에는 별도의 언급이 없는 경우 항상 p-value를 함께 제시해 주어야 한다.** P-value를 계산하고, 불확도를 산출하며 수많은 측정의 RAW data 를 기입하는 것은 매우 귀찮고 번거롭지만, 연구자가 가져야 할 중요한 자세이다.

보고서 제출 시에는 Raw data 및 자세한 처리 과정을 모두 기입하면 본문이 길어져 가독성이 매우 떨어진다. 이에 따라 별도의 Supplementary Material을 작성하여 위의 도출 과정 및 모든 실험 결과를 기입하여 제출하도록 한다. Supplementary Material은 실험에 열심히 참여했는지와 데이터를 직접 뽑았는지, cheating 여부를 가지고 재현성 있게 잘 실험했는지 보기 위해 사용하며, 실제 논문을 출판할 때와는 다르게 형식을 엄격하게 지키지 않더라도 감점하지 않으므로 부담 없이 자료를 모으고 잘 정리해 제출하면 된다.

다만 보고서 본문에 물리량 불확실도, p-value, 회귀 모델(추세식) (혹은 회귀 자체를 수행하지 않거나) 이 생략되는 경우에는 크나큰 감점이 따를 것이다. 힘들고 번거로운 과정임을 고려하여, 산출 과정은 상세히 적는 것을 종종 빼먹더라도 불확도 및 회귀선 등의 결과는 반드시 제기하기를 바란다. 주먹구구나 페르미 추산을 통해서라도, 각각의 물리량을 오염시킬 수 있는 오차 요인이 무엇이 있을지와 그 크기에 대해 고민해 보면서 모든 물리량에 대한 불확실도 추산이 습관화되기를 바란다.

2.2 배경 이론

프라운호퍼(Fraunhofer)의 간섭 이론

영의 이중슬릿 실험을 설명하는 이론은 범위에 따라 프라운호퍼의 이론과 프레넬의 이론으로 나뉜다. 다음 그림에서 그 차이를 비교할 수 있다.

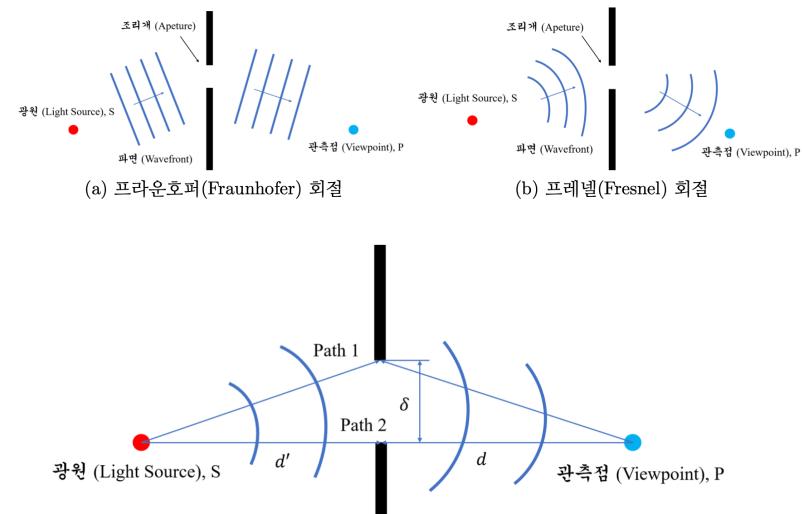


Figure 2.1: Fraunhofer 및 Fresnel 회절. (a) Fraunhofer 회절, (b) Fresnel 회절. 아래쪽 그림은 Fresnel 회절의 경우를 좀 더 상세히 나타낸 것이다.

프라운호퍼 회절은, 슬릿의 규모가 광원 및 스크린까지의 거리 보다 훨씬 작은 규모로 근사될 수 있을 때, 슬릿에 입사되고 나가는 빛이 평면파로 근사될 수 있는 경우를 의미한다. 이때 간섭무늬의 위상차는 슬릿 표면 상에서의 위치 차이에 의해 평행광 간의 경로차를 쉽게 계산해낼 수 있다. 평면파 근사가 유효하지 않을 정도로 슬릿이 크거나, 가까운 곳에서의 무늬를 볼 때에는 파수벡터 방향 별로, 파면의 전파에 따른 위상 항을 하나하나 구해 적분해 주어야 한다. 이러한 과정을 통해 얻은 회절무늬를 Fresnel 회절의 범주로 간주한다. 본 실험의 거의 전 영역에서는 프라운호퍼 회절이 적용되나, 비대칭 슬릿의 회절무늬를 기술할 때에는 약간 조심스럽게 접근할 필요가

있다. 우선 유한한 폭을 가진 이중슬릿의 경우, 프라운호퍼 회절 이론에 따라 이중슬릿의 폭이 b , 슬릿끼리의 간격이 h 일 때 측정장치에 도달하는 빛의 세기(intensity)는 다음과 같이 전기장 진폭을 통해 얻을 수 있다.

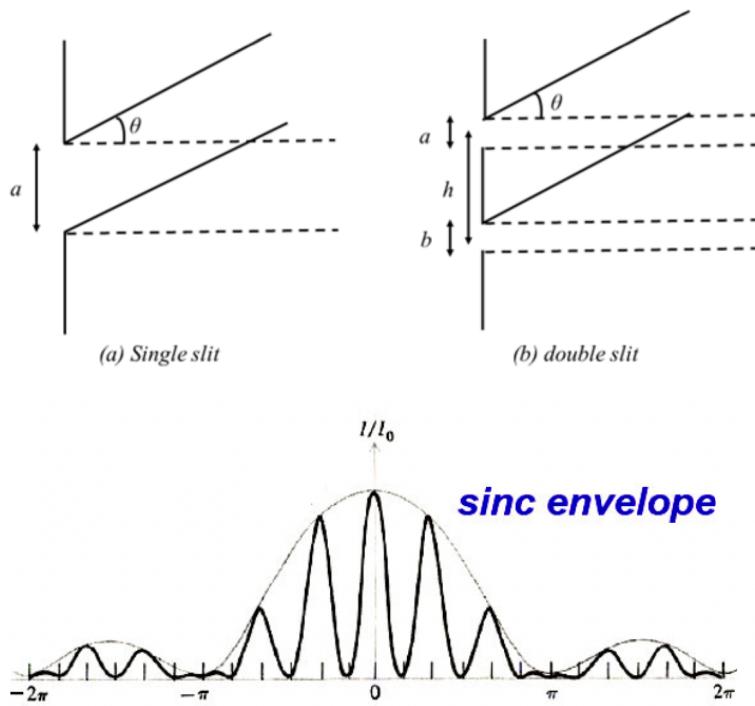


Figure 2.2: Intensity distribution from double slit interference. (a), (b) Definitions of geometric parameters, below : beam profile with sinc envelope.

$$I = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \cos^2 \gamma ; \text{ where } \beta = \frac{1}{2} kb \sin \theta, \gamma = \frac{1}{2} kh \sin \theta \quad (2.1)$$

위 식에서, 이중슬릿을 구성하는 각 슬릿에 의해 sinc function envelope이 만들어지고, 슬릿이 두 개인 효과가 cosine 항으로 곱해져서 위와 같은 패턴이 나타나게 된다.

위상자 기법 - 두께가 다른 슬릿에 의한 간섭

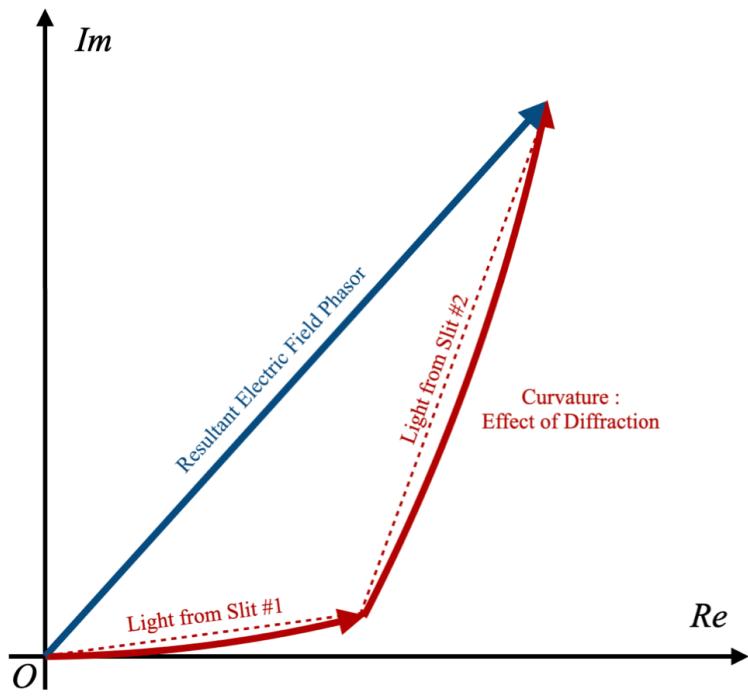
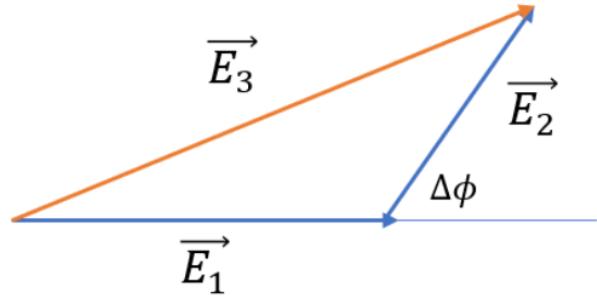
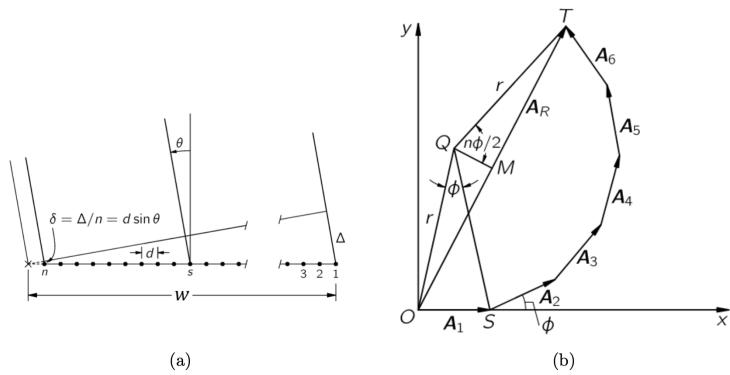


Figure 2.3: Top : Phasor construction for single slit limit of n-slits. Middle : Summation of electric field vector in double slit. Bottom : Phasor diagram for the interference from asymmetric double slit. Blue arrow stands for the sum of electric field, while the red arrows stand for the electric field of the lights from each slit. Resultant vector sum could be easily evaluated graphically (or geometrically) on phasor plane.

한편 실제 이중슬릿 실험은 슬릿 두께에 의한 회절현상 말고도, 여러 비이상거동을 보인다. 대표적으로, 두 슬릿의 폭이 완전히 동등하지 않은 경우 일어나는 현상은 그림에 나타낸 것과 같이 위상자(Phasor) 기법으로 구할 수 있다. 물리학과 전공생이라면 위상자를 이용한 파동의 회절간섭 셈법은 익숙할 것이므로 계산과정은 생략한다.

비단색광 (non-monochromatic)에 의한 간섭

회절-간섭 무늬 식을 보면, fringe pattern이 광원의 특성에 의존하는 것은 입사하는 빛의 세기 정도인 것처럼 보인다. 그러나 이는 단색광 (k 나 ω 가 일정)의 경우를 상정하고 얻어진 결론이며 실제 광원은 아무리 레이저라고 하더라도 linewidth를 가진다. 이에 따라 여러 파장의 빛이 섞여 있는 광원인 셈이므로, 당연히 fringe pattern은 광원의 linewidth에 의존하게 된다.

먼저, 상술한 것과 같이 파장별 간섭무늬는 다음 형태를 따른다.

$$I(k, \theta) = I_0(k) \left(\frac{\sin \beta(k, \theta)}{\beta(k, \theta)} \right)^2 \cos^2 \gamma(k, \theta) \quad (2.2)$$

여기서 k 는 빛의 파수 벡터이다. 공명 현상을 이끄는 것은 파장이 아니라 진동수이기 때문에 여기서는 파장보다는 파수벡터를 쓰는 것이 적절하다. 역학 시간에 배운 감쇠강제진동계를 생각해 보면, 진동수에 대한 lorentzian 꼴 스펙트럼이 나오는 것을 알 수 있다.

한편 Spectral Strength는 다음과 같이 주어진다.

$$g(k) \text{ with } \int_0^{\infty} g(k) dk = 1 \quad (2.3)$$

이에 따라 linewidth를 고려한 모델은 다음과 같다.

$$I(\theta) = \int_0^{\infty} I_0(k) \left(\frac{\sin \beta(k, \theta)}{\beta(k, \theta)} \right)^2 \cos^2 \gamma(k, \theta) g(k) dk \quad (2.4)$$

이를 잘 적분하면 회절-간섭무늬 실험결과를 회귀할 적절한 회귀 모델을 찾을 수 있고, 이로부터 linewidth에 대한 정보를 얻을 수 있다. 빛이 나름 단색광에 가까운 경우 (linewidth가 꽤 좁은 경우), Spectral Strength는 Lorentzian form으로 근사할 수 있다.

Linewidth의 영향: Convolution Fit

앞서 선폭에 따라 간섭무늬의 개형이 달라짐을 언급하였다. 보다 자세히는, 파장에 따라 극대와 극소가 나타나는 위치가 달라지므로 그들이 합해진 효과로서 후술할 Visibility가 나빠진다. 이를 분석 할 때 단색광에 의한 회절로부터 유도된 회귀식을 사용하면 Visibility에 의해 제한받는 부분, 즉 극소 근처에서 개형이 잘 맞지 않는 것을 확인할 수 있는데, 선폭이 고려된 모형을 사용하면 다음과 같이 더 잘 맞는 모델을 얻을 수 있다. 2022년 수강생 최이선, 명하진, 정수영 학생의 실험데이터 및 Fit이 제시되었다.

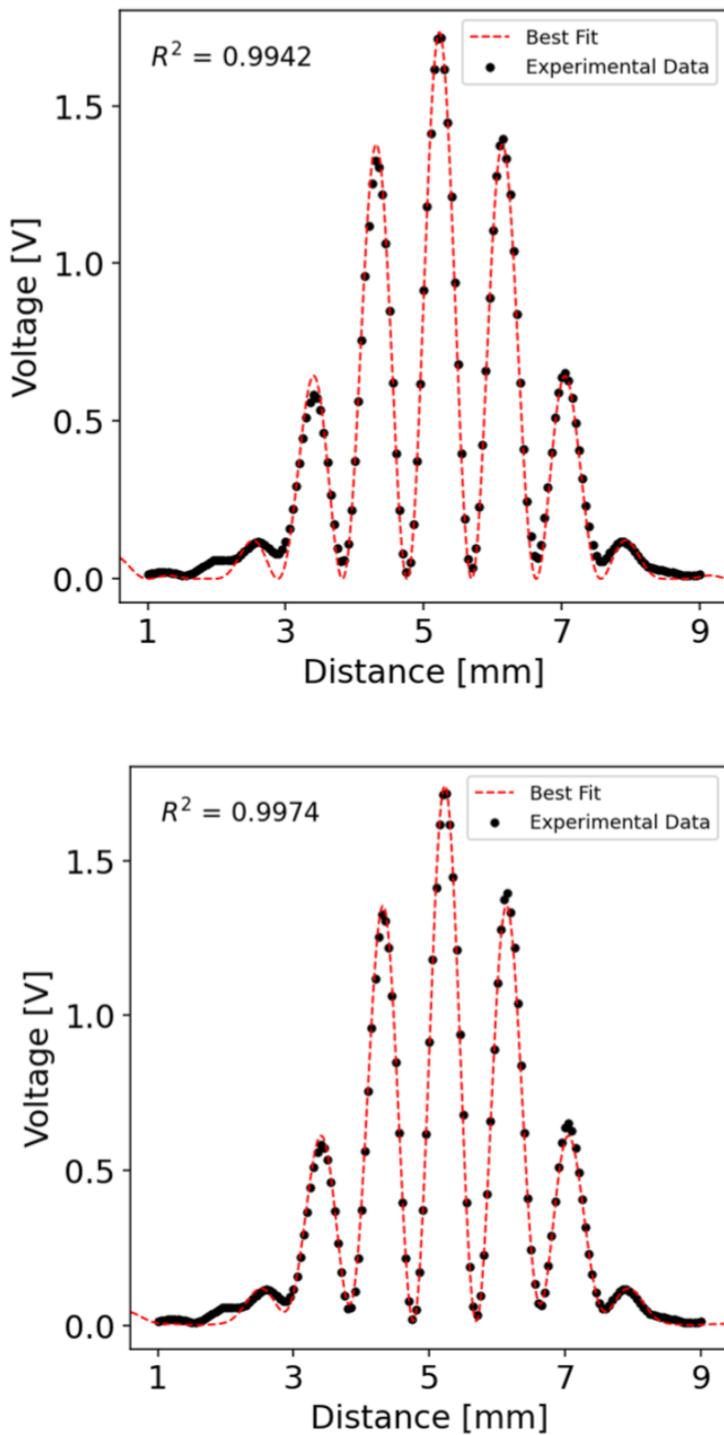


Figure 2.4: 선폭 반영의 영향. 위쪽 플롯은 선폭을 고려하지 않은 프라운호퍼 회절의 경우이며, 아래쪽 플롯은 선폭을 고려한 경우의 회귀 모형을 적용한 것이다. 이때, 간접무늬의 극소들에서 선폭에 의한 broadening을 고려한 경우 더 실험 데이터를 잘 반영한다는 것을 확인할 수 있다. 이는 선폭의 존재에 의해 fringe가 흐려지므로, 극소가 0을 찍지 못하기 때문임을 보여준다.

위의 모델은 간접무늬와 파장 스펙트럼이 컨벌루션되어 있는 형태를 가지고 있다. 이처럼 컨벌루션의 형태로 회귀모델이 주어지는 경우를 Convolution Fit이라 하는데, 주로 하나의 물리 현상이 다른

물리 현상에 의해 영향을 받을 때 나타난다. 대표적으로는, 가우시안 분포와 로렌치안 분포의 컨벌루션으로 얻어지는 Voigt(포크트) 프로파일이 있는데, 이는 주로 공명곡선(로렌치안)이 열적 요동에 의한 도플러 벌어짐(가우시안)을 겪을 때 널리 나타난다.

컨벌루션 팅은 수학적으로 해석적인 (analytic) 식을 얻어내기 어렵다. 뿐만 아니라 두 개 이상의 물리현상을 반영하므로 자유도가 많다. 이러한 분석을 수치 회귀로 수행할 경우, 수렴시킬 때까지의 매 반복마다 수치적분을 해 주어야 한다. 이에 따라 계산량이 매우 커지는데, 이런 조건에서 회귀를 수렴시키는 것은 어려운 일이다. 이에 대한 처리방법은 다음의 몇 가지가 있다.

1. 통계 패키지에서 수치 적분을 사용

첫 번째 방법은 Python 등의 통계패키지 지원 언어를 이용하는 것이다. Origin의 경우 convolution fit 기능을 지원하므로 수치적분 없이 패키지의 기능을 잘 활용하면 컨벌루션 회귀를 진행할 수 있으나, 수렴에 실패할 수도 있다. Python이나 Matlab 상에서, 수치 적분 혹은 근사된 수치적분을 loss function 으로 하여 회귀를 진행할 수 있다. 이 때 계산량을 줄이기 위해 파장의 간격을 듬성듬성 두고 선폭을 구해도 좋다. 혹은, 수치적분을 하지 않고, 선폭 파라미터를 받아서 discrete하게 떨어진 파장들에서 얻어진 간섭무늬를 선형결합해서 사용해도 된다. 이 경우 5개 이상의 파장에 대한 결과를 중첩하는 것만으로도 소득을 볼 수 있다. 이때 회귀 초기조건은 선폭이 0인 것을 대입하는 게 좋다. 선폭이나 감쇠 등등, 부차적인 요인을 추가하여 회귀분석을 진행하는 경우에는 그런 물리 현상이 없는 경우를 먼저 찾고 perturbatively 최적값에 접근할 수 있도록 초기 값 중 부가적인 물리현상 (secondary effects) 을 기술하는 파라미터들은 0 또는 1 등, 그 현상이 없는 것에 해당하는 값을 넣어주는 것이 좋다. 당연하게도, 더해지는 값은 0, 곱해지는 값은 1, 선폭 등의 의미인 경우는 0이 그것에 해당한다. 한편,

통계패키지를 이용한 수치분석 시도가 수렴 없이 망할 경우 다른 접근법들이 가능하다. 컨벌루션 회귀는 어려우므로, 너무 엄밀하게 접근하지 않고 대강의 선폭 스케일을 제시해 주는 것만으로도 충분히 좋은 스터디가 된다. 부담이 가장 클 수 있는 태스크이므로 적절한 근사를 통해 선폭이 개형에 영향을 준다는 것만 파악해도 만점을 받을 수 있다. 회귀 분석이 정 잘 안 될 경우 선폭이 다른 경우의 그림을 몇 개 그려서, 개형이 어떻게 변하는지 설명해도 좋다. 태스크가 너무 어렵다면 단색광 회귀 파라미터 값들을 그대로 써서, 선폭이 약간 있을 때의 개형을 그려보고, 개형이 실험값에 가까워지는 선폭을 손으로 대충 찾아주어도 충분하다. 그러나, convolution fit은 기생하는 새로운 물리 현상을 찾아내는 아주 강력한 도구이기 때문에, 가능하다면 좀더 노력해서 시도해 보자. 이 경우에는 간접무늬가 복잡해서 수렴 조건을 찾기 쉽지 않을 뿐이다.

2. 수치 적분을 사용한 경사강하 기법

통계 패키지가 수치적분으로 정의한 함수를 잘 지원하지 않을 수 있다. 그 때 더 쉬운 방법은 수치적분의 분해능을 낮추고, 한 5개 정도 구간의 값을 선형결합한 "해석적 함수"를 사용해 수렴시키는 것이다. 이는 쉽게 할 수 있으나, 아쉬움이 있을 수 있다. 그럴 경우에는 회귀 코드를 직접 짜는 것도 그리 어렵지 않다. 경사강하 (Gradient Descent)를 사용하면 회귀식을 빠르게 수렴시킬 수 있는데, Learn rate 등의 최적화를 해 보면 금방 회귀모델을 실험자료에 수렴시킬 수 있다. 자세한 내용은 개정된 PL 매뉴얼의 내용을 참고할 수 있다.

3. 제한된 자유도 사용 : 단색광 회귀 기반으로 자유도를 줄인 채 선폭에 따른 회귀 진행

자유도가 넓으면 회귀의 수렴성이 나빠진다. 수치적분을 해서 회귀하는 경우, 슬릿 폭이나 간격 등 여러가지 변수들을 이전의 단색광 회귀에서 얻은 값으로 근사하여 자유도를 선폭 하나로 제한한다. 이때 회귀를 통해 최적화할 loss function은 선폭에

대한 일변수함수가 되므로, 쉽게 회귀할 수 있다. 만약 통계 패키지의 회귀분석 함수 (예 : python의 `scipy.optimize.curve_fit` 등) 가 수치적분으로 정의된 회귀 모델을 잘 수렴시키지 않는다고 해도, 회귀모델이 1변수 함수이므로 단순히 Newton-Raphson, 이분법 등을 통해 쉽게 최소값을 찾을 수 있다. 아니면 충분한 `resolution`으로 반복계산 후 최솟값이 나오는 파라미터값을 직접 찾아도 좋다. 이는 사실상 경사강하법을 한축에 대해서만 하는 것과 같은데, 그 경우 수렴성이 보장된 여러 가지 최적화 알고리즘들을 사용할 수 있으므로 훨씬 편하게 회귀분석을 할 수 있다. 사실, 이 경우는 정확한 의미에서 컨벌루션 회귀를 하는 것이 아닌데, 이는 선폭을 고려하였을 때, 고정시켜놓았던 나머지 회귀 변수들이 원래 값을 유지한다는 보장이 없기 때문이다. 다만, 몇 개의 파라미터를 고정해 놓고 한 계산끼리 서로 비슷한 값을 오차 범위 이내로 얻는다면 이는 Self-Consistent하게 수렴했다고 할 수 있다. 이러한 논리는 원자물리학에서 전자 배치의 에너지 준위를 계산하거나, 다체 물리계에서 평균장 이론 (Mean Field Theory)를 이용해 약하게 상호작용하는 다체 문제를 일체 문제로 환원시켜 푸는 데 사용되므로 물리학에서 나름 근본 있는 용법이지만, 더 정밀한 분석을 갈구하는 것은 학자의 기본 자세이므로 최대한 노력해 보자. 회귀 분석을 엄밀하게 하지 않았더라도, 선폭의 스케일을 잘 제시할 수 있는 합리적 방법을 사용해 보았으면 전혀 감점되지 않을 것이다.

4. 제한된 정밀도 사용 : 여러 가지 파장의 단색광에 대한 분석을 선형결합해서 선폭의 영향 근사. (회귀)

수치적분이 부담되지만 선폭은 그래도 직접 회귀해보고 싶은 경우에 쓸 수 있는 속셈법이 더 있다. 이는 적분을 하지 않지만, 회귀 자유도는 제한되지 않고 영향을 주는 모든 파라미터의 변화를 고려하여 최적화를 하는 것이다. 이 경우 찾은 파라미터들이 우리가 잡은 함수를 최소화하는 값으로 수렴했음을 보장하지만, 그 함수가 실제 물리계에서 선폭이 반영된 간섭 결

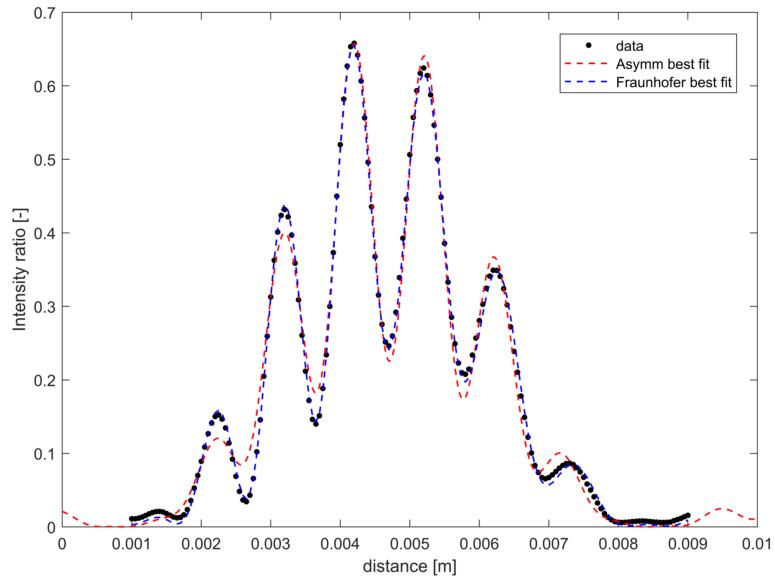
과를 정확하게 주지는 않는다. 이때 얻은 파라미터들을 가지고, 적분식으로 주어진 정확한 (근사되지 않은) 컨벌루션 함수에 대입하면 한 번의 수치적분만으로도 선폭 차이를 반영한 회절-간섭 무늬를 거의 정확하게 예측할 수 있다. 사용하는 loss function은 로렌지안 함수의 규격화를 잘 흉내내어서, 선폭 γ 에 대해 다음과 같이 표현된 가짜 적분 회귀모형을 통해 정의할 수 있다. 통계 패키지의 내장 회귀 기능을 사용하는 경우, 로스 평선을 정의하지 않아도 회귀모형만 입력하면 수렴을 시켜 준다.

$$I(\gamma, \theta) = \frac{\sum_{n=-3/2, -1, 0, 1, 3/2} g(n\gamma) I_0(\lambda + n\gamma, \theta)}{\sum_{n=-3/2, -1, 0, 1, 3/2} g(n\gamma)} \quad (2.5)$$

이처럼 정밀하고 정확한 컨벌루션 회귀가 너무 어렵더라도, 제한된 정밀도 또는 제한된 자유도를 감수하고 분석하면 다른 태스크들에 비해 어렵지 않게 신기한 회귀분석을 해 볼 수 있다. 또한, 제공된 선폭에 대한 보정 이외에도, 여러가지 새로운 현상에 의한 효과들을 모델로 세워 보고 (이론적으로) 회귀에 적용하여 기존 모델보다 새 이론이 반영된 모델이 실험 자료를 유의미하게 더 잘 설명하는지 검증할 실험적, 통계적 근거를 찾아볼 수도 있다.

2021, 2022년도 우수보고서의 일부에서는 추가실험 분석으로, 블로커를 가리는 중간에 포토다이오드에 측정되는 빛의 세기를 블로커 위치에 대한 함수로 측정하고, 이를 설명하기 위해 프레넬 회절 이론을 풀어 회귀한 학생도 있었다. 놀랍게도, 이러한 경우 이론이 신기하게 잘 맞는 것을 확인할 수 있으며, 가우시안으로 근사해도 되는 경우와 그렇지 않은 경우에 대해 심도 있게 고민하고 비교해 볼 수 있게 된다. 이외에도, 블로커와 슬릿이 같은 평면 상에 있지 않은 효과 등을 여러 차수의 회절로 분석하는 것도 가능하다. 관련한 분석이 최이선, 명하진, 정수영 학생의 우수보고서로부터 얻어진 바 있다.

Figure 2.5: 3차 프라운호퍼 회절을 고려한 비대칭슬릿 회귀모델의 개선.(최이선, 명하진, 정수영) 슬릿과 블로커가 다른 평면에 있어서, 원쪽에서 볼 때랑 오른쪽에서 볼 때랑 슬릿이 동등하지 않다. 기존 이론은 이러한 차이를 잘 반영하지 못하고 좌우대칭 분포를 주지만(위상자로 풀 프라운호퍼 회절) 실제로는 블로커로 가린 쪽에서 보면 더 가려진 것으로 보이고, 반대쪽에서 보면 덜 가려진 것으로 보인다. 최이선, 명하진, 정수영 학생의 모형은 비대칭성을 담을 수 있는 회귀식을 사용하여 더 잘 만든 것을 보여주었다. 적색 회귀선이 이론치, 푸른색 회귀선이 개선된 3rd order Fraunhofer diffraction을 고려한 모델이다.



한편, 실험을 잘 재단하여 기존 이론 - 비대칭 슬릿의 위상자 결과 - 에 잘 맞을 데이터를 얻는 것도 가능하다. 이는 가리는 위치를 잘 골라서, 3차 프라운호퍼 회절의 영향이 덜 반영되는 실험 구간을 찾는 것인데, 아래의 최영환, 차무협, 김준호 학생은 여러 차례의 재실험을 거듭하여 이론과 아주 잘 맞는 실험자료를 얻어내었다. 사용된 회귀모형은 아래 그림에 표시되어 있다.

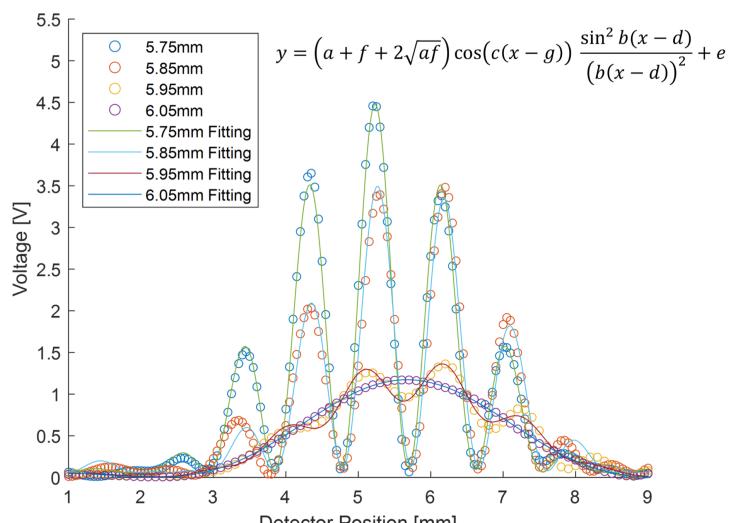


Figure 2.6: 최영환, 차무협, 김준호. 비대칭 슬릿 실험.

한편, 선풍 고려를 아예 다르게 접근하는 것도 가능한데, 아래의 권순현 학생 예시에서 볼 수 있듯이 컨벌루션 팅을 위해 수치적분을 하지 않고 직접 해석적으로 적분을 해도 된다. 이 경우, 머리가 엄청 나게 좋거나 (권순현 학생의 경우 그러했다.) Mathematica, SymPy 등의 상용 툴을 잘 활용하여 analytic 적분꼴을 얻어낼 수 있는데, 장점은 회귀 부담이 줄어든다는 것이고 그 결과 회귀 정밀도 및 수렴성이 매우 좋아진다는 것이며, 단점은 새로운 물리를 추가할 때마다 적분을 새로 해 주어야 하고, 모든 모델이 해석적인 형태로 적분 가능하지는 않다는 한계를 가진다. 예를 들어, 타원 적분 같은 꼴이 남아있다면 결국 수치기법을 이용해 해를 분석하여야 한다.

1.2. Lorentzian lineshape

For laser dominant broadening has Lorentzian lineshape. Lorentzian lineshape is given by the following equation.[2]

$$g(\omega, \omega_0, \gamma) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{I_0}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}$$

1.3. Convolution

Laser is not monochromatic. Diffraction pattern for light source with Lorentzian lineshape can be obtained by convolution of monochromatic diffraction pattern and Lorentzian lineshape.

$$I(\omega_0, \gamma, x) = \int_0^\infty g(\omega, \omega_0, \gamma) I(\omega, x) d\omega$$

When γ is small enough, intensity can be approximated as,

$$I(\omega_0, \gamma, x) \approx \int_{-\infty}^\infty g(\omega, \omega_0, \gamma) I(\omega, x) d\omega$$

and this can be integrated analytically. This analytic function was used to fit results. Equation (3) is convolution result for single slit and equation (4) is convolution result for double slit.

$$\begin{aligned} I(\omega, x) &= A^2 J(a^\omega(x - x_0), \gamma, \omega_0) \\ J(\alpha, \gamma, \omega_0) &= \frac{2\gamma(\omega_0^2 - \gamma^2)}{\omega_0^2 + \gamma^2} \frac{\frac{1-e^{-\alpha\gamma}}{\alpha\gamma} - 1}{2\alpha\gamma} - 2 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + \gamma^2} \frac{e^{-2\alpha\gamma} \text{sinc}(2\alpha\omega_0) - 1}{\alpha} \\ &\quad + \frac{\omega_0^2 - \gamma^2}{\omega_0^2 + \gamma^2} \frac{\omega_0^2}{\gamma} e^{-2\alpha\gamma} \text{sinc}(\alpha\omega_0)^2 \\ a^{\omega_0} &= \frac{a\omega_0}{2cL} \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} I(\omega_0, x) &= A^2 J(a_1^{\omega_0}(x - x_0), \gamma, \omega_0) + B^2 J(a_2^{\omega_0}(x - x_0), \gamma, \omega_0) \\ &\quad + 2ABH(a_1^{\omega_0}(x - x_0), a_2^{\omega_0}(x - x_0), h^{\omega_0}(x - x_0), \gamma, \omega_0) \\ H(\alpha, \beta, \delta, \gamma, \omega_0) &= \frac{\omega_0^2 - \gamma^2}{(\omega_0^2 + \gamma^2)^2} T_c(\alpha, \beta, \delta, \gamma, \omega_0, \phi) + \frac{2\gamma\omega_0}{(\omega_0^2 + r^2)^2} T_s(\alpha, \beta, \delta, \gamma, \omega_0, \phi) (\alpha \geq \beta) \\ H(\alpha, \beta, \delta, \gamma, \omega_0) &= H(\beta, \alpha, \delta, \gamma, \omega_0) (\alpha < \beta) \\ T_c(\alpha, \beta, \delta, \gamma, \omega_0, \phi) &= \frac{F_c(\delta - \alpha, \beta, \omega_0, \gamma, \phi) - F_c(\delta + \alpha, \beta, \omega_0, \gamma, \phi)}{2\alpha} \\ T_s(\alpha, \beta, \delta, \gamma, \omega_0, \phi) &= \frac{F_s(\delta - \alpha, \beta, \omega_0, \gamma, \phi) - F_s(\delta + \alpha, \beta, \omega_0, \gamma, \phi)}{2\alpha} \\ F_s(\alpha, \beta, \omega_0, \gamma, \phi) &= \frac{\sin((\alpha - \beta)\omega_0 + \phi)e^{-\gamma(\alpha - \beta)} - \sin((\alpha + \beta)\omega_0 + \phi)e^{-\gamma(\alpha + \beta)}}{2\beta} \\ F_c(\alpha, \beta, \omega_0, \gamma, \phi) &= \frac{\cos((\alpha - \beta)\omega_0 + \phi)e^{-\gamma(\alpha - \beta)} - \cos((\alpha + \beta)\omega_0 + \phi)e^{-\gamma(\alpha + \beta)}}{2\beta} \\ a_1^{\omega_0} &= \frac{a_1\omega_0}{2cL}, a_2^{\omega_0} = \frac{a_2\omega_0}{2cL}, h^{\omega_0} = \frac{h\omega_0}{cL} \end{aligned} \quad (4)$$

Figure 2.7: 권순현 학생의 보고서 중 일부. 선폭에 의한 영향을 해석적인 적분으로 계산해내었다. 이러한 분석이 중급물리실험에서 필수적으로 요구되지는 않는다. 그럼에도 불구하고 같은 태스크를 여러 가지 방법으로 처리해보는 것은 의미가 있다. 이 정도 수준의 분석을 제시하지 못해도 전혀 감점되지 않는다.

제한된 능력과 시간, 제원 속에서 가치 있는 물리적 의미를 뽑아낼 수 있는 분석 능력은 매우 중요하다. 이 실험에서의 Convolution fit 태스크들에서 회귀 방법의 허술함은 감점이 없으나 어떤 방법으로든 컨벌루션 회귀를 흉내내어 새로운 물리 현상의 '증거'를 찾아내는 것은 반드시 시도해 보아야 한다. 회귀가 어렵다면 주먹구구식으로

찾은 선폭을 대입해 얻은 간접무늬와 비교해 보아도 된다. 다만, 선폭을 구하기 위해 회귀에서 얻은 파장값의 불확실도를 제시하면 안된다. 이는 실험 자료가 회귀선과 잘 안 맞아서 파장을 정밀하게 알아낼 수 없기 때문에 나온 실험자료의 한계일 뿐, 레이저의 파장이 실제로 일정 범위 내에서 넓은 분포를 가지고 있기 때문에 통개진다는 물리를 반영하지 않은 것이다.

사실, 선폭을 고려하더라도 실험 결과와 잘 안 맞는 경우가 나올 수 있다. 먼저 실험이 잘 안 되면 그렇게 되는데, 이 경우 재실험을 통해 얼라인을 잘 하고 적절한 간격으로 데이터를 뽑으면, 백래쉬가 없게 실험하면 데이터의 품질을 개선할 수 있다. 실험장치가 원하는 조작변인에 가 있지 않거나, 혹은 원하는 물리 regime에서 있지 않을 때 경향성이 깨지게 된다. 이러한 요인을 개선하기 위해서는 실험 계가 어떤 조건에서 어떤 이론으로 근사될 수 있는지 잘 이해하고 있어야 한다. 만약 이해하고 있는 물리 이론만으로 실험 데이터가 충분히 잘 설명되지 않았다면, 실험이 잘못 설계되어 원하지 않는 물리가 반영되었거나, 혹은 알려지지 않은 / 고려되지 않은 물리 현상을 밝혀내는 첫걸음이 될 수도 있다.

이러한 검정을 통해 기존 이론에 대한 검정을 할 수 있다. 예를 들어, 위의 죄이선, 명하진, 정수영 학생의 plot에서 단색광 회귀는 실험 자료와 잘 맞지 않는데 선폭 고려 시 회귀가 잘 맞으므로, 이는 기존 이론으로는 이 실험 데이터를 새 모델에 비해 잘 설명할 수 없음을 의미하는 아주 강한 근거가 된다. 이때, 귀무가설을 '이 실험에서 레이저 선폭은 0이다'로 잡으면 이 자료는 이를 기각하기에 충분히 강한 강도를 가진다. 보다 정량적으로는 가설 검정의 절차를 밟아야 하는데, 불확실도에 대한 분석이 많이 요구되므로 무리한 정량 분석을 시도하지 않고, 발전된 회귀 모형이 정성적으로 가깝다, 혹은 제곱오차가 더 작다 정도만을 제시하여도 충분히 새로운 모델을 뒷받침하는 근거로 쓰일 수 있다. 물론 중요한 publication 을 위해서라면 더 꼼꼼한 분석이 필요할 것이다. 통상적인 범주에

서는 R^2 의 비교만으로 충분하지만, 사실 비선형 회귀에서 R^2 값은 엄밀하게 데이터의 제곱오차와 깔끔한 관계를 가지지 않는다. 선형 회귀에서는 $\sqrt{1/R^2 - 1}$ 이 불확도에 비례했는데, 비선형 회귀에서는 이를 보장할 수 없으므로 몇 시그마의 유의수준인지 정량을 논하는데 R^2 을 함부로 사용해서는 안 되지만 어느 모델이 더 잘 맞는지 정도를 보여주기의 양으로는 충분하다.

한편, linewidth의 영향은 visibility를 제한하는 것인데 이러한 효과는 다른 현상에 의한 영향일 수도 있다. 빔 얼라인이 이상해서 슬릿이 빼딱하게 있거나, 레이저 빔의 중심과 이중슬릿의 중심이 일치하지 않아서 양쪽 슬릿에서 오는 빛의 세기가 다르거나, 블로커가 실수로 한쪽 슬릿을 가리는 등 이중 슬릿을 원했는데 실제로는 비대칭 슬릿이 된 경우 극소점이 0이 아니게 되면서 간섭무늬의 Visibility 가 나빠지게 된다. 이는 얼라인이 매우 잘 되었는데 linewidth가 넓어서 간섭무늬가 흐려진 것과 비교하기 힘들다. 물론 가능한 모델을 다 넣고 회귀한 경우에는 어떤 성분의 영향이 어떤 방향으로 개형을 바꾸는지 찾게 되므로 이 둘을 구분해낼 수 있는 기준을 찾을 수도 있으나, 이처럼 여러가지 영향이 같은 방향의 개형 편차를 주는 경우 하나의 모델만 넣고 회귀하면, 선폭을 더 넓게 예측하거나, 혹은 얼라인이 더 크게 틀어졌다고 예측하는 결과를 얻을 뿐, 선폭이 얼마나 넓으면서 동시에 얼라인이 얼마나 틀어졌는지를 알기는 어렵다. 따라서, 이러한 경우에는 실험을 매우 주의 깊게 진행해서, 얼라인이 매우 정확하다고 간주할 수 있다고 할 때 얻은 선폭값이 정확한 값이며, 또한 선폭이 넓은 광원보다는 선폭이 좁은 광원을 쓰는 경우에 선폭에 의해 "오염"되지 않은 자료를 바탕으로 슬릿이 얼마나 비대칭 적인지를 논할 수 있다. 이러한 이유로, 본 실험에서 선폭을 구하면, 오더가 때로는 너무 허무맹랑한 값이 나올 수 있는데, 커지는 방향이라면 단순히 실험을 조금 허술하게 한 것이므로 감점하지 않는다. 물론 이러한 것을 잡기 위해 얼라인을 여러 번 다시 하며 재실험을 한 학우들도 있으나 이는 증급물리실험의 드랍률 상승에 기여했으므로 그렇게까지 하지 않아도 좋다. 대신, 선폭이 생각했던 값보다 훨씬

작게 나온다면, 뭔가 놓치고 있는 것이 있음을 시사하므로 주의깊게 들여다 볼 필요가 있다. 이처럼, 회귀는 단순히 잘 맞는 그림을 찾는 것이 아니라, underlying physics 중 어떤 것이 considerable size 의 effect를 가지는지 판가름해 낼 수 있는 매우 중요한 도구이며, 이는 새로운 이론을 발견하는 인류의 중요한 장문이 되어 오고 있다. 중력파 검출, 힉스 보존의 발견 등 물리학의 역사를 바꾸는 중요한 Nobel-Prize grade 발견들이 이러한 보정 과정에서 얻어진 경우가 많다.

회귀 자유도에 대한 고려

회귀에 자유도를 추가해서 만든 새로운 모형을 적용하고 이것 이 실험과 더 잘 맞는 경우, 새로운 물리 법칙이 반영되었음의 근거가 될 수 있다. 그럼에도 불구하고 회귀로 모든 것을 알아낼 수는 없다. 예를 들면, 이 실험의 경우에는 레이저의 파장과 슬릿의 폭을 모두 회귀를 통해서만은 얻을 수 없다. 왜냐하면 두 값의 비율이 같으면 같은 간섭무늬가 나오기 때문이다. 이에 따라 둘의 비율, 혹은 파장, 혹은 슬릿 폭 각각은 좋은 회귀계수가 될 수 있지만, 이들을 서로 다른 자유도로 간주하면 회귀의 수렴성을 잃을 수 있다. (권순현 학생의 우수보고서 참고.) 가령 파장과 슬릿 폭을 둘 다 회귀 자유도로 놓으면, 수치 회귀를 해 주는 `curve_fit` 함수가 최소값을 향해서, 서로 다른 기준으로 파장과 슬릿 폭을 각각 제어하게 되는데, 실제 물리 이론에서는 둘의 비율만이 간섭무늬의 모양을 결정한다. 따라서 이는 수렴성을 악화시키고 심한 경우 발산하는 경우도 많다. 초기조건을 아주 잘 잡고 반복수를 제한하면 발산하지 않을 수도 있으나 그러면 정확한 값을 얻기 어렵다. 이는 하나의 핸들을 두 명의 운전자가 잡고 각기 다른 목표로 운전하는 것과 같다.

따라서 더 나은 회귀 모델을 잡는 것은, 자유도를 줄이되 파장의 절대적 크기와 무관하여 scaling이 용이한, 슬릿 폭 대 파장의 비율

등을 파라미터로 잡는 것이 현명하다. 혹은, 어느 하나의 물리량을 작은 불확도로 채울 수 있는 경우, 최대한 처리되지 않은 데이터를 회귀하는 게 실험으로부터 직접 무언가의 물리량을 얻어내었다는 의미를 가지므로 더 좋은, 더 직관적인 visualize plot을 제시할 수 있는 경우가 많다. 가령 개수를 세서 그림을 그리느냐, 밀도를 세서 그림을 그리느냐 중 전자가 보다 physics를 잘 보여주는 경우가 많다. 물론 회귀변수를 잘 잡아서 후자를 통해 오차를 걸러내고 보여줄 수도 있지만, 이는 목적에 따라 어떤 것이 유용한지 달라진다. 실험값을 더 복잡한 이론으로 설명하느냐, 혹은 더 간단한 이론의 본질을 보기 위해 실험 자료를 복잡하게 처리하느냐, 이는 목적에 따라 달라진다. 실험물리를 하는 사람들은 전자를, 이론물리를 하는 사람들은 후자를 선호한다.

2.3 장비 소개

주의.

Photomultiplier Tube는 매우 적은 수의 광자에도 민감하게 반응하는, Fragile한 장비이다. 이 실험은 주변 환경과 실험 장치의 정렬, 실험자의 숙련도에 크게 영향을 받으므로, 반드시 이 매뉴얼을 숙지한 후에 장비를 조작하기 바란다. 즉, 매뉴얼을 읽기 전에 장비에 손 대지 말고, 퀴즈를 응시한 뒤 조교의 도움에 따라 실험을 시작한다. 통상적으로 포토다이오드 실험을 먼저 하면서 슬릿 얼라인 등을 충분히 연습한 뒤, 자료를 뽑아 분석해 보고, 마음의 준비를 한 뒤 PMT 실험을 하기를 추천한다. 어려운 실험일수록 비슷한 장비를 사용하여 숙련된 경험이 있으면 좋다.

PMT를 제외한 장비가 고장나거나, 실험자에 의해 파손된 경우,

즉각 조교에게 수리를 요구 하면 감점하지 않고 정비받을 수 있다.
실험자의 부주의로 PMT를 파손하면 조 단위의 감점이 따른다.

다음은 각각의 실험 장비에 대한 구체적인 설명이다.

광전 증배관 (PMT), 포토 다이오드

본 실험에서는 단일광자 영역과 다중광자 영역을 실험하기 위해 각각 PMT 및 포토다이오드를 사용한다. PMT는 photomultiplier tube의 약자로, 아주 약한 빛을 전류 신호로 변환하며, 이를 Transimpedance amplifier (TIA)를 거치면 전압 신호로 변환할 수 있다. 작동 원리를 살펴보면, 가속 전압이 걸린 여러 개의 전극을 이용해 소량의 빛, even a single photon이 만들어 낸 광전 효과에 의한 전자 방출을 사태 증폭하여 전류로 바꿔 준다. 이 장치는 아주 민감하므로 핵, 입자물리 실험에서 scintillator와 함께 아주 적은 수의 입자를 측정해내는 데에도 쓰인다. 특히 반베타붕괴를 이용해 뉴트리노와 양성자 간의 상호작용으로 나온 아주 적은 수의 광자도 잡아낼 수 있는데, 매우 많은 수의 PMT를 사용해서 초신성에서 방출된 뉴트리노를 검출한 바 있다.

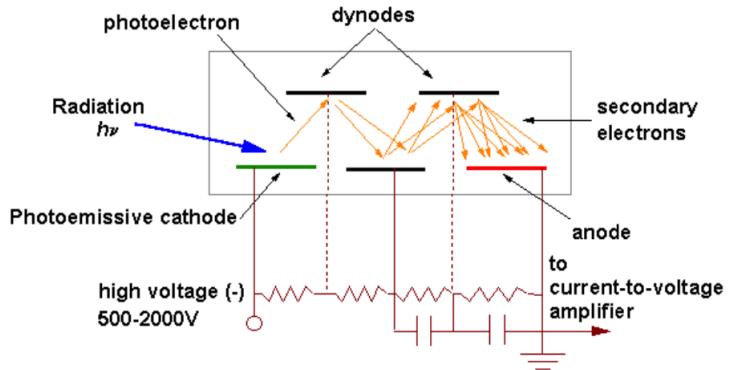
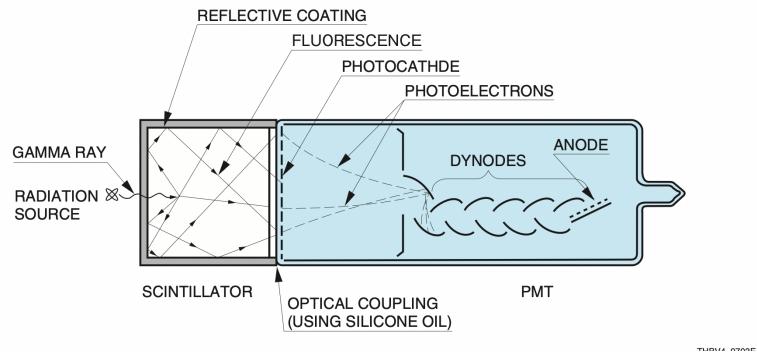


Figure 2.8: PMT의 구조 및 작동 원리. 위쪽 그림에서, 광음극에 광자가 입사하면 광전 효과에 의해 광전자가 방출되며, dynode들을 거치며 가속되고, 가속된 전자는 더 많은 전자를 방출시킬 수 있어 하나의 광자만으로 측정 가능할 만큼 증폭된 전류가 양극에 도달하게 된다. 아래쪽 그림은 Hamamatsu 사 PMT 핸드북의 7-3 그림을 가져온 것으로, scintillator와 함께 사용하여 감마선 등을 쟤는 방법을 보여준다. 보다 realistic한 PMT의 구조 및 작동원리를 알 수 있다.



Photomultiplier 안에는 cathode, anode, dynode가 있는데 photon이 cathode에 들어오게 되면 광전효과에 의해서 전자가 나온다. 그 뒤에 dynode에 충돌하면서 광전 효과에 의해 전자를 내놓게 된다. 다음 dynode로 전자가 가속되고, 충돌할 때 에너지가 더 높아져서 더 많은 전자가 나오게 된다. 이러한 방식으로 계속 반복하게 되면 결국 마지막에는 훨씬 많은 양의 전자들이 나오게 되고, 이러한 원리로 아주 적은 양의 빛이라도 우리가 인식할 수 있을 정도의 전류로 바뀌기 때문에 적은 양의 빛을 관측할 시에 유용하다. 자세한 작동원리는 Hamamatsu 사의 PMT 핸드북을 읽어보면 도움이 된다.

[https://www.hamamatsu.com/content/dam/hamamatsu-photonics/sites/documents/99\\$_\\$SALES\\$_\\$LIBRARY/etd/PMT\\$_\\$handbook\\$_\\$v4E.pdf](https://www.hamamatsu.com/content/dam/hamamatsu-photonics/sites/documents/99$_$SALES$_$LIBRARY/etd/PMT$_$handbook$_$v4E.pdf)

PMT는 사용되는 광음극에 따라, 또한 입사광의 파장에 따라

서로 다른 양자 효율을 가진다. 이는 입사한 광자의 몇 퍼센트나 광전효과를 일으켜 전자로 바뀌는지를 의미한다.

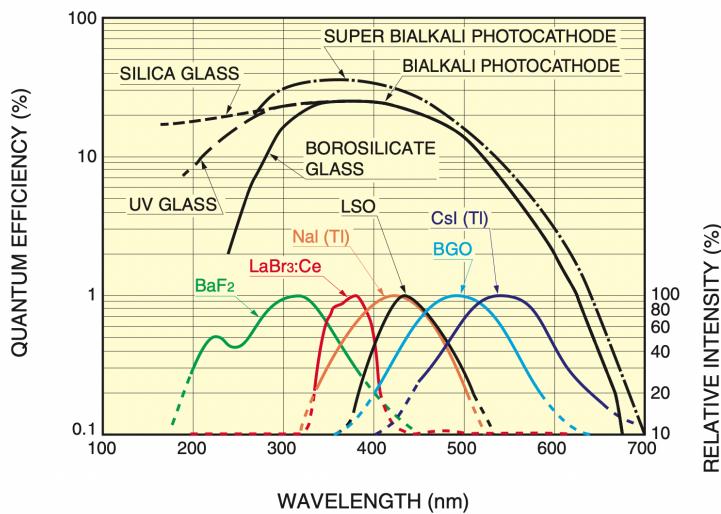


Figure 2.9: 광전극의 종류 및 입사 파장에 따른 양자 효율 (Quantum efficiency). 그림 7-4 from Hamamatsu handbook. 158p.

한편, PMT의 dynode에 걸리는 전압에 따라 광전효과에 의해 방출된 전자가 몇 배의 Gain을 가지고 증폭되는지가 결정된다. 가속 전압이 클수록 전자의 개수가 증폭되는 비율은 지수적으로 증가하게 된다.

PMT가 단일광자 영역에서 작동할 때에는, 광자가 하나 도달할 경우 Quantum Efficiency 만큼의 확률로 전자를 방출하고 다음 dynode로 넘어간다. 이때 다음 광자가 도달할 때까지 시간 간격이 충분하므로, dynode에서 전자가 증폭되어서 전류가 크게 흐르더라도, 이는 Gain 값과는 무관히 한 번 방출된 광전자당 한 개 혹은 두 개 (ringing이 있을 수 있다.)의 펄스를 만들어낸다. 따라서 이 경우 전류의 양을 누적할 필요 없이, Pulse의 지나간 개수만을 카운트하면 광자의 수를 어림할 수 있다.

PMT를 통해 단일 광자를 제대로 읽어내기 위해서는, 노이즈가 없으면서도 광자를 놓치지 않고 증폭해낼 수 있어야 한다. 구동전압이 너무 낮으면, dynode들에서 충분히 증폭되기 전에, 광전자 다음

전극까지 도달하지 못하고 손실되어 버릴 수 있다. 따라서 신호를 얻기 위한 최소한의 하한 구동전압이 존재한다. 그러나 구동전압을 너무 높이면 빛이 없는데도 열복사, 양자 요동, 장 방출 등의 원인으로 신호가 검출될 수 있는데, 이를 Dark rate라 한다. 실제 광자에 의한 신호가, 빛이 없어도 나오는 dark rate signal에 의해 오염되지 않게 하려면 구동전압에 상한을 두어야 한다.

한편, 포토다이오드는 PN 접합을 이용해 광량을 전류 신호로 변환해내는 장치이다. 빛이 들어갈 수 있으며, 적절한 밴드갭을 가진 다이오드에 역방향 바이어스를 가하면 두꺼운 공핍층이 생긴다. 이 때 밴드갭을 거슬러 전자를 여기시킬 수 있는 빛이 들어오면 electron-hole pair로 exciton이 생긴다. 역방향 바이어스 하에서는, exciton이 금방 붕괴되어 다이오드의 양 단자로 흐르는 전류신호로 바뀐다. 즉, 원래 역방향 바이어스 하에서는 누설전류가 없어야 하는데 빛이 들어오면 들어온 광자 수에 비례하여 exciton이 생겼다가 전류 신호가 발생하게 되므로 전류의 크기가 곧 입사광량에 비례하게 되고 높은 선형성을 지닌다. 포토다이오드는 PMT에 비해 높은 광량에도 베틸 수 있지만, 감도가 나쁘다. 최근에는 전자증배 원리를 이용한 포토다이오드가 PMT의 대체재로 널리 쓰이고 있는데, 중물질 장비는 too outdated되어 있으므로 감안하자. 이외에도 band gap이나 신호의 퀄리티 때문에 반도체 기반의 전자증배 포토다이오드보다 진공관 기반의 PMT가 아직 선호되는 경우도 많다.

셔터

이 실험 장비는 물론 망가져서, 한쪽은 단일광자, 한쪽은 다중광자 영역 실험에만 쓰이게 되었다. 그럼에도, 원래대로라면 둘 사이를 번갈아 재기 위해, 같은 위치에서의 빛의 세기를 포토다이오드로도, PMT로도 챌 수 있게 설계되어 있다. 이를 위해 PMT가 간혀 있는 암실 앞을 셔터가 가리고 있다. 셔터에는 포토다이오드가 달려 있어,

셔터를 내려 닫으면 포토다이오드로 빛이 검출되고, 셔터를 열면 암실로 들어간 빛이 PMT에 의해 측정된다. 이때, 레이저나, 형광등같이 아주 약하더라도 PMT를 망가뜨리기에는 충분히 강한 빛이 있는 경우에는 절대로 셔터를 열어서는 안 된다. PMT는 전원이 없어도 강한 빛을 받으면 광전효과가 일어나 손상이 일어날 수 있다. 얼라인을 위해 뚜껑을 열어 형광등에 노출되거나 하는 과정의 전반에서 절대로 셔터를 열지 않도록 한다. 만약 PMT에 이상이 감지되면 장비에서 빠-하는 소리가 들릴 것이다. 이 경우 즉시 조교에게 문의하여 실험을 멈추고 장비 이상을 점검받도록 한다. 반드시 레이저 실험 시에는 셔터가 닫혀 있음을 확인하고 실험해야 하며, 레이저 실험장비에서는 셔터를 열 일이 없다. PMT 실험장비에서는 초기 얼라인 시에 레이저 모듈을 빌려 사용해야 하는데, 이 때는 셔터가 조금이라도 열려 있으면 레이저 및 주변광에 의한 손상이 있을 수 있다. 단일광자 영역에서 베틸 장비를, 가혹한 광량에 노출시켜 손상시키지 말아야 한다.

다음 사진은 셔터가 열려 있는 위치와 닫혀 있는 위치를 찍은 것이다.

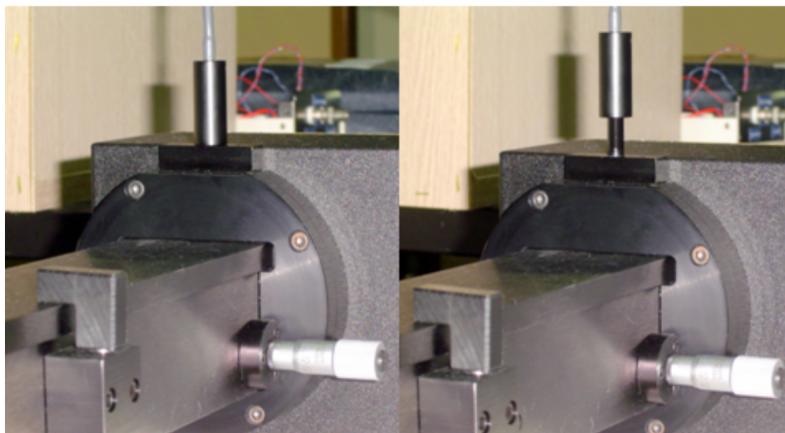


Figure 2.10: 셔터의 닫힌 위치 (왼쪽)와 열린 위치 (오른쪽)

Detector Box

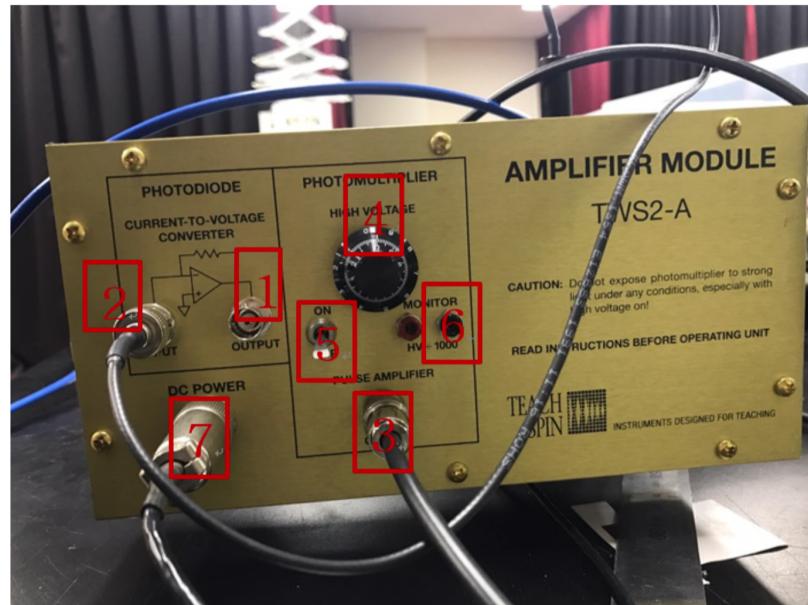


Figure 2.11: Detector Box의 모습을 나타낸 것이다. 이는 Photodiode 실험용 모듈에 해당하고, PMT 실험용 모듈에는 discriminator 납이 하나 더 있다.

1. Photodiode output:

포토다이오드의 전류 신호를 OP AMP를 이용하여 전압신호로 바꾼 출력이다. 0볼트에서 10볼트 혹은 12볼트 정도의 전압 범위를 가진 출력신호가 얻어지며, 넣어 준 전원의 종류에 따라 포화 전압이 바뀐다. 넣어 준 전압이 작을수록 포화전압도 낮다. 빨간색 멀티미터 (함수발생기처럼 생김)에 BNC 케이블을 연결하여 전압을 측정하도록 한다. 이는 레이저 회절-간섭 실험에서 사용되며, 얼라인 과정에서도 유용하게 쓰인다.

2. Photodiode input:

Photodiode의 전원을 공급하는 단자로, 연결되어 있으면 손을 대지 말고, 연결이 되어 있지 않으면 조교에게 문의하라.

3. PMT output:

PMT에서 얻어진 전류를 전압신호로 변환한 뒤 discriminator 및 증폭기들을 거친 출력 신호가 얻어진다. 이를 oscilloscope 와 PCIT로 관찰함으로서 single photon count를 얻을 수 있다.

4. High Voltage:

PMT에 가해지는 전압을 조절할 수 있는 가변저항 노브 (knob) 가 붙어 있다. 외륜과 내륜의 숫자를 함께 읽어 두 자리의 유효 숫자로 설정값을 읽을 수 있다. 500볼트에서 700볼트 사이의

값을 사용하되, 너무 전압을 높이지 않게 주의하라. 다만, 읽은 숫자와 실제 전압값이 일치하지 않으므로, 직접 High voltage monitor 단자에 멀티미터의 probe 탐침을 꼽아서 전압을 읽어야 한다. 모든 Knob은 돌릴 때 backlash에 조심하라. 특히 고전압 장비인데다 exponential behavior가 있으므로 PMT를 다 교정해 놓고도 실험을 망칠 수도 있다.

5. High Voltage on/off:

PMT에 고전압을 가하는 스위치이다. 만약 High Voltage knob 이 0을 가리키고 있지 않은 상태에서 이 스위치를 켜면, PMT에 갑자기 큰 전압이 걸린다. 이는 PMT 및 구동 회로에 큰 손상을 줄 수 있다. U-channel의 3단 토글 스위치가 laser쪽으로 가 있으면 PMT에 전원이 공급되지 않는다. 사용할 경우, 그 스위치가 bulb 쪽으로 가 있는지 확인해야 작동한다.

6. High Voltage monitor:

PMT에 가해지는 구동 전압의 크기를 1/1000 배 취하여 전압 신호로 내보낸다. 여기에 멀티미터를 연결하여 전압을 읽는다.

7. DC Power:

U-channel의 DC output과 연결한다. 역시 연결되어 있으므로 건드리지 않는다.

PMT의 측정 시에는 신중을 기해야 한다. PMT가 켜져 있고 고전압이 걸려 있는 상태에서 절대로 멀티미터를 조작하거나, 끼웠다 빼거나 등의 제어를 하지 않도록 한다. 현재 기준 멀티미터의 접촉에 불량이 있는데, 잘 잡거나 잘 끼우고 실험해서 실험 도중에 PMT의 출력신호와의 전기적 연결이 파손되지 않게 조심하라. 출력 신호는 실제 PMT에 걸리는 구동전압의 1/1000배에 해당한다. 따라서, 멀티미터의 V 단위 레인지로 측정하면 수백 mV 범위의 값이 얻어질 것이다.

U-Channel Panel

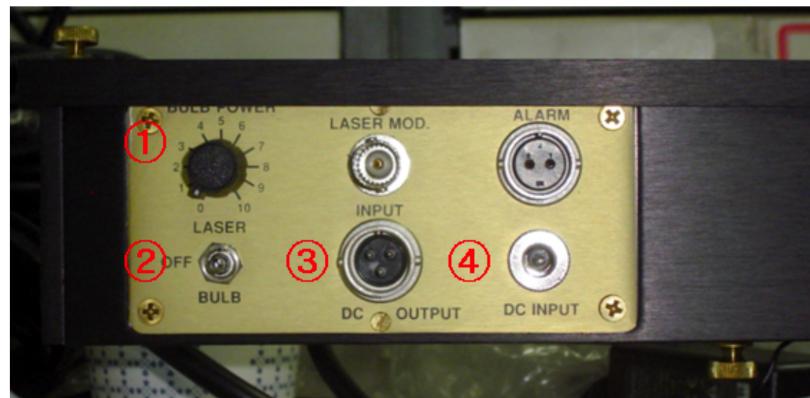


Figure 2.12: U-Channel Panel의 구성 요소. DC INPUT은 연결되어 있으나 빼지 않도록 주의한다.

1. Bulb Power:

단일광자 소스로 사용되는 전구의 밝기를 조절한다. 6 이상의 밝기로 오래 켜 놓으면 전구나 후방부에 손상이 갈 수 있다. 실험은 4~5 정도의 세기로도 충분하며, knob 위치에 따라 밝기가 어떻게 변하는지 후에 교정하여 사용하게 된다.

2. 3단 토글 스위치:

장비의 작동 모드를 off, laser, bulb 사이에서 바꿀 수 있다. 한 가지 모드가 켜져 있으면 다른 쪽 장비들에 전원이 공급되지 않는다. bulb 쪽에 스위치가 가 있으면 PMT 모듈에 전원이 공급되므로, 주변광이 새어 들어가지 않도록 반드시 셔터를 닫고 조심하여 실험하여야 한다. 중급물리실험 실습실의 암실 커텐을 잘 치거나, 그것으로 여의치 않으면 옷가지 등으로 detector box를 잘 덮어 실험하라.

3. DC output:

Detector box에 직류 전원을 공급하는 단자로, 이미 케이블로 이어져 있으므로 빼거나 끼우지 말도록 한다.

4. DC input:

파워서플라이를 꽂아 장치 전체에 전력을 공급한다. 여기에 사용되는 파워서플라이 선을 붙여 놓았는데, 빼거나 바꾸지 않도록 한다. 빼져 있으면 아무거나 꽂아 망가뜨리지 말고, 조교에게 부탁하여 12 또는 15볼트 서플라이를 맞추어 끼워야 한다.

U-Channel



Figure 2.13: U-Channel을 열었을 때 보이는 각 구성 요소들의 모습. 4, 5번에 조절 나사가 붙어 있다.

1. Bulb:

Single photon 실험의 광원으로 사용하는 일반적인 전구이다. 백색광 전구에 녹색 필터가 부착되어 있으며, 파장 대역은 546nm를 중심으로 FWHM(full-width half-maximum)은 10nm이다.

2. Diode laser:

파장 $670\pm0\text{nm}$, 출력 1.0mW 가량의 일반적인 레이저이다. 자석으로 된 지지대에 올려져 있으며, 지지대를 이동시켜 align 할 수 있다. Bulb를 사용하기 위해 서는 레이저를 옆으로 치워 벽에 붙여 두어야 bulb의 광로를 확보할 수 있다.

3. Source slit:

Bulb와 레이저로부터 나온 빛을 단일슬릿을 이용해 서로 동일한 모양을 가진 광원이게끔 만든다.

4. Double slit/Blocker:

사진의 좌측에는 이중슬릿을 배치하여 간섭 패턴을 얻고, 우측에는 blocker를 배치하여 마이크로미터의 조작을 통해 이중슬릿을 한쪽씩 닫을 수 있다.

5. Detector slit:

단일슬릿을 놓고 마이크로미터를 조작하여 PMT/photodiode 가 읽는 빛의 위치를 조절한다. Source slit과 동일한 단일슬릿을 사용하고, 간섭 패턴을 가로 방향으로 위치에 따라 값을 읽는 Detector가 된다.

조절 나사

이 실험 장비에는 두 개의 조절 나사가 달려 있다. 하나는 블로커를 움직이는 것으로 채널 중간에 달려 있으며, 다른 하나는 디텍터를 움직이는 것으로 채널 끝 디텍터박스 근처에 달려 있다. 이 실험 과정의 전반은 얼라인을 잘 수행한 후, 블로커 위치를 적절히 조절하여 단일 슬릿, 이중 슬릿 혹은 그 중간의 비대칭 슬릿 상태를 만든 뒤 디텍터 슬릿을 옮겨 가며 위치에 따른 빛의 세기 분포를 얻는 것이다. 나사를 돌릴 때 주의해야 할 점은 **백래쉬**가 존재한다는 것이다.

백래쉬(backlash)는 아날로그 기기의 knob을 돌릴 때 knob에 표시된 값과 실제 물리량이 선형성이나 재현성을 잃는 현상을 말한다. 이러한 현상이 일어나는 이유를 생각해 보면, 기계 부품이 맞물릴 때 완벽히 붙어있는 것이 아닌 간극 (clearance)이 존재하는데, 이에 따라 knob을 같은 각도만큼 돌리더라도 실제 축은 그보다 적게 회전할 수 있다. 이는 돌리는 방향에 따라서, 그 이전에 돌리던 방향으로 계속 돌린다면 축의 회전 각도가 손잡이의 회전각과 같겠지만, 방향을 달리하면 더 조금 회전하게 된다. 이러한 요인으로, 실험계의 조작 변인은 장비에 써 있는 값 뿐만 아니라 실험을 진행하는 방향에도 의존하게 된다. 따라서, 1, 3, 4, 5 등의 순서로 실험을 하고 다시 2에 가서 실험을 하면, 중간에 방향이 바뀌었으므로 실제 조작 변인은 2의 위치에 있지 않다. 만약 모든 측정을 같은 방향으로 오름차순 혹은 내림차순으로 돌면서 했다면, 편차가 같은 방향으로 빠져서 개형이나 선형성을 해치지 않는다. 그러나 측정 방향을 제멋대로 움직이면 backlash의 영향에 오염될 수 있다. blocker slit을 얼라인하는 경우, 언제 이중슬릿을 가리고, 언제 안 가리는지를 재 놓고, 방향을 기억하지 않은 채 그 숫자 위치에 다시 가져가 보면 간접무늬가 바뀐다. 비대칭슬릿 실험은 파장의 몇 배 단위로 슬릿을 옮겨 가며 측정해야 하는데, 이는 수 마이크로미터 정도에 불과한다. 하지만 backlash는 이 정도 오차를 주기 충분하고, 잘 제어하지 않는다면 재현성이 없어져 그때그때 파형이 달라지게 된다. 분명히 전에는 이중슬릿이 었는데 다음에는 비대칭 슬릿 패턴이 나오는 등의 식이다. 이러한 요인들을 펼히 조심하여, 슬릿들의 얼라인 및 캘리브레이션 시 반드

시 위치 뿐 아니라 움직인 방향도 함께 기입하여야 한다.

이외에도, 계의 정지마찰에 의해 약간의 오차가 발생한다. 실제로 노브를 돌린 것에 의해 생긴 변위를 축소해서 슬릿을 움직이는 과정에서 이런저런 마찰 요소들이 발생하는데, 이로 인해 실제 돌린 거리에 비해 작은 거리만큼 움직이고 있다가, 많이 쌓이면 갑자기 큰 거리를 이동하고, 다시 돌린 것보다 더 조금 움직이다가 쌓이면 더 크게 이동하는 등의 문제가 반복된다. 이러한 것을 감안하여, 미세눈금은 절대 돌린 회수나 간격으로 기억하면 안 된다. 반드시 써 있는 눈금의 위치와, 돌려왔던 스캔 방향을 둘 모두 기입해서 보아야 재현성을 그나마 얻을 수 있다. 뿐만 아니라 실험자에 따라 멈추는 습관이 다를 수 있어, 같은 방향 같은 숫자 위치에 놓더라도 A 실험자가 돌린 경우와 B 실험자가 돌린 경우에 다른 개형을 얻을 수 있다.

이 점이 SPI 실험을 재실험 넘치게 만들며, 초기에 미리 주의를 깊게 기울이면 많은 실험 테크닉을 배우면서도 한방에 실험에 성공할 수도 있다.

디텍터 슬릿이 수직으로 서 있지 않으면 극대와 극소의 신호를 섞어서 받을 수 있다. 극대 근처에 디텍터 슬릿을 놓고, 살짝 돌려 보면 포토다이오드 출력이 최대가 되는 점이 세로로 곧게 서서 간섭 무늬의 직선과 평행하게 정렬되는 점이다. 블로커 슬릿 역시 철저한 교정이 필요한데, 관련 절차는 후술하였다.

슬릿

실험 테이블에 6개의 슬릿이 준비되어 있으며, 이중 슬릿이 3 종류 (14, 15, 16호), 동일한 단일슬릿이 2개, 넓은 폭의 blocker가 1 개 있다. 단일 슬릿 중 하나는 source slit, 하나는 detector slit인데,

각각 이중슬릿 앞에 두어 spatial coherence를 주는 용도와, 디텍터 위치에 붙여 원하는 지점에서의 빛의 세기만을 읽게 하는 용도로 쓰인다. 블로커 슬릿은 블로커 조절나사에 붙여 이중슬릿 뒤를 적절한 위치로 가렸다 풀었다를 조절할 수 있게 되어 있다. 슬릿은 모두 85 마이크로미터의 동일한 폭을 가진다. 이중슬릿의 간격은 사용되는 슬릿의 호수마다 다른데, 14호 슬릿은 네임펜으로 14라고 써 있으며 15, 16도 글자를 새겨 놓았으나 잘 보이지 않는다. 실험을 통해 직접 찾아보시오. 다음 표는 슬릿의 호수별 간격을 나타낸 것이다.

Slit No.	Slit Spacing	Unit
14	356	μm
15	406	μm
16	457	μm

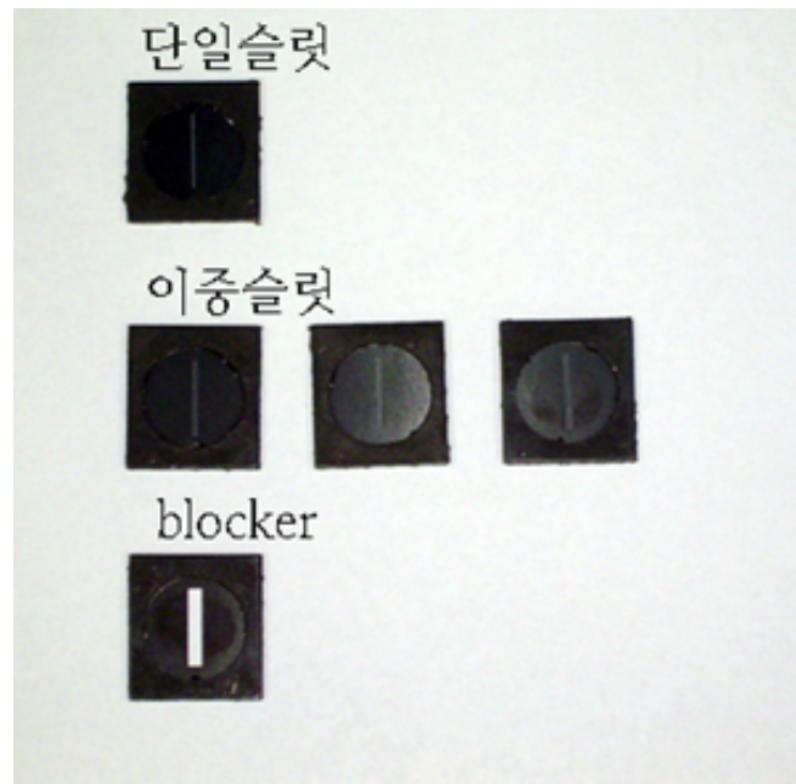


Figure 2.14: 실험에 사용되는 슬릿들



Figure 2.15: 2기의 실험 키트 사진. 왼쪽이 레이저 실험용, 오른쪽이 PMT 실험용이다.

실험 키트는 여닫을 수 있는 U-Channel의 한쪽 끝에 Detector box 및 U-Channel Panel이 붙어 있는 구조로 되어 있다. 상술한 바와 같이 Detector Box는 PMT가 들어있는 암실이므로, 충격에 몹시 약하다. 팔을 기대거나, 실수로 실험장비를 눌러 휘청이게 하여 바닥에서 떨어졌다가 땅지 않게 주의하라. 장비가 조금씩 망가졌는데, 한 키트 (TWS2-A) 는 레이저 실험이 가능하고, 나머지 한 키트는 Single Photon 실험이 가능하다. 아래 사진을 확인해 보면 두 키트의 Panel 모양이 약간 다른 것을 알 수 있는데, 사서 사용하다가 시간이 지나 망가진 후 재구입하였을 때 디자인이 바뀌어서 그렇다. 역사가 그러하니만큼 망가지면 부품을 재확보하기 어려우니 조심해서 사용하도록 하라. 학과에서 새로운 키트 구입에 대한 견적을 받아둔 상태이다. 한편 U-Channel 덮개에 각 키트별로 어떠한 실험에 사용되는 것인지 적어 놓은 종이가 붙어져 있다. 종이를 떼거나, 의도적으로 채널 뚜껑을 바꾸어 다른 조를 방해한 조는 조원 전체의 보고서를 미제출로 처리한다. 중급물리실험 1 강좌는 한 개의 보고서라도 미제출을 할 경우 낙제점 F를 받을 수 있다.

Pulse counter / Interval timer(PCIT) Detector box의 PMT

output을 BNC Tee로 갈라서 하나는 오실로스코프, 하나는 펄스 카운터에 연결한다. 펄스 카운터에 반드시 5V 전원이 사용됨을 확인 하라. 전용 전원이 테이프로 붙어 있는데, 만약 떨어져 있다면 무언가 이상이 있을 수 있으니 일단 켜지 말고 조교에게 확인받도록 하라. PMT 설정 - Discriminator level 및 가속 전압 - 을 잘 조절하면 오실로 스코프에 펄스가 잘 보이게 할 수 있다. 이때 오실로스코프에 보이는 펄스와, 펄스카운터에서 센 펄스의 빈도가 비슷하게 잘 맞추면 파형을 직접 보지 않고도 단위 시간동안 몇 개의 광자가 들어오는지 셀 수 있다. Gate Time을 조절하면 0.1초, 1초, 혹은 10초간 들어오는 펄스의 개수를 셀 수 있고, Threshold를 조절하면 얼마 이상의 높이를 가진 펄스가 들어와야 카운팅할지 정할 수 있다. Threshold를 높이면 펄스를 적게 읽고, 낮추면 많이 읽게 된다. 이를 잘 맞추어 실험하여야 한다.



Figure 2.16: PC/IT 장비.

* 주의.

PMT 장비는 예민하므로 반드시 다음 수칙을 미리 확인하고 실험해야 한다. 장비를 켜기 전에,

1. 셔터가 닫혀 있는지를 확인하라.
2. High Voltage 스위치가 off 상태이고, High Voltage 다이얼이 0인지 확인하라.

3. 이 매뉴얼 아래의 Task List 섹션을 충분히 읽고 숙지했는지 확인하라.

이를 잘 확인한다면 U-channel의 뚜껑을 열고, 레이저 모듈을 빌려온 뒤 align을 해도 PMT가 손상되지 않는다. Bulb 위치는 align 과정에 맞도록 고정되어 있다. 따라서, 슬럿들이 U-Channel의 광축에 중심이 오게, 또 수직하게 잘 정렬되었다면 간접무늬를 잘 만들게 된다. 정렬 절차는 아래의 태스크 리스트를 참고하고, 정렬이 끝나면 뚜껑을 닫아야 한다. 이때 L자 래치를 너무 빠르게 닫으면 충격이 가 얼라인이 틀어질 수 있다. 가능한 여러 요인들을 고민해 보고, 충격이나 진동을 최소화해서 정렬이 틀어지지 않도록 한다.

오실로스코프를 이용한 포톤 카운트 측정

* 이 부분의 본문은 김광탁 조교의 응급 매뉴얼입니다.

PMT의 신호는, 빛이 많을 때에는 광자 양에 비례하는 출력전류를 주지만, 빛이 작을 때에는 광자 수에 비례하는 피크 개수를 준다. 따라서 이 신호를 필스카운터 혹은 오실로스코프로 측정하면 광자의 개수를 근사적으로 셀 수 있다. 필스 카운터의 Threshold를 교정하는 과정에서, 혹은 필스 카운터가 고장난 경우에는 오실로스코프를 이용해 직접 일정 시간동안 들어온 피크의 수를 세어야 한다.

이런저런 주의에도 불구하고, PCIT가 고장나는 경우가 종종 있는데, 이는 DC Barrel Jack을 모양이 같다고 혼동해서 끼운 경우 전압의 차이 때문에 문제가 생긴다. 메인 실험 장치는 각각 12볼트, 15볼트를 사용하는데 바꿔 끼우더라도 Photodiode의 포화 전압이 바뀔 뿐 (OP-AMP의 성질을 생각해 보라) 큰 문제가 생기지는 않는다. 더불어 5볼트 전압을 연결해도 작동은 되지 않지만 망가지지는

않는다. 그러나 5볼트로 작동되는 PCIT에 12볼트나 15볼트 파워를 잘못 연결하게 되는 경우, 카운터가 타 버려 작동하지 않게 된다. 이에 따라 2021년 종강 이후 신규 구입한 카운터를 2022년에 잘 사용하였는데, 망가뜨리지 않고 잘 사용하기를 바란다. 이러한 실수를 막기 위해 2022년부터 각 파워 서플라이를 실험장치에 붙여 놓았으니 절대로 고무테이프를 뜯어내지 말 것. 파워서플라이가 이상한 경우에는 절대로 직접 교체하지 말고 조교를 호출한다. 만약 그럼에도 불구하고 펄스 카운터가 망가진 경우에는, 오실로스코프를 이용해 PMT 시그널을 뽑아낼 수 있다.

오실로스코프를 PMT Output에 연결하고, Detector Box의 Discriminator를 0 이상으로 두어야 신호를 얻을 수 있다. 이후 오실로스코프의 Vertical, Horizontal knob을 이용해 측정 범위의 시간 간격 및 전압 스케일을 적절히 맞춘다. 신호가 작고 짧으므로 카운트하기 까다롭기 때문에, 설정을 잘 조절하지 않으면 포톤에 의해 나오는 신호가 뭉개질 수 있는데, 이를 막기 위해 Noise filter를 누르고 filtering 주파수를 최대한 낮추어 실험한다. 포톤에 의한 피크와, 빛이 없을 때도 PMT에서 얻어지는 Background Noise를 구분하기 위해 빛의 세기를 최대한 낮추고, 셔터를 조심스레 여닫아 가며 피크의 개수 차이를 분석한다. 먼저, 시간 간격을 수십 나노초 정도 Div. scale로 실험하면 포톤에 의한 펄스의 파형을 직접 볼 수 있는데, 이 때 Ringing이 나타나는 것을 볼 수 있다. Ringing은 전자기적 공진 효과 때문에 피크가 날카롭지 않고, 울리는 듯한 잔여 파형이 시간에 따라 좀 더 생기는 것을 의미한다. 이때 단순히 모양만 곱슬곱슬한 것이 아닌, 한 피크가 사그라든 이후 강한 상관관계를 가진 것처럼 보이는 피크가 하나 더 연달아 나오는 경우가 있다.

이러한 Secondary peak에 대한 treatment는 작동 원리를 살펴보고 어떻게 해야 할지 잘 생각해 보아야 한다. 광전관의 진공이 완벽하지 않은 경우, 한번 Dynode의 가속전압에 의해 방전된 피크가 생긴 직후에는 방전이 없었을 때보다 경로의 저항이 작은 상태가 된

다. 이러한 현상은 PMT의 광자 증배 문턱을 낮추고, 보다 노이즈에 취약한 상태가 되므로 주변 잡음에 의해 한번 더 펄스가 튀어나올 수 있다. 즉 방전에 의한 저항의 비선형성 때문에, 종이 올리듯 깨끗하게 pulse가 ringing하는 모양이 아니라, 펄스가 끝날 때 쯤 작은 꼬리 펄스가 또 튀어나올 때도, 아닐 때도 있다. 이는 분명히 잡음에 의한 것이지만, 선행하는 광자에 의해 잡음을 들을 수 있는 확률이 높아진 것이므로, 무조건 버려야만 하는 것은 아니다. 광자의 입사에 기인한 것이 맞고, 그 효율이 얼마나 되는지를 확률적으로 결정하는 것이기 때문에 피크를 많이 세면 이러한 현상이 주는 우연오차는 줄어든다. 보통 secondary peak의 높이는 광자에 의한 것의 80퍼센트 가량이 되는데, 광자가 주는 펄스도 그때그때 높이가 다르므로 이를 걸러내는 것이 쉽지 않다. 따라서 이러한 문제를 해결하기 위해, 수십 나노초 영역에서 광자에 의한 피크 모양 및 secondary peak를 관측해 보고, 높이 기준을 적절하게 잡은 후 threshold 설정에 참고해야 한다. Threshold가 secondary peak을 배제하고 메인 피크만 재면 깨끗하게 광자에 1:1 대응되는 펄스 수를 얻을 수 있을 것 같지만, 피크 높이의 불확실도 때문에 광자가 들어왔는데도 걸러지는 경우가 있다. Threshold가 아예 낮아서 노이즈는 걸러내되 secondary peak은 잡는 경우, 확률적인 노이즈가 많이 들어오지만 (secondary peak 가 매번 들어오는 게 아니고 어느정도의 확률로 주어짐) 일단 들어온 광자 피크를 놓치는 비율이 위의 경우보다 현저히 작게 만들 수 있기 때문에 Overall result가 더 깨끗할 수도 있다. 어느 쪽을 택하던, 포톤의 피크를 직접 세는 것은 일정 수준의 효율에 대한 고려를 요구한다. 따라서 이를 염두에 두고 광자를 일정 비율로 많이 읽거나 적게 읽을 때, 그 비율이 일관되게 유지되어 우연오차를 줄일 수 있는 기준을 잡는 것이 중요하다. 만약 그렇게 잘 되지 않았더라도, 피크를 아주 많이 세서 평균을 취하면 우연오차의 영향을 줄일 수 있다.

광자에 의한 피크 모양에 대한 파악이 끝났으면, 실제 피크의 수를 셀 때 피크 펄스의 모양이 보일 정도로 좁은 시간 간격은 적절하지 않다. 수십 밀리초에서 수 초 가량 스캔하도록 해 놓고, 지나가는

피크의 수를 세는 것이 바람직하다. 오실로스코프에서 시간 간격 (Time Division) 눈금은 굵은 눈금 한 칸을 의미한다. 통상 약 10개의 굵은 눈금이 한 화면을 이룬다. Vertical position knob을 돌려 파형의 위치를 위아래로 조정할 수 있는데, 이때 포톤으로 세기 시작하는 기준이 되는 경계를 화면 상의 가로축이 되게 잘 정렬하면 펄스를 세기 쉬워진다. 이후 Run/Stop 버튼을 눌러 펄스를 세거나, csv 파일로 데이터를 저장하여 피크를 분석해 볼 수 있다. 피크를 검출할 때의 통계처리는 여러 가지 프로그램을 이용해 할 수 있다. Excel의 매크로, Python의 Pandas/Numpy 라이브러리, MATLAB 및 R 등 사용하기 편한 것을 사용할 수 있다. 혹은 사진으로 저장 후 눈대중으로 처리해도 충분하다. 30개의 피크로 통계처리를 염밀하게 해서 피크인지 아닌지를 걸러내는 것보다, 실험을 10번 해서 300개의 피크를 구하는 게 더 나은 전략일 수 있다.

셀 피크와 거를 피크를 걸러내는 기준은 평균치로부터 $5\sim 6\sigma$ 정도로 벗어난 것들을 세는 등 정량적인 기준으로 outlier를 세어 볼 수도 있다. 또한 너무 연달아서 나오는 피크, 특히 시간 간격이 거의 일정하게 나오는 피크 쌍은 앞서 언급한 요인에 의한 것일 수도 있으므로 시간간격이 일정 수준 이상인 포톤만 세는 것도 고려해볼 수 있다.

레이저 고장에 관한 언급

고질적인 문제이지만, SPI 실험을 위한 반쪽짜리 실험장비가 2개 있다 보니, PMT 실험 시 얼라인을 위해 레이저를 켜야 하는데, 작동하지 않는다. 따라서 옆 모듈의 레이저 실험장비의 모듈을 빌려와야 한다. 레이저 실험장비의 경우, 오랜 세월 동안 잡은 고장과 수리를 반복하면서 선이 많이 짧아졌다. 빨간색, 검은색, 노란색 선이 순서에 맞게 연결되어야 하는데, 현재 긴 연장선을 사용하여 뗄 수 없게 고정해 놓은 상태이다. 원래 레이저 모듈을 탈착식으로 두어 왼쪽

모듈의 드라이버에 끼웠다가 오른쪽 모듈의 드라이버에 끼웠다가를 반복하였으나, 많이 낚아서 어차피 PMT 실험용 장비의 레이저 전원 장치가 고장나 버렸다. 이러한 이유로 레이저 모듈의 전원을 레이저 실험장비용에 고정시켜 두었는데, 선 길이가 충분히 기므로 절대 뽑거나 손상시키지 말고, 두 장비 모두 채널을 열어둔 채 레이저 모듈은 오른쪽에, 드라이버는 왼쪽 모듈의 것을 선으로 이어진 채 사용해서 실험하면 된다. 어차피 뚜껑을 닫고 실험할 때는 레이저를 치워야 한다.

왼쪽 장비로 실험할 경우에는, 레이저 선을 단선되지 않게 조심해서 잘 양 옆 빈 공간에 채워넣어야 한다. 만약 선이 빠져나와 있는데, 모르고 뚜껑을 덮으면 선이 눌려서 레이저 방향이 틀어진다. 그러면 뒤의 정렬이 모두 무효화되므로 처음부터 다시 실험하여야 한다. 줄의 장력에 대비해 조심해서 정렬하라.

관련하여 신규 장비의 구입이 조만간 추진될 가능성이 있으니 마음의 평안을 가지고 실험하자.

2022, 2023년 기준 현재 레이저 다이오드에서 나오는 (노랑, 빨강, 검정)색 선이 길게 연장해 놓은 연장선의 (노랑, 초록, 파랑)색 선과 연결되어 있다. 방향이 바뀌지 않았는지 확인해보고 실험하도록 하며 문제가 있을 경우 조교에게 확인받도록 한다.

2.4 Task List

이 목록의 내용들이 보고서에서 가급적 누락되지 않게 주의하면 좋으나, 큰 부담이 될 수 있다. 가급적 모든 태스크를 수행하는 것을 목표로 하되, (1) 실험 데이터를 얻고 (2) 적절한 회귀를 제시해

서 2022년에는 태스크별로 하지 않음 : 0점, 수행함 : 1점, 잘 수행함 : 2점, 아주 잘 수행함 : 가산점 1점을 주었는데, 예를 들어 실험을 아예 하지 않거나, 했으나 보고서에 누락된 경우 해당 태스크를 0점 처리하였고, 실험을 했는데 무언가 아쉬운 경우 2점 만점에 1점 (단일 슬릿 실험을 했는데, 블로커 정렬이 부족해서 이중슬릿의 찌글찌글한 무늬가 나오는 경우. 회귀 분석을 제시하다가 만 경우.) 실험에서 시키는 태스크를 충실히 수행한 경우 2점 만점에 2점 (회귀 분석을 수행했는데 구간을 잘못 잡았거나, 수렴을 멀 했거나 하는 등의 실수가 있지만, 주장하고자 하는 바는 잘 전달되는 경우 감점하지 않음.) 실험에서 제시된 이론보다 훨씬 고민을 깊게 해 보고, 여러 가지 회귀모델을 제시해서 실험결과를 훨씬 잘 반영하게 하거나, 플롯을 깔끔하고 가독성 좋게 제시하여 주장하는 바가 한 눈에 잘 전달되는 경우, 혹은 실험 설계를 열심히 하였거나 실험 과정에서 노력을 많이 하여 데이터의 퀄리티를 개선하기 위해 많은 노력을 한 경우 (이런 경우는 개형에 드러난다. 가령 이중슬릿 실험을 하는데 정렬을 정말 열심히 하면, 비대칭 슬릿같은 효과 - lower envelope가 없어지게 할 수 있다. 이런 점을 강조하면 추가점수를 받을 수 있다.) 추가점수를 주어 다른 태스크를 못 하거나 감점된 경우 만회할 수 있도록 하였다. 어렵고 힘들더라도 우수한 보고서를 만드는 연습을 강력히 권장하기 위해, 보고서 딜레이 제출은 하루에서 이를 정도의 감점치를 태스크 하나 정도에 해당하도록 채점하였다. 채점 기준은 연도별로 달라질 수 있으나, 노력해 봐도 잘 되지 않는 태스크가 있는 경우 다른 태스크들을 실수 없이 완성도 있게 수행하면 추가 점수를 받아 만점을 받을 수 있도록 채점한 바 있으므로 부담이 너무 커지지 않는 선에서 가능한 한 많은 종류의 데이터 처리 및 회귀 분석을 경험해 보고, 보고서에 제시해 볼 수 있도록 권장한다.

채점에 고려된 내용들은 다음과 같다.

2021년 기준

- ▶ 열라인을 제대로 수행
- ▶ 블로커 정렬 절차를 제대로 이해
- ▶ 포토다이오드 실험 수행
- ▶ PMT 실험 수행
- ▶ 레이저 이중슬릿 실험 (회귀 없으면 감점)
- ▶ 레이저 단일슬릿 실험 (회귀 없으면 감점)
- ▶ 두 슬릿의 동질성 검정
- ▶ 비대칭 이중슬릿 실험
- ▶ 레이저 선풍의 분석
- ▶ PMT 구동전압 및 문턱전압 산출 (회귀 없으면 감점)
- ▶ Detector Blocker 전달함수 측정 및 센터 측정
- ▶ 전구의 세기별 광량 측정
- ▶ PMT 단일슬릿 실험
- ▶ PMT 슬릿별 빛의 세기 측정
- ▶ PMT 이중슬릿 세기에 따른 분석
- ▶ PMT 이중슬릿 간격에 따른 분석
- ▶ 별브 파장의 역산
- ▶ 단일광자 영역인지 확인
- ▶ 오차 처리
- ▶ 보고서 완성도

2022년 기준

- ▶ PMT 교정
- ▶ 레이저 간섭
- ▶ 레이저 회절
- ▶ 비대칭 슬릿의 회절-간섭 실험
- ▶ 전구 간섭
- ▶ 전구 회절
- ▶ 선풍 추산

- ▶ 단일 광자 영역 확인
- ▶ 오차 처리, 유효 숫자, 단위 기입, 회귀 분석
- ▶ 보고서 완성도

* 실험 시작 전과 끝에 반드시 로그북을 작성해야 한다. 로그북이 공란일 시 감점한다.

TASK A : Align (기본 단계)

측정을 시작하기 전에, U-channel 내부의 장치를 정렬(align)하여 광학 실험을 위한 준비를 하여야 한다. 슬릿을 변경할 경우, 이 과정을 처음부터 다시 수행하고 몇몇 결과치를 보고서에 기입해야 하므로, 슬릿을 변경하기 전에는 매뉴얼을 꼼꼼히 읽고 신중하게 판단하여 실험을 최소화하도록 한다. 한번 슬릿을 떼었다 다시 붙이면, 위치가 미묘하게 달라져 결코 같은 실험을 다시 할 수 없다. 특히 비대칭 슬릿 실험 같은 경우 치명적인 타격을 받는다. 현명하게 실험을 설계하였다면, 14호 슬릿으로 단일, 이중, 비대칭 슬릿 실험을 모두 해본 후 나머지 슬릿을 얼라인하여 사용하는 것이 좋다.

얼라인을 할 때에는 레이저가 필요하다. 이는 벌브 실험을 할 때에도 마찬가지이므로, 슬릿을 잘 닫아놓은 것을 확인하고, 포토 다이오드 시그널을 보면서 최적화한다. 이 과정이 중요한 이유는, 벌브의 빛으로는 정렬이 잘 되었는지 확인할 수 있을 만큼 무늬가 보이지 않기 때문이다. 벌브의 빛은 대략 축 방향을 향하도록 정렬되어 있으므로, 이후의 소스 슬릿, 이중 슬릿 및 블로커, 디텍터 슬릿만 잘 정렬된다면, 정렬에 사용한 레이저를 떼고 전구로 실험해도 질 좋은 간섭무늬를 얻을 수 있다. 한편, 레이저 실험의 경우 뒤의 슬릿들이 다 정렬되어 있더라도 앞에서 레이저를 움직이면 당연하게도 개형이 다른 무늬를 얻게 된다. 정확히는, 세기가 달라지는 효과와,

소스 슬릿의 유한한 크기로 인해 뒤의 이중슬릿의 각 슬릿으로 입사하는 빛의 세기가 다르게 된다. 이는 visibility를 바꾸고 심한 경우 비대칭 슬릿의 개형을 얻게 하는 결과를 준다. 따라서 레이저 얼라인 과정에서는, 빛이 오는 방향에서부터 레이저, 소스 슬릿, 이중 슬릿, 블로커를 차례로 잘 정렬하여야 한다. 특히, 이미 고정한 컴포넌트가 틀어지면 뒤의 작업이 모두 수포로 돌아가기 때문에 아주 잘 고정하고, 틀어지지 않도록 주의해야 한다. 디텍터의 경우 측정만 하는 것이므로 슬릿을 여닫는 것으로는 간섭무늬의 모양을 바꾸지 않으므로 얼라인이 끝난 뒤에 최적화를 위해 더 움직여도 된다. 그러나 처음에 디텍터 위치를 잘 맞춰놓지 않으면, 간섭무늬의 중앙이 디텍터가 움직일 수 있는 범위의 중앙에서 좀 멀 수 있는데, 이는 비교적 잘 맞춘다고 해도 디텍터가 9mm 정도밖에 움직일 수 있는 폭이 없어, 2mm만 틀어져도 중앙에서 40퍼센트 바깥으로 치우친 간섭무늬를 얻고, 이는 개형에서 중요한 부분을 심각하게 잘라내는 결과로 이어진다. 이는 단순히 무늬가 가려지는 것 뿐만 아니라, 주변광에 의한 잡음, 디텍터 슬릿 뒤쪽으로의 빛샘 등 여러가지 요인으로 실험결과를 오염시키는 결과를 준다.

빛의 방향을 정하는 것은 단순히 측정이 잘 되도록 중앙에 갖다 놓는 것보다 더 큰 의미도 가진다. 이는, 빛의 통과하는 비율에 따라 두 슬릿을 지나는 빛의 세기가 달라지기 때문이다. 빛이 통과하는 비율을 결정하는 것은, 빛이 얼마나 잘리느냐에 따라 결정된다. 슬릿으로 들어오는 빛이 모두 나오는 것이 아니기 때문에, source slit 을 통과한 빛이 이중 슬릿의 각 슬릿까지 향하는 광경로의 길이가 비슷하지 않다면 한쪽으로 빛이 더 세게 나오게 된다. 이러한 일들은 이 실험에서 사용되는 모든 슬릿 및 가리개/블로커 요소들에서 나타나며, 얼라인이 잘 되지 않았다면 얻어져야 할 대칭성을 깨고, 심할 경우에는 개형마저 바뀐 간섭무늬를 얻게 된다.

즉 얼라인의 목적은 (1) 간섭무늬를 중앙에 오게 하고, (2) 빛의 세기가 충분하게 하고, (3) 두 슬릿의 동질성을 확보하여 Visibility가

좋게 하고, (4) Detector 슬릿을 잘 정렬하여 인접한 신호와 적분된 값보다, 가급적 날카롭게 그 지점에서의 세기값을 얻는 것을 추구하며, (5) Blocker의 위치에 따라 실제로 슬릿이 얼마나 가려졌는지를 파악하여 비대칭 슬릿 실험의 분석에 사용하기 위함이다.

특히 디텍터 및 블로커 정렬 시에는 앞서 언급한 Backlash에 의한 데이터 오염이 있으므로 필히 주의하여 실험하여야 한다.

1. Align

- ▶ 셔터가 닫혀 있고, PMT 전원이 Off 상태인 것을 확인한 후, 3단 토글 스위치가 벌브로 가 있지 않음을 확인한다. 그러면 PMT에 전압이 공급되는 것을 막을 수 있다. 이후 네 개의 L자 랫치 (Latch)를 돌려 U-channel의 뚜껑을 연다. U-channel 패널의 3단 토글 스위치를 Laser로 맞추어 놓으면 Diode Laser로부터 빨간 빛이 나오는 것을 볼 수 있다.
- ▶ 레이저를 레이저 받침대의 벽(자석)에 고정시킨 후, 한쪽 벽에 레이저 모듈이 밀착되게 한다. 이 과정이 허술하면 레이저가 실험 도중에 틀어질 수 있다. U-Channel 아래쪽을 만져보면, 레이저를 좌우로 움직일 수 있는 황동 Knob이 존재하므로 이를 이용해 레이저를 좌우로 움직인다. 나사를 고정하고 레이저를 움직이면 실험 도중에 전선이 당겨져 레이저가 흔들릴 수 있으므로 반드시 레이저는 벽에 밀착시키도록 한다. 레이저의 높이 방향은 맞추어져 있는데, 직육면체 모양의 레이저 모듈의 네 옆면을 이리저리 배치해 보면서 높이가 맞는 방향을 찾자. 높이가 정 맞지 않는 경우에는, 옵티칼 트위저 테이블의 윙각렌치를 이용하여 높이를 조절할 수 있다.
- ▶ Align card가 있으면 빔이 원하는 방향으로 가는지 알기 편하

다. 종이를 T자 모양으로 오리되, 아래 부분의 폭이 U-Channel과 딱 맞게 자른 뒤 가운데에 자로 중심선을 그린다. 몇 밀리미터만 떨어지더라도 얼라인이 나빠지므로, 잘 그리면 좋다. 나중에 다른 광학 연구에서 표준 광학 마운트들을 사용할 때에는 기성 제품의 얼라인 카드 및 타겟 등등을 사용할 수 있다. 얼라인 카드의 사용법은, 빛이 가야 할 곳에 끼워 중심위치를 보면서 빛이 중심을 향하도록 앞쪽부터 조정하는 것인데, 이 과정에서 뒤의 슬릿이 모두 치워져 있는 상태인 것이 좋다. 같은 각도만큼 틀어져도 멀리서 보면 편차가 커서 오차를 줄일 수 있으므로, 디텍터 바로 앞에 T자 종이를 끼운다.

- ▶ 빔의 좌우 진행방향을 맞추기 위해, T자 종이를 끼워 슬릿이 아무것도 없는 상태에서 빔이 종이의 중심축을 향하는지 보자. 이후 T자 종이를 치우고, Detector 슬릿 조절 나사를 5.00mm에 맞춘다. 이 상태에서, T자 종이를 끼웠다 뺐다 해 보며 빛의 높이가 충분히 포토다이오드가 있는 부분의 중심을 향하는지 확인해 본다.

2. 슬릿 삽입

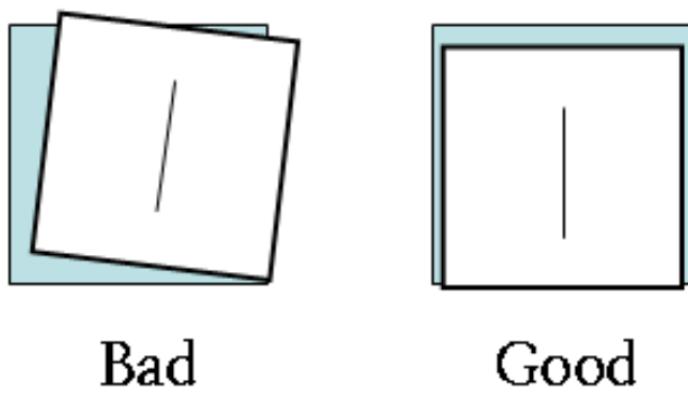


Figure 2.17: Source Slit의 삽입 시 좋지 않은 예시 (왼쪽)와 좋은 예시 (오른쪽)

- ▶ 슬릿에는 자석 스티커가 붙어 있어서 U-Channel에 붙일 수 있다. 방향을 잘 맞추어, 슬릿의 틈이 수직 방향이 되도록 잘 눌러서 삽입한다.
- ▶ Source slit을 삽입하기 전, 얼라인 카드를 뒤에 두고 빛의 방향이 중심을 잘 향하는지 확인한다. 이후 슬릿을 삽입하고 나면 얼라인 카드에 맷한 빛의 방향이 가운데가 되지 않을 것이다. 슬릿을 움직이면, 레이저와 슬릿의 분리벡터 방향으로의 운동량 성분이 걸러지기 때문에, 가운데를 향하도록 얼라인을 해야 한다.
- ▶ 빛의 세기 (투과율) 와 방향이 중앙이 되는 것은 trade-off가 있다. 앞쪽이 고정되어 있으면, 빛이 중앙으로 가게 하는 슬릿의 위치와, 빛을 가장 많이 투과시키는 슬릿의 위치가 서로 다를 수 있다. 이 경우 앞쪽의 얼라인이 잘못된 것이므로 1번의 단계를 반복하여 sweet spot을 찾도록 한다. 이 과정에서, Detector photodiode를 이용하면 유리하다. 슬릿으로 가리지 않은 채 포토다이오드의 출력을 보면 최대값으로 포화가 되어 슬릿 위치를 바꿔도 변화가 없다. 이 때, 포토다이오드 출력을 빨간색 스탠드형 멀티미터에 연결하고, 출력전압을 읽는다. 소스 슬릿이 없는 상태에서 최대한 수직을 맞춰서, 디텍터 슬릿을 삽입한 후 포토다이오드 출력이 최대가 되는 위치에 디텍터 슬릿을 놓기 위해 미세조정을 한다. 이때 Detector 슬릿 조절 나사의 위치는 5.00 mm에 있어야 한다. 이후 소스 슬릿을 삽입하고, 포토다이오드 출력을 읽으면 투과광 중 중심으로 향하는 세기가 측정되므로, 이 값이 최대가 되게 하면 단일슬릿에 의한 회절 프로파일의 중심이 디텍터가 있는 평면에서 축 상에 정렬된다. 이때, 앞 과정을 세심하게 반복하지 않으면 결과적으로는 중심에 오지만 빛이 각 슬릿들에서 구불구불하게 휘어서 들어가는 가능성도 존재한다. 이를 확인하기 위해, T자 종이를 앞뒤로 움직여 보면서 거리에 무관하게 빛이 중심축을 기준으로 대칭이 잘 되는지 확인해 본다. 이러한 과정을

반복하면 소스 슬릿의 설치가 끝난다. 만약 소스 슬릿이 비스듬하게 삽입되어 있으면 무늬의 축이 틀어질 것이다. 얼라인 카드를 잘 사용하여, 디텍터가 움직이는 방향으로 회절무늬가 길쭉하게 정렬될 수 있도록 한다. 만약 이 무늬가 틀어져 있으면, 디텍터 슬릿에 의한 샘플링 과정에서 한 지점에서의 빛의 세기가 아닌, 여러 지점에서의 빛의 세기가 평균되어 뭉개진 신호를 얻게 되며 visibility 하락의 주 원인이 된다.

- ▶ 소스 슬릿의 얼라인이 끝나면 이중슬릿 14호를 삽입하고 아래의 그림을 참조하여 위치를 조정한다. 이중슬릿의 중심과 단일슬릿 패턴의 중심이 일치하도록 조정하면 된다. 이때, 이중슬릿의 극대와 극소 사이의 visibility를 보는 것이 중요한데, 만약 이중슬릿의 한쪽으로 더 많은 빛이 들어갔다면 완전한 상쇄간섭이 안 되어 visibility가 낮아진다. 중앙극대 위치에서 빛을 최대한 밝게 하면서도, 중앙극대에 인접한 바로 양쪽에서 극소가 충분히 작게 나오는 경우가 얼라인이 잘 되어 슬릿의 양쪽 틈으로 빛이 가장 많이 나오면서도 동등하게 나오는 상태이다. 여기서 잰 visibility는, 채널을 닫고 하는 것이 아니기 때문에 주변광의 영향을 많이 받는다. 열고닫는 과정이 많으면 얼라인이 틀어지므로, 가볍게 종이 등으로 살짝 디텍터 위치를 가리고, 양쪽 극소가 최소가 나오게끔 슬릿의 위치를 미세조정한다. 중앙극대 양 쪽의 1차 극대의 크기가 비슷한 것도 매우 중요하다. 여기서도 마찬가지로 무늬의 틀어짐을 최소화하는 방향으로 슬릿을 조정한다. 어느정도 이중슬릿에 의한 간섭무늬가 예쁘게 나오면, 디텍터 슬릿 위치의 fine tuning을 수행할 수 있다. 극대를 검출하는 위치가 가급적 5mm 근처에 오도록 하면 측정된 무늬가 잘리거나 오염될 우려가 적어진다. 이중슬릿의 얼라인을 잘 해서 극소가 0에 가깝게 하는 것은, 두 슬릿의 동질성을 확보하는 데 매우 중요하다. 두 슬릿을 지나는 빛의 세기가 다르면, 비대칭 슬릿 실험을 할 때 변화가 단조증가하거나 단조감소하는 방향이 아니라 중간에 변화의 방향이 꺾일 수 있는데, 이는 슬릿에서 나오는 빛의 세기가 다른 것과,

슬릿의 폭이 변화하는 효과가 compete 할 수 있기 때문이다. 따라서 초기에 얼라인을 잘 하면, 두 슬릿에서 나오는 빛의 세기는 같을 것이므로 이후의 실험값 퀄리티가 매우 올라간다. 뿐만 아니라, 두 슬릿을 지나는 빛의 세기가 달라 극소가 완전히 상쇄되지 않고 조금 남는다면, 선폭을 결정하는 과정에서 크기가 많이 틀어진다. 선폭에 의한 영향은 극소의 위치가 다른 여러 가지 간섭무늬를 mixing하여 극소가 완전히 상쇄되지 않고 흐릿하게 나오게 하는 결과를 주는데, 이는 슬릿의 동질성 약화로 인한 결과와 같은 방향이다. 따라서 이중 슬릿의 얼라인이 좋지 않으면 선폭도 크게 얻게 된다.

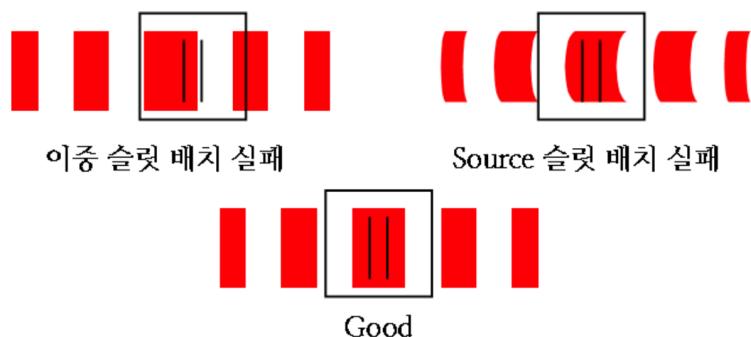


Figure 2.18: 이중 슬릿이 잘 놓인 곳에, source slit에 의한 단일슬릿무늬의 극대가 와야 한다. 그렇지 않은 경우 두 슬릿을 지나는 전기장 진폭이 달라진다.

3. Align 확인



Figure 2.19: Blocker 슬릿이 기울어진 경우 잘리는 모습.

▶ Tilt (기울어짐) 확인.

소스 슬릿과 이중 슬릿을 모두 삽입하고 수직으로 만들어 잘 얼라인을 한 뒤, 블로커를 이중슬릿 뒤에 삽입한다. T자 종이를 블로커 직후에 두고, 블로커 위치를 마이크로미터 조절나사로 움직이면서 무늬를 본다. 프라운호퍼 회절은 슬릿으로부터 거

리가 멀 때 나타나므로, 아주 가까이 종이를 대면 간섭무늬가 아닌, 빛살 두 개가 세로로 나온다. 이때 블로커로 왼쪽 혹은 오른쪽 슬릿을 가려보면, 빛살이 가려질 때 한번에 사라지면 블로커의 각도가 이중슬릿과 같은 것이나, 위쪽 혹은 아래쪽 부터 잘리기 시작하면 각도를 조절해야 한다. 트위저를 이용해 블로커의 위치를 미세하게 조절한다.

▶ 좌우 대칭 및 Visibility 확인.

두 개의 빛살이 모두 통과하여 이중슬릿 간섭 무늬가 나오도록 Blocker 위치를 조정하고 멀티미터를 Photodiode output 단자에 꽂는다. 아슬아슬하게 통과할 정도이면 부차적인 회절 효과가 들어올 수 있으므로, 여유 있게 블로커의 위치를 멀리 옮겨 둔다. 멀티미터의 전압을 통해 최대값과 최소값을 찾고, 1차 극대의 좌우 피크 값이 5퍼센트 이내의 차이가 나오는지 확인한다. Visibility(여기에도 불확실도 추산)는 출력 최대값과 출력 최소값의 비로, 제대로 align했다면 30 이상이 나온다. 정 안된다 싶으면 어느 정도 수준에서 그냥 진행할 수 있다. 보고서에 좌우 peak 값 차이 및 Visibility 를 기입하시오.

4. Blocker 위치 캘리브레이션

블로커를 움직여 가며 언제 이중슬릿이 되고, 언제 단일 슬릿이 되고, 언제 비대칭 슬릿 실험을 할 수 있는지 측정한다. 위치를 측정 할 때 backlash에 주의하여, 움직인 방향도 꼭 같이 기록해 두어야 한다. (보고서에는 기입할 필요 없음)

블로커 눈금이 5mm일 때, 슬릿 두 개가 모두 통과하는지 확인하고, 양쪽으로 움직여 보면 슬릿이 가려지기 시작하는 순간의 위치가 양쪽으로 같은 거리만큼 대칭적으로 떨어져 있는지 확인한다. 이것은 블로커의 중심과 이중슬릿의 중심이 5mm일 때 일치함을

이야기한다. 만약 잘 맞지 않는다면, 블로커를 너무 한쪽으로 틀어진 곳에서 비대칭/이중슬릿/단일슬릿의 차이가 발생하므로 조작에 불편함이 생긴다. 3mm에서 7mm 사이에서 중심이 일치한다면 괜찮지만, 1mm 정도로 한쪽 끝으로 떨어진 경우에는 뒤의 실험을 잘 수행하기 어렵다.

이제, 블로커의 위치를 정확하게 알아내기 위해 디텍터 슬릿의 위치에 따라 세기 분포를 얻는다. 이를 위해 채널의 뚜껑을 닫고 (먼지가 들어가지 않게 주의하시오.) 블로커 슬릿을 1mm에서 9mm 까지 움직이며 급격히 변하는 부분에서 촘촘하게 세기 분포를 측정 한다. 이때 디텍터 슬릿은, 이중 슬릿의 간섭무늬의 중앙극대 위치에 놓이게 한다. 이때 정말 급격히 변하는 구간이 있으므로, 조심조심 아주 작은 간격으로 재지 않으면 안 된다. 슬릿 폭은 파장의 몇 배 스케일인데, 이를 가려가며 하는 실험이므로, 손으로 파장의 몇 배 정도 되는 오더의 길이를 움직이는 만큼 매우 정교하고 정밀한 준비가 필요하다. 만약 간격을 너무 크게 움직여 중간에 빈 자리가 생길 경우, 다시 돌아와서 그 지점의 값을 재면 backlash로 오염되어 개형에 맞지 않는 값을 얻는다. 따라서 예비 실험을 통해 대강의 위치를 알고 있는 상태에서 미리 준비를 하고 그 구간의 데이터를 많이 뽑을 수 있게 한다. 그 결과 다음을 얻는다.

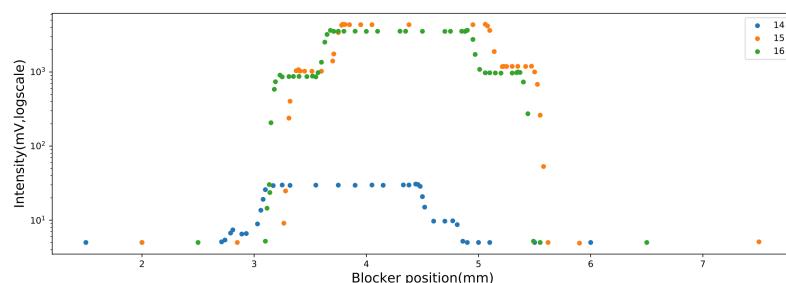


Figure 2.20: 김수진, 김영연, 노진영 (2022) 수강생의 실험 자료. 블로커의 위치를 움직여 가며 포토다이오드에 측정되는 세기를 확인한 것으로, 두 개의 스텝이 있는 것을 알 수 있다. 가운데 가장 밝은 곳이 슬릿이 둘 다 열린 곳이고, 양쪽에 살짝 낮은 지점이 슬릿이 하나만 열린 곳이다.

세기가 세 단계로 변하는데, 가장 어두운 영역은 아무것도 통과하지 않는 구간이고, 가장 밝은 구간은 이중슬릿을 지난 빛이 둘다 보강간섭을 하는 구간이다. 조금씩 가리다 보면 이중슬릿과 단

일슬릿 사이의 비대칭 슬릿 영역이 매우 가파르게 지나가고, 중간 정도 밝기 구간이 바로 단일슬릿에만 의한 효과를 보는 것이다. 단일 슬릿의 중앙 극대 위치는 이중 슬릿과는 다르기 때문에 (왜 다른가? 얼마나 다른지 제시해 보아도 좋다.) 여기서 얻은 값은 최대 밝기의 절반보다 약하다.

단일슬릿과 이중슬릿 사이의 영역에서, 비대칭 슬릿이 구성되는 구간을 잘 찾아보시오. 이때, 실제 실험할 지점을 지나도록 한쪽에서 4개 이상의 점을 찍는 것을 권장한다.

TASK B : 결맞는 회절-간섭 실험 (Task 4개)

이제, 레이저를 광원으로 이용해 이중 슬릿의 회절-간섭 무늬를 측정한다. 반드시 Shutter를 내리고, PMT가 아닌 Photodiode를 사용해야 함에 유의하라.

1. 이중 슬릿 실험

먼저, U-channel 내에 14호의 이중슬릿을 배치하여 align을 한다. 레이저를 켜고 멀티미터를 이용하여 전압의 최대값이 2V 이상인지 확인한다. (단측 측정) 2V보다 작다면, 우선 detect slit을 좌우로 조금씩 움직여 본다. 그럼에도 계속 2V이하의 값을 가진다면 U-channel을 닫는 과정에서 align이 틀어졌을 가능성이 있다.

1~9 mm까지 적정 간격으로 Detector slit의 위치를 바꾸며 (knob을 돌려가며) 그 위치와 photodiode의 출력전압을 나타내는 멀티미터 값을 기록한다. (측정은 멀티미터를 사용한다.) 이 때, 측정 간격은 측정 data point를 그래프로 나타내고 Fitting하여 Trendline을 그렸을 때, 극값 근처의 포물선 구간을

잘 나타내도록 5개 이상의 데이터가, 변곡점 부근에서는 적어도 3개 이상의 데이터가, 선형 구간에서는 적어도 8개 이상의 데이터가 보이도록 충분한 양의 데이터를 확보하시오. 대략 50개 정도 이상 있으면 가능하다. 데이터를 등간격으로 찍는 것보다는, 변화가 급격하거나 극대/극소값 등 중요한 구간 근처에서 많이 찍는 것이 좋다. 분포의 꼬리 부분이나 평평한 구간 등에서 데이터를 너무 많이 뽑으면, 회귀 가중치가 중요하지 않은 부분을 중요시하는 결과로 이어질 수 있다. 또한, 극소값 근처를 충분히 찍지 않으면 Fit 과정에서 극값의 위치를 놓칠 수 있다. 즉, 개형을 설명할 수 있을 만큼 충분한 수의 자료를 뽑으면서도 중요하지 않은 곳을 너무 많이 뽑지 않도록 주의하시오. 이때, 미리 표를 만들어 놓고 몇 mm에서의 값이 얼마가 될지를 측정하는 것은 매우 나쁜 태도이다. 조작변인을 정확하게 제어할 수 없고, backlash가 있으므로 원하는 위치 - 예를 들어, 1.35mm - 에 디텍터 슬릿을 가져다 두려고 해도 실제로는 그 위치에 있지 않다. 즉, 부드럽게 한 방향으로 노브(knob)를 돌리면서, 출력을 보고 급격히 변화하는 구간에서 적정 간격으로 조작변인과 종속변인을 모두 읽는다. 조작변인은 설정하고, 종속변인은 읽는 것이 아니라, 실험자는 단조증가하게 조작만 하고, 조작변인과 종속변인의 결과값을 둘 모두 읽어서 기입하는 것이다. 그러면, 데이터를 언제 뽑을지 정하는 기준은, 조작변인(디텍터 위치)이 아닌 종속변인을 보는 것이 좋다. 종속변인(출력전압)이 가급적 등간격으로 되게끔 데이터를 뽑되, 극값 근처에서 종속변인의 변화 방향이 바뀌는 구간이라면 적어도 극값 근처에서는 3개정도의 데이터 포인트가 극값을 정의해 줄 수 있도록 하고, 위의 설명처럼 극값 근처의 포물선 구간은 5개 이상의 점으로 개형이 보이게 하는 것이 바람직하다.

이를 15, 16호 이중슬릿에 대해서도 반복하여 (1) Plot하고, (2) Fitting Trendline을 기입한 뒤 회귀식을 기입하시오. 물론 실제 실험 시에는 엘라인해둔 14호 슬릿으로 뒤의 실험을 모두

한 뒤 반복하시오.

2. 단일 슬릿 회절 실험 : 왼쪽/오른쪽, 이 실험은 14호 슬릿에 대해서만 하면 된다.

Blocker의 위치를 바꾸어 단일슬릿 회절을 측정해본다. 기록해 놓은 Blocker 위치를 이용하여, 왼쪽 혹은 오른쪽 중 하나의 빛살만이 통과하는 상태로 만들자. 이 상태에서 Detector slit 을 돌려가며 위치와 전압의 값을 기록한다. 이후 반대쪽에 대해서도 같은 과정을 반복한다. 위와 마찬가지로 충분히 촘촘한 간격으로 측정하여, (1) Plot하고, (2) Fitting Trendline을 기입한 뒤 회귀식을 기입하시오.

3. 가설 검정 - 두 슬릿의 폭이 동일한가? - 14호 슬릿에서만 시행 2번 실험의 결과를 토대로, 각 종류의 이중 슬릿의 왼쪽/오른쪽 슬릿의 두께 비율을 추산한다. 단일슬릿 회절의 Fit 결과로부터 왼쪽/오른쪽 두께를 알 수 있다. 두께 추산치에 대한 불확실도를 1 시그마의 유의수준으로 제시하고, 슬릿의 두께가 동일한지 양측 검정하여 p-value를 기입하시오.

4. 비대칭 이중 슬릿 실험 - 14호 슬릿에서만 시행

앞서 14호 슬릿의 왼쪽 슬릿 중심 위치 / 오른쪽 슬릿 중심 위치를 블로커 기준으로 측정해 두었을 것이다. 이를 토대로 오른쪽 슬릿을 점차 가려가며 회절무늬를 반복하여 얻고, 측정 결과를 하나의 plot에 겹쳐 그리고 회귀하시오. 비대칭 효과를 잘 볼 수 있게 적어도 3개 이상의 블로커 위치에서 측정하시오. 하나의 plot에 겹쳐 그리면, 이중 슬릿의 비대칭성의 효과를 잘 볼 수 있다.

양쪽에서 실험하는 것은 의미가 없다. 한쪽에서 촘촘하게 블로커 위치를 바꾸어 보며 실험해 보시오. 이때, 개형으로부터 슬릿이 얼마나 가려졌는지 판단할 수 있는 이론을 찾을 수 있는가? 찾지 못해도 감점은 없다.

비대칭 슬릿 실험에서, 간섭무늬가 대칭으로 나오지 않는 이유에 대해 생각해 보시오. 프라운호퍼 회절이론으로 계산하면 대칭 분포가 얻어져야 한다. 이를 보정한 회귀모델을 세워 분석하는 것도 가능하나, 역시 하지 못해도 감점은 없다. 이런 태스크를 수행하면 추가점수를 받아 다른 부분의 실수를 만회 할 수 있으므로, 남은 시간을 조개 시도해 보기로 권장한다.

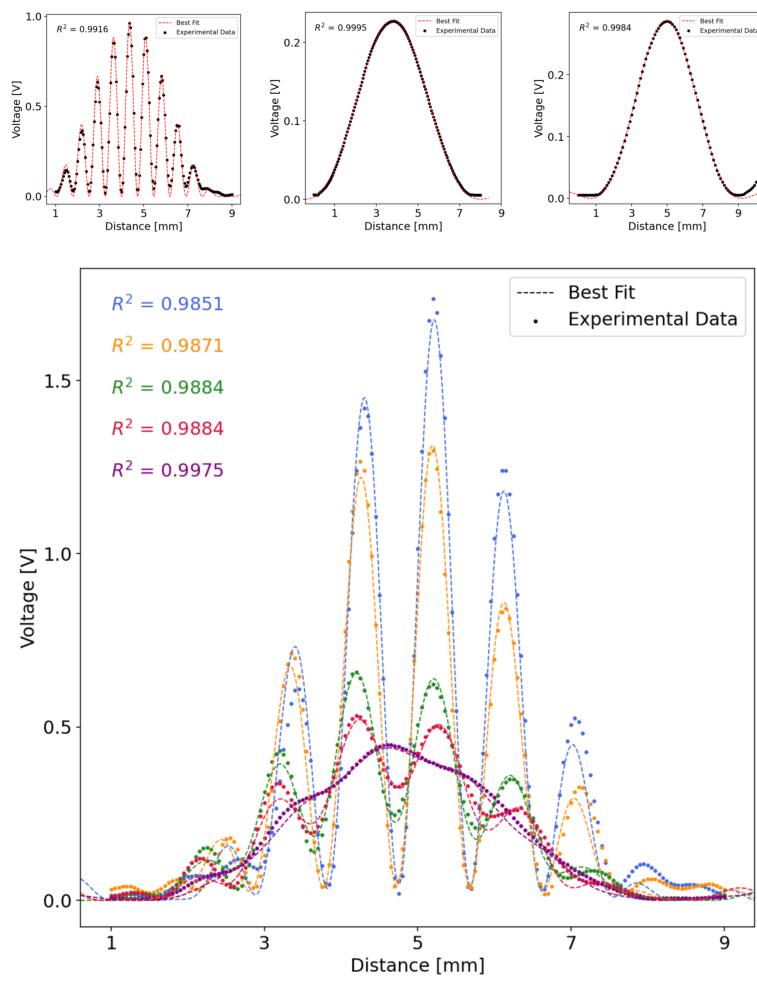


Figure 2.21: 최이선, 명하진, 정수영 (2022). 레이저를 이용한 결맞는 간섭/회절 실험. 왼쪽 상단 그래프는 이중슬릿 간섭무늬이며, 오른쪽 상단의 그래프는 각각 왼쪽과 오른쪽 단일슬릿에 대한 회절무늬이다. 하단의 그래프는 회귀분석을 통해 비대칭 슬릿의 경우를 측정한 것으로, 충분히 높은 상관계수를 가지고 있음을 확인해 볼 수 있다.

실험 종료 후 반드시 레이저를 끈다.(PMT를 켜기 전에 반드시 필수 사항) - 물론, 현재는 장비 고장으로 레이저를 잠시 옆의 벌브 실험장비로 옮겨 열라인을 해야 한다. 위의 PMT 주의사항을 잘 확인하고 다음 단계로 넘어가시오.

TASK C : 레이저의 특성 측정 (Task 1개)

* 레이저의 선폭(linewidth) 역산

앞서 얻은 이중 슬릿 간섭무늬를 바탕으로 레이저의 선폭을 구할 수 있는 회귀 모형을 작성하고, 회귀하시오. 적절한 Plot과 error analysis를 첨부 할 것. 이 작업은 14호 슬릿에 대해서만 시행하면 된다.

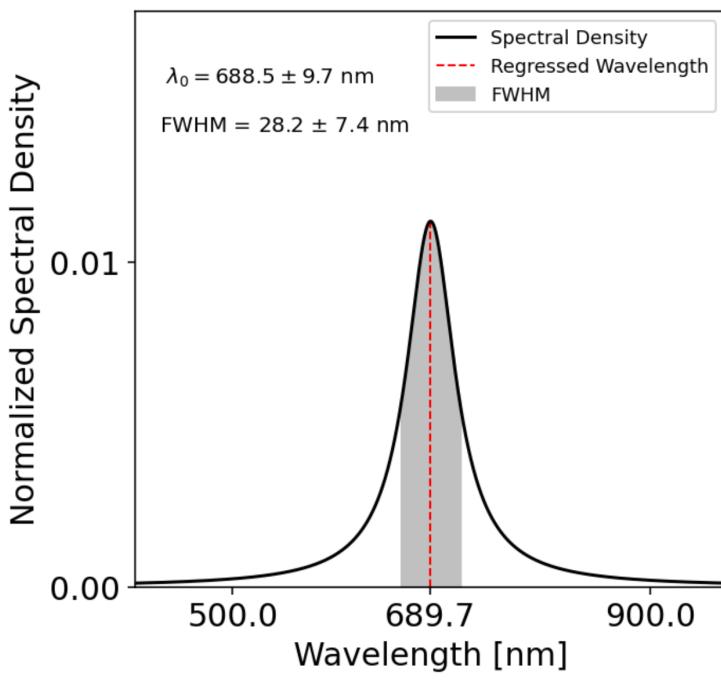


Figure 2.22: 레이저의 선폭 결정. Laser는 단일 파장으로 발진할 것 같지만, lock이 되어 있지 않은 free-running하는 레이저의 경우 멜타함수 꼴로 아주 날카로운 선폭을 가지는 걸 맞는 광원임에도, 그 중심파장이 일정 lasing 범위 내에서 흔들리기 때문에 꽤 넓은 (수십 나노미터) 범위의 선폭을 가진다. 이를 줄이기 위해 다음 실험인 Lock-in 검출을 이용해 높은 Q인자 가지고는 cavity나 원자 흡광분석 등을 이용하면, 원자물리 실험이나 원자시계 등을 만드는데 사용할 수 있다. 현재 (2022) 1초의 기준은 세슘 원자의 바닥 상태 초미세구조 벌어짐이지만, 조만간 아주 좁은 선폭의 레이저 진동수를 이용한 광격자 시계로 재정의될 전망이다.

선폭이나, 고차 프라운호퍼 회절을 고려하면 비대칭 슬릿의 개형이 더 잘 맞을 수 있다. (위의 예시 그래프 참고)

*** 이 이후의 작업에서는 슬릿의 교체나 디텍터 제거가 있기 전까지 계속 PMT를 사용하므로, 절대 실험 도중에 채널을 열지 마시오. 커버를 열어 내부 구성을 교체할 시에는 반드시 PMT 사용 종료 절차를 정석대로 밟아서 해야 한다.

TASK D : PMT Preparation (Task 3개)

뚜껑을 열어 레이저를 치우고 다시 충격에 주의하며 뚜껑을 닫는다. 3단 스위치를 bulb로 돌리고, PMT의 High Voltage 스위치를 켠다. Detector box의 Monitor 단자에 멀티미터를 연결하고, High Voltage 다이얼을 돌려 적절한 값을 찾아야 한다. 구동전압이 너무 낮으면 광자가 들어와도 펄스가 생기지 않으며, 너무 높으면 광자가 없어도 잡음으로 신호가 관측된다.

1. PMT 구동전압 Voltage 상한 찾기

Dark rate fitting을 통해 노이즈가 갑자기 커지는 영역을 찾는다. 빛이 없는데도 카운트가 마구 찍힌다면, 그 영역은 PMT를 제대로 사용할 수 없는 구간인 것이다. 이 상한을 얻기 위해 선형 회귀를 한다. PMT Count와 PMT Voltage를 빛을 넣지 않은 상태로 (Dark Rate) Semi-Log (y축은 로그, x축은 선형) 회귀하여 선형화한다. 이럴 경우 아래 그림과 같은 형상을 얻으며, 그래프 상 오른쪽 직선구간에서의 선형회귀로 X절편과 그 불확실도를 제시한다. 이것이 PMT 구동전압의 상한이 된다.

2. PMT 구동전압 하한 찾기

전구를 가능한 한 약하게 켜놓고 구동전압을 바꾸어 가며 PMT Count가 사라지는 구간을 확인한다. 구동전압을 낮추다 보면 빛이 있는데도 신호가 찍히지 않는 구간이 있을 것이다. 구동전압을 낮추면 Count는 지수적으로 줄어든다. 마찬가지로 회귀를 통해 PMT를 쓸 수 없게 되는, 즉 구동전압 하한과 그 불확도를 제시하시오. 위에서 얻은 값들을 평균내어 중간에서 실험한다. 불확실도의 평균은 오차의 전파 방법을 따르며, 이 불확실도 범위를 벗어나는 구동전압에서 작동하지 않게 주의 하며 실험을 진행한다.

PMT를 켜고 Dark rate가 안정되기까지는 10분 정도의 시간이 걸린다. 10분이 지났음에도 큰 Dark rate가 나온다면 PMT의 구동 전압을 낮추어야 한다.

3. threshold voltage 측정

이제 셔터를 열고 bulb를 5 정도로 맞춘 다음 PCIT를 이용하여 시간당 들어오는 신호의 개수를 측정한다. PMT tube가 측정을 하게 되는 threshold voltage (counter가 count하는 최소 voltage)는 오실로스코프를 통해 찾을 수 있다. 광자로 인한 PMT output의 신호 빈도수와 PCIT의 output의 빈도수가 비슷해지는 지점을 찾아 알 수 있다. 권장 범위는 아래 사진에 보이는 단자 0.07~0.08 이다. 가능한 지정 범위 내에서 유지할 것을 권장한다. Threshold voltage가 바뀌면 카운팅되는 기준이 바뀌므로 실험하는 도중에 그 값이 바뀌지 않도록 주의한다. 이때, Threshold Voltage가 적정값보다 아주 약간 낮아 빈도수가 일치하지 않는 경우의 스크린샷과, 적정값보다 아주 약간 높아 일치하지 않는 경우의 스크린샷을 얻고 이를 토대로 Threshold Voltage의 신뢰구간(최적추산치와 불확도)을 산출하시오. 이러한 눈대중 불확실도 추산은 약 2시그마의 유의수준을 가진다.

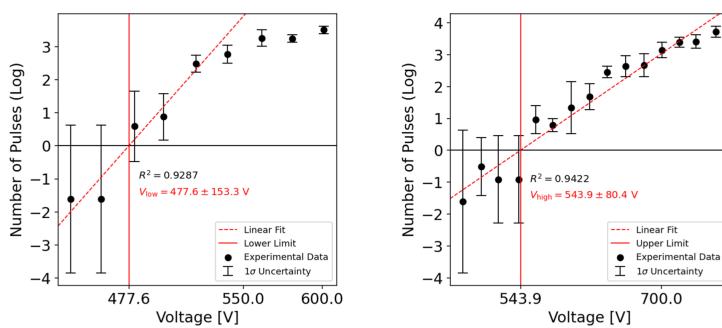


Figure 2.23: PMT 구동 전압의 상/하한 탐색. (최이선) 이때 선형회귀를 할 때에는 선형인 구간만 뽑아서 해야 하며, 아닌 구간까지 포함하면 회귀의 신뢰구간이 뭉개져서 절편의 불확도가 커진다.

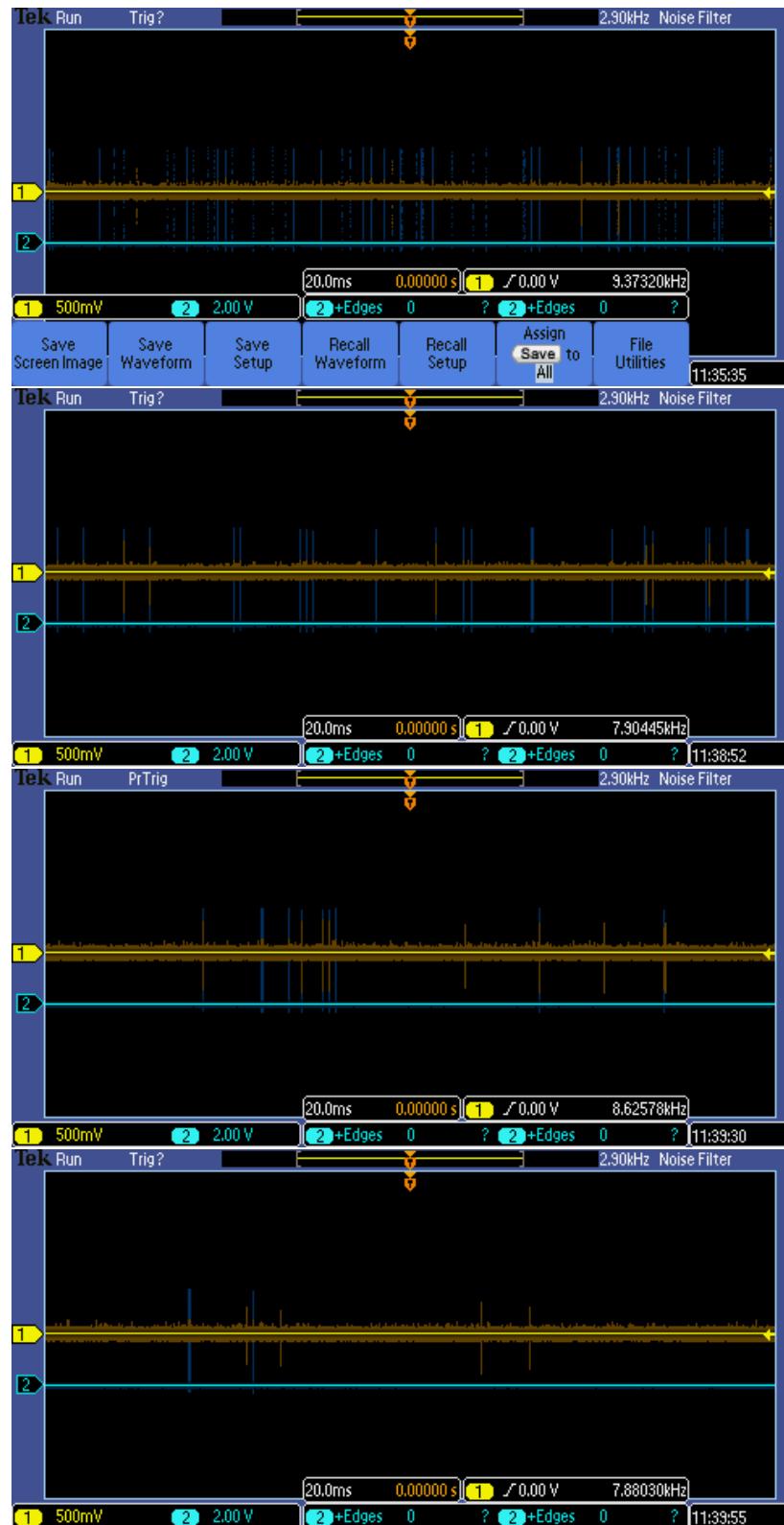


Figure 2.24: Threshold 최적치를 얻기 위한 실험 (명하진). 오실로스코프의 채널 1(노란색)에 PMT 신호가, 채널 2(파란색)에 펄스 카운터 신호가 보여진다. 이때 아래로 갈수록 펄스카운터의 Threshold를 높인 것으로, 눈이 높아짐에 따라 실제 들어오는 광자수는 비슷한데도 펄스로 인식하는 비율이 줄어듦을 알 수 있다. 이러한 분석을 통해 적절 Threshold 값을 정할 수 있다.

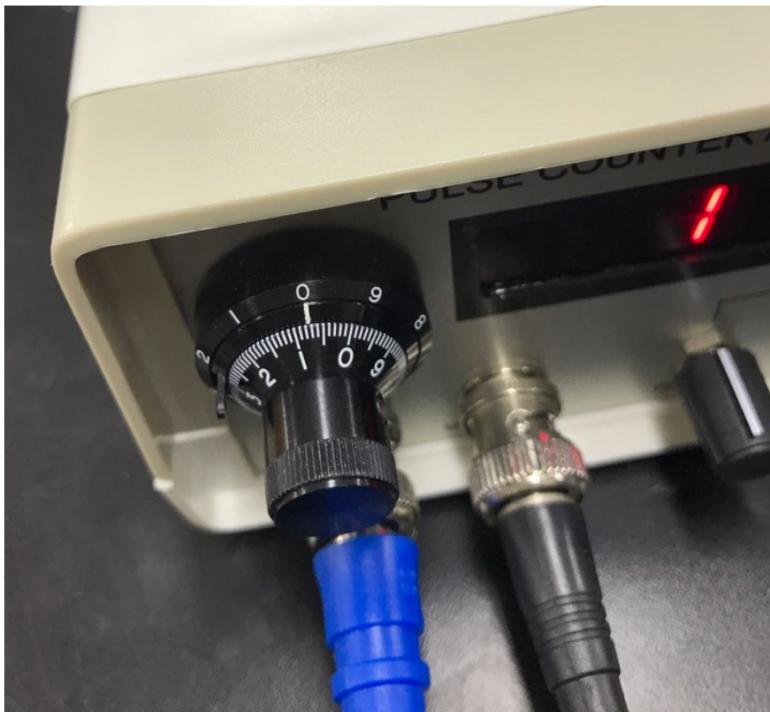


Figure 2.25: 펄스 카운터의 Threshold knob.

TASK E : Bulb-Detector Calibration (Task 2개)

이 과정은 슬릿 삽입 및 얼라인 전에 수행하시오.

1. Detector 슬릿의 전달 함수 측정

실제 U-Channel 내부에는, 간접 효과를 무시하더라도 (1) 균일하지 않은 빛이 도달하며 (2) 디텍터 블로커 위치에 따라 블로커를 통과한 빛이 PMT에 다른 방향으로 입사하므로 매 위치마다 PMT-블로커 계의 광자검출 효율이 바뀌게 된다. 측정 전에 이를 보정하도록 한다.

우선, 셔터를 반드시 닫고 뚜껑을 열어 이중 슬릿과 blocker를 제거하고 다시 닫는다. 잘 닫았으면 셔터를 열고, bulb 세기를 5 정도로 맞춘다. 이제 1~9mm까지 패턴을 측정하여 벌브와 디텍터를 캘리브레이트할 것이다. Detector Slit의 위치에 따른 PMT의 출력은 어떤 함수를 따르는가? 적절한 회귀 모형을

찾고, 상관계수와 회귀식, 오차막대 등을 기입하시오.(회귀 모형 : 가우시안과 2차함수 중 어느 것이 나은지 선택해 보시오.) Fitting의 우편 상한선 / 좌편 하한선을 1시그마 유의수준으로 함께 기입하고, 센터의 최확치와 불확실도를 기입하시오. Detector가 어디 있을 때 최대의 측정값이 얻어지는가? 이 위치가 실제 Detector의 Center가 된다.

2. 전구의 세기별 광량 측정

이제 위에서 얻은 센터 위치에 디텍터 슬릿을 놓고, 전구의 세기 표시 눈금을 바꾸어 가며 PMT의 결과 측정값을 읽는다. 적절한 회귀 모형 (선형 / Quadratic / ...) 을 찾아 전구의 세기 표시 (bulb 눈금 1~5 ; 그 이상을 넘겨 실험하면 PMT를 망가 뜨릴 위험이 있다.) 에 따른 전구의 실제 세기를 얻을 수 있는 관계식을 회귀하여라.

아직 Bulb로부터 나온 빛의 실제 세기를 알아내려면 몇 단계가 더 필요하다. 이는 채널 내에 존재하는 광자의 수와 직결된다. Bulb에서 나와 Source Slit을 지난 광자의 수는 레이저 실험에 비해 극히 적으며 그 수의 규모를 추산할 수 있다. PMT의 효율은 4%라고 놓고, 폭 0.085mm의 Detector slit은 채널의 대략적인 너비인 10mm(=1cm)의 약 1/120에 해당한다. 측정 한 곳 바깥에서의 광자의 영향은 작아서 무시할 수 있으므로, detector slit을 지나 PMT에 의해 증폭되어 펄스 신호로 출력된 광자의 수는 source slit을 지난 전체 광자 수의 약 1/10000이라고 가정할 수 있다. (불확실도와 오차의 전파를 이용, 정확한 계산을 다시 수행하시오.) 이로부터 bulb 실험에서 U-channel 안에 있는 광자의 개수를 어림할 수 있다.

PMT의 양자 효율은 하마마츠 사의 데이터시트로부터 파장별로 얻어낼 수 있으나, 현재 중물실에 있는 광전증배관은 단종되어 Datasheet를 찾기 어려울 수 있다. 추후 R1527P 기종의 광전증배관으로의 교체를 위해 PMT를 구비해 놓았으므로, 양자 효율이 바뀌었을 경우 조교를 통해 공지받을 수 있다.

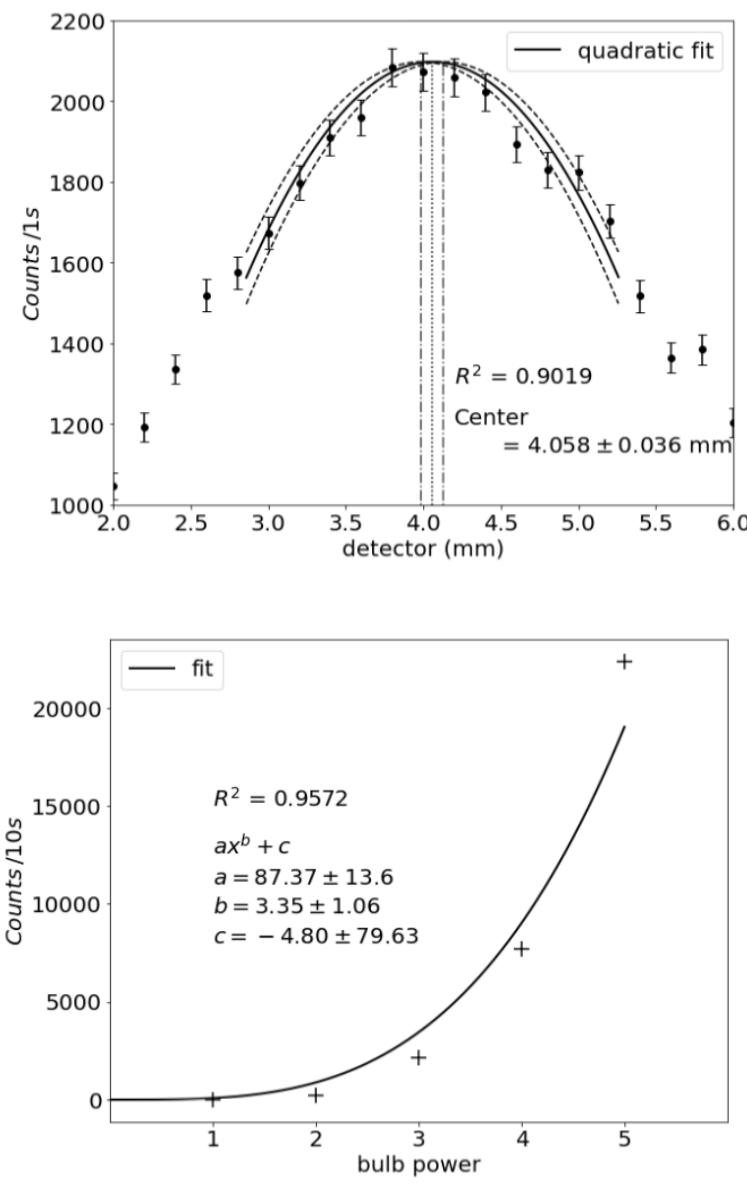


Figure 2.26: (위) 디텍터 위치를 움직여 가며 얻은 PMT 펄스 카운트. 이는 기하학적 이유로 디텍터가 가운데 있을 때보다 바깥쪽에 있을 때 광자를 통과시켜 PMT까지 보내는 효율이 낮아짐을 의미한다. (아래) 전구의 세기 knob을 조절해 가며 10초간의 포톤 카운트를 얻은 것, power-law fit이 사용되었다. (권민성, 2022)

TASK F : Single-Photon Limit에서의 회절-간섭 실험 (Task 4개)

이제 회절-간섭 실험을 Single-Photon Limit에서 시행한다. 앞에서 고생을 많이 했으므로, 14호 이중슬릿 하나에 대해서만 열라인 및 실험을 진행하면 된다.

1. 단일 슬릿 회절

Blocker를 왼쪽과 오른쪽 중 하나의 슬릿만 온전히 통과하고 나머지는 완전히 가려지도록 한 각각의 상태에서, Detector Slit을 1~9 mm까지 위치를 변화하며 (적정 간격으로 분할하여) 측정한다. 측정은 14호 이중슬릿에 대해서만 수행하여도 된다. 디텍터 슬릿의 움직이는 간격 기준은 위에서 사용했던 것과 동일하다. 측정 결과를 레이저의 경우와 마찬가지로 plot 후 회귀하여라.

2. 각각의 슬릿을 통과하는 빛의 세기 측정

위의 결과로부터 얻어낸 회귀식을 토대로, 각각의 슬릿을 지나는 빛의 세기 I_0 를 측정하여라. (단일슬릿 회절 공식에서 붙는 계수 I_0 가 각각의 슬릿을 통과하는 빛의 세기를 의미한다.) 이는 광자 몇 개에 해당하는가? 불확실도를 기입하여 추산하시오. 두 양은 양측검정으로 다르다고 주장할 실험적 유의성이 있는가? p-value를 기입하시오.

3. 이중 슬릿 간섭 - 빛의 세기를 바꿔 가며

이제, 슬릿을 통과하는 광자의 수를 바꾸어가며 실험한다. bulb의 intensity를 변화시켜 가며 14호 이중 슬릿의 간섭무늬를 관찰하고, 같은 그래프 하나 위에 Plot을 겹쳐 그린다. 적절한 회귀식을 제시하여라. 파동광학의 결과를 잘 반영하는지 상관계수를 보여라. 얼마나 낮은 빛의 세기까지, 파동광학 현상이 나타나는가?

4. 레이저의 경우와 마찬가지로, 측정된 데이터를 이용해 전구의 선폭(linewidth)을 계산한다.

14호 이중슬릿 간섭무늬의 visibility를 이용해 추산해 본다. 전구의 선폭은 레이저보다 넓은가? 좁은가? 전구는 좁은 파장 영역의 filter가 있지만, 결맞지 않은 광원이고, 레이저는 free-running하므로 파장이 움직일 범위가 넓지만 결맞은 광원이다. 두 경우 선폭에 의한 흐려짐 효과는 같은 원리로 일어나는가?

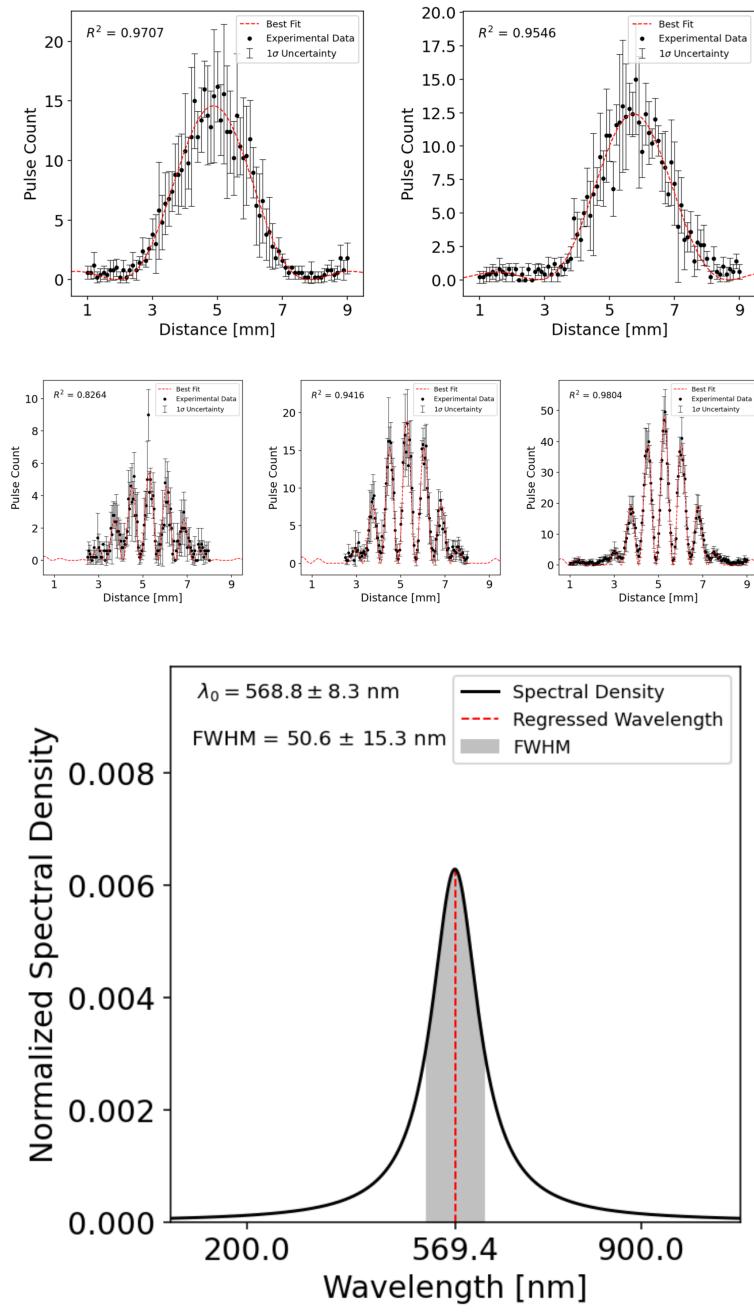


Figure 2.27: 광자를 이용한 회절/간섭 실험. 첫 번째 줄에는 왼쪽과 오른쪽 슬릿을 통과한 단일슬릿 회절 무늬이다. 파장이 달라짐에 따라 무늬의 폭이 바뀌었으며, 무늬 중심이 나타나는 위치도 바뀌었음을 알 수 있다. 두 번째 줄에는 세기를 조절해 가며 간섭무늬를 본 것인데, 세기가 약해지면 노이즈에 묻힐 것 같으면서도 뚜렷하게 아직 이중슬릿 무늬가 남아있는 것을 볼 수 있다. 이는 빛이 아주 약해서, Single photon limit이 될지도 모르는 영역에서도 간섭 현상이 일어남을 증명한다. 마지막 그림은 전구의 경우에 선폭을 얻은 것이다. 전구는 결맞지 않는 광원이지만, 매우 좁은 투과폭을 가지는 색 필터를 사용하여 선폭이 좁다.

TASK G. Single Photon Regime Test (Task 2개)

1. 벌브-PMT 실험 결과의 분석

F-3에서 빛의 세기를 바꿔가며 실험했던 것들에 대해, 각 실

힘별 한 번에 슬릿을 지나는 광자 수를 역산하라. 빛의 세기(별브 눈금에 따른 실제 광량)는 위에서 회귀해 놓은 모델을 이용하라. 광자가 이중슬릿을 ‘혼자서’ 통과한다고 볼 수 있는가? PMT에서 얻어진 피크의 수를 이용해 광자의 수를 계산하면, 한 시점에 평균적으로 채널 안에 몇 개의 광자가 있는지 어림할 수 있다.

광자의 평균 밀도가 1 이하이면, 한 번에 광자가 하나 혹은 없을 수도 있는, 매우 희박한 photon gas regime에서 작동할 것을 예상할 수 있다. 그러나, 광자는 보즈 양자 기체이다. 광자의 밀도를 아주아주 낮추더라도, 보존이 존재할 확률은 옆에 다른 보존이 하나 더 있을 때 높아진다. 즉, 거리가 가까워질수록 correlation function이 증가하는데, 이 때문에 정말 싱글 포톤이 슬릿을 통과했는지 주장하기 위해서는 더 깊은 고민이 필요하다. 이 실험에서 접근한 영역은 어느 정도의 영역에 해당하는가? 만약 개선된 실험이 필요하다면, 어떤 실험을 고안해 볼 수 있을까?

2. 레이저 실험 결과의 분석

전자기파로 볼 수 있는 레이저 실험의 결과는 평면파 근사에 기초한 프라운호퍼의 이론에 잘 맞는지 확인해 보자. 1m의 Source-Detector 거리를 지나가는 데에는 약 3ns정도가 걸린다. 레이저의 출력은 약 1mW인데, 파장이 670nm에 해당하는 광자가 1초에 몇 개 나오는지 계산하자. U-channel 안에는 평균적으로 몇 개의 광자가 있겠는가? 광자가 이중슬릿을 ‘혼자서’ 통과한다고 볼 수 있는가? 자명하지만, 이 경우 Multiphoton limit임을 확인하여라.

마무리 : 실험 후 정리 (순서 그대로 지킬 것 ; PMT 실험에서
슬릿을 교체할 때 매번 시 행해야 한다.)

1. Bulb 세기를 0으로 낮추고, 셔터를 닫고, PMT 구동 전압을 0
으로 줄인다.
2. PMT와 bulb 스위치를 모두 'off' 상태에 놓는다.
3. 슬릿을 모두 제거하고 개수를 확인하여 케이스에 다시 넣는다.
4. 장비들의 전원을 끄고, 사용한 BNC 케이블과 기타 사용한 장
비가 있다면 원래 위치에 정리해 놓도록 한다.
5. PMT 전원과 셔터를 확인 후 실험을 마친다.

Bibliography

- [1] G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics* (2nd ed.), Dover, 1975. (광학 이론, Chap. 5)
- [2] R. Feynman et al, *The Feynman Lectures on Physics I & III*, Addison Wesley, 2006. (파동-입자 이중성, I 권의 Chap. 37, III 권의 Chap. 1)
- [3] http://www.teachspin.com/instruments/two_slit/index.shtml
(실험장비 제작사의 장비 소개 페이지)
- [4] http://sales.hamamatsu.com/assets/applications/ETD/pmt_handbook_complete.pdf
(PMT specification, Chap 6. pp 141~149)
- [5] John R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis ; The Study of Uncertainties in Physical Measurements", 2nd ed., (1982)
- [6] 김우철, 김재주, "개정판 일반통계학", 영지문화사, (2006)

본 매뉴얼의 개정에 많은 도움을 준 2022년 수강생들의 우수보고서는 뒤의 섹션에서 확인할 수 있다.

Lock-In Amplifier and Hall Effect

거쳐간 조교들

예전 매뉴얼 : *Lock-in Detection*

2012. 03. 신광우 작성

2015. 03. 황현석 개정

2017. 03. 이명원 개정

2020. 03. 이현직 개정

현재 매뉴얼 : *Lock-in Detection and Hall Effect*

2021. 02. 김솔 개정

2022. 07. 김솔 개정

물리 실험에서 측정되는 물리량은 전기 신호로 변환되어 측정되는 경우가 많다. 이 때, 실험계는 필연적으로 오차와 Noise를 포함한다. 다행히도, 많은 잡음의 원천은 서로 다른 색깔을 가진다. 고주파 잡음, 저주파 잡음, 등 각각 발생 원인에 따라 더 많이 나오는 잡음의 색이 존재하므로, 비교적 조용한 주파수 대역에서 실험하면 잡음을 피할 수 있다. 신호의 세기가 아주 작은 미세 신호를 검출할 때에는, Noise로부터 원하는 주파수 성분의 신호를 걸러 증폭함으로서 실험의 정확도를 높일 수 있다.

3.1 실험 목적	86
Signal Preporcessing . . .	86
Measurement of Magnetic Field	87
3.2 배경 이론	87
Filter	87
Lock-in detection	89
Hall Effect	92
Linear Senser	94
3.3 장비 소개	96
Basic AC Electronics . . .	96
Teachspin 사 Lock-In Amp Kit	97
Hall Effect Element	98
3.4 실험 절차	100
Lock-In Amplifier 구성요소 실습	100
Lock-In Amplifier 실험 .	104

이 실험에서는 원하는 주파수의 신호만 골라 낼 수 있는 Lock-In Detection의 원리를 익힌다. 이를 토대로, 세기가 아주 작은 Hall 효과를 정밀하게 측정하여, 자석 샘플의 자기 쌍극자 모멘트를 측정해 보도록 한다.

이 실험은 측정해야 하는 데이터가 많다. raw data를 남겨 두는 것은 중요한데, 너무 길어지면 본문의 논리전개가 흐려질 수 있으므로 SM으로 빼도록 한다. (SM의 퀄리티는 평가하지 않음) 참값이나 정확한 값이 아닌 모든 측정치에는 불확실도를 반드시 기입하고, 회귀를 사용하여 데이터를 분석하시오. 오실로스코프의 값을 읽을 때에는 신호의 퍼짐 등을 고려하여 눈대중으로라도 불확실도를 반드시 명기해 주시오. 모든 자료를 회귀분석을 통해 얻을 필요는 없다. 가령, 사인파의 진폭을 얻기 위해 데이터를 csv export 후 회귀하는 것은 시간낭비일 수 있다. 반면 적절한 수준에서 눈대중으로 진폭과 불확도를 제시하는 것으로도 충분히 의미있는 데이터 포인트를 얻을 수 있다. 이후 이 값들을 진폭이나 진동수, 개인 등에 대해 더 쫌촘한 간격으로 측정해서, 그들의 분포나 개형을 Fitting하는 것이 물리적으로 더 중요한 의미를 가진다. Fitting을 하지 말라는 것이 아닌, 중요한 것에 대해 Fitting을 (반드시) 하시오.

3.1 실험 목적

Signal Preporcessing

잡음이 섞인 신호로부터 원하는 물리량을 얻어내기 위해서는 신호의 전처리가 필요한데, 이 때 Lock-in detection을 유용하게 사용할 수 있다. 본 실험에서는 Teachspin 사의 lock-in 실험 키트를 이용해 lock-in amplifier를 구성하는 각 요소들의 기능과 특성을 확인하는

실습을 포함한다. 이러한 연습을 토대로 잡음이 섞인 신호에서 직접 신호의 진폭을 추출해 보고, 이를 실제 측정에 적용하는 방법에 대해 연습한다.

Measurement of Magnetic Field

홀효과를 기술하는 이론을 이해하고, GaAs 시료 (n-type doped)를 이용해 직접 Hall 효과를 관찰하여 고체 시료 내에서의 transport phenomena를 실험적으로 측정하는 기술과 배경지식을 습득한다.

[8]

3.2 배경 이론

Filter

s-Domain

Filter는 전기 신호를 선택적으로 투과시키는 장치이다. 어떤 신호는 통과시키고, 어떤 성분은 걸러내는지 판별하는 기준은 주파수인데, 주파수에 따라 투과율이 달라지는 소자로서 Filter의 본질을 이해할 수 있다. 정확한 용어로는, Filter의 주파수 영역에서의 Gain(전압이득)을 살펴볼 필요가 있다.

보다 유용하게는, 주파수 대신 s-domain transfer function으로 filter의 성질을 기술하는 것이 유용하다. 여기서 s 는 Laplace trans-

form [1]에서 사용되는 변수이며 복소 각진동수 $i\omega$ 에 대응된다.

Type of Filter

Filter는 RC 회로, 크리스탈, 세라믹 레조네이터, 전기-역학적 공진기 등을 이용해 critical phenomena를 가지는 특정 물리계에 전기 신호를 couple시켜 주파수에 따라 다른 투과성질을 가지게 하는 전기소자를 의미한다.

Filter는 고주파 대역을 통과시키는지, 저주파 대역을 통과시키는지, 혹은 특정 대 역폭의 신호만 통과시키는지에 따라 high-pass, low-pass, band-pass filter로 나뉘어진다. Filter의 분류는 상술된 s-Domain transfer function의 형태에 따라 나뉘어지는데, 분모에 어떠한 polynomial이 사용되는지에 따라 Butterworth, Chebyshev, Bessel filter가 있다[2, 3, 4].

Passive Filter는 들어온 신호를 증폭 없이 선택적으로 투과시키는 역할만을 하지만, 본 실험에 쓰이는 filter는 증폭을 통해 출력전압에 gain을 줄 수 있도록 설계되어 있다.

filter의 성능을 판가름하는 또 다른 요소로는 Q-factor가 있다. Q-factor가 클수록 대역폭이 좁아 날카로운 cut-off가 가능하다.

첫 문단에서 언급한 filter의 원리를 보면, 모든 filter는 critical frequency를 자명히 가지게 된다. RC 회로의 시상수와, 교류 응답 특성에서의 cut-off frequency의 관계를 생각해보면 쉽게 이해할 수 있다.

이 때, Critical frequency에서 벗어날 때 gain이 얼마나 빠르게 감소하는지의 기울기를 roll off로 정의한다. 본 실험에서 사용되는 low-pass amplifier는 두 가지 roll off를 선택할 수 있다. (12dB/oct, 6dB/oct)

* An (oct)octave is a term borrowed from music and represents a doubling of frequency.[9]

이때 roll off가 다른 필터는, 차수가 다른 필터로 생각할 수 있다. 필터의 차수는, 서로 독립된 필터들을 몇 개 씩있느냐에 해당하는 것으로, 피팅할 때 서로 다른 함수를 사용하게 된다. RC회로에 대해, 두 개의 독립된 RC회로가 impedance matching된 채 직렬연결되어 있으면 주파수에 따른 개인이 어떻게 달라지는지 식을 풀어보시오.

Lock-in detection

이 실험의 핵심 내용이므로, 아무리 귀찮아도 이 섹션은 꼭 읽고 오시오.

Lock-In 검출은 잡음이 섞인, 여러 가지 주파수가 섞인 회로에서 원하는 주파수의 신호만을 걸러내기 위한 Filter 역할을 한다. 라디오파에서 여러 채널의 신호가 섞여서 안테나에 실려 들어오지만, 그 중 원하는 주파수만 걸러 검출하는 것을 상상하면 비슷한 개념을 잡을 수 있다. LC Tank Circuit 등으로도 Band-Pass Filter를 구현해 특정 주파수 대역의 신호만 골라낼 수 있지만, 이들 필터는 대체로 Bandwidth가 넓어 Noise에 취약하다. (= 원하는 신호만을 걸러내기 어렵다.)

Lock-In amp는 신호의 통계적인 성질을 이용하여 이러한 문제를 해결한다. 백색잡음의 경우, 평균 진폭 - 즉, 임의의 시간 간격에 대한 시간적분 기댓값이 0이 되어야 한다. 이는 잡음이 ‘자명하지 않은’ 정보를 전혀 싣고 있지 않음을 가정하고 있다. 반면, 원하는 주파수의 ‘자명하지 않은’ 정보를 싣고 있는 신호의 경우, 결맞는 Reference Signal과 Mixing하면 non-zero result를 얻는다. 이를 통해 원하는 신호의 진폭만을 걸러낼 수 있다.

또 다른 설명으로는, f_1 과 f_2 의 신호를 비선형 믹서를 통해 섞으면 $|f_1 - f_2|$ 와 $f_1 + f_2$ 의 신호를 얻는데, 이를 충분히 오랜 시간동안 시간평균하면 $f_1 = f_2$ 인 경우를 제외하고는 모두 averaged-out 된다. 따라서 non-zero 평균을 주는 것은 오로지 DC성분뿐이며, 이를 low pass filter를 통해 걸러낼 수 있다. lock-in detector가 얼마나 날카롭게 원하는 주파수의 신호를 걸러낼 수 있는지는 이에 따라 Low-Pass Filter의 roll-off에 크게 의존한다.

한편, 이러한 락인 회로를 실제로 구성하기 위해 사용되는 믹서는 DBM이 사용된다. 본 실험에서 사용되는 믹서는 Double Balanced Mixer로, 아래 그림의 LO Port에 걸리는 전압의 부호에 따라 입력 전압을 뒤집거나, 혹은 그대로 출력 전압으로 내보내게 된다.

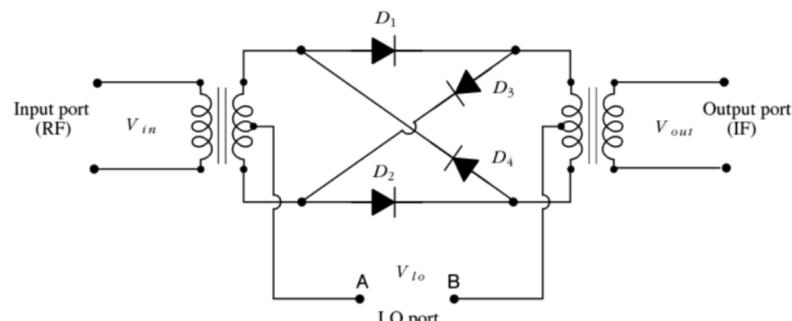


Figure 3.1: DBM(Double Balanced Mixer)의 회로 개요도. $V_{out} = V_{in} \text{sgn}(V_{LO})$ 으로 들어오는 signal에 reference signal의 부호를 곱한 것이 output으로 나가는 구조이다.

위의 믹서를 사용하면, 주기적으로 부호가 반전되는 출력을 얻는다. 만약 레퍼런스 시그널과 입력 시그널이 정확히 일치하는 주파

수 성분을 가진다면, 부호가 뒤집힐 때마다 결맞게 부호가 유지되어, 평균을 냈을 때 상쇄되지 않고 남는 non-zero DC 성분이 남게 된다. 이를 low pass filter에 통과시키면 white noise는 average-out되며, 원하는 신호만 걸러낼 수 있다.

잡음이 큰 환경에서, 인위적으로 원하는 주파수를 걸어 실험을 진행한다면, 조작변인의 변화 주기만큼에 반응하는 성분만을 걸러낼 수 있으므로, 완벽히 상응하는 종속 변인만을 얻어낼 수 있고, 노이즈의 영향을 배제할 수 있다. 이러한 Detection 기법은 주로 광학적 측정 등 여러 가지 물리량 측정에 적용될 수 있는 유용성을 가진다.

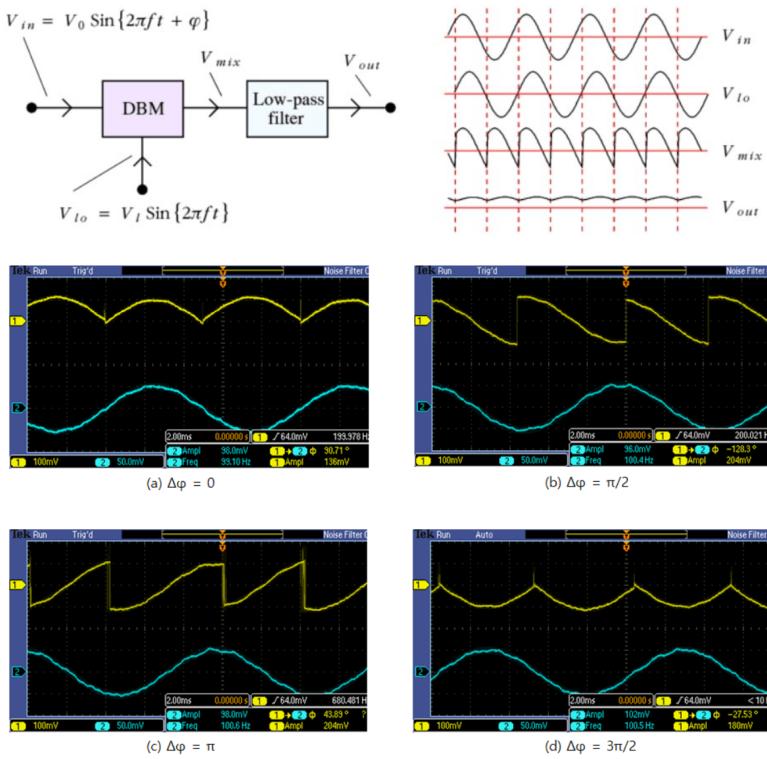


Figure 3.2: DBM을 사용한 Lock-in amplifier 회로의 개요도 및 신호 예시. 아래는 김수진 수강생 (2022)의 실험 결과를 첨부하였다.

위 그림에 나타난 것과 같이, Lock-in detection의 또 다른 특징은 위상 의존성을 가진다는 것이다. 입력신호와 레퍼런스 신호 간의 위상차에 따라 출력전압이 달라지는데, 완전히 사인의 윗쪽 절반을 포함하는 간격으로 부호가 바뀐다면 항상 양의 방향으로 파형이 더해져 최대 출력을 얻을 것이며, 완전히 대칭적으로 양의 신호와

음의 신호가 겹쳐지도록 구간이 잡히는 위상으로 부호가 바뀐다면 주파수가 일치하더라도 평균값은 0이 나오게 된다. 이처럼 Lock-In detection은 주파수에도 매우 민감하게 반응할 뿐 아니라, 위상에도 매우 민감하게 반응하여 Phase - Lock Loop를 구성하는 데 사용할 수 있다. [6]

Hall Effect

Hall 효과란 전류가 흐르는 시료에 전류의 방향에 수직하게 자기장이 걸렸을 때, 시료 내에서 전류에 가로지르는 방향으로 전위차가 형성되는 현상이다. [8] 일반 물리학에 나온 내용을 토대로 복습하면 다음과 같다.

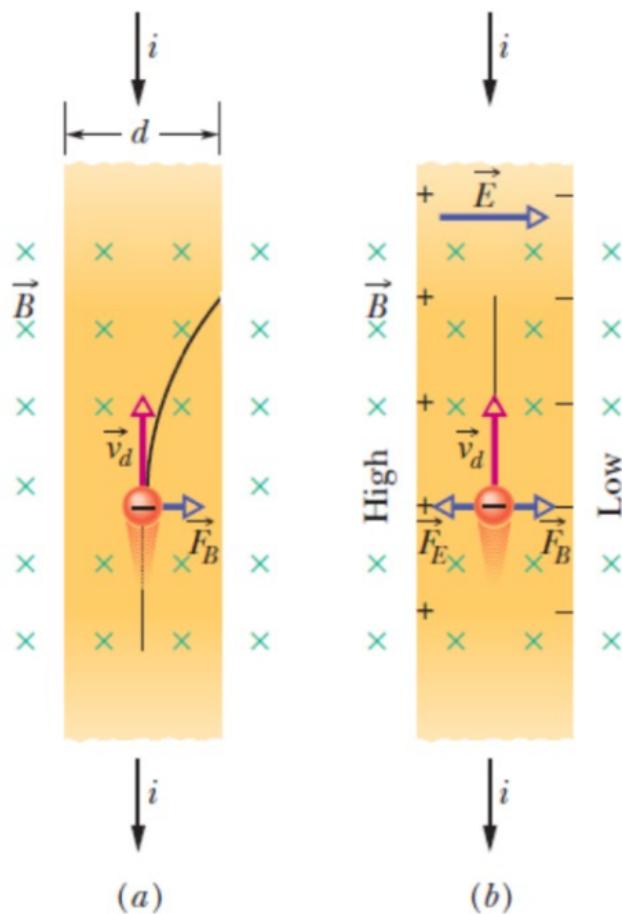


Figure 3.3: Hall Effect

위와 같이, 도체 시료에 i 의 전류를 흘려주면서 (방향은 페이지의 위에서 아래 방향) 이에 수직하게 B 의 자기장(방향은 페이지를 뚫고 들어가는 방향)을 걸었다고 가정하자. 페이지 위로 움직이는 전자들은 자기장에 의해 로렌츠 힘 (Lorentz force)을 받게 되고, 진행 방향이 오른쪽으로 휘게 된다. 이 때, 움직이는 전자들이 매우 많을 것이기 때문에 전자의 밀도가 상대적으로 오른쪽이 더 높게 형성이 될 것이다. 하지만 양전하, 즉 원자핵들은 움직이지 않기 때문에 상대적으로 시료의 왼편은 양전하의 밀도가 높아지게 된다. 즉 시료의 왼쪽에서 오른쪽으로 전기장 E 가 형성되고, 이는 곧 전위차를 만들게 된다. 이 전기장에 의해 형성된 힘은 전자들을 다시 왼쪽으로 끌어들이려 하게 된다(Fig 1-(b)). 이 힘과 오른쪽으로 향하는 자기장에 의한 힘이 평형을 이루게 되면 더 이상 전자들은 오른쪽으로 편향되지 않게 되고, 전기장 역시 더 강해지지 않게 된다. 이 평형 상태일때의 전위차 V_H 는 다음과 같은 관계식을 가지게 된다.

$$V_H = Ed \quad (3.1)$$

여기에 전기장에 의한 힘과 자기장에 의한 힘이 평형을 이루므로, 전자의 유동속도를 v 라고 하면

$$eE = evB \quad (3.2)$$

우리는 일반물리에서 전자의 유동속도와 전류 사이의 관계를

다음의 식으로 알고 있다.

$$i = -nevA \quad (3.3)$$

여기서 n 은 전하 밀도(또는 전하 운반자 밀도. carrier density), e 는 전자의 전하량, A 는 전류가 흐르는 시료의 단면적(다시 말해, 시료의 두께 t 와 d 의 곱)이다.

한편, 시료에 전류를 흘려 주려면, 소자의 저항을 곱해 준 만큼의 전위차를 걸어주어야 한다. 따라서 홀 전압(출력전압)은 전하 운반자의 표류속도와 직교 자기장의 곱에 비례하며, 전하 운반자의 표류 속도는 시료에 흘려 주는 전류에 비례하며, 이는 입력 전압에 비례하게 된다.

따라서 홀 전압(홀 센서의 출력전압)은 입력전압과 자기장의 소자 면 법선 방향 성분의 곱에 비례하여 얻어진다. 이를 이용한 측정을 하는 방법은 아래에 기술되어 있다.

Linear Senser

Wheatstone Bridge를 기억하는가? 물리학실험 2에서, 혹은 그 이전에 유사한 실험을 해 보거나 적어도 이론을 통해 접할 기회가 있었을 것이다. 이는 4개의 저항 네트워크를 이용하여 전압을 걸어 주는 입력 단자 두 개와, 그 사이로 연결된 측정(출력) 단자 두 개로 구성되어 있다. 만약 Wheatstone Bridge를 이루는 저항 중 하나의 값이 온도 변화나, 역학적 인장/압축 등에 의해 저항값(임피던스)이

변한다면 어떻게 되는가? 입력 전압이 일정해도 출력 전압이 변하게 된다. 물리량을 측정하는 정밀 센서들은 이렇게 4-probe 체결된 측정요소를 이용하는 경우가 많으며, 대표적인 경우가 Strain Gauge와 Hall Sensor이다.

이러한 장비들은, 출력 전압이 물리량의 작은 변화에 거의 선형적으로 비례하여 얻어진다는 특성 덕분에, 또한 온도 등이 변해도 측정하고자 하는 물리량이 같으면 출력 전압과 입력 전압 사이의 비율이 거의 일정하게 유지된다는 성질 덕분에 선형 센서에 유용히 사용된다.

선형 센서를 사용하는 방법은 제조사 Datasheet를 참조하여 Sensitivity 값을 알아내고, Offset을 보정한 뒤 제조사에서 보장하는 측정 범위 이내에서 사용하는 것이다.

몇 가지 용어를 소개하자면, FSO (Full Scale Output)는 측정치의 선형성이 보장되는 (=센서 리딩을 믿을 수 있는) 범위 안에서 최대의 입력이 들어왔을 때 센서가 내보내는 출력을 의미한다. 주로 FSO값은 감도로 표현되는데, 감도 (Sensitivity)의 정의는 mV/V로 표현되며, 이는 4단자 센서의 출력 단자 사이 전압 차이를 입력 단자 사이 전압 차이로 나눈 것이다.

센서에 아무런 입력이 없을 때에도 0이 아닌 감도가 있을 수 있는데, 이를 Offset이라 한다. 예를 들어 보면, 0기압에서 100기압을 낼 수 있는 압력 센서의 0점 오프셋이 2.3mV/V , FSO 11mV/V 라 하면, 50기압에서는 그 중간인 6.65mV/V 의 감도를 가지게 되는 것이다. 다른 압력에서도 영점 오프셋과 FSO 사이의 선형보간(=내분) 값을 이용해 물리량의 크기와 출력전압의 관계를 알아낼 수 있다.

본 실험에서 사용할 홀 센서 역시 4단자 선형 센서에 해당한다.

선형 센서를 락인 검출과 함께 사용할 때에는, 입력 전압 단자에 원하는 주파수의 교류 (노이즈가 적은 주파수를 골라야 한다! 주로 60Hz와 120Hz는 Power Line에서 오는 노이즈이므로 피해야 하며, RF 대역이나 유명한 (들어본 적이 있는) 주파수 대역을 피해서 잡는 것이 노이즈를 피하는 데 유리하다.) 전압을 걸어 주면, 그 주파수를 따라가는 신호가 출력 단자로 나오게 된다. 이때 센서의 종류나 내부 캐패시턴스 등에 따라 위상이 약간 틀어질 수도 있으므로, Lock-In detection의 phase를 잘 조절하여 최대 출력이 얻어지도록 해야 한다. 최대 출력이 얻어지는 위상에서의 출력값은 우리가 원하는 (= 실험 시 소자나 센서에 걸어 준) 주파수에서의 출력신호의 rms 진폭과 같을 것으로 기대할 수 있다.

3.3 장비 소개

Basic AC Electronics

본 실험에서는 저주파에서 고주파에 이르기까지 다양한 대역의 교류 신호를 발생시키고 검출하기 위한 기초적인 전자계측기기들이 사용된다. 여기서 Oscilloscope, Function Generator의 사용법은 자세히 소개하지 않는다.

장비의 사용법을 모를 경우 (오실로스코프 사용에 친숙해지지 못한 경우) 사용 전 반드시 조교에게 문의하여, 계측기기의 사용법을 정확히 숙지한 이후 실험을 진행하도록 한다.

모든 계측기기는 Maximum input voltage를 넘기지 않도록 실험하여야 하며, 실험조건 설정의 부주의로 계측기기의 오작동 및 고장을 유발할 경우 조 전체의 레포트 점수가 감점된다.

본 실험 시 결맞는 두 파형을 동시에 관측할 일이 종종 있으므로, BNC Tee를 사용하여 신호를 둘로 나누는 방법에 대해 숙지하도록 한다.

Teachspin 사 Lock-In Amp Kit

Teachspin 사의 Lock-In Amp. Kit을 사용하여 실험을 진행한다. 이는 다음 그림과 같이 8가지의 요소로 구성되어 있다. (1 : Preamp, 2 : Filter, 3 : Lock-In Ampl. Detector, 4 : Low-pass Filter, 5 : Noise Generator, 6 : Reference Oscillator, 7 : Phase shifter)

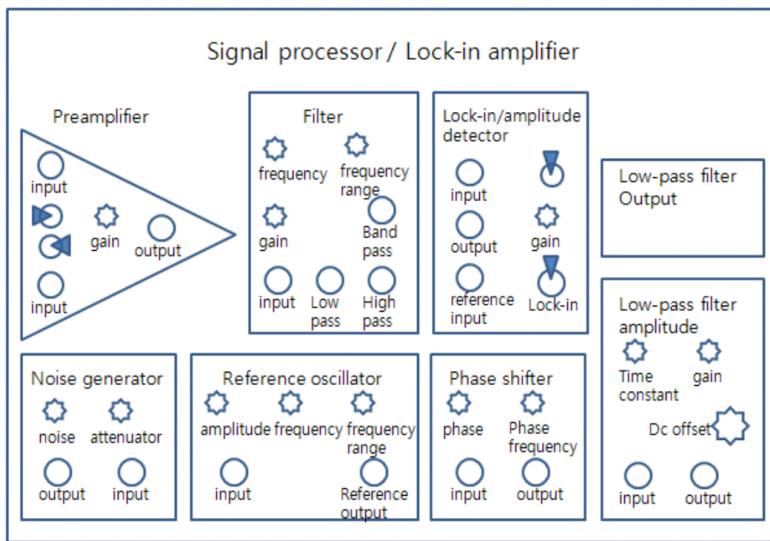


Figure 3.4: Lock-In Amplifier Box Front Face

이 중 Lock-In Amplifier를 구성하기 위해서는 1 : Preamp, 3 : Detector, 4 : Low-pass Amplifier, 7 : Phase Shifter의 4개 요소가 필요하다. 이 실험에서 2 : Filter와 6 : Reference Oscillator는 사용하지

않는다.

Lock-In Amp의 원리를 상기시켜 보면 (순서대로 읽었다면, 지금쯤 까먹었을 수도 있으므로), 주어진 신호를 (1) PreAmp를 통해 증폭하고, (2) 주파수를 알고 있는 Reference Signal의 Phase를 적절히 조절한 후, (3) 증폭된 신호와 DBM을 이용해 Mixing하고, (4) 이를 저주파 필터를 거쳐 DC 성분 진폭을 검출하는 것이다. 이때 (1)의 역할을 Preamplifier가, (2)의 역할을 Phase Shifter가, (3)의 역할을 Detector가, (4)의 역할을 Low-Pass Amplifier가 수행한다.

키트에 내장된 Ref. Oscillator의 성능이 좋지 않으므로, 모든 실험에서 Function Generator를 사용한다.

*실험실에는 2대의 lock-in amp가 설치되어 있다. 왼쪽 기기는 filter만 고장 나있고 오른쪽 기기는 filter가 작동하므로 왼쪽 기기로 실험을 진행하되 filter는 오른 쪽을 사용한다(2020년 3월 시점).

Hall Effect Element

이 실험에서는 Matrix Opto Co., Ltd 사의 MG910 GaAs 홀 소자[10]를 사용하여 실험을 진행한다. 대부분의 시판 홀 센서의 경우 신호가 미약하기 때문에 내장 증폭기가 설치되어 있다. 이 소자의 경우, 4-probe contact이 이미 형성되어 있는 채로 밀봉되어 온 완성형 소자이므로, 내부 증폭 없이, 편리하게 홀 효과를 측정할 수 있다.

홀 효과의 측정에는 기본적으로 4개의 전극이 필요하다. 직접 contact을 형성하는 경우에는 전극의 위치, 시료의 대칭성 등에 따라 비저항 보정 등 번거로운 과정을 거쳐야 하는데, 완성된 시료를 구

입해서 사용할 경우에는 교정된 Datasheet를 참고하여 감도에 따라 실험을 진행할 수 있다.

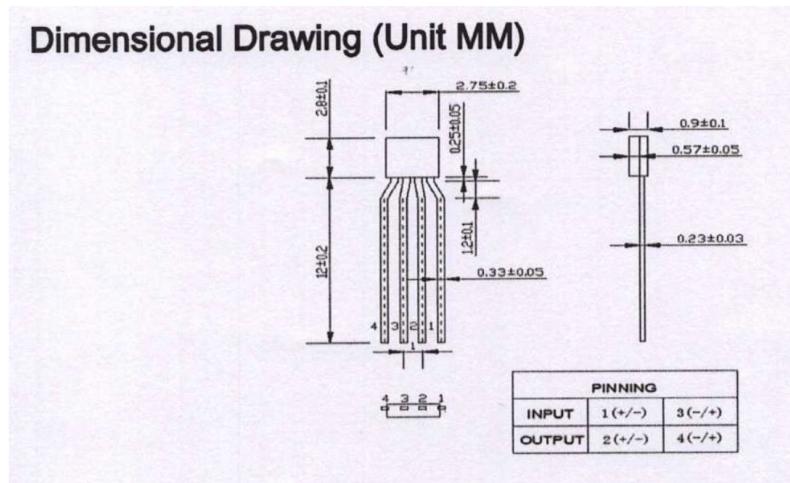


Figure 3.5: Hall Sensor Pinmap [10]

Table 1. Electrical Characteristics of MG910.

Item	Symbol	Test Condi.	Min.	Typ.	Max.	Unit
Hall Voltage	V_H	$B = 50\text{mT}$, $I_c = 5\text{mA}$ $T_a = RT$	36	45	54	mV
Input/Output Resist.	$R_{in/out}$	$B = 0\text{mT}$, $I_c = 0.1\text{mA}$ $T_a = RT$	650	750	850	Ω
Offset Voltage	V_{os}	$B = 0\text{mT}$, $I_c = 5\text{mA}$ $T_a = RT$	-5		+5	mV
Temp. Coeffi. of V_H	$ \alpha V_H $	$B = 50\text{mT}$, $I_c = 5\text{mA}$, $T_a = 25^\circ\text{C} \sim 125^\circ\text{C}$			0.06	$^\circ\text{C}$
Temp. Coeffi. of R_{in}	αR_{in}	$B = 0\text{mT}$, $I_c = 0.1\text{mA}$, $T_a = 25^\circ\text{C} \sim 125^\circ\text{C}$			0.3	$^\circ\text{C}$
Linearity of V_H	ΔK	$B = 0.1 - 0.4\text{T}$, $I_c = 5\text{mA}$ $T_a = RT$	-1		+1	%

Figure 3.6: Hall Sensor Characteristics at RT (25 deg. C) [10]

홀 소자는 (2021년 3월 기준) 1060원 짜리이지만, 2번 이상 채지
급 시에는 태도 점수 혹은 팀 전체의 보고서 점수에 감점이 있을 수
있으므로 태우지 않고 소중히 실험하기를 권장한다.

반도체 소자는 역전압, 가열, 과전압, 과전류 등에 민감하다. 인
두를 사용할 경우 소자를 너무 오래 가열하지 않게 주의하며, 이
시료는 역전압에 시험되지 않았으므로 가급적 Offset을 걸어 교류

신호더라도 항상 양의 부호를 가지도록 함수 발생기 설정을 한 뒤 실험하기 바란다.

총 2개까지는 시료를 감점 없이 지급하므로, 자신이 있다면 혹은 실험이 모두 끝나고 나서 역전압을 걸어 교류 실험을 해 보아도 좋다. 성공하여 의미 있는 차이나 결론을 얻을 경우 보고서 상 가산점을 받을 수 있다. 시료 재지급을 요청하지 않는다면, 정규 실험을 끝내고 창의적인 시도로 시료를 태워먹거나 파손하더라도 전혀 문제가 되지 않으며, 명확한 이해 하에 계측기기를 파손하지 않고 시료를 다른 조건에서 시험해 보는 것은 오히려 권장된다. 가급적 조교의 감독 하에 실험하고, 파손 시 즉시 조교에게 보고해야 한다.

3.4 실험 절차

Lock-In Amplifier 구성요소 실습

이 단계에서는 Lock-In Amp를 구성하는 4가지 요소 (Preamp, Phase Shifter, Detector, Low Pass Amplifier)를 사용하는 데 필요한 기본 실험을 진행한다. 대체로, 각 소자들은 완벽하지 않기 때문에, 사전의 교정 실험 (Calibration)을 통해 원하는 Lock-In 실험에서 적절하게 사용할 수 있도록 ‘조율’할 수 있다.

Preamp 이득의 주파수 의존성 확인

Preamp는 모든 주파수 영역에서 이상적으로 작동하지는 않는다. 따라서 주파수가 어느 영역을 벗어나면 Gain이 감소하기 시작한

다. Preamp의 몇몇 Gain에 대해, 3dB frequency를 측정하시오. 3dB frequency는 이득이 3dB 줄어들기 시작하는 주파수를 의미한다.

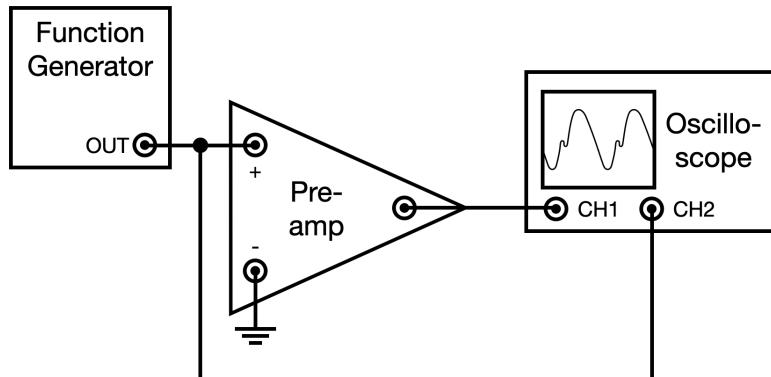


Figure 3.7: Preamplifier gain confirmation

참고: Teachspin 사 메뉴얼 34p

*선형화 및 회귀 등을 사용하지 않고 단순히 3dB만큼 이득이 줄어드는 주파수를 찾은 경우에는 감점한다. 주파수를 바꾸어 가며 얻은 이득을, 적절한 회귀 변수를 이용해 선형화한 뒤 그래프를 통해 3dB frequency를 얻고, 1시그마 유의수준의 불확실도를 반드시 기입하시오.

높은 이득에서는 10mV 정도로, 낮은 입력전압을 주어 장비의 손상을 방지하여야 한다. 또한, 함수발생기 자체도 주파수에 따른 Attenuation이 약간 존재하므로, 반드시 2채널 진폭 비교를 통해 이득을 측정하시오.

주파수를 바꾸어 가며 진폭만을 재면 이득의 크기 성분만을 재는 것이다. 복소함수로 표현되는 물리량의 실수부와 허수부 사이에는 Kramer-Kronig 관계가 성립하는데, 이는 흡수가 일어나는 영역에서는 이득의 크기 뿐만 아니라 위상도 같이 밀리면서 변화함을 의미한다. 위상차이 및 개형 변화에 대해서도 함께 측정하여 논의

하시오. 이러한 변화는 앰프의 Slew rate 제한으로 인해 발생한다. 이는 단위 시간당 허용되는 전압 변화율을 의미하는데, 이 값이 허용하는 속도보다 빠르게 목표전압이 바뀌어야 하면 앰프는 따라가지 못하고, 신호가 흡수된다.

Phase Shifter의 비이상 기동

Phase Shifter 역시, 주파수가 달라지면 약간의 틀어짐이 발생 한다. Phase shifter의 phase를 0에 두고, 주파수를 10개 이상 바꾸어 가며 (주파수의 범위가 충분히 넓어야 한다.) 실제 신호의 위상차를 측정하고, 선형회귀를 통해 slope (phase detune/frequency)를 산출하시오. 회귀 없이 2점 혹은 3점 interpolation을 사용한 경우 감 점한다. (점 두개 찍고 이어서 절편 찾지 말라는 의미. 측정 불확도는 육안보간해도 된다.)

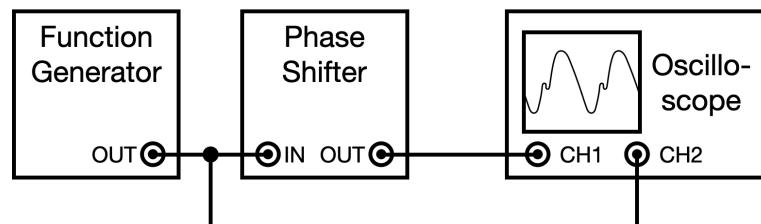


Figure 3.8: Phase shifter의 비이상 거동 확인

참고: Teachspin 사 메뉴얼 32p

Amplitude Detector를 사용한 DBM 실험

Lock-In Amplifier는 Phase Detection이 가능하기 때문에, reference input과 signal input 사이의 위상차가 출력에 중요한 영향을

미친다. 위상차가 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 일 때 출력 신호를 각각 확인하라. 써진 위상차가 잘 맞지는 않는다. 실험 연결은 다음 그림과 같이 구성하면 된다.

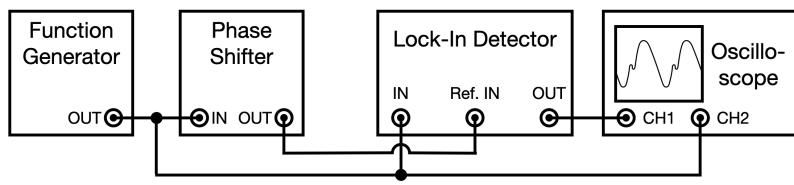


Figure 3.9: Amplitude Detector를 사용한 DBM 실험

참고 : Teachspin 사 매뉴얼 28p

Low-Pass Amplifier 실험

이제 Amplitude Detector에 저역통과 증폭필터만 장착하면 락인 검출을 위한 준비가 끝난다. 그러나 그 전에, 사용할 저역통과 앰프에 대한 실험이 필요하다.

이 장치는 시상수, roll off, dc offset을 조절할 수 있다. 두 가지 roll off (12dB/oct, 6dB/oct)와 세 가지 시상수의 6개 조합에서, 주파수를 바꾸어 가며 전압비등을 측정하시오.

roll off를 고정시켰을 때 시상수의 변화에 따른 이득 스펙트럼 개형을 설명하고, 반대로 시상수를 고정시켰을 때 roll off의 변화에 따른 이득 스펙트럼의 개형을 설명하시오.

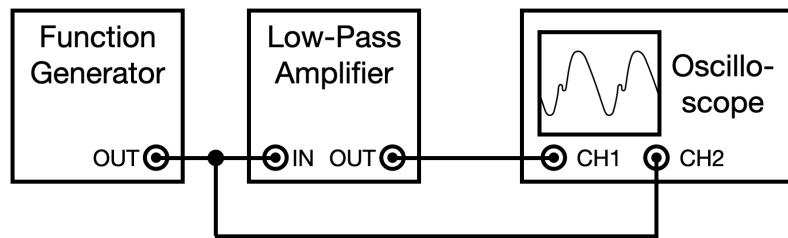


Figure 3.10: Low-Pass Amplifier 실험.

참고: Teachspin 사 메뉴얼 29-30p

한편, 서로 다른 roll-off는 실제로 다음과 같이 구현되어 있으며 그 영향은 서로 isolate된 필터가 직렬연결된 것과 같다. 이는 주파수에 따른 이득(투과율)을 바꾸는 결과를 준다. 아래 그림은 이를 간략히 나타낸 것인데, 실제로는 두 스테이지 사이에 opamp follower 와 같은 isolator가 있어야 한다. 그렇지 않으면 합성 임피던스가 되면서 게인이 바뀌게 된다. 이에 대한 세부적인 분석은 시행하지 않아도 감점되지 않는다.

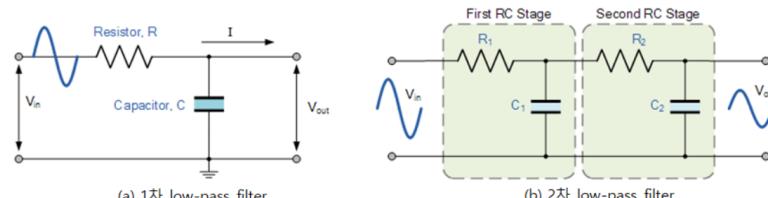


Figure 3.11: Roll off가 다른 두 필터의 구성

Lock-In Amplifier 실험

이제, 위의 4요소를 모두 종합하여, Lock-In Amplifier로 Noise로부터 신호를 걸러낼 수 있는 것을 직접 확인해 본다.

FFT를 이용한 Noise+Signal 스펙트럼 관찰

함수 발생기의 출력을 Noise Generator에 통과시켜 잡음을 섞을 수 있다. 얻어진 신호를 Preamp를 거친 뒤, Oscilloscope의 FFT 기능을 사용하여 스펙트럼을 관찰하시오. 노이즈를 꺼울 때와 비교하여 스크린샷을 첨부한다.

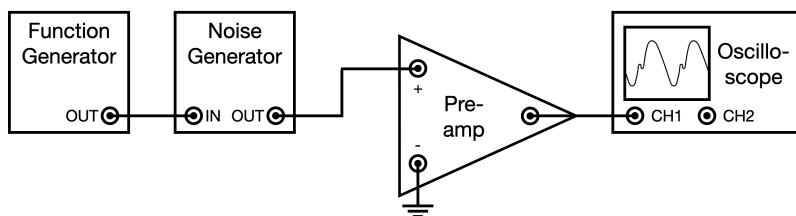


Figure 3.12: FFT를 이용한 Noise+Signal 스펙트럼 관찰.

Lock-In Detection을 이용한 Noise로부터의 Signal 검출

이제 앞선 실험들의 결과를 토대로, 최적의 락인 조건에서 다음 회로를 구성하여, Signal을 잡음으로부터 걸러 내 보시오.

다양한 S/N 값에 대해 시도한다. (S/N : Signal-to-Noise Ratio)

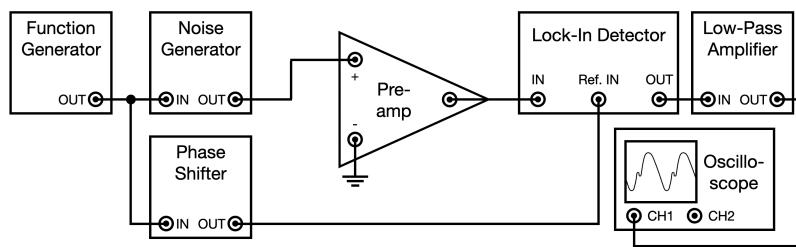


Figure 3.13: Lock-In Detection을 이용한 Noise로부터의 Signal 검출.

신호가 최대가 되는 Phase를 찾기 위해, phase에 따른 Low-Pass amplifier의 출력을 측정한 후 Quadratic Fit을 수행하시오.

Lock-In Detection의 DC Offset Stability 측정

(=DC Offset을 입력에 더해도 결과가 달라지지 않는지 측정.
그러나 실제는 이론과 다를 수 있으므로, 회귀를 통해 DC offset이
결과에 얼마나 영향을 주는지 측정해야 함)

위 2번 실험에서와 동일한 구성의 실험을 반복하되, 신호에 DC 성분을 더해 보시오. 이 과정에서 Low-Pass Amplifier의 출력은 일정하게 유지되는가? 최소 10개의 DC 성분에 따라 얻어지는 Low-Pass Amplifier의 출력을 측정하고, 선형 회귀하여 Drift Slope (low pass amplifier output increment / input dc offset increment)를 얻어야 한다.

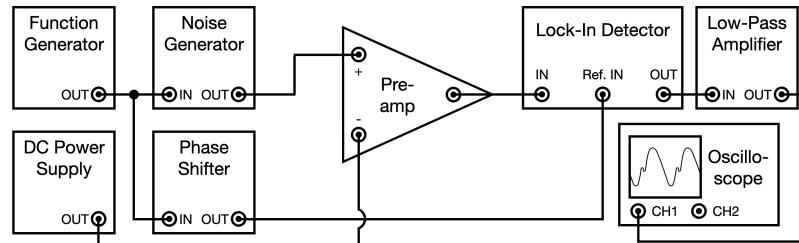


Figure 3.14: DC Offset 하에서 Lock-In Detection 거동의 변화 관찰.

이때 함수 발생기의 DC Offset 기능을 이용하면, 단순히 입력 전압만 위로 올라가는 것이 아닌 Zero-crossing 시점의 duty 비가 바뀌게 된다. 즉, 신호가 양수일 때와 음수일 때의 시간이 서로 달라지게 된다. 이를 막으려면, Lock in preamp의 + 입력단자에는 오프셋이 없는 신호를 넣고, - 입력단자에 오프셋을 줄 수 있는 DC 파워 서플라이로 전압을 가해주면 된다. 그러면 프리앰프 출력으로 나오는 신호는 직류성분이 더해져 있지만, 위상 검출에는 직류성분이 안 더해진 파형을 잘 쓸 수 있다. 이렇게 하지 않으면, DBM이 잘 작동하지 않는다.

홀 효과 실험

이제, Lock-In detection을 이용해 홀 소자를 사용하여 주어진 자석이 만드는 자기장을 측정하고, 쌍극자 모멘트를 구하도록 한다.

자석의 쌍극자 모멘트 결정 : 제공된 홀 소자를 적절히 납땜하거나 배선한다. 혹은, 이전 조들이 만들어놓은 마운트를 찾을 수 있는 경우 잘 사용해도 좋다. 2022년 기준 하나 만들어 놓았으나, 곧 없어질 것 같으므로 리드선과 인두기를 비치해 두었다. 반드시 사용후에 인두기의 전원을 끄는 것을 확인하시오.

다음 그림과 같이 연결하여 Lock-in detection을 준비한다. 이때 홀 센서의 출력은 2선식으로, 접지하면 4선식 측정의 의미가 없으므로 전극 하나는 프리앰프의 + 단자에, 하나는 - 단자에 연결하고 접지끼리는 서로 연결하면 된다.

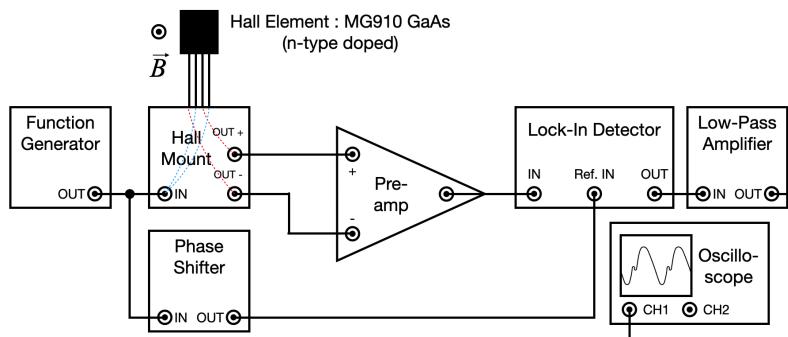


Figure 3.15: 홀 효과 실험.

홀 소자는 자기장이 일정할 때, 입력 전압에 비례하는 출력 전압(홀 전압)을 가진다. 입력 전압을 원하는 주파수로 떨어 주며, 출력 전압을 적절한 Gain으로 증폭하여, Lock-in detection을 함으로서 자석에 의한 자기장을 측정한다.

홀 소자를 물린 채 Phase 등을 최적화해, Lock-in detection을 구성하시오. 최적의 Lock-in phase는 측정 시 계속 바꾸어 출력이 최대값이 되게 해 주도록 한다.

이때 자석과 홀 센서 간 거리에 따라 (1) 출력이 최대가 되는 phase와, (2) 이때의 출력을 얻어 표로 나타내고, 적절한 회귀와 그 래프를 통해 자석의 쌍극자 모멘트를 얻어낼 수 있다.

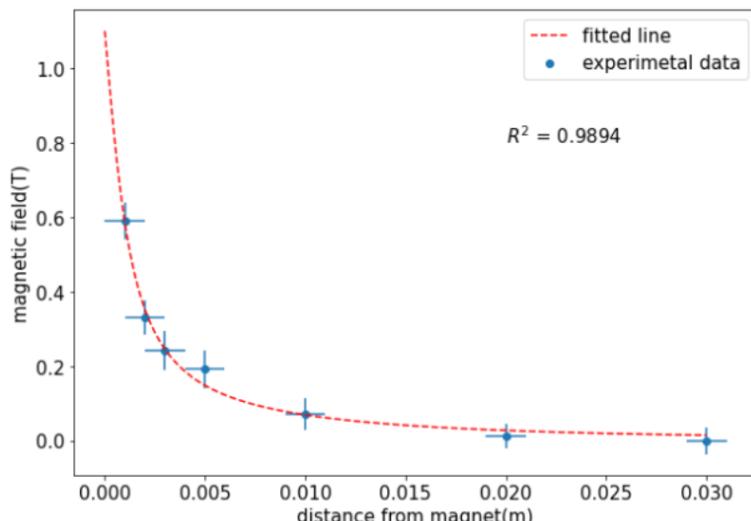


Figure 3.16: 얻어진 자석의 자기 쌍극자 모멘트(점 쌍극자 가정)

한편, 점 쌍극자가 아닌 자성체 모양의 효과를 반영한 모델로 회귀하면 다음과 같은 결과를 얻는다. (분석하지 않아도 감점이 없음)

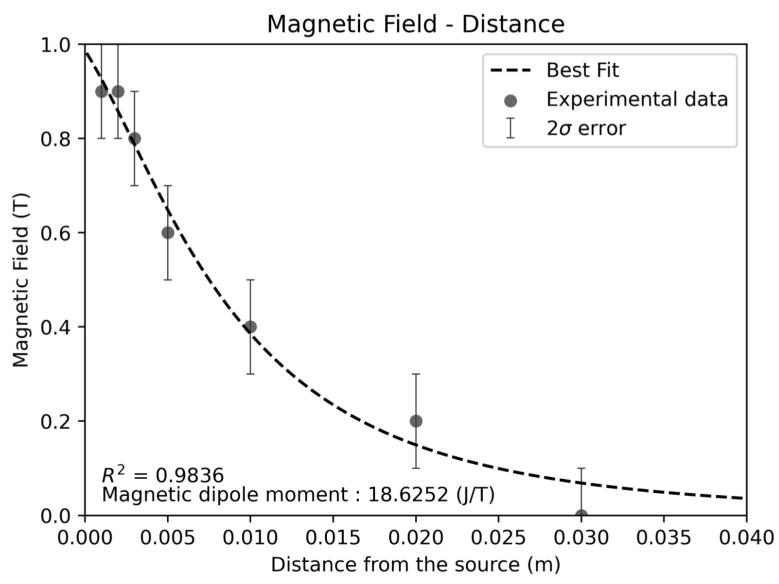


Figure 3.17: 얻어진 자석의 자기 쌍극자 모멘트(직육면체 모형)

Bibliography

- [1] G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics* (2nd ed.), Dover, 1975. (광학 이론, Chap. 5)
- [2] R. Feynman et al, *The Feynman Lectures on Physics I & III*, Addison Wesley, 2006. (파동-입자 이중성, I 권의 Chap. 37, III 권의 Chap. 1)
- [3] http://www.teachspin.com/instruments/two_slit/index.shtml
(실험장비 제작사의 장비 소개 페이지)
- [4] http://sales.hamamatsu.com/assets/applications/ETD/pmt_handbook_complete.pdf
(PMT specification, Chap 6. pp 141~149)
- [5] John R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis ; The Study of Uncertainties in Physical Measurements", 2nd ed., (1982)
- [6] 김우철, 김재주, "개정판 일반통계학", 영지문화사, (2006)

4

Optical Tweezers

거쳐간 조교들	
신승환 (2021. 03.)	4.1 실험 목적 113
홍승주 (2022. 06.)	4.2 배경 이론 114
김솔 (2022. 07.)	Optical Tweezers의 원리 114
	브라운 운동 118
	4.3 실험 121
	주의 사항 121
	실험 기구 122
	실험 과정 124

4.1 실험 목적

Optical tweezers는 말 그대로 빛을 이용한 핀셋이다. Optical tweezers는 빛을 이용하여 작은 물체를 조작할 수 있게 해준다. 이러한 특성을 살려 Optical tweezers는 미소부품을 조작하거나 세포나 분자를 다루는데 활용된다. 이번 실험에서는 Optical tweezers의 작동 원리를 이해하고 이의 사용방법을 익혀, 이의 trapping force를 측정하는 실험을 수행해 본다.

4.2 배경 이론

Optical Tweezers의 원리

Optical tweezers의 원리를 설명하기 위해 Gaussian intensity profile(TEM₀₀ mode) 가 구형인 물체(구슬)에 가해지고, 물체가 dielectric, linear, isotropic, non-dispersive한 물질임을 가정한다.

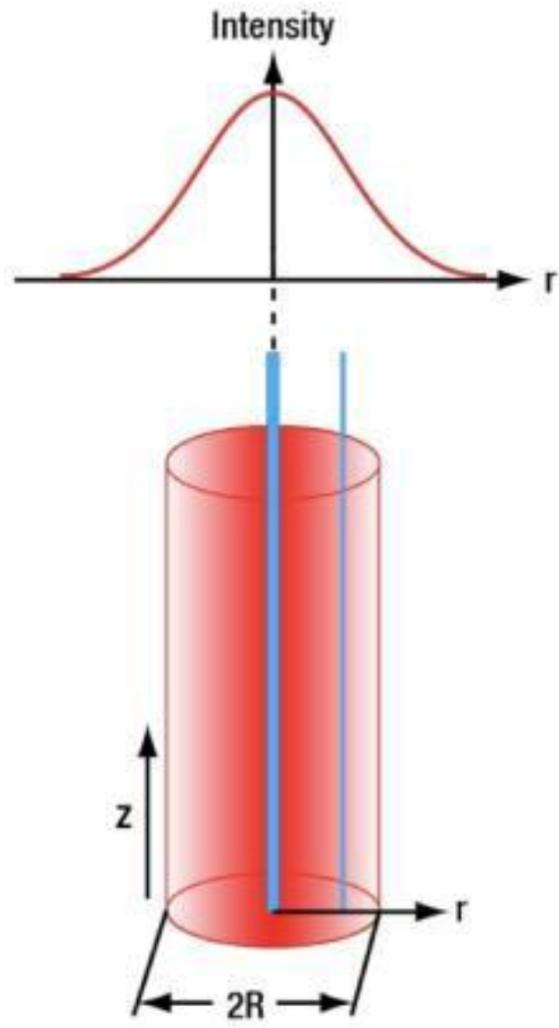


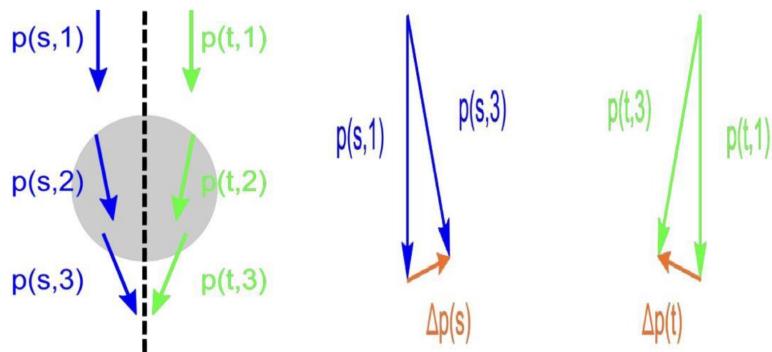
Figure 4.1: Gaussian Intensity Profile

Gaussian beam profile은 그림과 같다. 그림에서 Gaussian

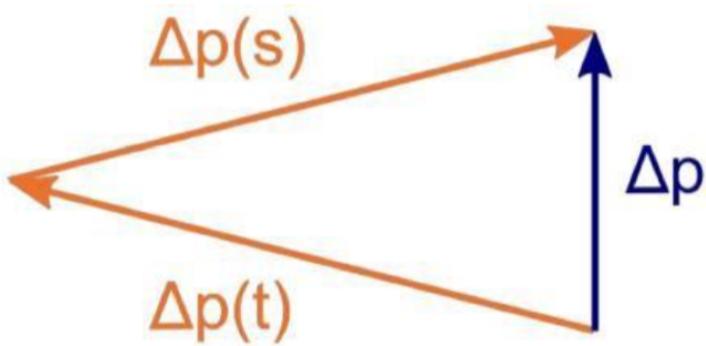
beam은 광선의 중심에서 최대 세기를 가지고, 바깥으로 갈수록 세기가 약해지는 것을 확인할 수 있다. 이러한 beam profile은 Optical trap을 형성하는데 필수적이다. 우선 물체에 평행광이 입사하는 경우를 생각해보자. 이 경우 상황을 2가지 경우로 나누어서 생각해볼 수 있다.

i. Beam의 중심축이 구슬의 중심을 지나는 경우

구슬에 가해지는 알짜 힘은 레이저전체의 광선의 영향을 모두 더해 구해야 한다. 그러나 레이저가 중심축을 기준으로 대칭이므로 대칭인 광선 2개만을 고려하는 것으로 경향성을 파악할 수 있다. 그림은 축에 대칭인 두 광선이 물체에 입사한 상황에서 빛의 운동량을 화살표로 표현하였다. 빛은 굴절되면서 진행방향은 바뀌어도 운동량의 크기는 변하지 않는다. p_1 은 구슬에 입사 전 운동량, p_3 은 입사 후의 운동량이므로 p_1 과 p_3 의 차이를 보면 빛의 운동량이 구슬에 입사하기 전후로 얼마나 변했는지 알 수 있다.



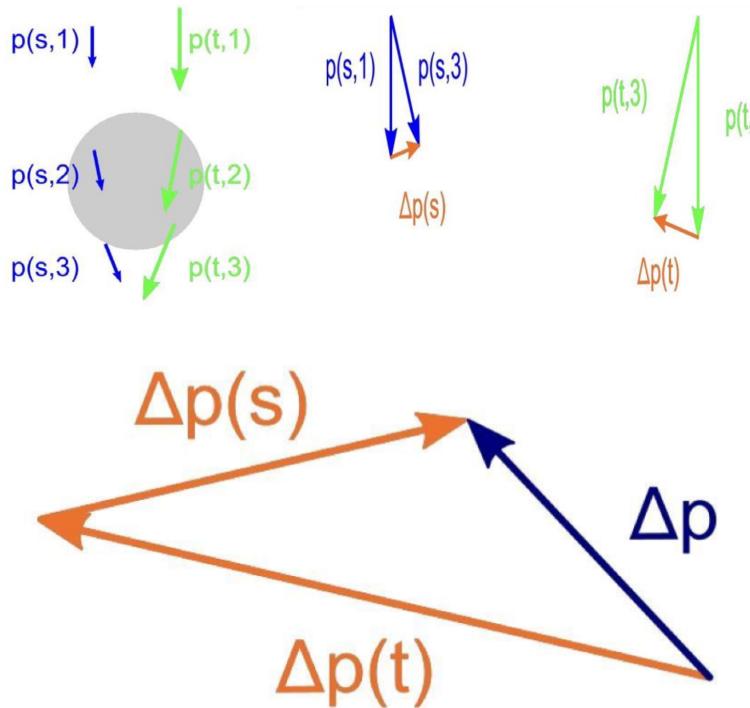
두 광선의 운동량의 변화량의 총합 Δp 는 그림과 같다.



운동량 보존에 의해 두 광선의 운동량 변화량의 합과 크기가 같고 방향은 반대인 운동량을 구슬이 얻는다. 구슬이 렌즈와 같은 역할을 해서 초점을 맷을 때, 구슬은 초점이 맷힌 방향으로 밀려난다. 그러나 평행광이 입사했으므로 이 경우 아래 방향으로 계속 밀려나게 되고, optical trap을 형성하지 못한다.

ii. Beam의 중심축이 구슬의 중심을 지나지 않는 경우

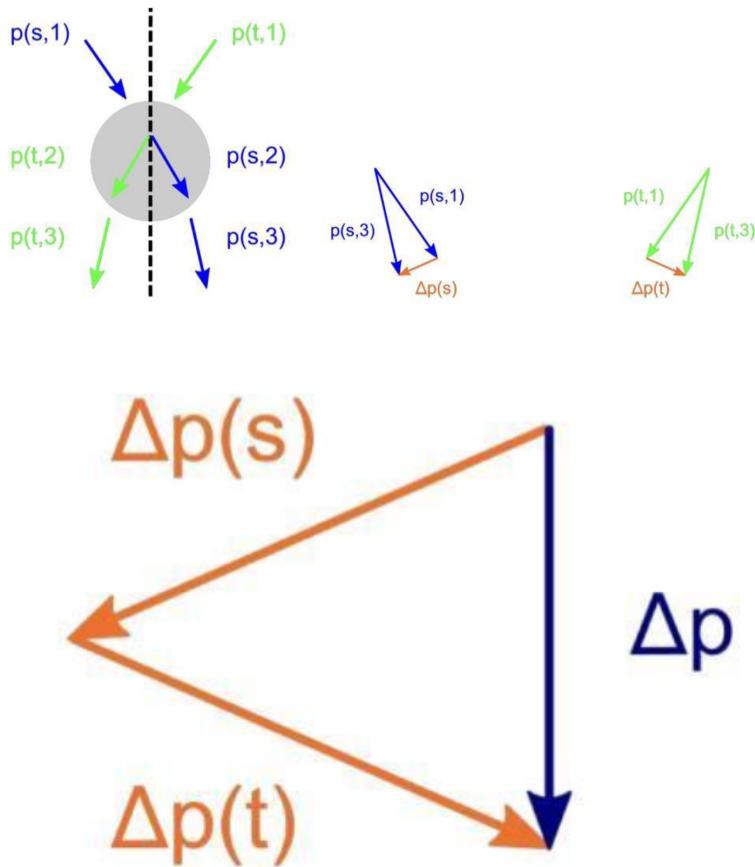
위에서 한 설명과 거의 비슷하지만, 이번에는 한쪽 광선의 운동량의 크기가 더 크다는 것을 염두해야 한다. 그럼으로부터 입사 전 운동량과 입사 후 광선의 운동량의 변화량 Δp 를 알 수 있다. 운동량 보존 법칙으로부터 구슬은 $-\Delta p$ 의 운동량을 가진다. 즉, 구슬은 자신의 중심축이 빛의 중심축과 일치하는 방향으로 움직인다. 그러나 이 경우에도 구슬은 계속 아래로 밀려나게 된다.



빛이 나오는 방향에서도 optical trap을 형성하기 위해서는 평행광이 아닌 초점이 있는 빛을 사용해야 한다.

iii. 초점이 맷힌(Focused light) 빛을 사용하고 구슬의 중심축과 광선의 중심축이 일치하는 경우

초점이 맷힌 빛을 사용할 경우 상황은 그림과 같다. 그림에서 총 운동량의 변화를 확인할 수 있다. 따라서 구슬이 받는 알짜힘은 초점방향을 향한다. 앞서 말한 두 경우를 조합해서 생각해보면 초점이 있는 빛을 물체에 가했을 때, 물체는 빛의 초점방향을 향하는 복원력을 받는다.



(자세한 계산과정은 Thorlab manual에 첨부되어 있다. Chapter 4를 참고하길 바란다.)

브라운 운동

액체분자는 random walk라는 불규칙적인 운동을 한다. 액체에 떠 있는 입자는 이런 불규칙적이게 운동하는 액체 분자들과 충돌하며 무작위한 지그재그 운동을 하게 된다. 이때, 시간 t 가 지났을 때 원점에서부터 입자가 얼마만큼 떨어졌는지 생각해볼 수 있다. N 개의 입자가 액체 위에 떠있는 상황을 생각해보자. 하나의 입자의 x

변위만을 생각하고 운동방정식을 세워보면

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{ext} \quad (4.1)$$

이다. M 은 입자의 질량, μ 는 저항력과 관련된 계수이다. F_{ext} 는 입자에 가해지는 무작위한 충돌로부터 발생하는 힘이다.

양변에 x 를 곱하고 N 개의 입자에 대해서 평균을 내면 다음과 같다.

$$\langle mx \frac{d^2x}{dt^2} \rangle + \langle \mu x \frac{dx}{dt} \rangle = \langle x F_{ext} \rangle \quad (4.2)$$

한편, 다음 식에서, 힘이 어떠한 방향으로 물체를 이동시키려는 경향성이 없기 때문에 $\langle x F_{ext} \rangle = 0$ 이다.

$$mx \frac{d^2x}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right) - m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \quad (4.3)$$

$\langle x dx/dt \rangle =: g$ 라 하고 식을 정리하면 다음을 얻는다.

$$m \frac{dg}{dt} - \langle mv^2 \rangle + \mu g = 0 \quad (4.4)$$

Equipartition Theorem에 의해 $\langle mv^2/2 \rangle = k_B T/2$ 이므로

$$\frac{dg}{dt} + \frac{\mu}{m} g = \frac{k_B T}{m} \quad (4.5)$$

이다. 초기 조건을 $t = 0$ 일 때 $x = 0$ 라 하고 미분 방정식을 풀면 다음과 같다.

$$g = \frac{1}{2} \frac{d\langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{k_B T}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\mu t}{m}} \right) \quad (4.6)$$

a. $t \ll m/\mu$ 일 때,

$$\langle x^2 \rangle \sim \frac{k_B T}{\mu} t^2 \quad (4.7)$$

b. $t \gg m/\mu$ 일 때,

$$\langle x^2 \rangle \sim \frac{2k_B T}{\mu} t \quad (4.8)$$

구형 물체가 유체에서 받는 저항력 $F = \mu v = 6\pi\eta_{eff}Rv$ 으로 얻어진다. 이때 η_{eff} 는 액체의 점성, R 은 입자를 구형이라 가정하였을 때의 반지름이다. 점성계수는 $\mu = 6\pi\eta_{eff}R$ 로 주어진다.

이차원 운동에서 $\langle r^2 \rangle = \langle x^2 \rangle + \langle y^2 \rangle$ 이므로, $t \gg \mu/m$ 일 때

다음을 얻는다.

$$\frac{d\langle r^2 \rangle}{dt} = \frac{2k_B T}{3\pi\eta_{eff}R} \quad (4.9)$$

즉, 시간이 충분히 흘렀을 때 $t - \langle r^2 \rangle$ 그래프는 선형이고, 그 기울기는 $2k_B T / 3\pi\eta_{eff}R$ 이다.

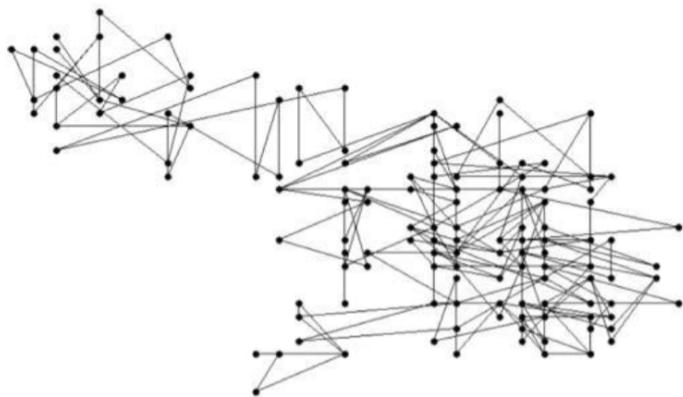


Figure 4.2: Brownian motion

4.3 실험

주의 사항

1. 레이저 및 광학장치의 alignment가 흐트러지지 않도록 장비에
과한 힘이 가해지지 않게 주의한다.
2. 레이저가 눈에 향하지 않도록 주의한다.
3. 샘플이 로딩되어 있는 채로 스테이지를 지나치게 올리면 대물
렌즈와 샘플이 부딪혀 손상이 발생할 수 있다.
4. 사용을 마친 피펫과 슬라이드는 흐르는 물로 씻을 수 있도록

한다.

실험 기구

i. **Laser diode & Laser diode driver** 실험에 사용되는 laser diode L658P040은 중심 파장 658 nm의 붉은 레이저를 출력한다. 이 레이저는 Homemade laser driver로 작동되며 자세한 작동 방법은 실험실에 적혀있다. 출력된 레이저는 그림의 붉은 화살표를 따라 유도되어 시료에 도달한다.

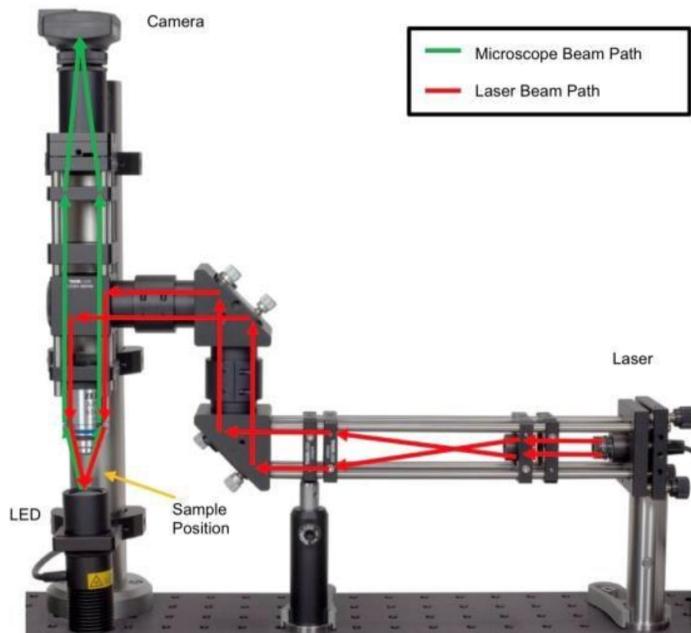
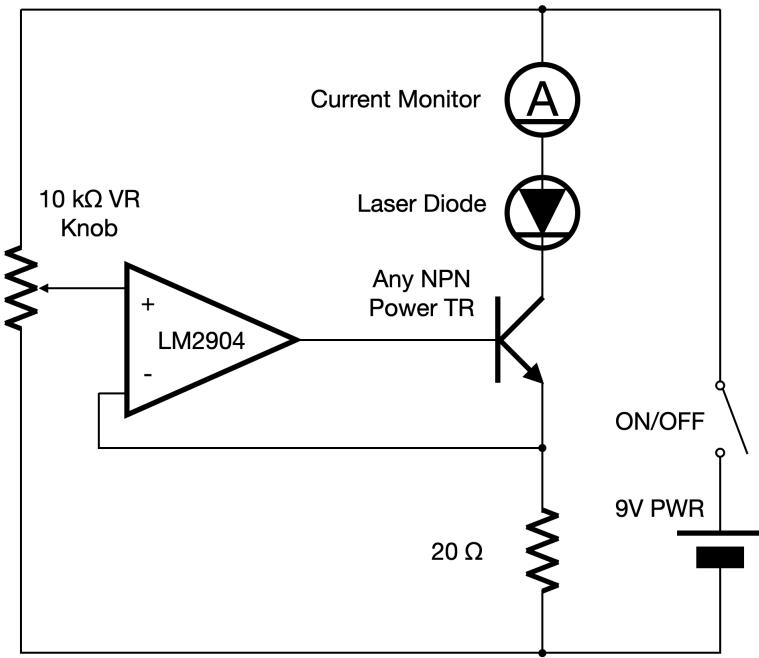


Figure 4.3: Optical tweezer에서 사용하는 레이저의 궤적(빨간색 화살표), 물체의 상이 카메라로 들어가는 궤적(초록색 화살표)

Homemade laser driver가 망가진 경우, 유지보수를 위해 아래의 회로도를 참고할 수 있다. (조교가 아니면 건드리지 마시오.)



ii. Sample Positioning system 준비된 시료는 sample positioning table에 배치되어 위치를 조작할 수 있게 된다. Sample positioning table에 배치된 샘플은 3방향으로 위치를 조절할 수 있다. 그림에서 붉은 원으로 표시된 노브를 조정하여 위 아래의 위치를 조절할 수 있다. 나머지 방향은 KDC101로 조작되는 2개의 brushed motor로 조절할 수 있다. Brush motor는 KDC101로 직접 조작하거나 컴퓨터에 설치된 프로그램을 통해 조작할 수 있다



Figure 4.4: motorized mount and drivers

실험 과정

샘플 제작 (영문 매뉴얼 Chapter 7.1)

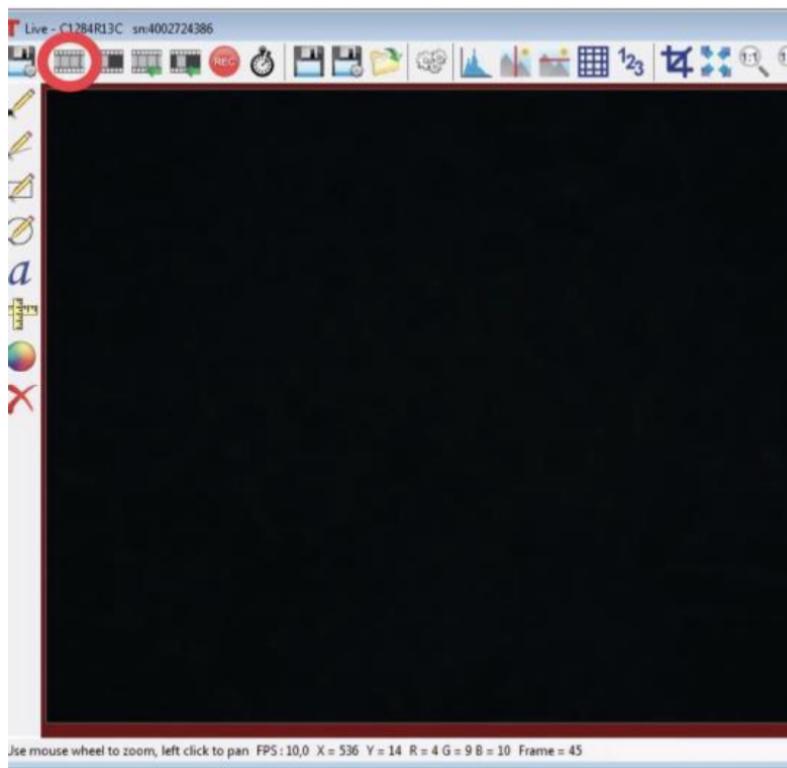
본 실험에서는 직경 $2.06 \mu m$ 의 silica beads가 섞인 용액을 이용하여 Optical tweezers의 조작방법 및 원리를 확인할 것이다. 샘플을 만드는 방법은 다음과 같다. 샘플은 소모품이니 한번 만든 샘플을 마이크로튜브에 보관해서 가급적 아껴쓰기를 바란다.

1. 용액이 들어있는 용기를 흔들어 침전되어있는 Silica bead를 섞어준다.
2. 피펫으로 1~2방울(대략 $30\sim40 \mu l$)의 용액을 슬라이드 구멍에 떨어트려준다.
3. 그림과 같이 커버 글라스를 가파른 각도에서부터 기울여 구멍과 용액을 덮는다. 이는 공기 방울 생성을 방지하기 위함이다. 공기방울이 생성될 경우, 공기방울 쪽으로 흐름이 생기기 때문에 공기방울이 없게끔 샘플을 만들어야 한다.



소프트웨어 세팅(카메라, 모터, 레이저 컨트롤러)

- 카메라(영문 매뉴얼 Chapter 6.2.3) 바탕화면에 있는 ThorCam 을 열고 연결되어 있는 카메라를 선택하면 아래 그림과 같은 화면을 띠울 수 있다. 그림에 붉은 원으로 표시해 놓은 아이콘을 누르면 카메라에 찍히는 실시간 영상을 컴퓨터 화면으로 확인할 수 있다. 상단에 있는 아이콘을 통해 사진을 캡쳐하거나 카메라 영상을 녹화할 수 있다. 녹화를 할 때, Quick save 칸을 누른 후 파일 형식을 avi로 설정해야 한다.



- Sample positioning stage controller (영문 매뉴얼 Chapter 6.2.4)

Kinesis 아이콘을 클릭하고 Load 버튼에서 두 brush motor를 선택하여 컨트롤 패널을 연다. 이 모터는 trapped 된 샘플을 이동시킬 때 사용하기 때문에 천천히 움직일 필요가 있다.

- Setting 버튼을 누르고 Advanced 탭에 들어간다.
- Max. Velocity 를 0.03mm/s, Acceleration을 1~2 mm/s²로 설정한다.

c. Drive Array Velocities를 다음과 같이 조정한다.

Velocity 4: 0.03mm/s

Velocity 3: 0.02mm/s

Velocity 2: 0.01mm/s

Velocity 1: 0.005mm/s

Velocity 1~4는 4종류의 Drive 버튼을 눌렀을 때 출력되는 속도에 대응된다. 속도 설정은 2개의 모터에 각각 해주어야 한다.

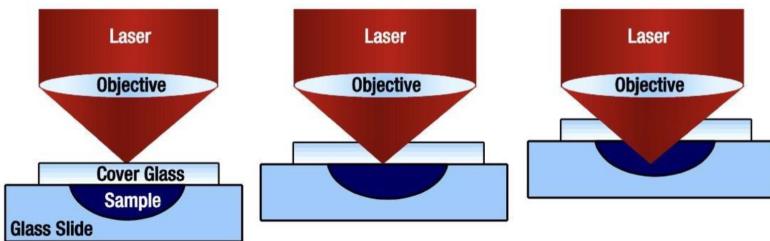
3. Drop Rate.

중물실이 다 그렇지만 수강생뿐만 아니라 실험장비도 Drop을 좋아한다. 카메라의 프레임 레잇이 일정 수준 이상으로 올라가거나 화질을 너무 좋게 설정한 경우에는, 실제 흘러간 physical time과 녹화된 시간이 다를 수 있다. 이럴 경우 동영상 길이가 짧아진다. 당연히 시간에 따른 dynamics 분석에도 지장이 생긴다. 왜 이렇게 만들어놓았는지는 모르겠으나 자주 일어나는 일이므로 수시로 녹화시간과 저장된 동영상의 길이를 비교하여, dropped frame의 퍼센트가 0보다 큰 경우 영상 설정을 바꾸어 최적화하도록 한다.

레이저 초점 잡기 (영문 매뉴얼 Chapter 7.2)

1. 샘플을 sample positioning stage에 올려놓기 전 sample positioning stage를 충분히 밑으로 내리고 샘플을 로딩한다. 충분히 내리지 않고 로딩을 시도할 경우 대물렌즈와 샘플간의 충돌이 발생할 수 있다.
2. 샘플을 천천히 올리면서 카메라 화면을 관찰한다. 샘플을 올리면서 총 3번 레이저 포인트가 사라졌다 보였다 할 것이다(그림 참고). 첫 번째 포인트는 커버 글래스의 위쪽 표면에 생기는

것이다. 둘째 포인트는 커버 글라스 아래쪽 표면에 생기는 것이고, 셋째 포인트는 샘플에 생기는 것이고, 이 때 레이저 초점이 올바른 위치에 형성된 것이다. 이 때 스테이지가 대물렌즈와 매우 가깝다는 것을 유의해야 한다.



실험

1. Arranging the Silica Beads (영문 매뉴얼 Chapter 7.3)

레이저의 초점을 알맞은 지점에 위치시키고 bead 근처로 레이저를 이동시키면 bead가 레이저 중심으로 이동하여 고정된다. 스테이지를 이동시키면서 bead가 레이저를 따라 이동하는 것을 확인한다. Trapping force가 약한 것 같다면 스테이지의 위치를 위 아래로 조금씩 조정해본다. Trapping이 되는 것은 현장에서 조교가 확인하는 것으로 충분하며, 보고서에 관련 내용을 기입 할 필요는 없다.

2. Manipulating a Dairy Cream Particle in a Cream/Water Emulsion (영문 매뉴얼 Chapter 7.4)

물과 유제품을 섞은 혼합물에서 크림입자(주로 지방)을 Optical tweezers로 조작해본다. 스테이지를 z방향으로 조작하면서 어떤 일이 발생하는지 확인하고, 레이저를 키고 끌 때 입자가 어떻게 행동하는지 확인한다. 이 실험은 물 표면에 모여있던 크림 입자가 레이저 초점방향으로 끌려 내려가는 것을 보고

trapping force의 z방향의 힘의 성분을 확인하는 것을 목표로 하는 실험이다. Trap 전후, 입자가 z방향으로 움직이기 때문에 입자의 초점이 맷히는 정도가 달라지는 것을 확인할 수 있을 것이다. 레이저를 켰을 때와 꺼졌을 때 우유 콜로이드가 어떻게 되는지 사진으로 기록하고 보고서에서 분석해본다.

3. Measuring the holding force of the optical tweezers (영문 매뉴얼 Chapter 7.5)

Optical trap에 갇힌 물체는 레이저가 움직일 때(혹은 스테이지가 움직일 때) frictional force(초점을 따라 움직이면서 겪는 마찰력)과 물체를 가두려는 trapping force를 받는다. Trapping force 보다 frictional force가 크다면 스테이지가 움직일 때 레이저를 따라 bead도 같이 움직일 것이고, 그렇지 않다면 frictional force가 더 큼을 의미한다.

Frictional Force F_R 은 다음과 같다.

$$F_R = 6\pi\eta_{eff}Rv \quad (4.10)$$

R 은 bead의 반지름, η_{eff} 는 유체의 유효 점성(effective viscosity)이다. 브라운 운동을 관측하여 구한 time-Mean squared displacement 그래프의 기울기 m 은

$$m = \frac{2k_B T}{3\pi\eta_{eff}R} \quad (4.11)$$

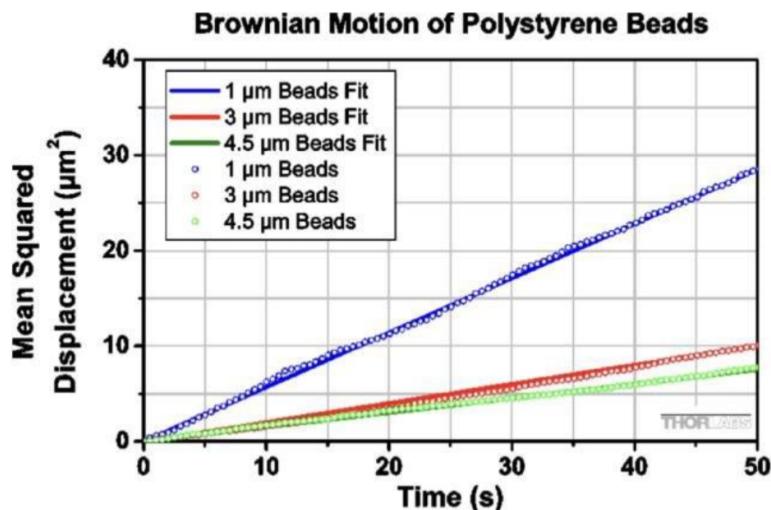
이므로 시간에 따른 Mean squared displacement를 측정하여 η_{eff} 을 구할 수 있다.

Mean squared displacement를 구하기 위해서는 최소 5개의 입자에 대한 변위의 제곱의 평균을 내어야 한다. 브라운 운동하는 입자의 시간에 따른 Mean squared displacement를 계산하여 유효 점성을 구한다.

1. Bead를 볼 수 있게 초점의 위치를 조정한 후, 레이저를 끈다.
샘플이 한 방향으로 이동하는 경향성을 보인다면 기포로 인해 흐름이 생긴 것이므로 기다리거나 새로운 샘플을 만들어야 한다.
2. 슬라이드 글拉斯를 로딩한 후, 온도센서를 테이프로 고정한다.
(하지 않아도 됨) 이후 멀티미터 설정을 Temp로 돌린 후 온도를 읽는다.
3. 고정되어 있는 두 개의 bead를 찾아 Thorcam의 Draw circle 기능으로 표시를 하고 그 좌표를 기록한다. 이후 스테이지를 이동시켜 bead에 표시되었던 원이 다른 bead에 겹치도록 하고 그 때의 좌표를 기록한다. 두 좌표의 차이가 두 bead 사이의 간격이고, 곧 Draw circle기능으로 기록한 원 간의 간격이다. 표시된 원은 영상에 계속 남아 scale을 가늠할 수 있게 해주고, 초점거리를 변화시키지 않는 이상 다시 측정할 필요가 없다.
4. 보다 나은 방법은, 위의 방법대로 하면 좌표축이 틀어진 각도를 알 수 없고, 비드가 두 개 있지 않을 때에는 쓸 수 없다. 이를 보정하기 위해, 멈춰있는 비드 하나, 혹은 고정된 점 등을 찾아 원으로 표시하고, x방향으로 밀어서 새 위치에 원으로 표시하고 x방향으로 움직인 모터의 이송거리를 기록한다. 이후 y방향으로 밀어서 새 위치에 원으로 표시하고, 마찬가지로 움직인 모터의 이송거리를 기록한다. 이후 원 세 점 사이의 좌표관계를 보면 카메라에서의 위치와 실제 위치 간의 좌표변환행렬을 얻을 수 있다.

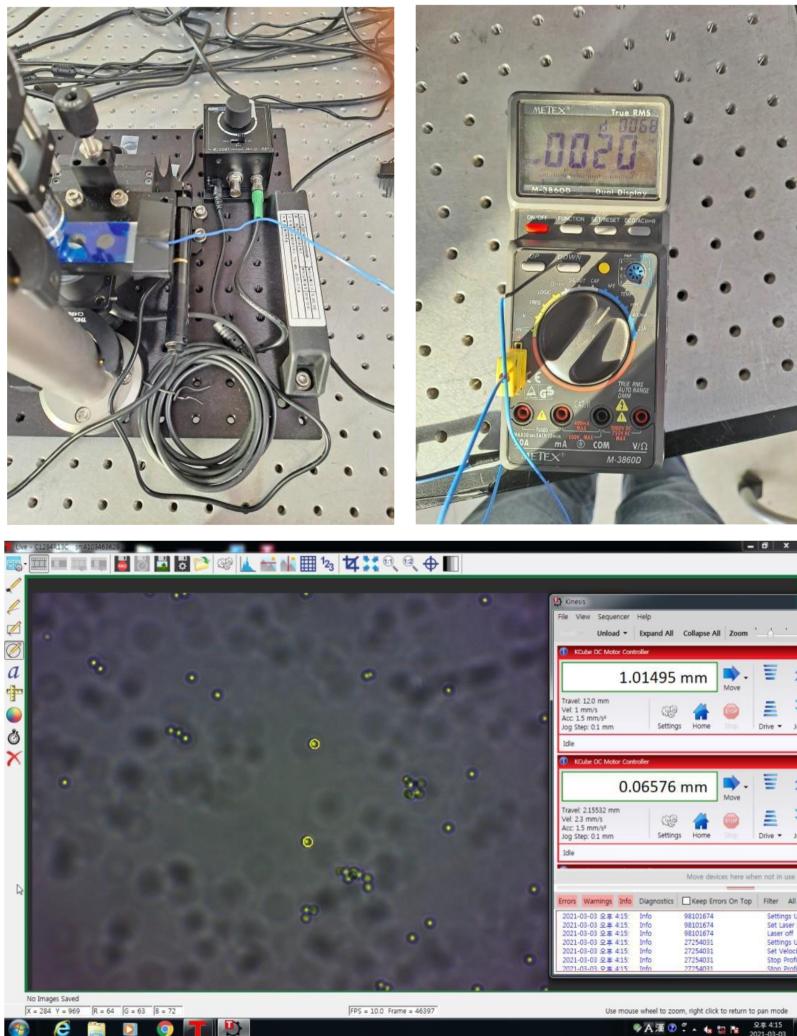
5. ThorCam의 녹화기능을 사용하여 브라운 운동하는 입자의 운동을 녹화한다. 2 분 이상 녹화가 되어야 하며, 운동 도중 입자가 다른 입자의 영향을 받지 않게 해야 한다. 최소 5개의 운동을 기록하도록 한다.
6. Tracker 프로그램을 사용하여 입자의 운동을 좌표평면에 기록 한다.
7. 구한 데이터를 통해 Mean squared displacement를 시간에 대해서 그래프를 그리고 기울기를 구한다. Mean squared displacement는 각 입자마다 출발 지점으로부터의 변위의 제곱을 여러 개의 입자에 대해 구한 다음에 입자 개수로 평균값을 취하면 된다.

크기가 다른 Bead를 대상으로도 그래프를 그려본다.



구해진 점성이 대략 $10^3 \text{ N}\cdot\text{s}/\text{m}$ 임을 확인하자. 점성을 구했다면 스테이지의 이동속도를 늘려가면서 bead를 trapping하는 최대 속도를 구하고 trapping force를 구해보자. Laser 다이오드에는 Lasing이 시작되는 (레이저가 나오기 시작하는) threshold 전류가 존재하게 된다. 전류의 세기를 조절하면서 레이저의 세기를 줄이거나 늘렸을 때 최대속도가 어떻게 변화하는지 확인해보고, tweezers의 작동원

리와 연결시켜 그 이유를 생각 해보고, 해당 threshold current를 구해보자.



Bibliography

[1] Thorlabs Portable Optical Tweezers User Guide

[2] https://www.feynmanlectures.caltech.edu/I_41.html

[3] <http://physics.gu.se/~frtbm/joomla/media/mydocs/LennartSjogren/kap6.pdf>

거쳐간 조교들

2022. 03. 김솔 작성

2022. 07. 김솔 개정

본 매뉴얼의 발전에 큰 기여를 한 2022학년도 권순현, 송영민, 최영환, 최이선 수강생에게 감사를 표함.

5.1 실험 목적

본 실험은 2개의 용수철과, 회전관성을 무시할 수 있는 금속 원판을 이용한 동역학계의 Chaotic Oscillation을 관측하고, 강제진동 구동기의 주파수, 조절할 수 있는 감쇠, 및 디지털 각 변위 기록장치를 이용하여 시간에 따른 변위자료를 분석하고 처리하여 비선형 / 비조화 역학계를 실험적으로 Characterize해낼 수 있는 스킬을 연습하는 데 그 목적을 둔다. 시간에 따른 각변위 데이터를 처리하여 각변위-시간 플롯, 각속도-시간 플롯을 얻어 단진동으로 근사할 수 있는 경우 회귀하고, Trap의 Anharmonicity에 의해 발생하는 여러 가지 현상을 Harmonic Trap의 경우와 얼마나 벗어나는지 “정량적으로” 관측할 수 있는 실험적 처리 방법을 연습한다. 역학적 상(Phase)의 구분은 변위 자료의 시간에 따른 개형으로 정성적으로 추산할 수 있으나, 이를 정량적으로 Distinct phase라고 주장하기 위해서는 심도

5.1 실험 목적	135
5.2 배경 이론	136
Equation of Motion for Complex Pendulum	136
상 전이 이론	139
위상 공간	142
Chaotic Phase	145
5.3 장비 소개	146
역학계	147
Capstone 소프트웨어 사용 법	149
5.4 실험 절차 - Task List . . .	150
A. Potential Characterization from a Damped Pendulum	152
B. Thermodynamics and Phase Diagram	158
C. Heating and Chaotic Behavior in Driven System .	167

있는 정량적 자료 처리 기법이 요구된다. 별도로 부여된 통계 처리 교본을 참조하여 디지털 장비를 이용해 얻어진 많은 수의 데이터를 정량적으로 회귀하고, 여러 상을 구분할 수 있는 order parameter를 찾으며, 주어진 여러 가지 knob을 이용해 상도표 (phase diagram)을 그리는 것을 목적으로 실험을 진행 한다. 본 실험에서 관측할 수 있는 상은 (1) Doubly Trapped, (2) Ground State (3) Metastable State (4) Chaotic Phase의 4종류이며, 이들 사이의 상 전이 현상을 분석하고 Landau Mean Field Theory와 비교한다. 특히 Chaotic Phase에서 일어나는 behaviour를 분석하기 위해 FFT 분석 및 Poincaré plot 을 수행함으로서 비선형 역학계에서 일어나는 혼돈 현상을 이해하고, 시뮬레이션을 통해 얻은 운동 방정식의 해와 비교한다. 이를 토대로 물리학에서 중요한 부분을 차지하는 상 경계에서 일어나는 일들과 혼돈 현상들에 대한 이해를 넓히는 것을 목적으로 한다.

5.2 배경 이론

Equation of Motion for Complex Pendulum

Trap의 형태가 Harmonic으로 근사될 수 있는 경우, 평형점 근처의 미소 진동에 대해 단진동 기술이 성립한다. 이때 유용한 운동 방정식은 $m\ddot{x} = -kx$ 의 형태를 가지며, 좌변은 관성에 의한 가속도 항, 우변은 변위에 따른 복원력 항에 해당한다. 이러한 단조화진동은 트랩의 세기에 따라 유효 힘상수 $k_{eff} = U''(x_0)$ 로 얻어진다.

본 실험에서 사용하는 진자의 운동 변수는 다음 그림과 같다.

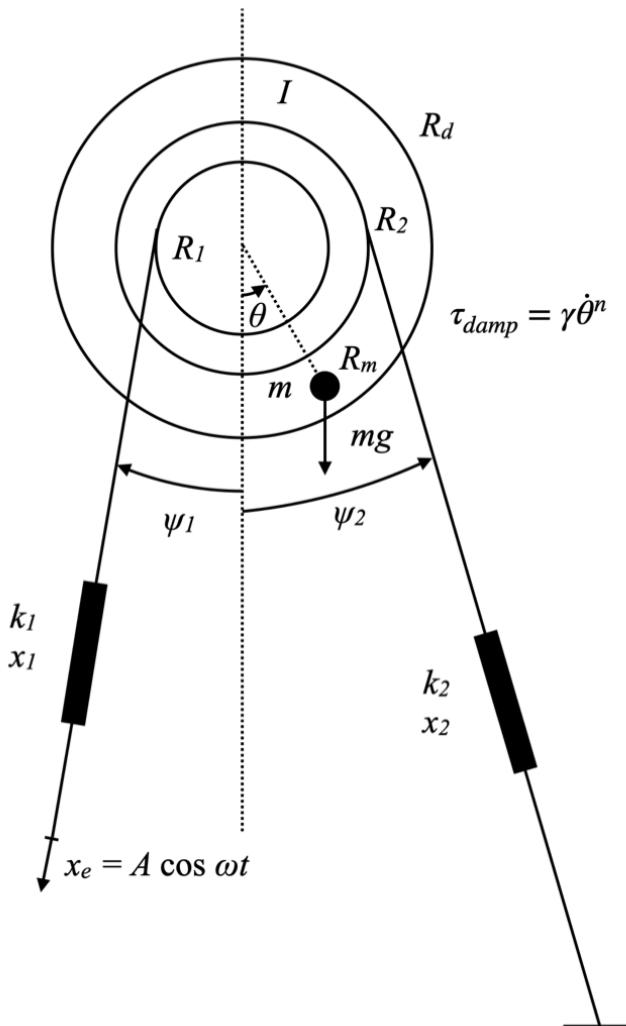


Figure 5.1: Parameters used to describe this system

외부 구동력과 감쇠 항이 없는 경우 이 시스템의 총 역학적 에너지는 보존되고, 이를 통해 운동방정식을 얻을 수 있다. 먼저 운동에너지를 고려해야 하는 것은, 디스크의 회전운동과 디스크에 부착된 질점의 운동에너지이다. 또한 퍼텐셜은 두 개의 용수철의 늘어난 길이에 따른 퍼텐셜 및 질점의 높이 변화로 얻어지는 중력 퍼텐셜이 존재한다. 이를 합치면 다음과 같은 형태의 에너지 식을 얻는다.

$$T = \frac{1}{2}(I + mR_m^2)\dot{\theta}^2 \quad (5.1)$$

$$V = mgR_m(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 \quad (5.2)$$

한편 이 시스템에는 실의 길이 구속 조건이 있다. 이를 반영하면 $x_1 = x_{1,0} - R_1\theta, x_2 = x_{2,0} + R_2\theta$ 를 얻으면, 이를 대입하면 다음과 같이 변형된 퍼텐셜 항을 얻을 수 있다.

$$V = mgR_m(1 - \cos \theta) + \frac{1}{2}k_1(x_{1,0} - R_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_{2,0} + R_2\theta)^2 \quad (5.3)$$

이때 라그랑지안 $L = T - V$ 를 변분하면 다음과 같은 자유 상황(외부 구동력 및 감쇠가 없는 상황)에서의 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$(I + mR_m^2)\ddot{\theta} = -mgR_m \sin \theta - k_2(x_{2,0} + R_2\theta) + k_1(x_{1,0} - R_1\theta) \quad (5.4)$$

감쇠 항 및 외부 구동력을 반영하면 퍼텐셜에 시간 및 속도 항이 추가되므로 non-holonomic하다. 이 경우 운동방정식은 다음과 같이 얻어진다.

$$(I + mR_m^2)\ddot{\theta} = -mgR_m \sin \theta - \gamma \dot{\theta}^n - k_2(x_{2,0} + R_2\theta) + k_1(x_{1,0} + A \cos \omega t - R_1\theta) \quad (5.5)$$

이를 오일리법, 룽게-쿠타 방법 등의 수치적 반복기법을 통해 풀면 실제 운동과 비교해 볼 수 있다.

상 전이 이론

레프 란다우 (Lev Landau)는 상 전이를 기술할 수 있는 Universal한 평균장 이론을 도입하였다. 이에 따라 임의의 계를 다음의 형태로 표현되는 일반화된 평균장 퍼텐셜을 자유 에너지로 가지도록 기술할 수 있다. 이때 T 는 온도, η 는 상 전이를 기술하기 위한 order parameter에 해당한다.

$$F(T, \eta) = F_0 + a(T)\eta^2 + c(T)\eta^3 + \frac{b(T)}{2}\eta^4 \quad (5.6)$$

이러한 란다우 자유 에너지를 최소 (극소)로 만드는 order parameter는 각각 하나의 상을 기술한다. 극소가 global minimum 하나밖에 없으면 상은 바닥상태 하나뿐인데, 만약 어깨가 있는 모양이어서 최솟값 옆에 극소가 하나 더 있으면, 그 위치의 order parameter는 준안정상태가 된다. 이때 위의 자유에너지 개형을 결정하는 각각의 계수는 온도나 외부 장 등의 조건에 의존하는데, 이에 따라 외부 조건에 따라 어떤 상이 존재하는지 상 도표를 그릴 수 있다.

b 가 양수일 경우에는 4차를 넘어가는 항은 고려하지 않아도 된다. 만약 상의 안정성 조건이 4차항만으로는 만족되지 않는 경우, 고차항까지 반영하여 양수가 있어서 안정성이 존재함이 보장되어야 한다. 위의 형태의 자유에너지는 $c = 0$, 즉 3차항이 없는 경우에 대칭적인 두 개의 바닥 상태를 가지나, c 가 0이 아닌 경우 하나의 바닥상태 (Ground state)와 준안정상태 하나 (Metastable state)를

가지게 된다.

온도를 바꿈에 따라 각각의 계수들이 변화하면, 자유에너지의 개형이 바뀌며 상 전이가 일어날 수 있다. 위로 볼록한 영역의 자유에너지를 가지는 경우, 자유에너지를 최소화하는 것이 자발적이므로 안정된 상을 가지게 된다. 따라서, 온도에 따라 하나의 상을 가지는 경우도, 두 개의 상을 가지는 경우도, 하나의 상도 안정되게 존재하지 못하는 경우도 존재한다. 이러한 관계에 따라 임계온도 및 상 전이 온도 등을 얻어낼 수 있다.

상 전이에 영향을 줄 수 있는 변수로는 온도 이외에도 다른 요인이 있을 수 있다. 자성체의 경우, 외부 자기장에 따라 자화분포가 여러 가지 상을 가질 수 있다. 액체-기체 상전이에서는 압력이 상을 결정하는 데 또 다른 영향을 준다. 이러한 경우, 두 가지 이상의 변인에 따라 가능한 상 중 어떤 상이 얻어지는지 (자유에너지가 최소가 되는 오더 파라미터가 얼마인지) 그릴 수 있다. 이러한 그림을 상도표 (Phase Diagram) 라 한다. 본 실험에서는 아래에 기술된 방법에 따라 위상 공간을 그리고, 여기서 온도를 얻는다. 이후 자기장에 대응되는 개념으로, 외부 구동자의 팔 길이를 바꾸어 가며 온도와 자기장에 따른 상도표를 얻는다.

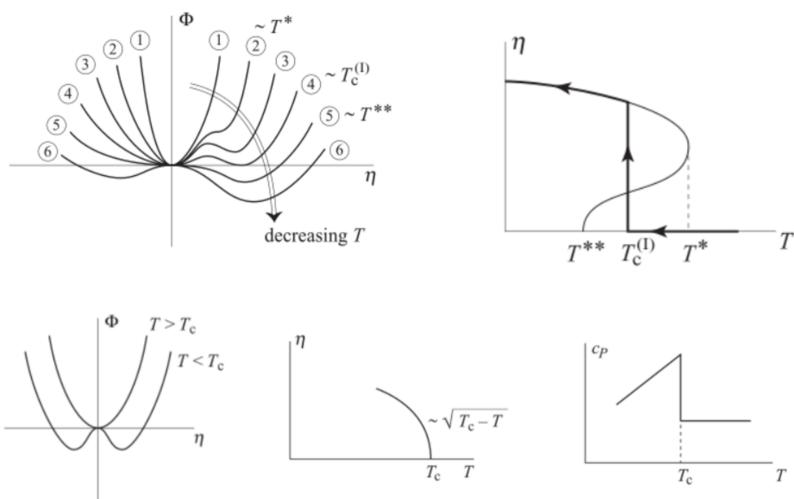


Figure 5.2: Description of phase transition by Landau free energy. Related order parameters are shown. Top : first-order transition, Bottom : Second-order transition. Image source : Ysun Choi report, 2022

1차 상전이와 2차 상전이 (연속 상전이)의 차이는 상 전이 시에 잠열 (latent heat)이 존재하느냐의 여부로 알 수 있다. 1차 상전이는 전이 시에 잠열의 출입이 있지만, 2차 (연속) 상전이는 임계점을 가지고 연속적인 2차 상전이의 경우, 임계점 근처에서는 상관 길이가 발산하면서 여러가지 임계현상들이 나타난다. 대표적인 예시로는, 액체-기체 초임계 임계점에서 나타나는 critical opalescence가 있는데, 이는 임계점 근처에서 발산하는 상관길이로 인해 빛의 투과가 뿌옇게 바뀌는 것을 의미한다. 이러한 이유로 여러가지 물리량들이 임계점 근처에서는 발산하거나, 지수함수적으로 감쇠하는 거동을 보이게 되는데, 이러한 거동을 설명하기 위해 임계지수 (critical exponent)가 사용된다. 임계 지수는 universality class가 같은 상전이 현상들에서는 같은 값을 가지게 되는데, 이는 여러 열역학계에 걸쳐 범용적으로 적용되는 현상이므로 중요한 가치를 가진다. 이 실험에서 보여지는 상 전이는 1차 상전이인가? 2차 상전이인가? 만약 후자인 경우, 임계지수를 구해볼 수 있겠는가? 어떤 물리량의 임계지수는 reduced temperature, 혹은 임계온도와 현재 온도간의 차이에 지수함수꼴로 의존한다고 했을 때의 지수를 의미한다. 비열의 경우, 아래 식에 따라 임계지수가 주어진다.

$$c \sim |T - T_c|^{-\alpha} \quad (5.7)$$

같은 대칭군 하에서 일어나는 상 전이에서는 임계지수가 같다. 임계지수를 얻기 위해 평균장이론 또는 Renormalization Group theory, 내지는 양자 몬테카를로 기법 등의 전산해법이 사용되곤 하는데, 이러한 분석은 universality가 같은 여러 가지 상 전이 현상들에 대해 유효하다. 예를 들어 Ising 모형과 액체-기체 상 경계의 임계점은 같은 Universality class를 가지므로 임계 지수들이 같다.

위상 공간

운동 상태를 기술하기 위해 위상공간 하의 플롯이 종종 이용된다. 위상 공간은 운동량과 변위를 각각 축으로 표현하여 나타낸 것을 의미하며, 운동의 종류에 따라 다른 개형을 가지므로 정성적으로 운동의 종류를 구분하여 분석하는 데 유용하게 사용된다. 단조화 진동자의 경우 위상 공간상에서 타원형의 궤도를 그리며, 장반경과 단반경은 각각 최대 운동에너지와 최대 퍼텐셜에너지에 대한 정보를 담고 있다. 이에 따라 등에너지선의 형태는 타원이 되며, 타원의 크기 혹은 절편이 작아질 수록 에너지를 잃는 것을 의미한다. 따라서 에너지를 잃는 진자의 경우, 위상 공간 상에서 등에너지선 안 쪽으로 나선형으로 파고드는 궤도를 가지게 된다.

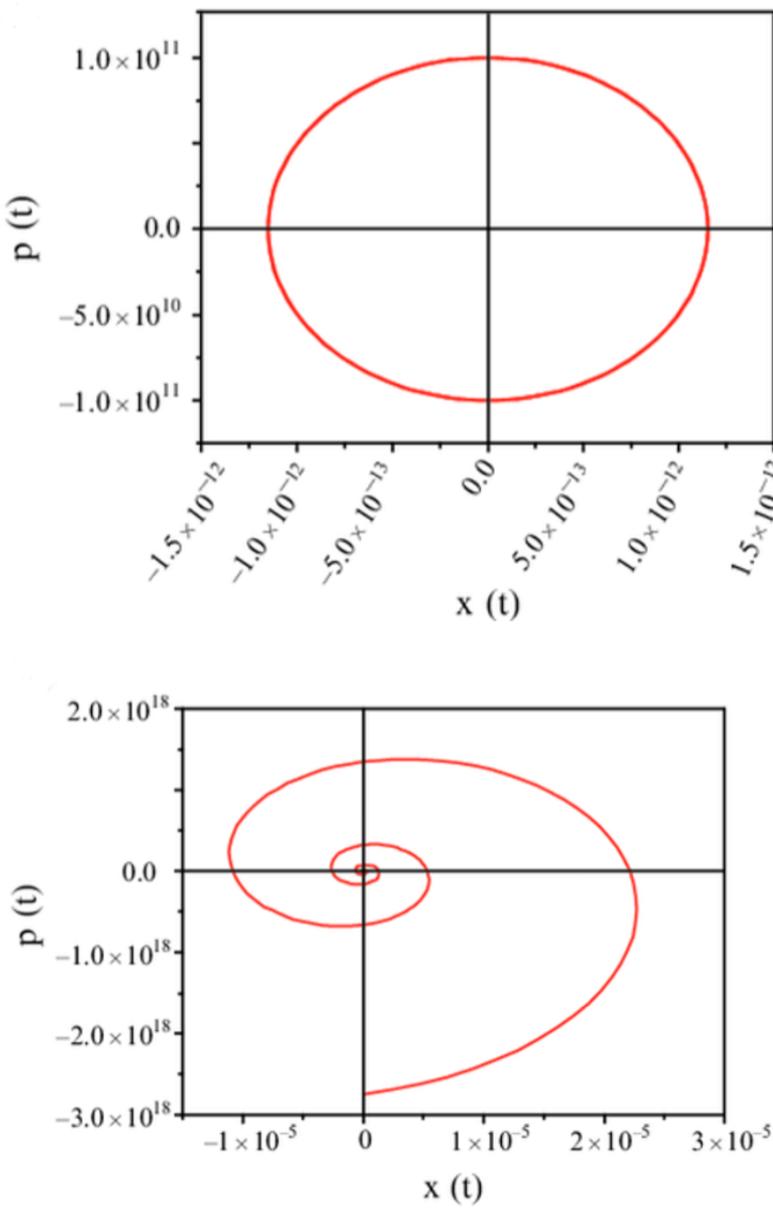


Figure 5.3: Example of phase space diagram for pendulum without damp (Top) and with damp (Bottom), Image source : Younghwan Choi Report, 2022

한편, 불확정성 원리에 따라 모든 접근 가능한 미시상태는 유한한 (0이 아닌) 위상 공간 상에서의 면적을 가진다. 따라서, 위상 공간 상 닫힌 궤도에 감싸진 면적은 계가 가지는 상태수를 의미하며, 이를 바탕으로 엔트로피를 계산할 수 있다.

$$S = k_B \ln \left(\frac{A}{A_0} \right) \quad (5.8)$$

(A 는 위상공간에서의 면적, A_0 는 위상공간에서 하나의 미시상태가 차지하는 면적)

단열 과정이 일어날 때에는 계의 내부 면적이 변화하지 않으므로 엔트로피의 변화가 없다.

엔트로피를 얻는 것과 동시에, 계의 총 역학적 에너지는 운동 에너지의 한 주기 내 최댓값(평형위치를 지날 때 퍼텐셜이 0이 됨을 상정)으로서 얻을 수 있다. 따라서 역학계의 엔트로피와 에너지를 모두 알 수 있으므로, 계의 유효 온도를 제시할 수 있다. 통계역학적 온도는 단위 에너지를 더 얻었을 때 얼마나 엔트로피가 증가하는지의 역수로 정의된다.

$$T^{-1} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad (5.9)$$

이를 바탕으로 역학계의 유효 온도와 에너지, 엔트로피를 알았으므로 계의 열역학을 분석할 수 있다. 감쇠 진동하는 진동자의 경우, 계가 에너지를 잃어버리는 속도는 감쇠의 크기를 조절해 바꿀 수 있으며, 이를 바탕으로 계가 adiabatic하게 식어 감에 따라 어느 phase 를 점유하게 되는지 관측할 수 있다. 한편 강제 구동을 통해 공진 근처에서 계가 에너지를 얻는 경우, 엔트로피 및 에너지가 증가하며 위상 공간 상에서 더 원점에서 멀고, 더 큰 궤도를 그리는 것을 알 수 있다. 이때 에너지 공급의 결과로 단순히 더 큰 궤도의 진동을 그릴 수도 있지만, 특정 조건에서는 Chaotic Behaviour를 가지는 phase 를 가질 수도 있다.

Chaotic Phase

* 이 부분의 본문은 https://en.wikipedia.org/wiki/Chaos_theory입니다.

혼돈 이론 (Chaos Theory) 은 Deterministic한 법칙에 의해 기술될 수 있음에도, 초기 조건에 매우 민감하게 반응하여 격렬한 개형 변화를 일으킬 수 있는 경우를 다룬다. Deterministic Nonlinear System 의 경우 특정 조건 하에서 Chaotic behaviour를 가지는 경우가 있다. Robert L. Devaney에 따르면 특정 동역학계를 혼돈계로 간주하기 위해서는 다음의 세 가지 조건을 따라야 한다고 한다.

(1) 초기 조건에 민감할 것 (2) Topologically Transitive (3) Dense Periodic Orbit을 가질 것

이외에도 topological supersymmetry의 자발적 대칭 깨짐의 결과로 혼돈이 나타날 수 있다고 한다. 혼돈 이론은 어려운 부분이 많지만, 잘 공부해 보고 실험 결과가 어떤 의미를 가지는지 생각해보기를 권장한다. Chaos를 가시화하기 위해서는 후술할 프로그램 플롯이 사용될 수 있다. deterministic chaos 등의 키워드를 이용해 검색하면 카오스 이론에 대한 자료를 좀 더 얻어볼 수 있다.

5.3 장비 소개

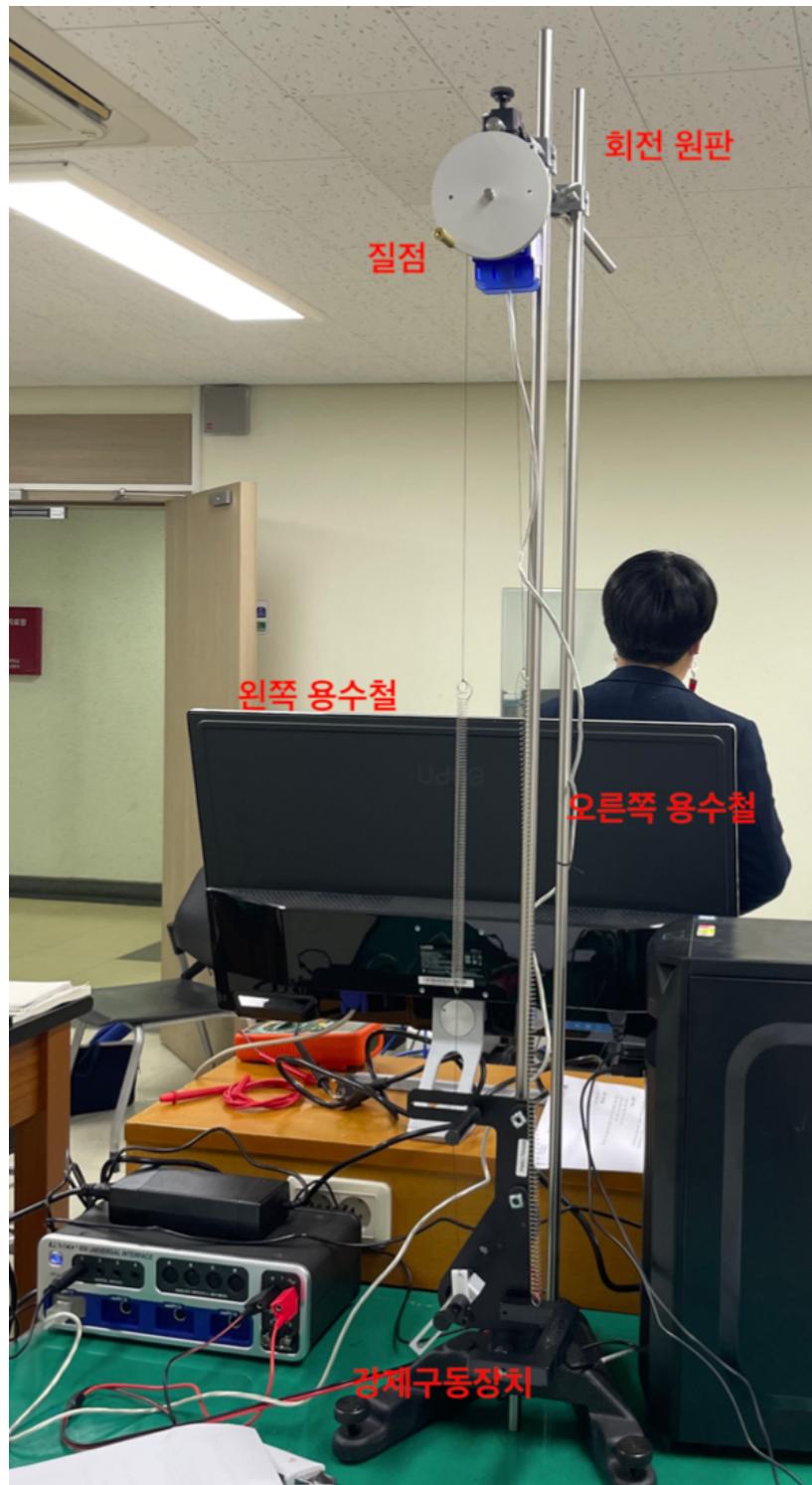


Figure 5.4: Apparatus for non-linear chaotic pendulum

역학계

본 실험 장비는 회전 원판과, 손잡이 겸 질점이 부착된 회전체에 줄이 감긴 채 용수철이 매달려 있는 형 태로 구성되어 있다. 조교들이 사전에 회전체 내부의 줄 감개에 계측실 책상의 가로 길이(약 2미터) 정도의 줄을 준비한 뒤 중점에 매듭을 만들어 회전체의 축에 고정하고, 작은 원판에 6바퀴 감아 오른쪽 실로, 큰 원판에 3바퀴 감아 왼쪽 실로 사용하고 각각의 실에 용수철을 매달아 두었다. 오른쪽 용수철의 경우 바닥에 고정되어 있으며, 왼쪽 용수철의 경우 강제진동 구동기에 연결되어 있다. 강제진동 구동기는 직류 전압을 조절할 수 있는 모터로 이루어져 있으며, 모터의 회전에 따라 원운동에 의해 실의 길이를 주기적으로 조절할 수 있게 구성되어 있다. 또한 실험 시 자석의 위치를 조절 나사를 이용해 훨과 자석 사이의 간격을 조절할 수 있도록 구성되어 있는데, 이를 이용해 감쇠량을 조절하여 실험할 수 있다.

줄이 훨에서 빠지는 경우, 훨을 분해해서 다시 설정할 수 있으나 이를 자율적으로 시행할 경우 줄의 길이가 달라져 $x1,0$, $x2,0$ 값이 달라지므로 퍼텐셜의 개형이 바뀌게 되어 뒤의 실험조 실험 진행에 차질이 생길 수 있으므로, 조교에게 연락하여 원상복귀할 수 있도록 조치한다. 줄의 조율 과정은 후술될 퍼텐셜 개형 분석 과정과 병행되어 좋은 퍼텐셜 모양을 얻을 때까지 시행해야 하나 번거롭고 재현성이 낮은 작업 이므로, 절대로 줄을 훨에서 빼지 않고, 줄이 훨에서 빠지지 않도록 $+/- 360$ 도 이하의 진폭으로 회전체를 진동시키며, 알아서 진폭이 커지는 카오틱 실험의 경우 반드시 유의 깊게 변위가 너무 커질 경우 진동을 직접 중단시킬 수 있도록 한다. 실을 잡아당기거나 변위를 너무 크게 주는 등의 행위는 훨에서 줄을 빼지 게 하기 쉬우므로 특별히 주의하여야 한다.

특히 변위가 커지면 왼쪽 용수철이 자연 길이 이하로 압축되며

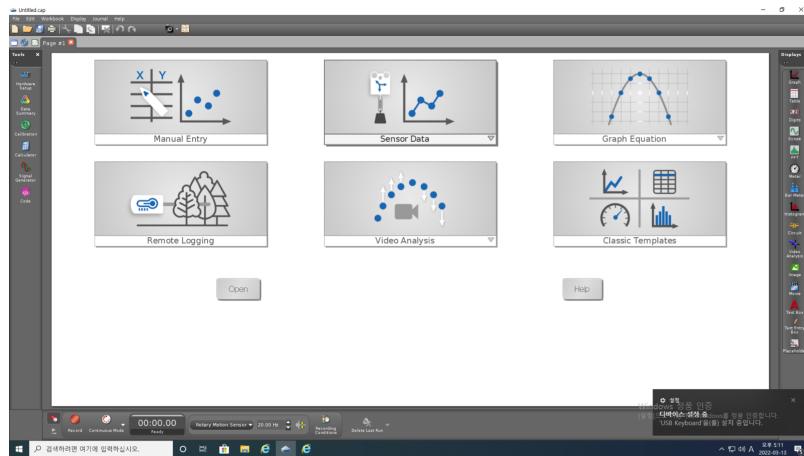
실이 느슨해지는 것을 볼 수 있는데, 이 때는 용수철에 매달린 왼쪽 실이 장력을 줄 수 없게 되어 퍼텐셜의 개형이 달라진다. 이 점에 유의하여 진폭이 너무 커지지 않게 실험하고, 데이터를 얻은 경우에는 퍼텐셜이 달라지는 것을 정량적으로 설명해 보도록 한다.

구동기의 제어 및 데이터 수집을 위해 PASCO Capstone 소프트웨어를 사용하게 된다. 사용법은 후술 될 문단에서 기술되는 바와 같은데, 이때 반드시 주의할 점은 사인형 구동력을 걸겠다고 사인꼴 출력 신호를 넣으면 안 된다! 이 경우 넣어준 모든 전력이 열로 소모되고 모터의 회전에 사용되지 않아 모터의 파손 우려가 있다. 반드시 직류 신호(DC)의 전압을 조절하여 모터의 출력을 바꿔 진동 주기를 조절할 수 있도록 한다.

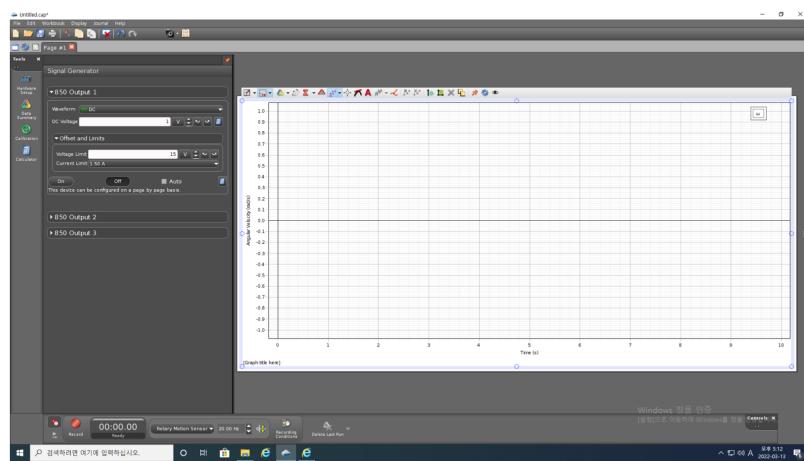
정리하면, Capstone 소프트웨어의 Signal Generator를 이용하여 모터의 구동전압을 바꿔 외부 강제 진동의 구동 진동수를 바꿀 수 있으며, 수동 조작되는 나사를 이용해 자석의 위치를 조절하여 감쇠를 바꿀 수 있고, 시간에 따른 각도 정보를 Capstone 프로그램 상에서 얻어 csv 파일로 변환 후 처리할 수 있다.

또한, 회전자에는 포토인터럽트가 존재하여 외부 구동자의 진동 주기를 볼 수 있다. 전압진폭과 회전수가 선형 변화하지 않으므로 이를 이용해 주기가 공명점 근처인지 편리하게 알 수 있다. 진동수 정확한 값은 회귀분석을 통해 얻을 수 있다.

Capstone 소프트웨어 사용법



바탕 화면에서 설치되어 있는 Capstone 소프트웨어의 아이콘을 찾아 실행한다. 이후 화면에 흰 중앙 화면 및 회색의 왼쪽 툴바를 확인하고, 왼쪽 툴바에서 빨간 선과 초록 선으로 이루어진 아이콘으로 보이는 Signal Generator 버튼을 클릭한 뒤 위쪽의 압정 핀 표시를 클릭해 고정시킨다. 이후 중앙 화면의 Sensor Data를 클릭하면 그래프가 생긴다. 여기까지 하면 두 번째 화면을 얻는다.



이후 하단의 빨간색 원형 Record 버튼을 누르면 자료를 수집할 수 있고, 사각형 Stop 버튼을 누르면 자료 수집이 멈춘다. 그래프 창에서 스크롤을 하면 그래프의 크기를 조절할 수 있으며, 드래그하

면 그래프의 위치를 조절할 수 있고, 각각의 축 위에서 스크롤 혹은 드래그를 통해 축의 범위를 바꿀 수 있다.

그래프 영역의 단위를 클릭하면 각 축에 표시되는 물리량을 바꿀 수 있어서 에너지나 위상공간을 보는 데 유용하게 활용할 수 있으며, 이를 근거로 각각의 초기 조건이 어떤 상을 지나고 있는지 / 어떤 상으로 전이하였는지를 확인하여 유용하게 실험할 수 있다. 그러나 Capstone 프로그램에서 분석해 준 자료를 그대로 사용하면 감점이 있으며, 반드시 시간에 따른 각도 정보만을 csv export하여, 모든 raw data를 SM에 함께 제출할 수 있도록 한다. Capstone 프로그램에서 데이터를 자주 저장해 주면서 결과를 delete해주지 않으면 RAM이 부족해 실험 도중 날아가는 현상이 여러 번 관측되었으니 유의하라.

포토인터럽트의 설정 방법은, 왼쪽 툴바의 Hardware Setup을 누른 뒤 1번 포트에 포토인터럽트를 할당, pendulum 용임을 선택하고 “주기 (Period)” 항목을 골라 보면 주기 측정 모드를 활성화 할 수 있다. 더 나아가 오른쪽 끝의 점 세개 위치를 클릭하면 DATA VALUE를 표시하는 창이 생겨 주기를 볼 수 있다.

5.4 실험 절차 - Task List

이 실험은 세 가지 태스크로 나뉘어진다. 먼저, 감쇠 진자를 분석하여 퍼텐셜을 알아내는 실험이다. 다음으로는 열역학 상사계의 성질을 분석해서 진자의 상 전이를 연구해 본다. 마지막으로는, 강제구동이 들어왔을 때 어떤 혼돈현상이 일어나는지 파악하는 것이다.

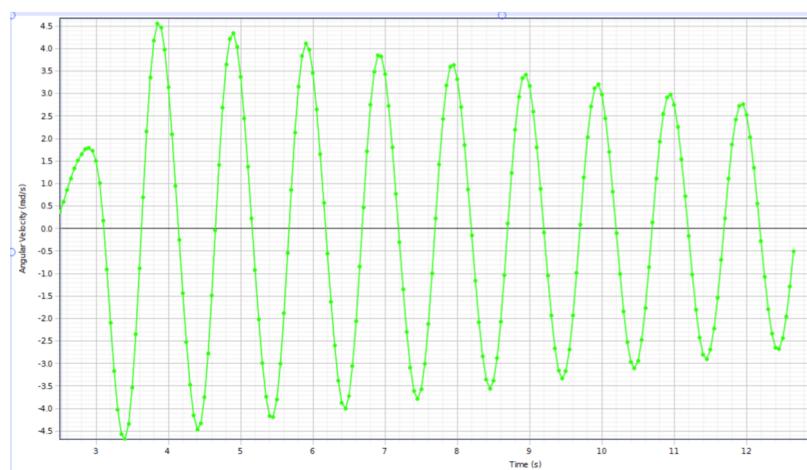
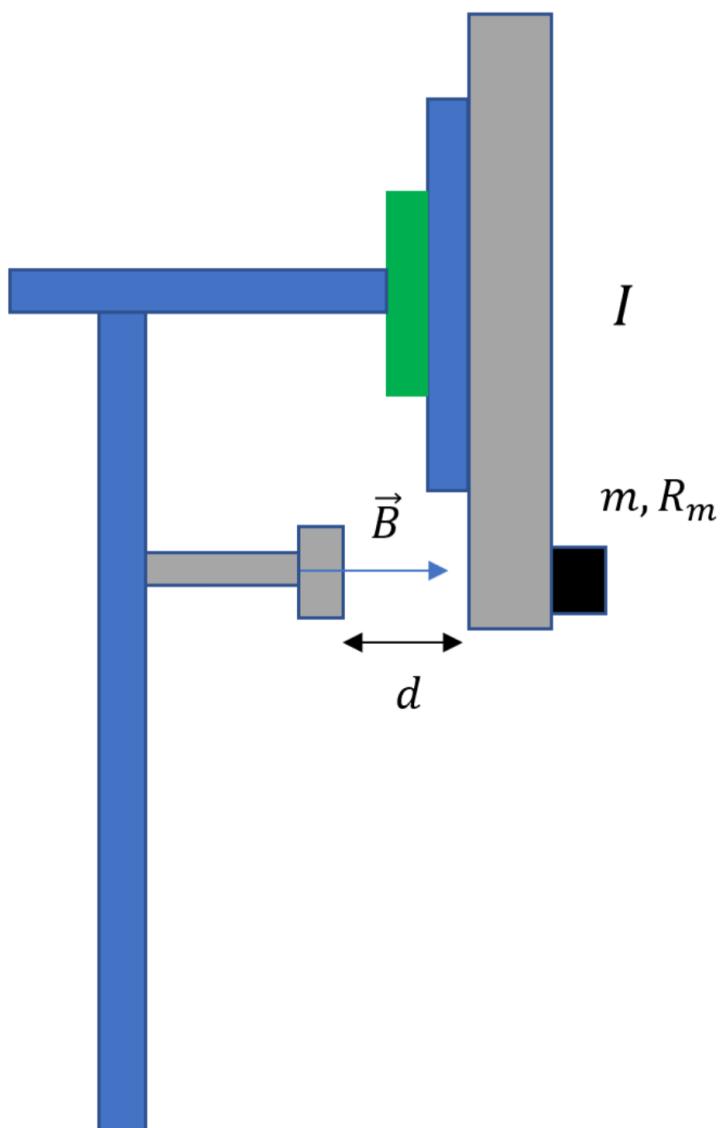


Figure 5.5: Device for 'dragging' the pendulum (top, img. src. Younghwan Choi report, 2022) / Resultant damped oscillation (bottom)

A. Potential Characterization from a Damped Pendulum

포텐셜 에너지는 속도에 무관히 위치에만 의존하는 성분, 저항의 일률은 속도에 의존하는 비보존 성분 에너지를 의미한다. 이 둘을 걸러내기 위해서는 속도와 시간을 이용해 잘 처리해 회귀하면 된다. 가장 중요한 것은, 감쇠에 의해서 '오염된' 실험자료를 사용하더라도, 결국 각 각도 지점에서의 퍼텐셜 에너지는 single valued여야 함을 이용한다. 이를 토대로 감쇠 법칙과 퍼텐셜에 대한 정보를 둘 다 동시에 알아낼 수 있다.

Potential Characterization

먼저, 복잡한 진자의 퍼텐셜을 실험적으로 얻기 위한 측정을 수행한다. 각도에 따른 각속도 제곱을 플롯하여 관측하면, 총 역학적 에너지가 보존되는 경우 운동 에너지는 역학적 에너지에서 퍼텐셜 에너지를 뺀 값을 가진다. 이에 따라 $-\omega^2$ 을 각도에 따라 그리면 퍼텐셜 에너지와 같은 개형을 볼 수 있다. 이때 운동 에너지가 시간에 따라 감쇠하면서 퍼텐셜 에너지가 점차 증가하는 것처럼 보이는 경향을 알 수 있는데, 이는 퍼텐셜 에너지는 매 진동마다 변하지 않고 그대로인 분포를 가지지만 운동에너지에는 감쇠에 의해 오염되었기 때문이다. 여기에서는, 적절한 감쇠 모형을 도입하여 다음과 같이 감쇠에 의한 영향을 복원하여 원래 퍼텐셜을 찾아낼 수 있다.

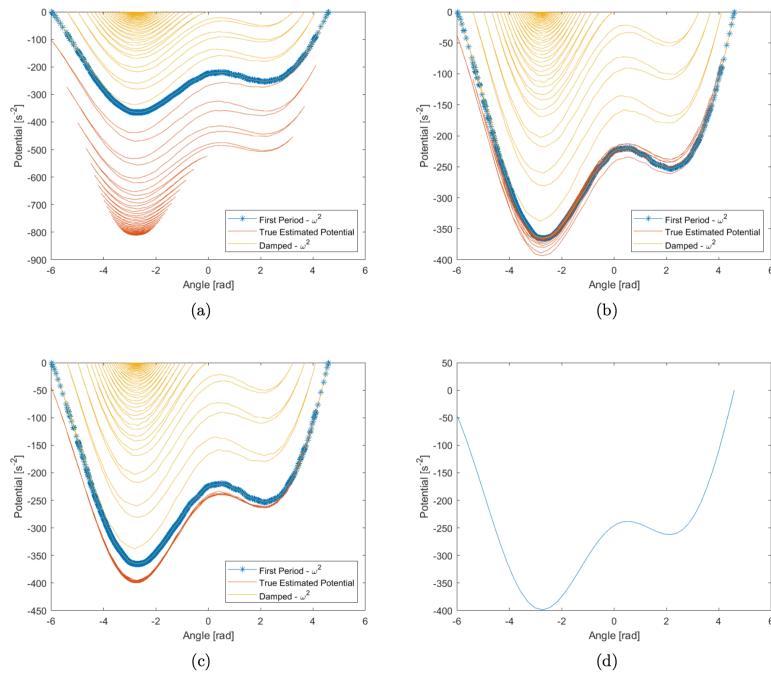


Figure 5.6: Removing the polluted error from drag. Image source : Younghwan Choi report, 2022

Damping Correction

보정을 위해 감쇠 토크 $\tau = \gamma |\dot{\theta}|^n$ (empirical formula - magnetic breaking의 power law) 을 상정한다. 회귀 분석을 통해 적절한 계수와 지수를 얻어, 감쇠를 보정한 퍼텐셜 에너지 곡선을 얻으시오. 이러한 보정이 필요한 이유는 여러 가지 오차 원인의 감쇠가 더해지면, 비례형 혹은 제곱형의 감쇠가 각 구간별로 감쇠가 섞이는 비율이 달라서 깨끗한 이론식으로 표현되지 않기 때문이다. 이러한 감쇠를 반영하는 방법은 여러 가지 모델이 있겠으나, power law 모델이 가장 깔끔하고 깨끗하게 사용될 수 있다.

감쇠 토크 τ 에 의한 일률은 각속도를 곱하면 얻을 수 있으며, 이는 $dP/dt = -|\tau\dot{\theta}| = -\gamma|\dot{\theta}|^n$ 이다. 각속도의 거듭제곱 꼴을 취할 때 방향에 따라 부호가 헷갈릴 수 있지만, 항상 감쇠는 운동에 반대 방향으로 주어지므로 절댓값을 취해서 계산하면 편리하다. 이때 시간

t 이후의 운동에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{1}{2}I_{eff}\dot{\theta}^2 = K(\theta, t) = E - V(\theta) - \gamma \int_0^t |\dot{\theta}|^n dt \quad (5.10)$$

이때 좌변의 값은 실험을 통해 알아낼 수 있다. 회전관성 및 추의 질량을 직접 채울 수 없지만 (채울 필요도 없으므로 분해하겠다고 하지 마시오) 이를 1로 두고 (우변의 계수들이 바뀌면서 해결해 줄 것이다), 여기에 우변에 있는 시간적분항을 더했을 때 θ 에만 의존하고 t 에는 의존하지 않는 값을 얻을 수 있으면 감쇠 보정이 잘 된 것이다. 이를 위해 여러 주기 동안 감쇠하면서 줄어드는 운동을 재고, 주어진 γ 및 n 값에 따라 각 주기별 $E - V$ 값이 초기치에서 얼마나 멀어졌는지 파악해서, 최적화하면 된다.

여기서 한 가지 문제는, 최소제곱법 혹은 직접 최적화(하나하나 γ 및 n 을 바꾸어 가며..)를 통해 최적화를 할 때, 무엇을 최소화 하는지에 대한 제곱오차 같은 loss function을 찾는 것이 어렵다는 것이다. 매 주기마다 같은 각도를 지날 때의에너지를 쟁으면, 그들의 분산을 보고 최소화하면 될텐데, 실제로는 매번 데이터를 얻는 각도 위치는 그때그때 달라지게 되므로 이런식으로 하기 쉽지 않다. 한편, interpolation을 통해 불연속적으로 샘플링된 물리량을 연속함수로 보간할 수 있다. 이는 1에서의 값과 3에서의 값이 주어졌을 때, 1.7에서의 값을 알려면 정의역의 내분비대로 치역의 합승값을 내분하여 채택하는 선형보간 (linear interpolation)으로 쉽게 할 수 있다. 그러면 운동에너지는 각도와 시간에 대한 연속함수로 실험적으로 측정된다!

이후, 몇 개의 각도를 잡는다. 너무 자명한 위치를 잡으면 최적

화가 어려울 것이다. 중심 근처로 잡으면 변화가 커서 좋을 것이다. 여러개여도 상관없으나, 감쇠로 인해 진폭이 줄어들어 그 각도를 지나는 주기의 회수가 서로 다르면 안 된다. 이러한 기준이 되는 각도들을 Θ_i 라고 해 보자. 이때 선형보간된, 감쇠 보정된 운동에너지 함수를 $K(\theta, t; \gamma, n)$ 이라 하자. 이때 loss function은 다음과 같이 잡아볼 수 있다.

$$E(\gamma, n) = \sum_i Var(K(\Theta_i, t_{periods}; \gamma, n)) \quad (5.11)$$

여기서 Var는 분산을 의미하고, 각도 Θ_i 점을 지나는 순간을 여러 주기동안 모아 그때 보정된 운동에너지들의 분산을, 여러 개의 위치 Θ_i 에 대해 모두 더해준 것이다. 이를 최소로 만들면, 여러 번 진동하고 나서도 보정된 운동에너지가 같은 값을 가지게 되므로 감쇠에 의한 영향을 걸리내었다고 할 수 있다.

이를 최적화하는 γ 와 n 이 이 운동의 측정결과를 가장 잘 설명하는 감쇠모델이라고 할 수 있다. 더 나은 모델을 찾을 수 있겠는가? 수렴성을 높이기 위해 더 좋은 loss function을 찾을 수 있겠는가? γ 와 n 모두 크기가 뺀한 값이다. n 은 아무리 작아도 0.5보다 클 것이며 아무리 커도 3보다 작을 것이다. 오차를 무시하면 1에서 2 사이여야 하지만 (비례형과 제곱형의 결합이므로) 실제로는 이런저런 오차 요인으로 1보다 작을 수도 있다. γ 역시 0보다는 크고, 적당한 값을 넣으면 운동이 너무 빨리 죽을 것이므로 상한을 잡을 수 있다. 따라서 두 변수가 모두 구간이 그리 넓지 않으므로 하나하나 찾아도 몇 번의 시행착오만으로 금방 구할 수 있을 것이다. 대강의 초기 추정치를 손으로 찾아 놓으면 ($n=1$ 일 때 기준이 유용하다.) 금방 최적화할 수 있다. 경사강하를 시도해 보는 것도 좋다. 프로그램이 γ 및 n 을 조금씩 바꿔가며 여러 주기의 곡선이 하나로 합쳐지는 점을 찾는 것인데, 수렴을 위한 여러가지 전략을 시도해볼 수 있다.

컴퓨터 언어들과 친하지 않다면, 눈대중으로 찾은 γ 와 n 을 사용하여도 감소하지 않으나, 뒤의 데이터 퀄리티가 많이 낮아질 수 있다. 이들을 살짝 바꾸어 봤을 때 감쇠 보정의 퀄리티가 많이 나빠지지 않는 신뢰구간을 찾아 계수와 지수의 최적화 및 불확실도를 산출하시오. 눈대중으로 찾아도 좋고, 정량적인 분석을 시도해봐도 좋다.

감쇠를 조절하기 위해 자석의 위치를 10종류 이상 바꾸어 가며 감쇠진동을 여러 주기동안 시키고 데이터를 분석하시오. 이때 강제 구동기의 팔은 줄 상태에 따라 메타스테이블 및 바닥상태가 둘 다 잘 보이는 위치로 고정해 놓고 작업하시오. 가장 아래쪽 혹은 가장 위쪽이 그 위치일 것인데, 줄 길이에 따라 다르다.

실험을 하기 전, 강제 구동기의 팔을 맨 아래를 보게, 또 맨 위를 보게 하는 사이에서 metastable state가 보였다 사라졌다 하는 것이 단조증가/단조감소 하는 방향으로 보이는지 확인해보고, 잘 안 될 경우 조교에게 문의하여 줄을 교체하시오.

Effective Magnetic Field

이번에는 감쇠를 최소로 (자석의 위치를 가장 멀리) 놓고, 외부 구동자의 각도를 조절하여 퍼텐셜이 어떻게 변하는지 확인해보자. 외부 구동자를 돌리면, 줄 길이가 바뀌는데, 이는 용수철의 '미리 늘어난 길이'를 바꾸어 퍼텐셜의 모양을 바꾼다. 그 결과, Dominant하게 퍼텐셜에 각도에 선형인 성분이 섞여 들어오면서 metastable state가 생겼다 없어졌다 사이를 조절하며 실험해볼 수 있다. 이는 총 자화를 오더 파라미터로 하는 자성체에서, 외부 자기장을 걸어 주는 것과 같은 효과가 된다.

즉, 외부 구동자의 팔의 각도 혹은, 외부 구동자가 잡아당기고 있는 줄의 길이는 이 계에서 외부장의 역할을 한다. 직접 돌려주면 DC 장을 걸어줄 수도 있고, 외부 구동자를 이용해 흔들어 주면 AC 장을 걸어줄 수도 있다. 이를 주기적으로 흔들어 주는 것은 시스템에 AC 자기장을 걸어 주는 것과 같은 Perturbation을 주므로, Trap Frequency 근처에서는 Heating이 일어난다.

이제 외부 장의 크기를 바꾸어 가며 측정을 반복하고, 위의 태스크를 반복해 보자. 외부 장, 즉 구동자 팔 길이의 효과는 어떠한 함수꼴로 퍼텐셜 에너지에 반영되는가? 이는 바뀐 퍼텐셜에서 기준 퍼텐셜을 빼 주는 것을 통해 알아볼 수 있다.

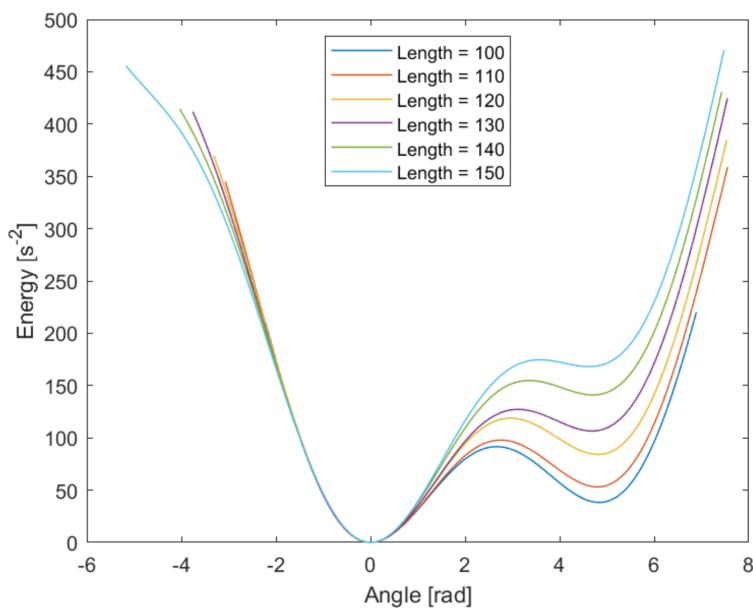


Figure 5.7: Potential change due to the effective magnetic field. source : Younghwan Choi

감쇠를 분석했고, 외부 장의 효과를 분석했으니, 계의 열역학을 분석해 보고 난 후에는 계의 히팅에 따른 거동을 보는 것이 자연스러운 순서일 것이다. 다음 두 섹션에서 관련된 실험에 대해 다룬다.

B. Thermodynamics and Phase Diagram

이 계는 여러 상을 가진다. 먼저, 에너지가 높을 때는 초임계에 해당하는 doubly trapped state를 점유한다. 그리고 식어감에 따라 점차 왼쪽 혹은 오른쪽 트랩에 빠진, Ground / Metastable state로 전이하게 된다. 아래에 이러한 상의 모습 및 상 전이의 순간을 각도-시간 플롯 및 위상공간을 통해 나타내었다.

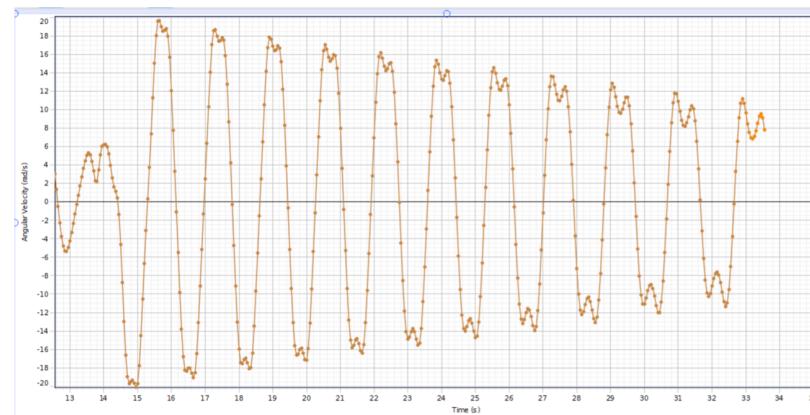


Figure 5.8: Doubly Trapped State

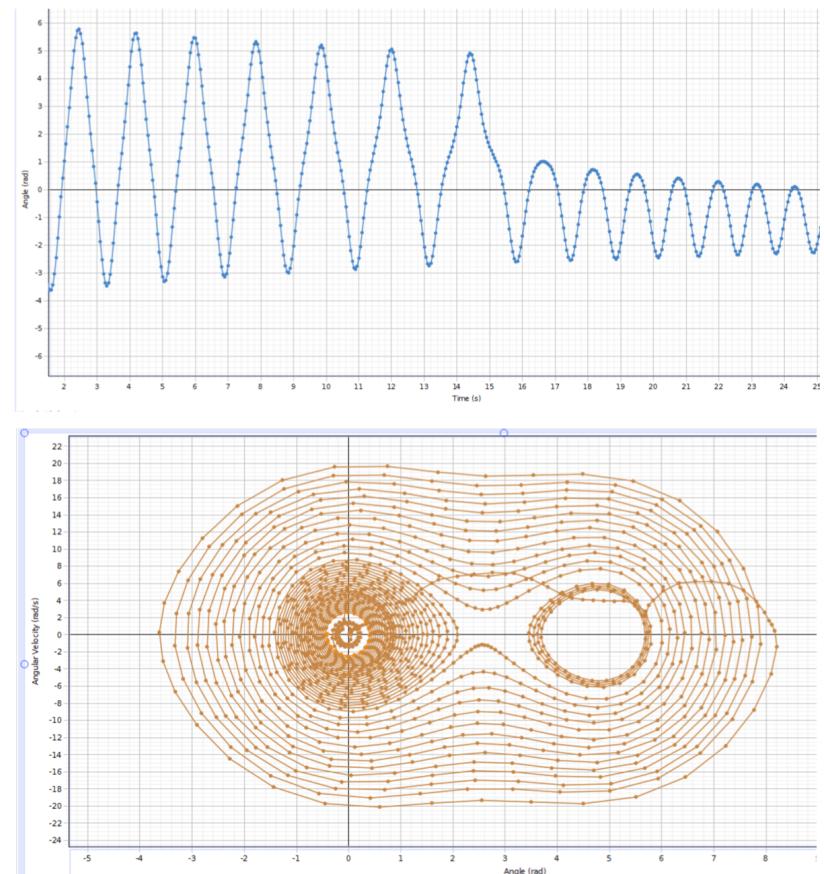


Figure 5.9: Phase transition from the doubly trapped state to the left well

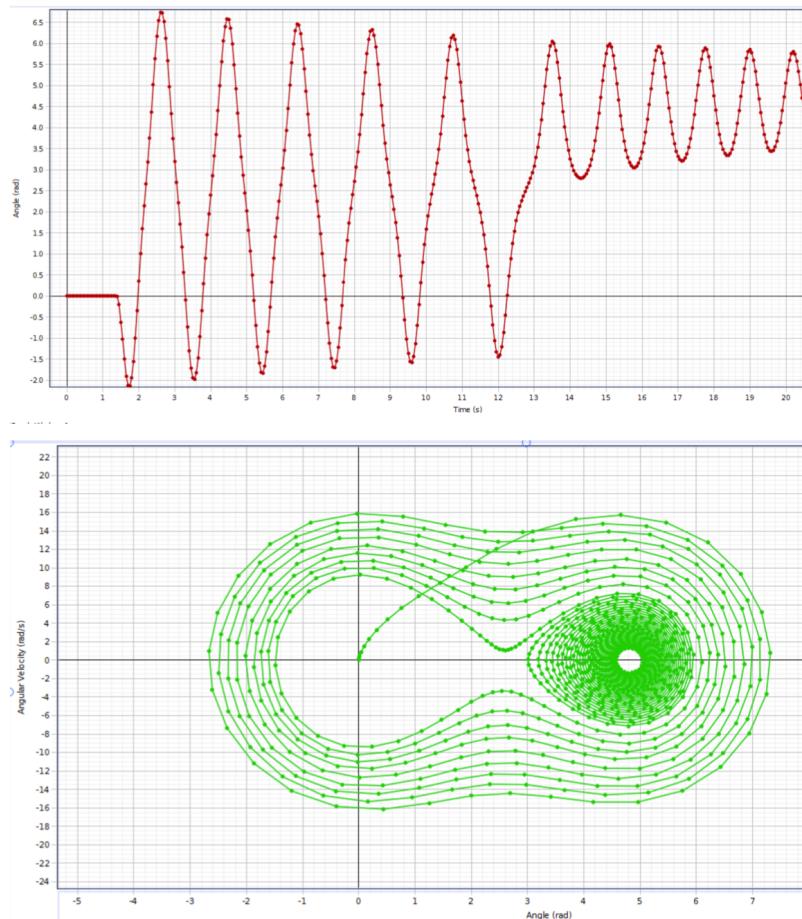


Figure 5.10: Phase transition from the doubly trapped state to the right well

이때 에너지가 너무 크면, 왼쪽 용수철이 늘어나지 않은 길이를
지나게 되며 퍼텐셜이 찌그러져 깨지는 것을 볼 수도 있다.

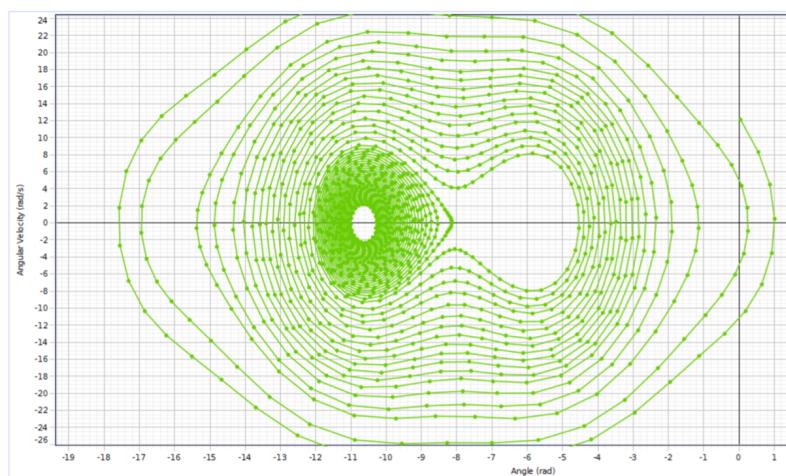


Figure 5.11: Too much energized system has distortion on potential shape.

여기에서는, 에너지가 식어감에 따라 Doublely trapped에서 안정 상태 두 상 중 하나로 빠지는 순간에 대해 열역학 분석을 해 볼 수 있다.

Thermometry

계의 온도를 측온하고 이런저런 열역학 물성치를 밝혀내 보자. 먼저, 위상 공간을 얻어 통계적 온도를 구해 보자. 위상 공간을 그릴 때에는 불연속적으로 얻어진 실험치를 인터폴레이션 해도 되고, 혹은 위에서 얻은 퍼텐셜 함수를 인터플레이트 하거나, 적절한 회귀모형을 세워 퍼텐셜 함수를 찾은 뒤 위상공간을 구하는데 써도 좋다. 마지막 예시를 사용할 경우 위상공간을 절단하는 등고선 모양의 그림을 그려볼 수 있다. 이는 정해진 총 역학적에너지에 대해, 각 각도 위치별 위치에너지를 빼 주면 남은 운동에너지만큼의 각속도를 얻을 것으로 간주하여 위상공간에 등고선꼴 경계를 그려주는 것이다. 이렇게 하면, 각 에너지마다 위상공간 상의 trajectory 내부에 감싸진 넓이를 연속적으로 채울 수 있다. 실험으로 얻어진 값을 이어서 그려주어도 되는데, 이 경우에는 한 주기마다 엔트로피를 얻으므로 연속적인 Thermometry를 하기 불편하다.

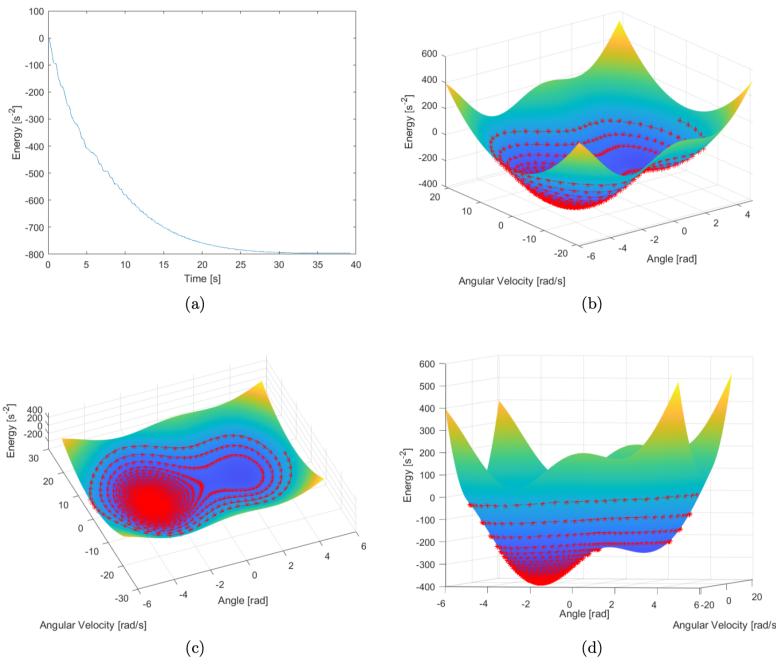


Figure 5.12: Phase space diagram when the potential function is found continuously. Younghwan Choi.

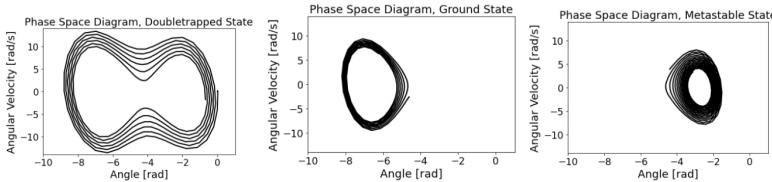


Figure 5.13: One can draw the phase space diagram without finding the "Contour" of equipotential surface. Youngmin Song

이때, 엔트로피를 정의하고 나면 온도를 얻을 수 있다. 각 에너지별로 엔트로피를 얻고, 수치미분을 통해 (그냥 차이를 구해 나누면 된다. 접선기울기를 구하는 순간 차분) 에너지에 따른 온도를 계산해 보시오.

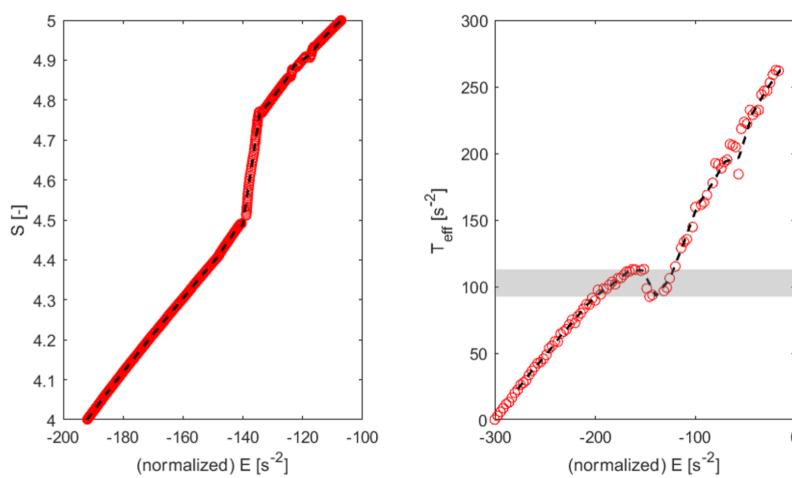


Figure 5.14: Entropy and temperature as a function of energy. (Ysun Choi) It is clear that the entropy drops by a certain step, as the phase-space area drops due to the phase transition. Resultant temperature behavior is slightly strange - hence, phase diagram has a 'width' of confidence interval.

Figure 5.15: Temperature decreases monotonically as time elapses. (Younghwan Choi) Additionally, he did accomplished ‘smoother’ resolution by finding the equipotential surface of potential.

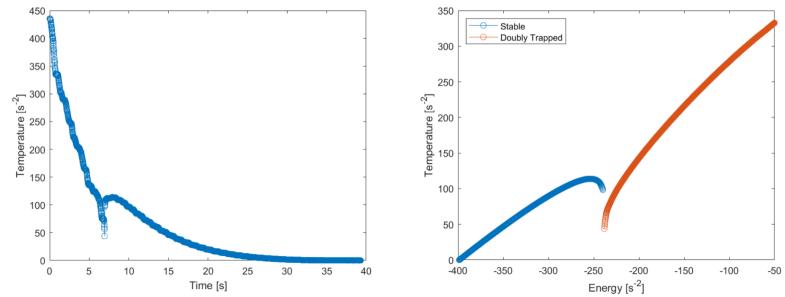
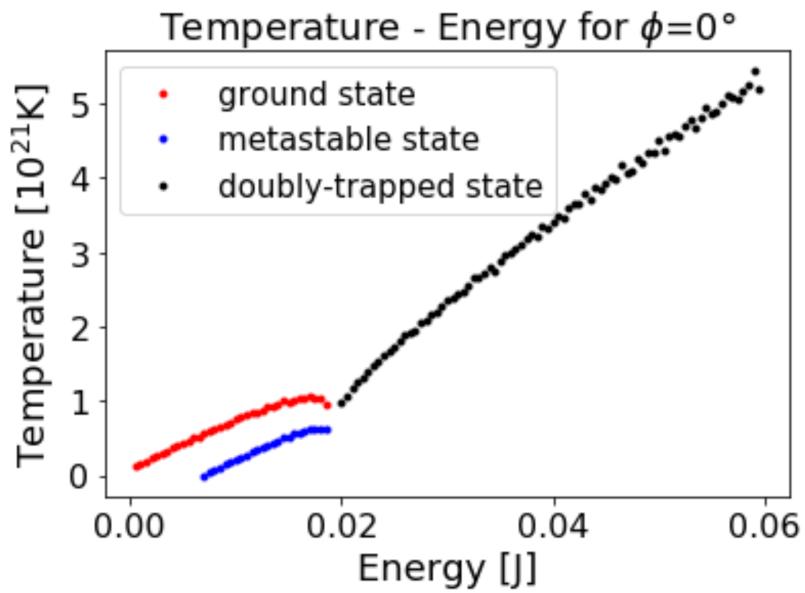


Figure 5.16: Transition temperature for the ground state and metastable state may be different. As energy is same at the transition front, at least one of the transition temperature could face the sudden discrete jump. Youngmin Song.



이때, 열용량은 에너지를 온도로 한번 미분한 값으로 주어진다.
온도에 따른 열용량을 그려 보시오.

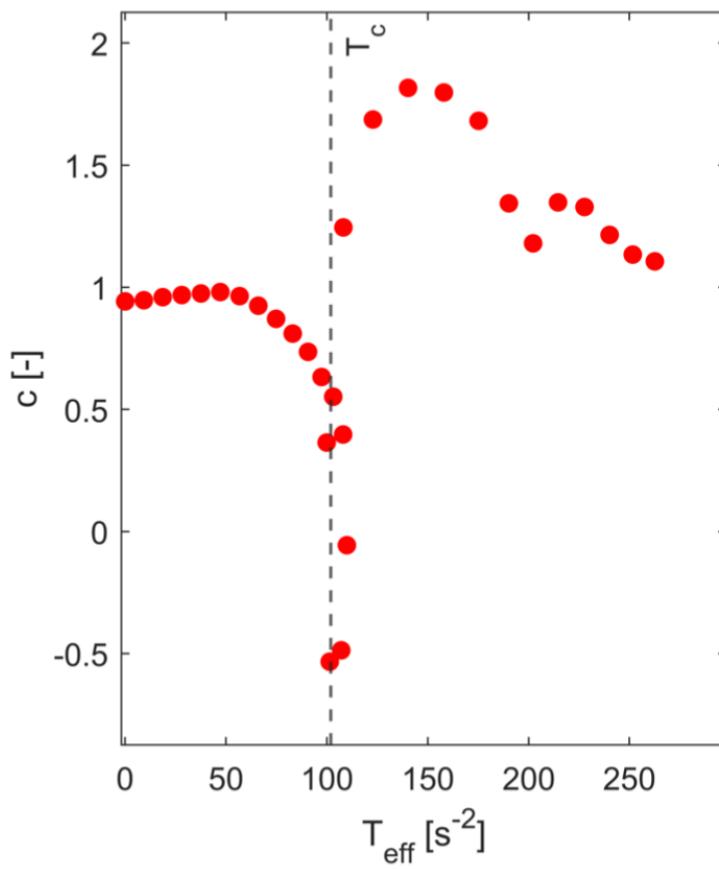


Figure 5.17: Change of heat capacity, as a function of temperature. Note that the negative heat capacity present just after the phase transition. Ysun Choi.

열용량의 온도 의존성은 어떻게 나타나는가? 임계점 / 전이점
근처에서 열용량과 온도 사이에 특별한 관계가 있는가? 온도가 아주
낮거나, 아주 높을 때 열용량은 어떻게 되는가? 이 시스템은 잠열
을 가지고 있는가? 이 시스템은 1차 상 전이를 하는가, 2차(연속) 상
전이를 하는가?

Phase Diagram

상도표를 그리면 전이의 형태를 파악하기 유용하다. 전이와 임
계를 구분하고, 어떤 성질들을 가지게 되는지 파악하기 좋다. 하나의
파라미터 - 예를 들면 온도 - 로만 상을 기술하면 상 경계는 단순히 어

떤 점, 혹은 신뢰구간으로 주어지게 된다. 그러나 다른 파라미터가 더 있을 경우, 상전이 점이나 임계점의 위치가 변화하거나 없어지거나 합쳐질 수도 있다. 이러한 분석은 어떠한 조건에서 어떤 상이 얻어지는지를 도식화한 상도표를 그리면서 이루어진다. 여기에서는 외부 구동자의 위치, 즉 effective magnetic field와 위에서 정의한 통계적 온도 T 를 2개의 파라미터로 상 전이 위치를 찾아내어 본다.

상 계면을 확인하기 위해, 왼쪽 줄을 고정하는 강제 외부 구동자의 팔의 초기 각도 ϕ 를 바꾸어 가며 실험하고, 상전이가 일어나는 온도를 관측한다. 이 시스템은 가짜 온도로 정의되어 있다. 엔트로피의 정의와 에너지의 정의는 열역학계와 같기 때문에 열역학 1,2,3 법칙은 만족하지만, 온도가 다른 시스템끼리 열 교환을 할 수 있는 channel이 없다. 따라서 온도가 달라도 열평형을 향해 완화하지 않고, 끊임없이 외부로 에너지를 잃으며 식을 뿐이다. 이 때문에 상 경계에서 온도가 잘 정의되지 않거나, 이상한 거동을 보일 수 있다. 열역학 0법칙을 따르지 않기 때문이다. 이로부터 위에서 그린 온도 플롯에 discontinuity나, negative heat capacity를 가지는 구간 등이 증가하게 된다! 이는 상 전이 시 엔트로피가 갑자기 불연속적으로 감소하지만, 에너지는 연속적으로 줄어들고 있기 때문이다. 상 경계에서 엔트로피의 점프가 있는 것을 우리는 잠열이라 부르지만, 내부 에너지는 연속이므로 경계 근방에서 변화하지 않았다. 그렇다면 실제로 잠열이 나간 것인가? 열출입은 왜 엔트로피와 $dQ = TdS$ 의 관계를 맞춰주지 않는가? 이 질문에 대해 답하려다 보면 상 전이에서 온도가 이상하게 될 수 밖에 없다. 잘 고민하여 상 전이의 종류를 고민해 보시오.

한편, 상 전이 순간의 온도가 전이 직후의 온도랑 다른 discontinuity가 있으면 상 계면을 표기하기 쉽지 않다. 이러할 경우, 다음과 같이 온도 구간을 잘라서, 이 영역을 상 전이가 일어나는 폭으로 생각해 볼 수 있다. 상 전이 이후 에너지를 낮출 때 온도가 잠시 올라갔다가, 다시 아래로 내려올 때, 온도가 가질 수 있는 값들의 범위를 "상 전

이가 일어나는 전이 온도의 폭"으로 잡을 수 있다. 이러한 이유로 상도표에는 폭이 0이 아닌 상 계면이 존재하게 된다.

이때, 같은 온도가 되도록 이은 선과의 교점의 수평 간격은 유한한 에너지값을 가지게 된다. 이는 잠열과 어떤 관계를 가지는가?

이제 상도표를 그려보자. 최소 10개 이상의 초기 각도 (실의 길이를 측정하여 제시하여도 좋음. 더 repeatable한 변수로 상을 기술하면 좋다.)에 대해 식어가는 진자를 관찰하고, doublely trapped에서 ground state로, metastable state로 빠지는 각각의 경우에 대한 상 경계를 찾아서 그리시오. 원래는 한 조건에서 하나의 상만 나와야 하는데, 열교환 채널이 없으므로 ground state가 안정상일 때도 metastable 상이 같이 존재할 수 있기 때문에 상 경계가 두 개 존재하게 된다. 이때, ground state로의 상 경계와, metastable state로의 상 경계는 외부 자기장이 바뀜에 따라서 서로 다르게 바뀐다. metastable로의 전이는 자기장이 너무 세면 없어지게 되는데, 이 순간은 상 전이가 임계점으로 바뀌는 순간이다. 이러한 곳이 상도표 상에서는 상 경계가 끊기는 것으로 표현될 수 있다. (실험 조건에 따라 임계점이 나타나지 않을 수 있다. 찾지 못하거나 그리지 않아도 감점이 없다.)

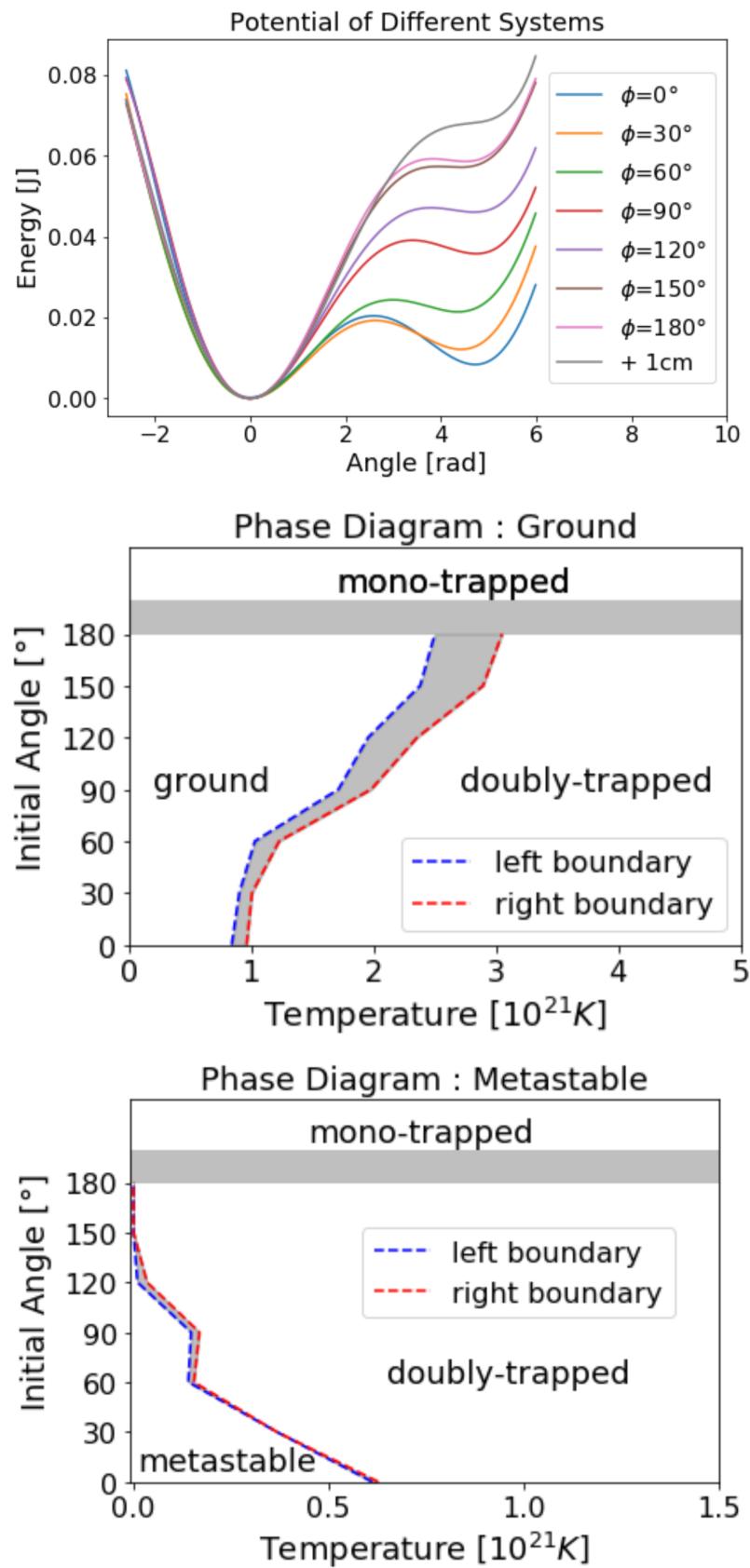


Figure 5.18: Observation of phase diagram. (Youngmin Song) As the potential changes as the effective field becomes stronger, transition for metastable state is forbidden at $\theta > 150^\circ$. While the transition to the true ground state remains finite transition temperature.

감쇠에 따라 상도표가 바뀌는가? (수행하지 못해도 감점되지 않음) 임계점이 존재한다면, 근처에서 임계지수를 구해 보시오. (분석하지 않아도 감점되지 않음) 란다우 이론이랑 많이 다른 결과를 얻을 것이다. 왜 그런가? (분석하지 않아도 감점되지 않음)

C. Heating and Chaotic Behavior in Driven System

이제 계의 감쇠 및 열역학을 파악했다. 계에 외부 자기장을 걸 수 있으면, 그걸 떨어 줄 때 계의 trap frequency (potential을 이용해 구할 수 있음) 근처에서는 계가 강하게 heating된다. 그 결과, ground 와 metastable 상 간의 전이가 막혀 있었으나 에너지가 공급되면서 두 상 사이를 넘나들 수 있는 기회가 생긴다. 이렇게 되면, 언제는 이 상에 있다가 또 언제는 저 상에 있다가 반복하며 혼돈스럽게 두 상 내지는 초임계상을 오가는 운동이 일어날 것이다. 이때 위상공간을 그려 보면 굉장히 혼돈스러운 분포를 가진다. 이러한 경향을 분석해 보자.

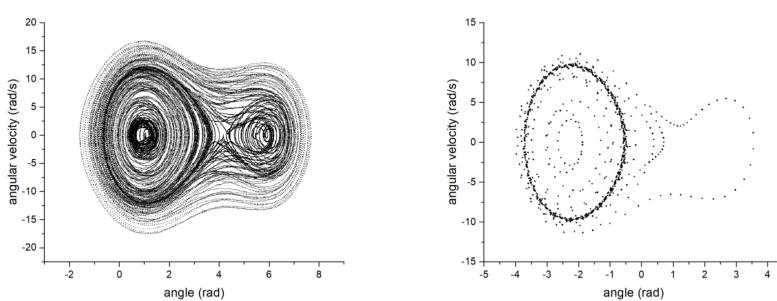


Figure 5.19: Comparison of Poincaré plot for (left) chaotic and (right) non-chaotic phases. image source : Youngmin Song

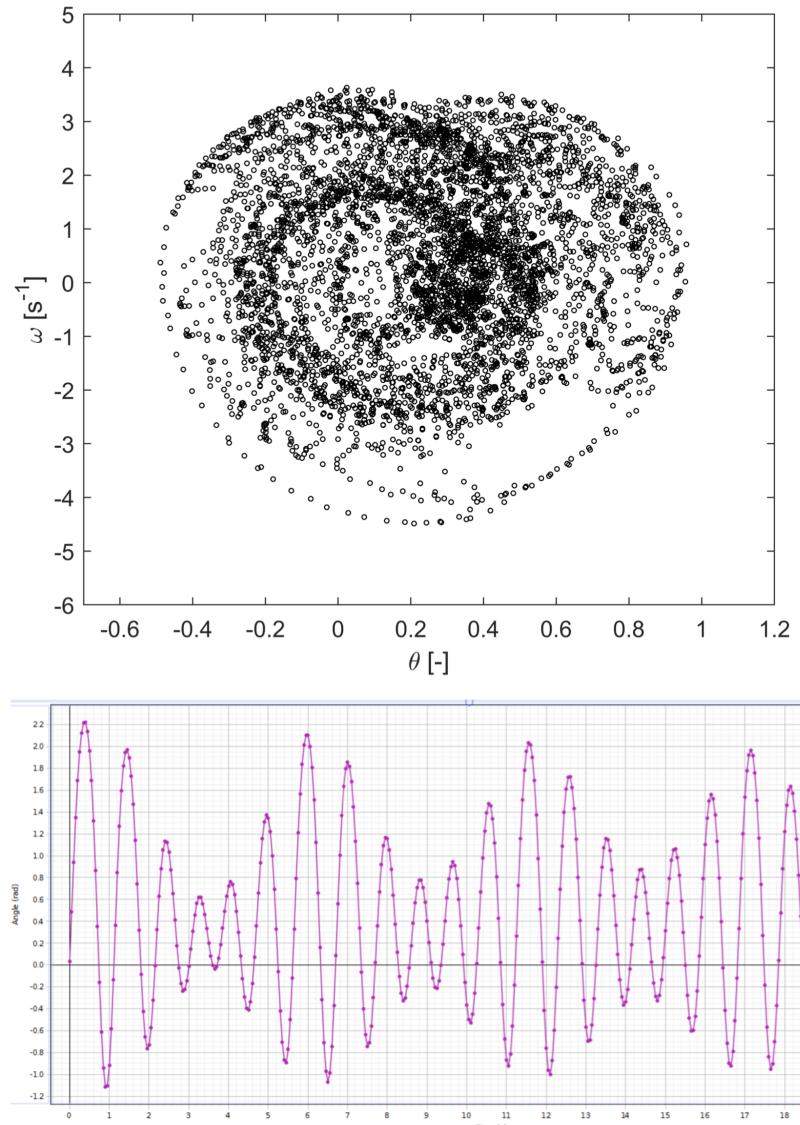


Figure 5.20: In some cases, the shape of oscillation could be converge, but the amplitude may not be. Top : (Ysun Choi) Phase-space diagram for those cases. Bottom : Angle-Time plot.

공명 곡선의 파악

강제 구동되는 감쇠 진동자에서는, 계의 고유진동수에 다가갈 수록 정상상태 진폭이 커지는 공명 현상이 일어난다. 이에 따라 정상상태 진폭을 구동 진동수에 따라 플롯한 것을 공명곡선이라 한다. 그러나, 계가 혼돈스럽게 날뛰다면 어떤 일정한 진폭을 가진 상으로 수렴하지 않을 것이므로 정상상태 진폭이 잘 정의되지 않을 것이다. 이것이 우리가 노리는 카오틱 영역이다. 공명주파수 근처에 걸쳐서,

운 좋게 어떤 히팅 채널과 커플링이 된다면 카오스를 볼 수 있는 범위 (window)를 찾을 수 있을 것이다. 이를 위해 강제 구동하는 외부 장의 진동수를 바꾸어 가며, (DC 모터의 구동전압을 바꾸어 가며) 계의 정상상태 진폭을 보자. 약 2분 정도가 지나도 수렴하지 않는 경우, 이는 카오텍 영역에 진입한 것으로 생각해볼 수 있다. 우리 시스템의 퍼텐셜은 2개의 극소점을 가지므로, 2개의 특이점 근방에서 이상한 거동을 볼 수 있을 것이다. 진동시키다 보면 신기한 일들이 많이 일어난다. 먼저, 가장 쉽게 생각할 수 있는 것은 공명에 의한 에너지 공급을 통한 발산이다. 공명점 근처에서는 계에 에너지가 꾸준히 공급됨에 따라 진폭이 매우 빠르게 증가하니, 위의 주의사항을 지킬 수 있도록 실험 진행에 유의하시오. 또는, 신기한 형태로 꼬인 운동을 할 수도 있다. 이 경우 정상 상태로 수렴을 하긴 했는데, 진폭이 두 개인 경우도 있다. 이럴 때는, 공명곡선 상에 점을 두 개 찍어서 두 진폭을 모두 나타내어도 되고, 오차 막대를 크게 잡아서 그림을 그려도 된다. 이런 식으로 그리다 보면, 카오텍 영역으로 다가갈수록 오차막대가 커지다가 결국 발산하면서 아무 진폭이나 다 가질 수 있는 상이 되고, 매우 혼돈해지는 것을 알려 주는 공명곡선을 그릴 수 있다. 이는 마치 카오스와 카오스가 아닌 것의 상도표의 역할을 한다.

만약 수렴하지 않은 것 같이 의심된다면, 데이터 수집을 잠깐 멈추고 다시 해 보자. 위상공간 상에서 궤적의 폭이 많이 줄어들어 있을 것이다. 이것이 수렴하는지, 아닌지 파악해 보자.

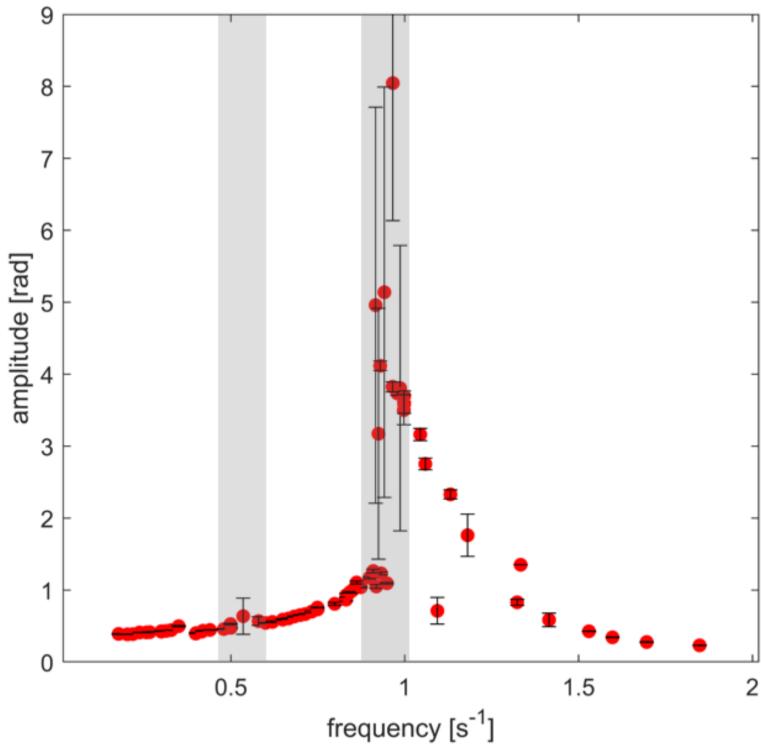


Figure 5.21: Resonance curve with "chaotic window" shown. Ysun Choi.

감쇠를 키우면 어떻게 될까? 혼돈의 경계는 에너지를 충분히 공급받을 수 있어야 한다는 조건이 들어오는데, 감쇠를 키우면 더 공명에 가까워야 혼돈스러워지기 위한 충분한 히팅이 될 것이다. 이때 감쇠를 y축, 강제구동 주파수를 x축으로 하여 다음과 같은 모양의 "카오톡 상 도표"를 그려 보시오. 물론, 경계의 변화가 깔끔하게 거동하지 않을 것이다. 이 부분은 수행하지 못해도 감점이 없다.

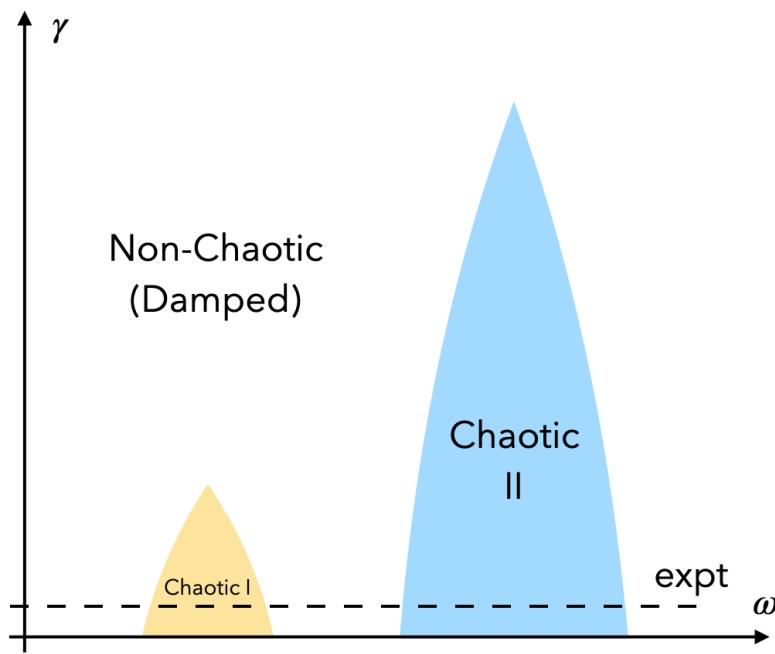


Figure 5.22: Chaotic phase diagram : damping will inhibit enough energy feeding to behave as chaotic phases.

이제, 찾아낸 카오스 영역 근처에서 카오틱한 샘플을 여러 개 찍어 보고, 각도-시간, 각속도-시간 플롯 등을 보여주어 상이 혼돈스럽게 날뛰을 보여 주시오. 위상 공간을 그려보면, 수렴하는 경우와 카오틱한 경우를 비교할 수 있으므로 몇 가지 예시에 대해 제시해 보면 좋다. 다음 두 개의 태스크는 카오스 영역에서의 성질을 분석하는데 쓰인다.

푸앙카레 플롯

푸앙카레 플롯은 계의 Chaotic Behaviour를 가시화하기 위한 검출 방법이다. 매 주기마다 하나의 점을 매번 같은 시간 간격으로 골라 위상 공간상에 표시하는 것으로, 이로부터 계가 얼마나 혼돈한지 정성적으로 분석할 수 있다. 적절한 실험 자료에 대해 Chaotic Behavior를 관측하고 Poincaré Plot을 제시하시오.

FFT

Chaotic behaviour를 검출해내기 위해 FFT 를 활용할 수 있다. 고속 푸리에 변환은 시계열 이산자료를 주파수에 대한 이산자료로 변환해 주는 기법으로, FFT를 통해 고조화(Higher Harmonics) 성분의 세기를 얻을 수 있다. 일반적인 조화진동 및 비조화 진동의 경우, 기본 진동수의 배수로 나타나는 진동의 FFT 성분 상의 비율이 큰 변화가 없이 (=파동의 개형이 일정하게) 얻어지는데, 파형의 모양이 달라지는 것은 정성적으로만 관측할 수 있고 정량화가 어렵다. 이를 정량화하기 위해서는 몇 번째 모드와 몇 번째 모드의 비율이 얼마나 변화하였는지 (= 몇 번째 모드에 얼마만큼의 에너지가 할당되었는지)를 기준으로 정량화할 수 있으며, 이를 위해 FFT 분석을 사용할 수 있다. 이는 여러 통계 라이브러리를 제공하는 프로그래밍 언어로부터 쉽게 사용할 수 있다. 적절한 처리 기법을 적용하여 계의 혼돈을 잘 보여줄 수 있는 자료를 정량화하여 기술하시오.

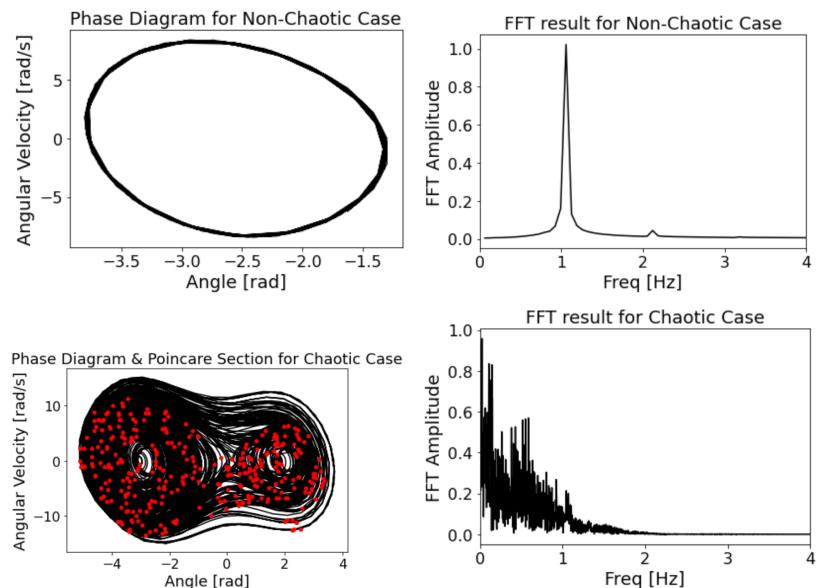


Figure 5.23: FFT result for non-chaotic (top) and chaotic (bottom) phases. Youngmin Song.

이외에도 Lyapunov 지수 등을 도입하면 계가 안정할지, 혼돈할지 어림해볼 수 있다. 카오스를 판별할 수 있는 여러 가지 기준들을 시험해 보시오. (수행하지 않아도 감점되지 않음)

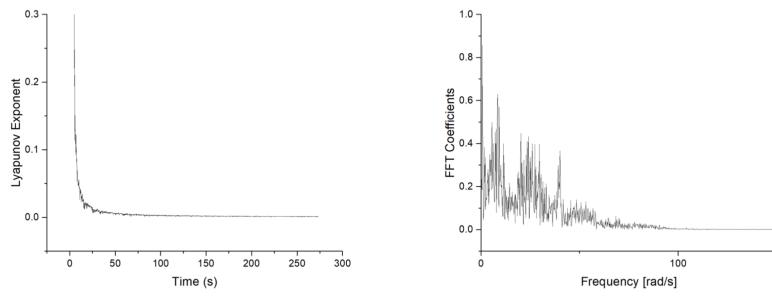


Figure 5.24: Lyapunov exponent - Younghwan Choi.

Chaotic Attractor

이 부분은 수행하지 않아도 감점이 없다. 위에 운동방정식을 제시하였다. 이를 바탕으로, 실제 실험치들을 대입하여 각 파라미터를 피팅해 보고, 얻어진 파라미터로 시뮬레이션을 돌려 보시오. 아주 오랜 시간이 지나도, 카오틱 영역에 있는 계가 카오스를 유지하는가? 혹은 어느 값으로 수렴하는가? 혹은 원래 위치로 돌아올, 아주 긴 주기가 있어서 다시 처음부터 반복되는가? 수천 초에서 수만 초 가량의 분석을 해 보다 보면, 계가 닫힌 궤도를 돌 수도 있음을 찾아볼 수 있을지도 모른다. 이처럼 시스템의 stochastic한 chaotic behavior 속에서 다시 길을 찾아 원래 조건으로 합쳐주려는 요소들을 attractor라고 한다. 이 시스템에서는 무엇이 attractor의 역할을 하겠는가? 이 계가 진짜 카오스가 아니라면, 그 이유는 무엇인가? 중급물리실험 랙쳐에서 오차와 통계 처리를 깊게 배우고 연습해 보았는데, 이들이 참값을 흐리는 요인이라면, 어떤 실험계에서는 attractor가 있어 stochastic한 노이즈에도 불구하고 평균적인 거동이 몇몇 규칙을 따르게끔 남아 있는 경우도 많이 있다. 이런 원리로 결국 다체 물리학을 우리는 잘 이해하지 못하지만, classical limit을 취하면 결국 그 많은 양자역학적 계들이 뉴턴역학에 지배받는 것을 떠올려 보라! 이 안에는 온갖 복잡한 random scattering과 thermal noises들이 섞여 있음에도, 결국 거시적인 양상을 평균은 가야 할 길을 찾아 간다. 어떻게 이런 일이 가능한 것일까. Stochastic한 양자역학 시스템을 풀어내는 것은 아직도 매우 흥미로운 물리학의 연구 주제로 남아

있다.

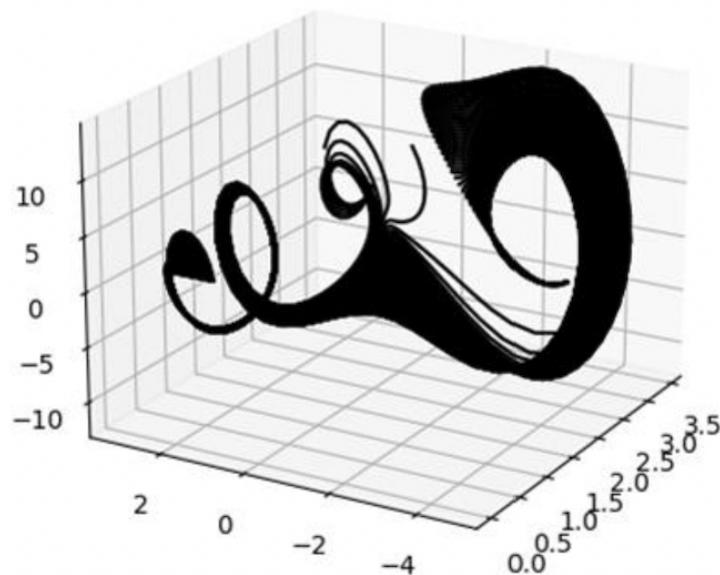


Figure 5.25: Evidence of attractor. A numerical solution for long-term time evolution of chaotic pendulum converges again in the time-phase-space diagram. The 'depth' axis shown is time axis. Soonhyun Kwon.

Bibliography

- [1] <https://www.pasco.com/products/complete-experiments/rotation/ex-5523> (실험장비 제작사 의 장비 소개 페이지)
- [2] Marion, J. B., and Thornton, S. T. (1995). Classical dynamics of particles and systems.
- [3] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, "Classical Mechanics," 3rd Edition, Addison Wesley, Boston, 2002.
- [4] P. M. Chaikin, T.C. Lubensky, "Principles of Condensed Matter Physics", Cambridge Univ. Press, 1995
- [5] N. Goldenfeld, "Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group", CRC Press, 2018
- [6] J. Chem. Educ. 2019, 96, 10, 2208-2216
- [7] John R. Taylor, "An Introduction to Error Analysis ; The Study of Uncertainties in Physical Measurements", 2nd ed., (1982)
- [8] 김우철, 김재주, "개정판 일반통계학", 영지문화사 (2006)

6

Photoluminescence

거쳐간 조교들

2006. 03. 02. 김인규 작성
2007. 03. 02. 김재욱 개정
2008. 03. 14. 조성완 개정
2009. 03. 11. 양성배 개정
2012. 03. 02. 이무송 개정
2017. 03. 10. 홍성훈 개정
2019. 03. 19. 박노준 개정
2021. 03. 02. 이연재 개정
2022. 06. 24. 김솔 개정

6.1 실험 목적	177
6.2 배경 이론	178
6.3 실험	181
주의사항(반드시 숙지할 것)	181
실험기구	185
실험과정	190
6.4 Task List	197
해야 할 일	197
Data Analysis and Fit .	199
생각해 볼 거리	207

본 매뉴얼의 발전에 큰 기여를 한 2021학년도 강준하, 김호현,
여준호, 김한비 수강생에게 감사를 표함.

6.1 실험 목적

이 실험의 목표는 Ruby 와 Rhodamine 590 시료의 photoluminescence signal을 측정하는 것이다. Ruby의 경우, 진공 환경에서 헬륨 컴프레셔를 통해 온도를 낮춘 후, 그리고 진공 환경에서의 상온에서 photoluminescence를 측정하여 얻어진 각 data를 비교해본 후 결과가 어떻게 나왔는지와 그 이유에 대해 고민해 본다. 그리고 상온

과 상압에서의 Rhodamine 590의 photoluminescence를 측정해본 후 이것을 ruby의 경우와 비교해본다. 이러한 과정을 통해 photoluminescence를 통해 얻은 data가 어떻게 응용될 수 있을지에 대해서 고민해 본다.

6.2 배경 이론

Luminescence란 외부에서 가해주는 열 이외의 에너지에 의해 물질이 빛을 내는 성질을 말한다. 열 이외의 에너지에 의해서 빛이 발생하므로 high temperature가 아닌 상태에서 외부의 자극에 의해 photon을 내보내게 된다. 그러나 같은 luminescence 현상 에너지를 가하는 방법에 따라서 photoluminescence, electroluminescence, bioluminescence, chemiluminescence 등으로 불리기도 하며 외부에서 photon의 형태로 에너지를 주고 이와 다른 파장의 빛을 내는 현상을 photoluminescence, 외부에서 에너지(주로 photon)가 가해준 뒤 바로 외부에 photon을 내는 현상 fluorescence(형광), 외부에서 가해준 에너지를 어느 정도 이상의 시간 동안 가지고 있다가 내보내는 현상을 phosphorescence(인광) 등으로 부르기도 한다. 여기서 즉, 우리가 실험할 photoluminescence(PL)은 laser와 같은 단색광의 photon 에너지를 이용한 luminescence의 한 종류이다. Luminescence 현상은 여기 에너지의 종류와 대상물질의 종류에 관계없이 비슷하다.

반도체의 경우 PL의 관점에서 그 과정을 살펴보면 3 단계로 나눌 수 있는데 각각의 단계는 다음과 같다. 먼저, 제 1단계는 가전자대(valance band)에 있던 전자가 photon 에너지를 흡수, 여기 되어(excited) 전도대(conduction band)로 올라가는 과정이다. 즉, electron-hole pairs(EHPs)가 형성되어 가전자대에는 정공(hole)이 위치하게 되고, 전도대에는 전자가 위치하게 된다. 그러나 전도대로 여기된 전자들은 불안정하기 때문에 다시 원래의 평형상태인 가전

자대로 되돌아오려는 성질이 있다. 제 2단계는 전자-정공 쌍(EHPs)을 이루고 있던 전자와 정공간의 재결합 과정이다. 이 재결합 과정에는 복사성(radiative)과 비복사성(nonradiative) 재결합이 있는데 전자가 luminescence에 기여하는 결합이다. 마지막으로, 제 3단계는 이 복사성 재결합에 의한 photon 에너지의 방출과정이다. 이때 방출되는 photon 에너지는 그 물질의 내부 상태, 즉 band gap에 너지, 불순물의 종류와 그 농도 및 결정 상태 등에 의해서 다르게 나타난다.

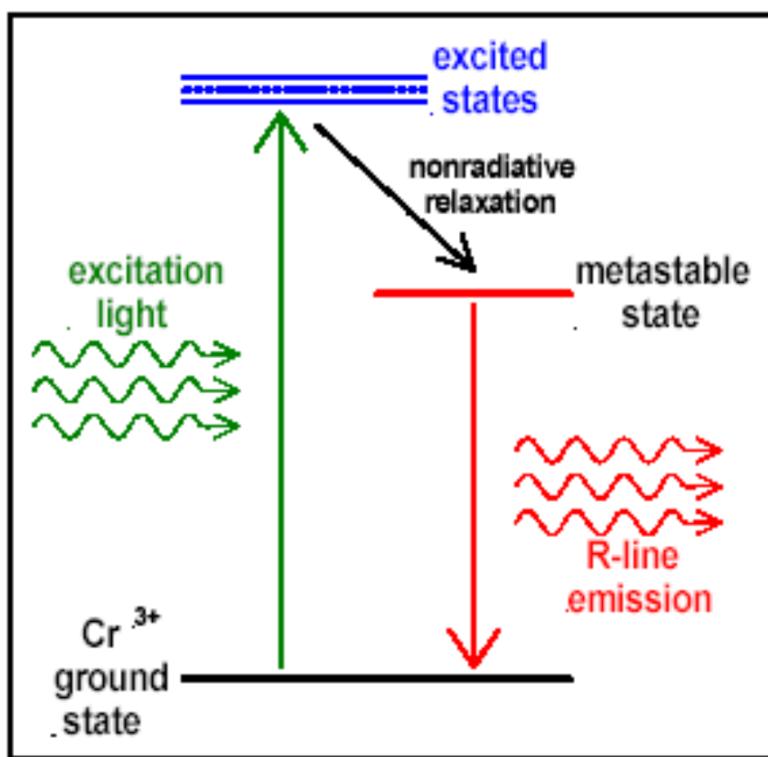


Figure 6.1: Energy level of Cr^{3+}

이러한 총 3 단계의 과정은 photon의 에너지가 물질에 조사되고 있는 한 지속적으로 일어나며, 여기에너지를 정지시켰을 때 photoluminescence에 비해 대략 $10^8 \sim 10^{10}$ 배 이상의 life time을 가지고 잔광을 나타내는 인광(phosphorescence)과 염연히 구분된다. 또한 에너지 준위간 전이에 있어 spin allowed transition을 PL 또는 형광(fluorescence)으로 정의하고 spin forbidden transition을 인광으로 정의하기도 한다. [photonics] 즉, 양자역학적으로 ground state로 전이가 가능한 중간 level로 떨어졌다가 ground state로 떨

어지는 경우에는 빛을 금방 방출할 것이기에 이것은 PL의 경우에 해당할 것이다.

반대로 ground state로 갈 수 없는 중간 단계 state로 전이되었다면 다시 ground state로 가는 것이 시간이 오래 걸릴 것이므로 인광 현상을 나타낼 것이다. 이번 실험에서 사용할 Ruby는 Al_2O_3 의 결정으로 약간의 Cr^{3+} 이온이 Al^{3+} 이온을 octahedral sites에서 대체하고 있다. Ruby의 붉은 색은 Cr^{3+} 에 의한 것이고, 관측될 fluorescence 또한 붉은 빛 계열이므로, Ruby의 PL을 분석하기 위해서는 Cr^{3+} 의 energy level을 알아야 한다. Figure 1은 Cr^{3+} 의 energy level을 간단하게 나타낸 것이다. Ruby는 crystal 구조이므로 가능한 전자들의 state가 band 구조로 이루어져 있을 것이다. 따라서 Ruby에 band gap energy 이상의 에너지를 주게 되면 transition이 다소 쉽게 일어날 것이다. Ground state에서 excited state로 올라왔다고 할 지라도 excited state에서 바로 ground state로 떨어질 확률만 있는 것이 아니라, 에너지 준위가 낮은 다른 excited state를 거쳐서 ground state로 떨어질 확률이 있는데, 이러한 일이 발생할 때에 가해준 빛과 다른 파장의 빛이 나오게 된다. Excited state로 올라간 전자는 figure 1에 표시된 것처럼 준안정상태(metastable state)로 전이할 확률이 있는데, 이 과정에서는 에너지를 빛이 아닌 형태로 방출(non-radiative relaxation)한다. [siegman] 그 후에 다시 ground state로 떨어질 때 빛의 형태로 에너지를 방출하게 되는데, 이번 실험에서 관측할 빛은 바로 이 빛이다. [timothy] Ruby 뿐 아니라 다른 많은 물질들의 energy state를 이러한 방법으로 알아낼 수 있다.

6.3 실험

주의사항 (반드시 숙지할 것)

기본적으로 광학 실험은 높은 정밀함이 중요하다. 그러므로 광학 장비들을 사용할 땐 광학 면에 지문이 묻지 않도록 주의해야 하고, 가능 한 lens나 mirror의 가장자리를 잡고 운반해야 한다. 또한 함부로 이동하다가 떨어뜨려 깨뜨리지 않도록 조심하도록 해야 한다. 이번 학기뿐만 아니라 여러분의 후배들이 사용할 장비이며 또한 소중한 학교의 재산이므로, 실험실에 장비가 최대한 여기저기 퍼져 있지 않게 정리를 잘 해주고 잘 보존될 수 있도록 노력해주기를 바란다. PL 실험의 경우 여러 독립적인 기구들을 조합해서 실험하게 되므로, 제일 먼저 각 기자재에 대한 소개와 주의사항을 소개하겠다.

Laser 주의 사항

1. 일단 laser를 켜면 laser의 진행 높이와 방향은 거의 바꾸지 않는다고 생각하자. 웬만하면 laser 본체는 움직이지 않도록 한다. 만약 여기저기로 laser 높이를 바꾸면 본인 눈에는 닿지 않지만, 멀리 떨어져 있는 사람 눈높이까지는 진행되게 된다.
2. 보통 학부실험에서 laser를 이용한 실험을 진행할 때 자주 장난으로 거울을 laser 앞에 대어보는데, 이런 장난을 치다 적발되는 경우에는 즉시 퇴실 조치가 내려질 것이다. 거울로 장난칠 때 장난치는 사람 눈에는 들어갈 확률이 매우 낮겠지만 빛이 어디로튈지 전혀 예측할 수 없다.
3. 광학 장비를 align하다보면 예상치 못하게 그 방향으로 빛이 진행할 수 있기 때문에 빛이 진행하거나, 진행할 수 있는 방향에는 절대 반사체를 놓지 않도록 한다.

4. Laser case를 절대 열지 않는다. 또한 함부로 Laser를 들거나 옮기지 말고, 꼭 이동이 필요하다면 조교에게 도움을 요청하도록 하자. 현재의 laser는 임의의 분해가 되지 않도록 고정되어 있으며 충격이 가해지는 경우 laser 내부의 alignment가 틀어져서 532nm외의 다른 파장의 빛 성분이 커지거나 레이저 자체가 나오지 않을 수도 있다.
5. Laser가 일단 커지면 실험하는 모든 사람들은 laser 높이 이하로 눈이 가지 않도록 한다. 바닥에 무언가을 떨어뜨렸다면, 눈을 감고 앉아서 물건을 찾고 눈을 감고 일어서거나 레이저의 전원을 내린 뒤에 일어서도록 한다. 또한, 반드시 goggle을 이용하고, scattered light도 오래 보지 않도록 한다.
6. Laser를 처음 켜는 경우 레이저 빛이 나올 때까지 시간이 다소 걸릴 수 있다. 따라서 기다리고 있다가 레이저가 발진되면 가능한 레이저의 파워를 낮추고 시작해야 한다. Laser의 경우 일반 다이오드 레이저나 He-Ne 레이저에 비해 수~수십 배 파워가 강하다. 따라서 직접 종이나 신체, 옷에 닿지 않도록 주의해주기 바라며 빛의 경로를 align하는 경우 monochromator로 들어가는 slit을 notch filter로 막거나 아예 닫은 상태에서 수행해야 한다. 직접 레이저가 monochromator로 들어가는 경우 monochromator 뒤의 CCD가 고장나게 된다.

Vacuum 주의 사항

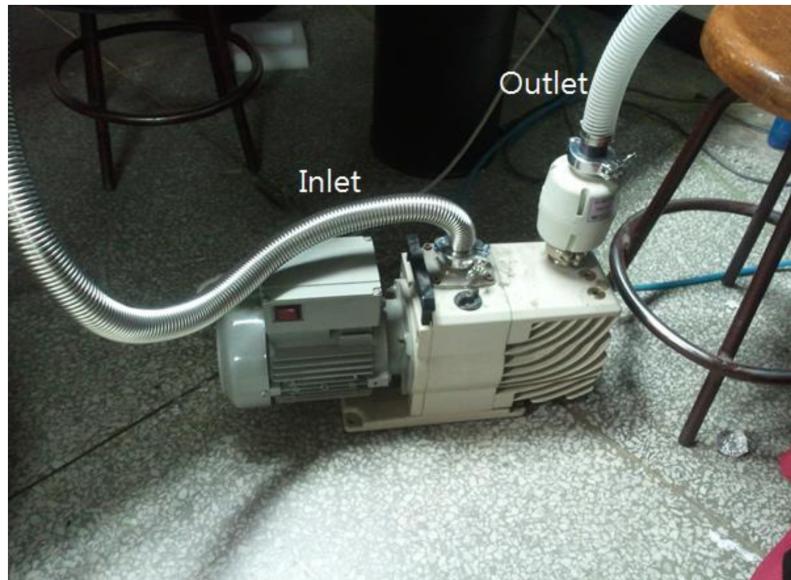


Figure 6.2: Rotary Vacuum Pump.

이번 실험에서 사용되는 vacuum pump 는 rotary pump 로 수 mTorr 까지 펌핑할 수 있는 vacuum pump 이다[그림 2]. Rotary pump 는 pumping oil 을 이용하여 연결된 chamber 내의 기체를 pumping 하기에 rotary pump 로부터 배출되는 기체는 oil 을 함유하고 있어서 몸에 매우 좋지 않다. 그렇기에 절대로 outlet 의 valve 를 열지 않도록 하며 outlet 에 연결된 bellows 의 끝은 창문 바깥으로 나와 있어야 한다. 추가적으로 pump 가 작동하고 있을 때 움직이게 되면 oil이 역류할 수 있기에 pump를 절대 움직이지 않도록 주의해야한다. (중요!) 쿨러를 켜기 전 항상 chamber 내부의 진공을 잡아야 하기에 내부 압력을 제는 gauge 에서 10mTorr 아래로 내려간 것을 확인한 후에 쿨러를 켜도록 하자. 쿨러를 작동시킨 후 온도가 200K 이하로 떨어지면 chamber 의 valve 를 꼭 잠가야한다. 그렇지 않으면 기름이 역류하므로 꼭 명심하길 바란다!

Rhodamine 590

시료는 exciton의 Rhodamine 590을 에틸렌 글리콜에 녹인 것으로 dye laser에 쓰이는 염료인데 발암 가능성이 있고 피부, 눈, 흡입 시에 염증 가능성이 있으므로, 염료가 밖으로 나오지 않도록 마개로 sealing을 해놓았으니 이것을 열지 않도록 한다. 따라서 깨뜨려서 Rhodamine 590가 외부로 유출되는 일이 절대 발생하지 않도록 주의하자.



Figure 6.3: Rhodamine sample

실험기구

1. Laser

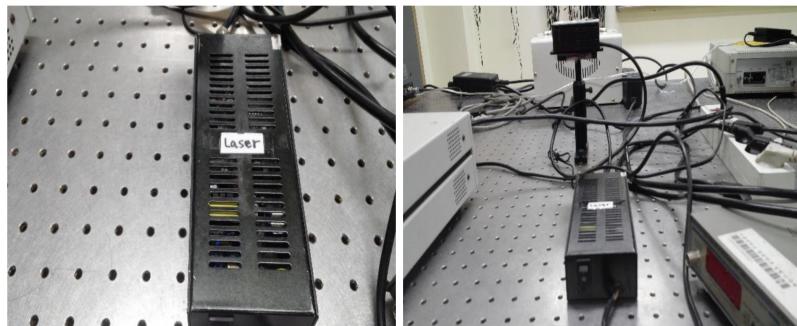


Figure 6.4: Laser. (left) laser driver (right) laser head

이번 실험에서 사용할 레이저는 파장 532 nm의 녹색 빛이 나오는 laser 으로 모델명은 SLD-532-070T이다. 크기는 작아 보일지 몰라도 켜 보면 파워가 수십mW 정도로 강하기 때문에 PL신호를 보는 데에는 충분하다.

2. Dichroic filter and notch filter

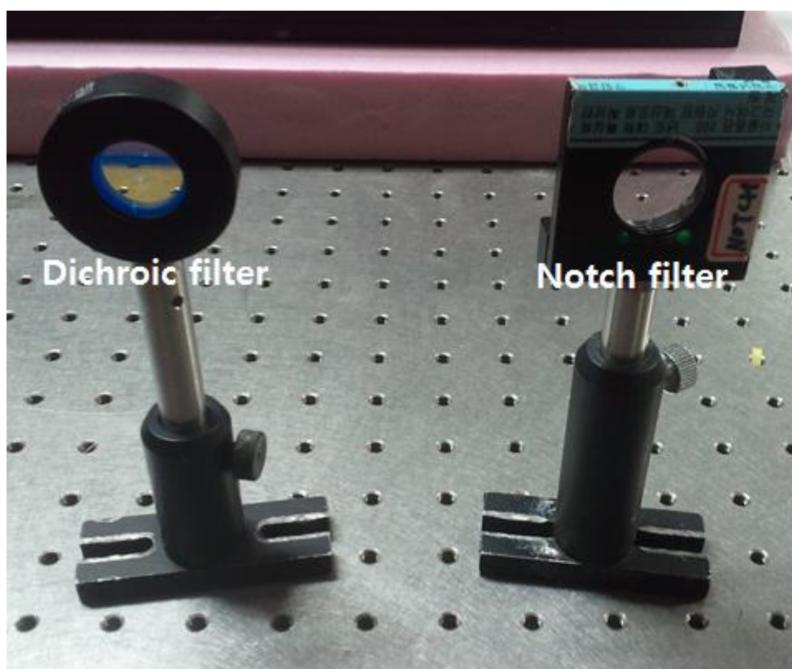


Figure 6.5: Dichroic, Notch filter

Dichroic filter는 특정 파장의 빛만을 반사해주는 역할을 한다. 이번 실험에서는 45도 방향으로 laser를 반사시킨 뒤 sample에서 반사된 laser 빛 중에서 laser의 파장에 해당하는 빛을 차단하는 역할을 한다. Notch filter의 경우 역시 특정 파장의 레이저 빛을 차단해서 CCD에서 레이저의 빛으로 인해 signal이 지나치게 작게 보이는 것을 막기 위한 것이며 레이저 빛에 수직이 아니라 약간 비스듬하게 설치할 때 그 효율이 좋아진다.

3. Cryostat and vacuum gauge

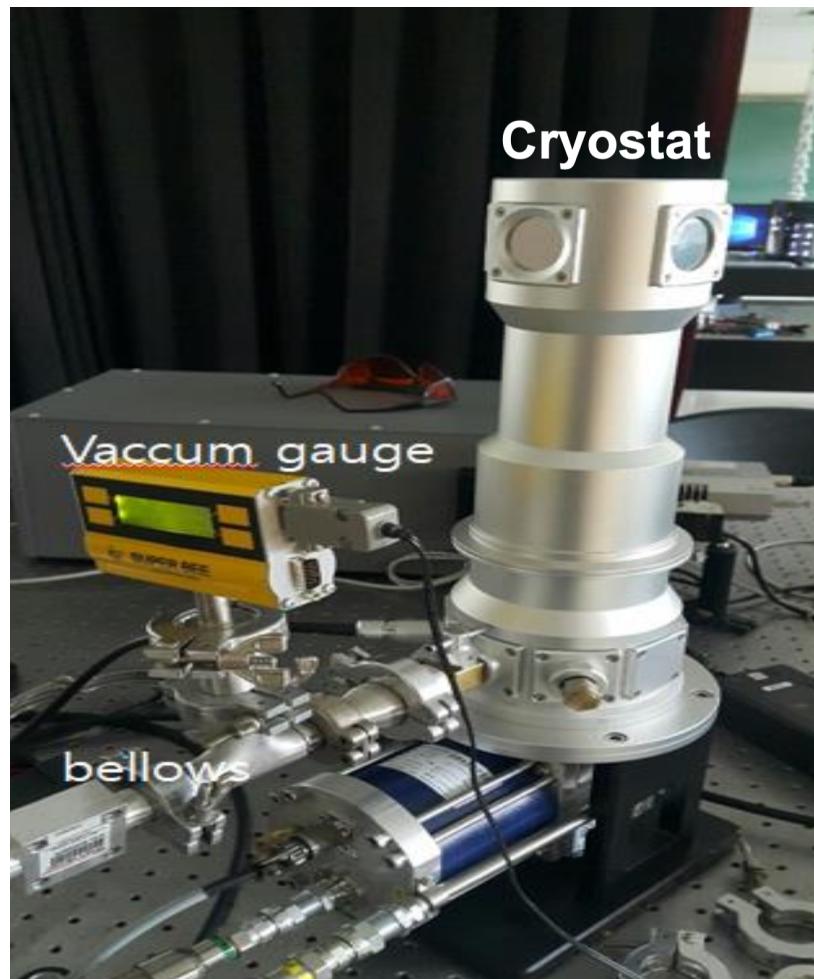


Figure 6.6: Cryostat and vacuum gauge

Cryostat은 sample을 저온으로 유지한 채 실험할 때 쓰이는 기구이다. Bellows는 rotary pump와 연결이 되어 있다. Rotary pump 와 cryostat 사이에는 압력을 읽어주는 역할을 하는 vacuum gauge

가 연결되어 있고 항상 ruby의 photoluminescence를 측정하기 전에 gauge를 통해 진공을 확인하자. Cryostat, vacuum gauge, 그리고 rotary pump는 KF flange로 연결이 되어 있는데 이번 실험에서는 연결을 끊을 일이 없기에 건드리지 않도록 한다. 이번 실험에서는 아래에 후술하겠지만 온도센서가 부착되어 있는 상태로 항상 cryostat 내부에 ruby sample이 들어있으며 cryostat의 높이가 optical table에 비해 낮아 supporting jack으로 높이를 맞추어 두었기에 외부 충격에 취약한 상태이다. 그렇기에 cryostat에 충격을 가하는 일이 발생하지 않도록 한다. 충격을 가해 ruby sample이 망가지거나 온도 센서에 문제가 생길 경우 조원 전체에게 불이익이 적용될 예정이니 조심해서 실험을 진행하길 바란다.

4. Monochromator

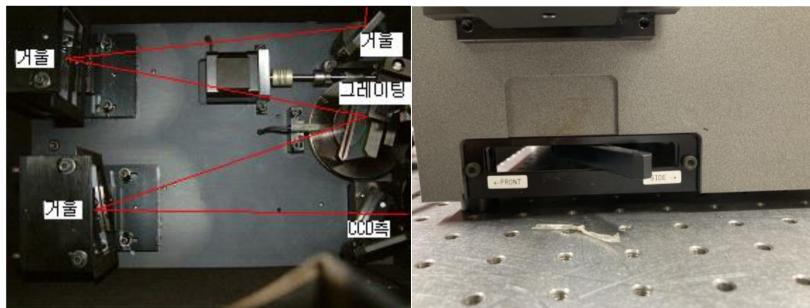


Figure 6.7: Monochromator.
(left)inside, (right)outside

Monochromator는 들어온 빛이 어떤 파장인지 알 수 있게 해주는 기계이다. 원리는 일반물리에서 배웠던 diffraction grating과 관련이 있다. Grating은 입사한 파장에 따라서 반사하는 각이 다른데, 이것을 이용하여 빛을 파장에 따라서 위치상으로 분류하는 것이다. 이렇게 각기 다른 방향으로 나가는 다른 파장의 빛들은 CCD의 각기 다른 부분에 자극을 줄 것이고 이것으로부터 주어진 빛의 각 파장 성분을 읽을 수 있다. 우리가 이번 실험에 사용하는 monochromator는 동우 옵트론에서 제작한 DM320i 모델로서 이 모델은 PC의 RS232C 시리얼 포트로 제어하게 되어 있고, 수동 제어는 불가능하다. slit은 입사 쪽에 1개, detector쪽에 2개가 있는데 1개는 CCD쪽, 다른 한 개

는 PMT쪽(현재 사용하지 않음)에 있다. 입사광 쪽의 slit은 10 micron의 resolution으로 열고 닫을 수 있으며 monochromator의 grating은 1200gr/mm(groove per millimeter)의 반사형 Grating이며 내부 mirror들의 focal length는 320nm이다. 작동이 잘 안 되는 것 같다고 해서 절대로 열어보아서는 안 된다. 이 기구는 이미 calibration이 되어있으므로, 열어서 안의 거울이나 grating을 망가뜨릴 경우 정확한 측정이 불가능하다. 그리고 충격을 주어서도 안된다. 실제 내부의 grating들은 정밀한 각도로 align이 되어있으므로 충격에 의해서 틀어지는 경우 잘못된 결과를 얻을 수 있다.

5. CCD (Charge coupled device)



Figure 6.8: CCD 사진

이 실험에 쓰이는 CCD는 Andor사의 모델 DV-401A-FI이며 한 개의 pixel-size는 26micron by 26micron이고 가로로 1024개, 세로로 128개의 pixel이 존재한다. 빛을 받으면 전하가 쌓이게 되고 그 수를 읽어서 픽셀당 빛의 세기를 측정할 수 있게 된다. Dark current는 섭씨 -40도에서 약 0.5elec/pix/sec이다. Monochromator와 동일하게 220V 교류전원을 사용하며 중간의 전원 어댑터가 24V로 바꾸어 주게 되고 컴퓨터와의 통신은 USB포트를 이용한다. 본체에는 냉각

장치가 내장되어 있어 Thermal Electron에 의한 noise를 감쇄시키게 된다.

6. Temperature controller 이 실험에서는 극저온 실험을 하기 때문에, sample 주변의 온도가 얼마나 되는지 읽을 수 있는 장치가 필요하다. 이번 실험에서 온도를 읽기 위해 사용하는 장치는 Lakeshore 사의 331 temperature controller이며 미리 Ruby 뒤에 부착된 온도 센서와 연결을 진행하였다. 히터의 경우, 윗줄 우측 끝의 Heater Range 버튼을 클릭한 뒤 나오는 화면에서 Heater Off라고 되어있을 텐데, 거기서 위아래 화살표를 조작하면 Heater Low, Medium, High가 순서대로 잘 나올 것이다. 그 중에서 원하는 히터의 세기가 화면에 나오면 화살표 옆의 Enter 버튼을 누르면 히터가 작동한다. 히터를 끄려면 Heater Off를 누르면 된다. (중요!) 온도 상승 중 흔히 온도 overshoot이 나타나는 것을 고려하여, 온도가 290 K에 도달하기 이전에 반드시 히터를 끄도록 하여 항상 온도를 310 K 아래로 유지하도록 힘쓴다. 왜냐하면 DT470 Si diode 온도 센서는 330 K 부근에서 고장난다고 알려져 있으며 실제로는 그 온도 아래에서도 자주 센서 성능이 나빠진다는 것이 확인되었다고 한다.



Figure 6.9: Temperature controller

실험과정

1) Andor Solis 설정

i. Monochromator의 전원을 키기 위하여 Monochromator 본체 위의 검은 상자의 전원 스위치를 올린 후 CCD에 전원을 공급한다. CCD는 전원스위치가 따로 있지 않으므로 전원 코드를 콘센트에 연결하면 자동으로 전원이 공급된다. 그 후 컴퓨터의 전원을 킨 후 바탕화면에 존재하는 Andor Solis을 실행한다. 실행을 할 때 DM320i에 연결하겠냐는 질문창이 나오면 ‘아니오’를 클릭한다. 프로그램을 실행시키면 좌측 하단에 CCD의 온도가 표시되는데 이 온도가 높은 상태를 유지하는 경우 온도를 두 번 클릭하면 목표 온도를 조정할 수 있는 창이 뜨니 이것을 이용하여 CCD의 온도를 낮추도록 한다(-50도 이하로는 낮출 수 없으니 CCD가 과열되지 않게 목표 온도를 -50도 이하로는 설정하지 않으며, -35도를 추천한다.) CCD의 온도가 안정화된 후에는 온도 표시창이 파란색이 되니 그 후에 [그림 10]처럼 Spectrograph setup을 진행한다. ii. i.의 과정을 마친 후 [그림 11]과 같이 Spectrograph X Calibration을 진행한다. Rhodamine 590 시료의 경우에는 center wavelength을 570 nm로, Ruby 시료의 경우에는 center wavelength을 690 nm로 설정하는 것을 권장한다. DM320i 내의 grating은 1200/500과 1200/300의 두 가지의 option이 존재하는데 이번 실험에서 보고자 하는 peak의 파장대에서는 1200/500 grating이 optimal 하기에 1200/500만을 사용하도록 한다. iii. [그림 12]와 같이 Acquisition tab의 Acquisition setup을 통해 측정을 어떠한 식으로 진행할 것인지를 설정할 수 있는데 이번 실험에서는 Acquisition mode는 Accumulate를 사용하도록 한다. Accumulate mode로 설정을 하게 되면 3개의 변경할 수 있는 변수가 보이는데 Accum Cycle Time은 변경하지 않도록 한다. Exposure time은 CCD가 정해준 시간만큼 빛을 모은 후 1회의 측정을 종료하는 것을 의미한다. 이 값을 0.1을 사용하는 것을 권장하며 최대 0.5를 넘지 않도록

한다. Number of Accumulations는 총 몇 회의 측정을 진행한 후 최종 data를 보여줄 것인지를 결정하는 변수이니 아무 값이나 설정해도 되지만 CCD에 무리가 갈 가능성성이 존재하니 20회이하로 설정하도록 한다. 설정을 마친 후 data를 얻고 싶다면 Acquisition tab의 Take signal을 사용하면 되고 연속적으로 순간순간 측정되는 데이터를 보고싶다면 동일 tab의 Take video를 사용하면 된다. 또한 Take background를 통해 noise를 얻은 상태라면, 동일 tab의 Take reference 기능을 사용하면 noise가 제거된 data를 즉시 얻을 수 있다. iv. 측정을 끝낸 후에는 File tab에서 결과를 저장할 수 있다. Export As... 을 이용하여 .asc 혹은 .dat 파일로 저장하여 Origin 등의 프로그램을 이용하여 결과를 볼 수 있다. 추가적으로 Save As... 을 이용하여 .sif (Andor Data Files)로 저장을 하면 Andor Solis를 이용하여 언제든 다시 결과를 볼 수 있으니 .sif 파일로도 저장을 하는 것을 추천한다.

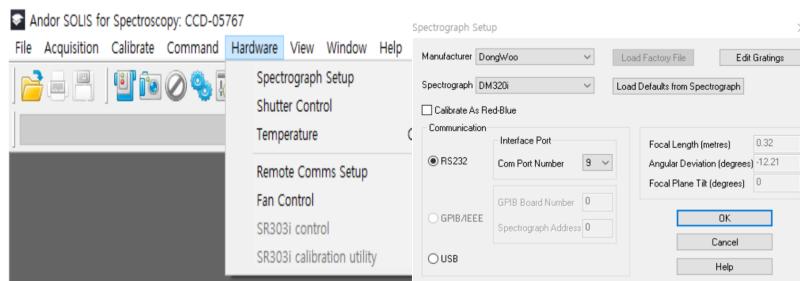


Figure 6.10: Spectrograph Setup

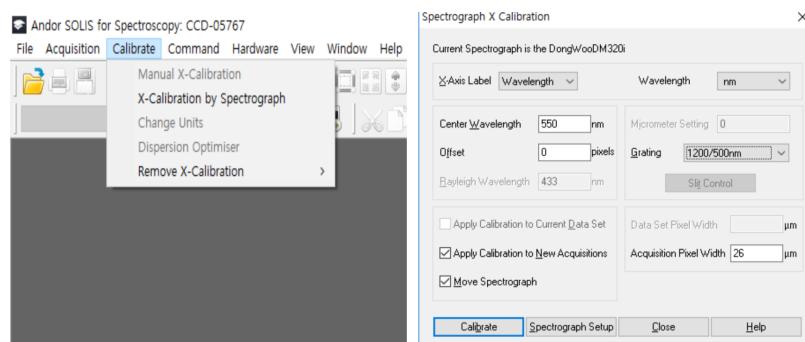


Figure 6.11: Spectrograph X Calibration

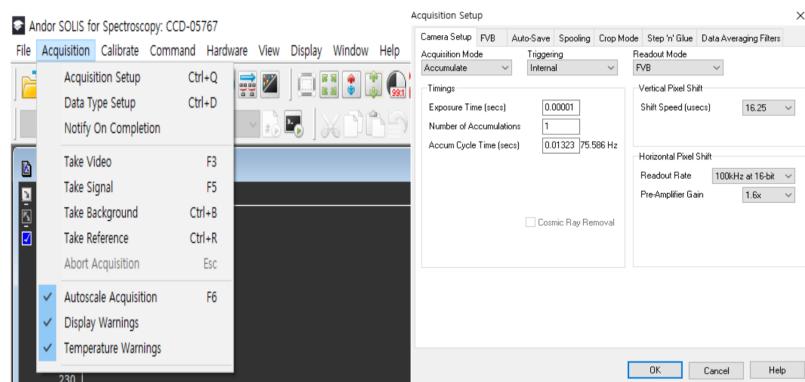


Figure 6.12: Acquisition Setup

2) Laser 시작

- 레이저의 경우, 테이블 위에 Laser라고 써져 있는 작은 종이가 붙은 네모난 검은 상자가 있을 것이다 [그림 4]. 그 상자에 있는 레이저의 전원을 킨다.
- Laser 빔을 보면서 [그림 10]처럼 setting한다. 이 때 장비 손상을 막기위하여 Monochromator와 CCD에 빛이 직접 들어가지 않도록 필히 주의해야 한다. 이것만을 명심한다면 [그림 10]과 똑같은 alignment를 진행할 필요는 없고, Lock in amp를 이용하여 노이즈를 줄이는 노력을 해보는 등의 원하는 alignment를 시도해도 좋다.

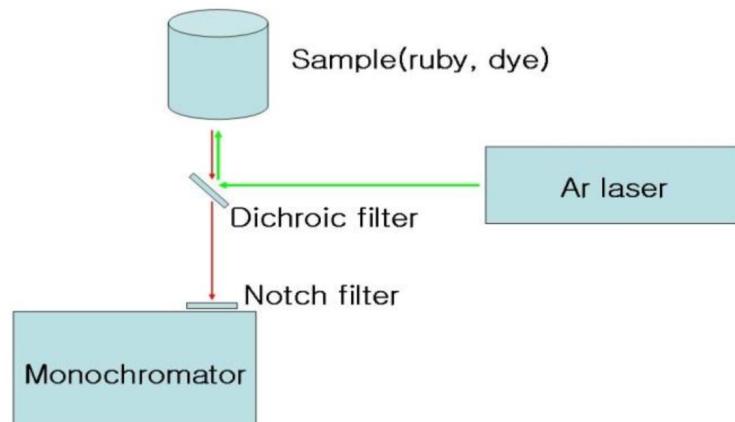


Figure 6.13: Laser alignment의 개략도

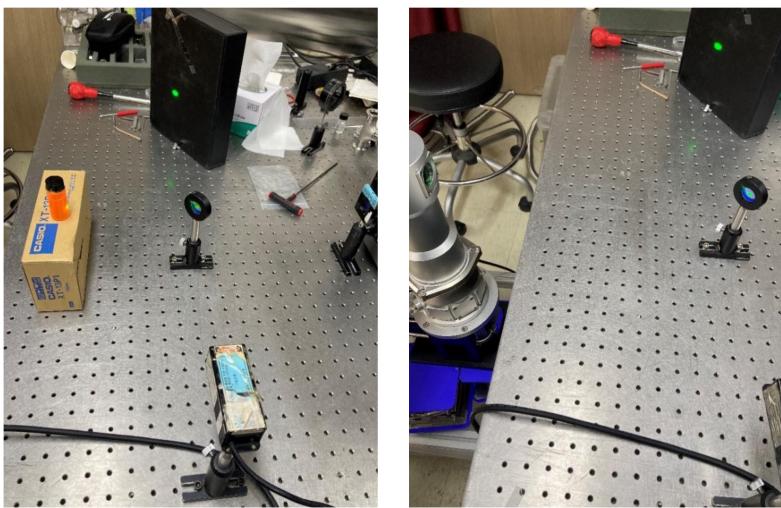


Figure 6.14: Rhodamine (좌)와 Ruby (우) 측정시의 alignment

3) 상온 실험

1. 먼저 Ruby가 들어있는 저온 chamber를 monochromator에서 빛이 들어가는 쪽의 slit 맞은 편에 위치하게 한 뒤 위의 그림과 같은 형태로 filter들을 align 한다.
2. Monochromator 의 전원 스위치를 올리고 CCD에 전원을 공급 한다. CCD는 전원스위치가 따로 있지 않으므로 전원 코드를 콘센트에 연결하면 자동으로 전원이 공급된다.
3. 컴퓨터에서 Andor Solis 프로그램을 실행시킨다. 프로그램을 실행시키면 좌측 하단에 CCD의 온도가 표시되는데 이 온도가 높은 상태를 유지하는 경우 온도를 두 번 클릭하면 목표 온도를 조정할 수 있는 창이 뜨니 이것을 이용하여 CCD의 온도를 낮추도록 한다 (-50도 이하로는 낮출 수 없으니 CCD가 과열되지 않게 목표 온도를 -50도 이하로는 설정하지 않으며, -35도를 추천한다.)
4. Andor 프로그램의 상단을 보면 Acquisition tab이 존재한다. Laser를 키지 않고 sample이 없는 상태에서 최대한 형광등이나 햇빛등의 외부 광원을 차단한 후에 Acquisition tab의 Take background를 눌려 CCD가 기본적으로 가지고 있는 noise가 어느 정도인지 관찰한다.

5. 측정은 Acquisition tab의 Take signal을 사용하면 되고 연속적으로 순간순간 측정되는 데이터를 보고싶다면 동일 tab의 Take video를 사용하면 된다. 또한 Take background를 통해 noise 를 얻은 상태라면, 동일 tab의 Take reference 기능을 사용하면 noise가 제거된 data를 즉시 얻을 수 있다.
6. 첫날에는 측정을 위한 장비들을 최대한 정확하게 alignment 를 진행하는 연습을 하는 것을 추천한다. Alignment를 정확하게 하기 위해서는 monochromator slit 정 가운데에 빔이 들어갈 수 있도록 한다. 이 과정이 일찍 끝났다면, 혹은 실험 둘째 날이 되었다면 먼저 Rhodamine의 spectrum을 찍어보며 alignment가 잘 되었는지를 확인한다. 처음 측정할 때는 slit의 크기를 가능한 한 작게 열어야 한다. (slit위의 knob을 시계방향으로 돌리면 slit을 여는 역할이 되고 반 시계 방향으로 돌리면 slit을 닫는 역할이 된다.) 만일 signal이 작은 경우 notch filter 의 앞쪽에 lens등을 이용해서 가능한 많은 signal이 slit으로 들어갈 수 있도록 조정하고 그 후 slit을 조금씩 열어서 signal의 크기를 키우도록 한다. (단 laser가 lens를 통해 slit으로 들어 가지 않도록 절대 주의할 것.) 추가적으로, chamber의 온도를 내리는 데에 어느정도 시간이 소요되기 때문에 Rhodamine 을 측정하는 동안 Ruby가 들어있는 chamber의 진공을 뺀 후 온도를 내리는 과정을 동시에 진행하는 것을 권장한다.

4) 절온 실험 [그림 12, 13 참조]

1. Rotary pump를 켜서 진공 상태로 만든다. 10 mTorr 이하로 갈 때까지 기다린다. 이 과정에서 vacuum gauge의 압력이 1 기압보다 낮은 경우 Ball valve를 닫은 채로 압력을 조금 낮춘 후에 Ball valve를 천천히 열어서(평행 한 방향으로 돌리면 열리고 수직하게 돌리면 닫힌다.) pumping하도록 한다. 쿨러를 작동하기 전 압력이 10 mTorr 이하여야 한다는 점을 명심하라.

2. Cooling을 위해서는 제일 먼저 쿨러의 main power를 켜고 그 후 cold head, drive 버튼을 차례로 올려준다. 이 때 temperature controller를 보면 온도가 떨어지는 것을 확인할 수 있는데 이 때 A와 B channel이 각각 어느 part의 온도를 나타내는지는 temperature controller 상단을 보면 확인할 수 있다. 이 때 온도가 200 K가 되었다면 잊지 말고 꼭 Angle valve를 잠그도록 한다. 그렇지 않은 경우 펌프의 오일 성분이 챔버로 역류할 수 있다.
3. 온도가 급격하게 내려가지는 않으므로 적당히 기다린다. 온도는 최저 대략 5 K 정도까지 내려갈 수 있지만 이정도로 낮은 온도까지는 실험할 필요는 없기에 온도가 대략 12 K이 되면 히터를 이용하여 10 K에서 온도가 saturate될 수 있도록 한다. 그 후 점점 설정 온도를 높이면서 데이터를 얻고자 하는 온도까지 올린 후 온도가 안정화될 때까지 기다린 후, 데이터를 얻도록 한다. 이 때, 온도를 높일 때 ramping 기능을 사용하면 천천히 온도를 올릴 수 있다.

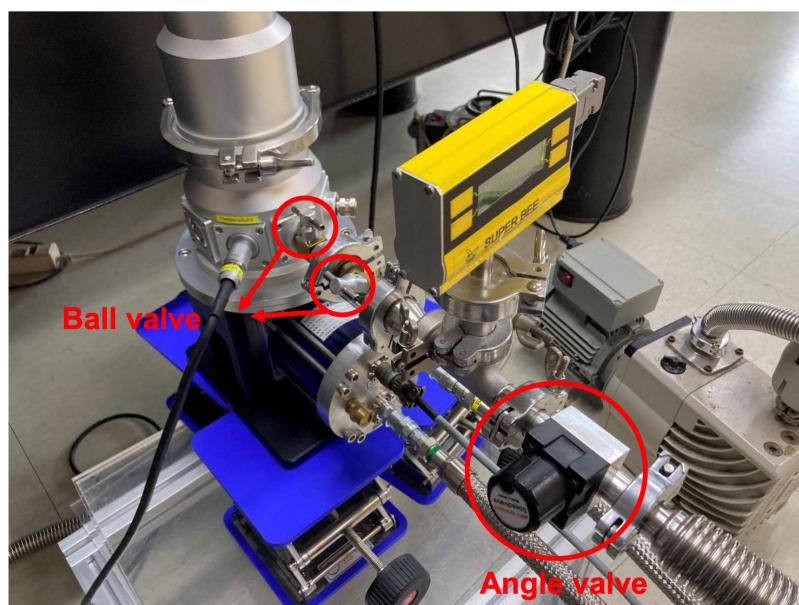


Figure 6.15: Ball Valve and Angle Valve



Figure 6.16: Compressor의 전체 모습 (좌)와 필요한 조작버튼 2개 (우)의 사진

5) 실험 종료

1. 레이저의 파워를 종료한다.
2. monochromator의 전원을 내린다. CCD의 경우 온도를 먼저 올리고 전원을 끈다. 전원 코드를 뽑으면(CCD와 바로 연결된 부분은 건드리지 말고 어댑터 쪽의 코드를 뽑는다) 전원이 내려진다.
3. 쿨러는 버튼을 킬 때와 역순으로 내린다. 진공펌프(로터리 펌프)의 전원의 OFF 버튼을 누르고 Vacuum gauge의 코드를 콘센트에서 분리한다. 그리고 반드시 밸브가 닫혀 있는지 확인한다.

6.4 Task List

해야할 일

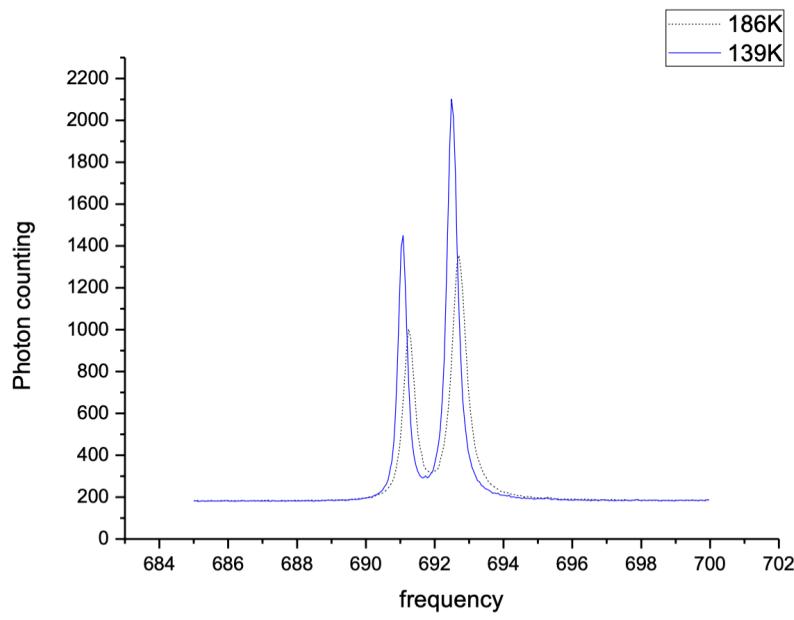


Figure 6.17: Ruby PL signal, of course there is a typo at a horizontal axis - wavelength.

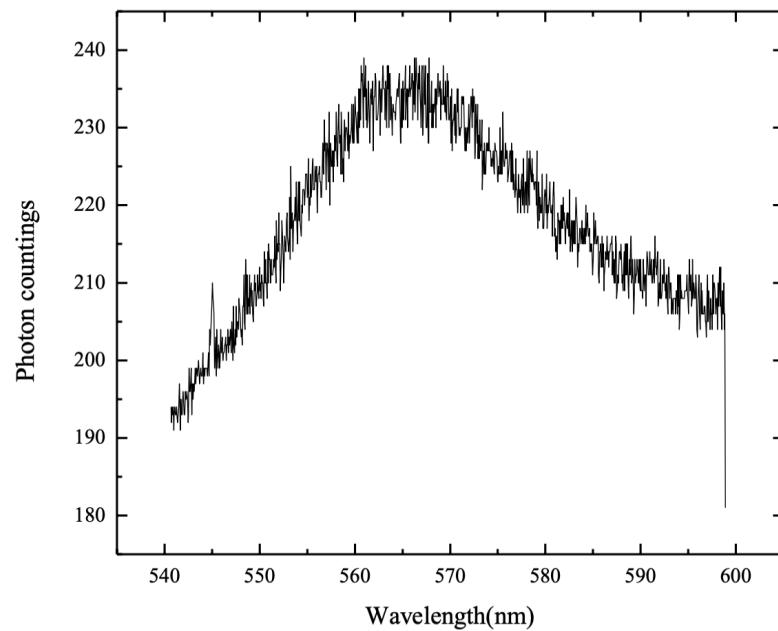


Figure 6.18: Rhodamine PL signal

1. 로다민 시료의 상온, 상압 측정.

상기된 대로 로다민 시료를 사용하여 상온, 상압에서의 Photo-

toluminescence 스펙트럼을 얻으시오. 적절한 처리 기법을 사용해서 Andor 프로그램 상에서 오차를 최대한 줄인 채 데이터를 뽑아 보시오. Oversampling, 누적 측정 횟수 등의 설정을 조정할 수 있다. 이후 아래의 목록 중 적절한 회귀 모형을 제시 해서

- (1) 방출 스펙트럼의 최대 세기 파장,
- (2) 방출 스펙트럼의 폭
을 제시해 보시오.

2. 루비 시료의 상온, 상압 측정.

동일 실험을 루비 시료에 대해 반복하되, 루비 시료는 Cryostat 안에 고정되어 있으니 align에 유의하시오. 완료된 후 실험 구성 및 beam path 등을 보고서에 기입하는 것이 좋다. 루비 시료의 방출 스펙트럼에서는 여러 개의 피크가 얻어질 수 있는데, 회귀 분석을 통해 다음을 제시하시오.

- (1) 루비 시료의 방출 스펙트럼에는 몇 개의 피크가 있는가?
- (2) 만일 보이는 것 이외에 구분할 수 없는 피크가 사실 더 있다면, 그들은 어떤 조건을 만족해야 하는가? (세기, 폭, 피크 간격 등의 물리량에 기반해 분석해 보시오.)
- (3) 이론으로 알려진 루비의 PL 스펙트럼을 찾아 보고, 몇 개의 피크가 있었어야 하는지 알아보시오.
- (4) 루비의 피크가 발생하는 이유를 정리하고, 온도에 따라 어떻게 의존하는지 설명하시오. 온도가 높아지면 / 낮아지면 피크의 간격, 상대적인 세기는 어떻게 변화하는가?
- (5) bimodal fit을 이용하여, 루비의 굽직한 두 봉우리를 분석하고, 위와 마찬가지로 각 피크의 최대 세기 파장, 및 방출 스펙트럼 폭을 기술해 보시오.
- (6) 두 피크의 세기는 폭과 높이를 곱하여 얻을 수 있다. 세기 비율과 오차를 구해보시오.

3. 루비 시료의 저온 물성 분석.

루비 시료의 온도가 낮아지면 피크에 변화가 생긴다.

- (1) 피크 간격
- (2) 피크별 중심파장의 이동

(3) 피크 높이의 변화

(4) 각 피크의 세기 비율의 변화

를 분석해 보시오. (4)를 위해서는 단순히 면적비로 하기에는 두 피크가 너무 가까이 겹쳐 있어서 bimodal fit으로 구한 높이와 폭을 쓰는 것이 좋다.

4. 추가적인 분석 - 자율 실험에서 얻은 자료들을 잘 분석해, PL 실험을 통해 배울 수 있는 여러 가지 고체물리/양자 이론을 실험 데이터로부터 찾아 보시오. 추가적인 분석을 위해 필요한 이론 및 예시는 아래 섹션에 제시하였다.

Data Analysis and Fit

최소 자승법

실험 데이터에는 오차가 많다. 이러한 오차를 가려내고 원하는 물리 현상을 보기 위해서는 회귀 분석 (regression)이 사용된다. 회귀는 원하는 이론식, 즉 조작 변인에 어떤 함수를 취해야 종속 변인이 얻어지는지를 가정하고, 그 이론식을 정의하는 계수들을 실험값들을 잘 설명할 수 있도록 찾아내는 과정에 해당한다. 눈대중으로 손으로 계수를 일일히 찾아, 실험 데이터의 그래프랑 최대한 개행이 비슷해지는 함수를 찾아도 되지만, 여기에는 훨씬 정량적이고 체계적인 방법이 존재한다.

최소 자승법(least square method)은 회귀 모델에 의한 예측치와 실제 이론치를 비교한다. 회귀 모형이 $y = f(x, a_1, \dots, a_n)$ 으로 표현되고 x 를 바꾸어 가며 y 의 변화를 재 보았다고 하자. 이때 우리가 원하는 것은 실험값 (x_i, y_i) 들과 잘 맞는 함수를 정의하는 각 계수들 a_1, \dots, a_n 들을 찾는 것이다. x_i 에서 회귀 모형이 맞다면 이론적으로

나와야 하는 값은 $f(x_i)$ 인데, 실제 실험에서는 y_i 를 얻었다. 이런 오차가 최소가 되면 참 좋다. 이때 여러 점에서의 오차를 모두 제곱해서 합한 것을 SSE (Square sum of error)라 하고, 이 값은 다음과 같다.

$$(SSE)(a_1, \dots, a_n) = \sum(y_i - f(x_i, \{a_1, \dots, a_n\}))^2 \quad (6.1)$$

이는 각각의 계수들 a_i 에 의존하고, 이 제곱오차를 최소화하는 계수들을 찾는 방법이 최소자승법을 통한 회귀 분석이다. 대강의 방법은 각각의 계수로 편미분을 해서 0이 되는 연립방정식을 구하면 되는데, 수치적 기법을 요구한다. 간단한 분석의 경우 야코비안을 직접 구해 행렬계산을 하면 되지만, 슬프게도 PL실험에서 쓰이는 개형을 그렇게 하기는 쉽지 않다.

비선형 회귀

회귀모델이 선형이 아닌 것을 비선형회귀라고 한다. 가령 볼록한 개형의 데이터를 이차함수(포물선) 내지는 가우시안 분포 등으로 끼워맞추는 등의 예시가 있다. 선형 회귀모델을 이용해 데이터를 분석하는 경우에는 이론을 통해 해석적인 해를 구할 수 있으나, 비선형회귀는 계산량이 많아 컴퓨터로 제곱오차를 최소화하는 회귀값을 찾아야 한다. 이때 회귀 상관계수 R^2 을 도입하여 1에 가까우면 회귀가 잘 된 것으로 할 수 있는데, 비선형회귀에서는 선형회귀에서처럼 상관계수를 통해 오차를 정량적으로 얻어낼 수는 없고, 정성적인 쿨리티 비교만 가능하다.

라이브러리 비선형회귀를 손으로 하는 것은 너무 고생스러운

일이다. 이에 컴퓨터 언어 중, 통계 처리를 해 주는 패키지들이 있는 언어를 사용하면 좋다. Python의 `scipy` 패키지, Julia, MATLAB 등의 프로그래밍 언어 및 Origin 등 상용 데이터 분석 툴들을 쓸 수 있다.

python의 경우, 라이브러리를 수행하기 위해 다음과 같이 임포트한다.

```
from scipy.optimize import curve_fit
```

피팅을 수행할 때는 다음과 같이 한다.

```
def f(x, A, B, C) :
    return A * x**2 + B * x + C # Quadratic Fitting Model

popt, pcov = curve_fit(f, x, y, p0 = [0., 0., 0.])
```

`x`와 `y`에는 실험에서 얻은 값이 담긴 배열이 들어간다. 정의해준 함수 `f`는 실험치에 끼워맞출 회귀 모형을 의미한다. 여기서는 이차함수꼴로 정의되었다. 이때 `popt`에는 각 회귀계수의 최적치를 얻는다. 즉 $[A, B, C]$ 의 최적 값이 담겨있다. `pcov`에는 회귀변수의 공분산이 들어가는데, 이는 2차원 배열이고 대각 성분이 각 회귀 계수의 불확실도의 제곱이다. 즉 `pcov[0][0]`의 제곱근을 구하면 A 의 불확도를 얻는다. 회귀계수의 초기값은 `p0`를 통해 설정할 수 있다. 비선형회귀를 할 때 수렴이 잘 되지 않으면 초기값을 바꿔 가면서 수렴을 시도할 수 있다. 이 외에도 반복 회수의 상한 등도 조절할 수 있다. 보다 자세한 내용은 `scipy documentation`을 참고하면 쉽게 사용할 수 있다.

MATLAB을 사용할 경우에는 다음과 같다.

```

function y = piecewiseLine(x,a,b,c,d,k)
% PIECEWISELINE A line made of two pieces
% that is not continuous.

y = zeros(size(x));

% This example includes a for-loop and if statement
% purely for example purposes.
for i = 1:length(x)
    if x(i) < k,
        y(i) = a + b.* x(i);
    else
        y(i) = c + d.* x(i);
    end
end
x = [0.81;0.91;0.13;0.91;0.63;0.098;0.28;0.55;...
0.96;0.96;0.16;0.97;0.96];
y = [0.17;0.12;0.16;0.0035;0.37;0.082;0.34;0.56;...
0.15;-0.046;0.17;-0.091;-0.071];
ft = fitype( 'piecewiseLine( x, a, b, c, d, k )' )
f = fit( x, y, ft, 'StartPoint', [1, 0, 1, 0, 0.5] )
plot( f, x, y )

```

어렵다. R 등 다른 통계 패키지에서도 좋은 피팅 기능을 제공하는 것들이 많으니 기호에 맞게 사용하면 된다.

경사강하 라이브러리를 이용하면 수치 회귀를 하는 것이므로 가끔 잘 안 맞을 때가 있다. 이럴 때는 경사강하 기법을 이용하는 방법도 있다.

경사강하는 파라미터들의 초기 추정치로부터 살짝 변화를 줘보고, 그 기울기의 반대 방향으로 일정 배율만큼 이동해가며 해를 찾는 방법이다. 구배 (Gradient)는 함수가 가장 빠르게 증가하는 방향이므로, 그 반대 방향으로 오차 함수를 최적화시키면 제곱오차를 최소화시킬 수 있다. 컴퓨터에 이러한 일을 시킬 때에는 한 단계에 얼마나 많이 걸음을 갈 것인가, 몇 번 반복할 것인가, 어디서 시작할 것인가 등을 찾아주다 보면 금방 수렴시킬 수 있다. 다음은 파이썬으

로 작성된 경사강하법 (Gradient Descent)의 예시이다.

```
# X : wavelength [nm], Y : Intensity from PL [A. U.]
x_init= 690. # start point of regression
x_fin = 700. # end point of regression

def ERR(a, b, c, d, e, f) : # Error functions to be minimized
    esum = 0.
    for i in range (len(X)) :
        if x_init<X[i] and X[i]<=x_fin :
            x=X[i]
            esum += sq(Y[i]-a/(sq(x-c)+sq(b))-d/(sq(x-e)+sq(f)))
    return esum

#gradient descent
B, C, E, F = 0.3, 693., 0.3, 694.5 # Initial Guess, depending on your data. could be found by eye-balling
A = 5082.*sq(B) ; D = 7050. * sq(E) # Initial Guess
er = 1.e-5 # resolution of gradient
for loop in range (10000) :
    # Calculating gradient of each direction, numerically
    ee = ERR(A,B,C,D,E,F)
    dA = (ERR(A+er,B,C,D,E,F)-ee)/er
    dB = (ERR(A,B+er,C,D,E,F)-ee)/er
    dC = (ERR(A,B,C+er,D,E,F)-ee)/er
    dD = (ERR(A,B,C,D+er,E,F)-ee)/er
    dE = (ERR(A,B,C,D,E+er,F)-ee)/er
    dF = (ERR(A,B,C,D,E,F+er)-ee)/er
    # Move parameter point in opposite direction of gradient, with adjustable "learning rate"
    A -= dA*1.e-4
    B -= dB*1.e-10
    C -= dC*1.e-10
    D -= dD*1.e-4
    E -= dE*1.e-10
    F -= dF*1.e-10
print(A,B,C,D,E,F)
```

결과로 얻어지는 회귀를 그래프로 그리면 다음과 같다. (2021년도 김한비 수강생의 데이터) 초록색이 실험치이고, 파란색이 회귀선이다.

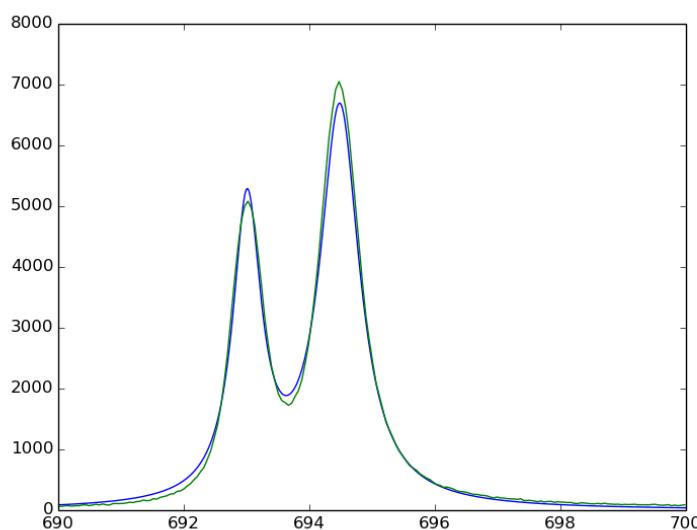


Figure 6.19: Fit by gradient descent, Hanbi Kim

오차의 전파

모든 물리량들은 오차(불확실도)를 가지고 있다. 이 실험에서 불확실도는 레이저가 깨끗하지 않거나, 레이저의 선폭, CCD 및 모노크로메이터의 캘리브레이션 문제, 시료의 오염, 온도의 잘못된 측정, Rhodamine의 화학적 분해 등 여러 가지 이유에서 발생할 수 있다. 불확실도는 크게 systematic / random 오차로 구분할 수 있는데, 전자는 실험의 한계로 매번 같은 방향의 편차가 나는 것을 의미하며 후자는 random noise에 의해 평균을 취하면 가려낼 수 있는 오차를 의미한다. 이때 본 실험에서 systematic error를 제거하는 방법은 background 제거 및 규격화 등이 있다. 한편 스펙트럼 측정에서 발생한 random error는 선폭을 매끄럽지 않고 찌글찌글하게 만든다. 이 크기를 고려하면 스펙트럼을 회귀했을 때, 하나의 값만 나오는 것이 아닌, 일정 범위의 물리량을 얻게 된다. 즉 최대 세기를 내는 파장이 값 하나가 아닌, 범위로 주어진다는 것이다.

이때 물리량이 특정 범위 안에 들어올 확률이 $1 - 1/e$ 가 되는 구간을 1σ 신뢰구간이라고 하고, 그 반 폭을 불확실도라고 한다. 본 실험의 목표는 루비 및 로다민의 화학적/양자역학적 특성에 의해 얻어지는 PL 중심파장을 찾는 것이므로, 파장의 불확실도를 제시해 보도록 한다. 이때 알려진 값이 실험과 일치하는지는, 두 값의 차이와, 실험으로 얻은 불확실도를 비교해서 알 수 있다. 불확실도가 이론값과 실험값의 차이보다 크다면, 실험이 잘 되었다고 주장할 수 있다. 그러므로 편차와 불확도를 모두 줄이는 것이 좋은 실험이라고 할 수 있다. 광학 실험에서는 빛의 세기 및 align, 주변 잡광 제거가 중요한 역할을 하므로, 실험을 잘 제어해서 수행하면 오차를 줄일 수 있다.

한편, 오차를 구하는 방법은 꽤 어려운데 대부분의 어려운 일들은 통계 패키지가 해 주므로, python / MATLAB 등의 통계처리용 언어들을 다룰 수 있도록 연습한다. 이후, 그런 오차가 목표하는 물

리량을 얼마나 흔들어 놓는지는 오차의 전파를 통해 구할 수 있다.

$y = f(x)$ 로 표현되는 물리량에서, x 의 오차가 σ_x 로 주어지는 경우 y 의 오차는 $\sigma_y = |\partial f / \partial x| \sigma_x$ 로 얻을 수 있다. 즉 기울기가 크다면 오차도 더 크게 전파된다. 오차 요인이 여러 개라면, 각각의 오차 요인이 가지는 기여도는 기울기의 피타고라스 합(제곱해서 더하고 제곱근을 취하는 합)을 통해 얻을 수 있다.

Gaussian distribution 어떤 물리 현상이 랜덤워크에 의해 발생할 경우, 그 분포는 Gaussian 분포를 따른다. 이러한 경향은 브라운 운동, 열운동 등에 의해 물리량의 변화가 있을 경우 나타나는데, 특히 스펙트로스코피를 할 때에는 온도의 영향으로 선폭이 늘어나는 thermal doppler broadening^o 존재한다.

한편 가우시안 분포는 다음 식과 같다.

$$y = A \exp\left(-\frac{(x - B)^2}{2C^2}\right) + D \quad (6.2)$$

이는 매질이 얼마나 자유롭게 움직일 수 있느냐에 따라 다르게 적용된다. 고체 시료에서는 비교적 thermal broadening^o 적으나, 기체나 액체 시료에서는 클 수 있다. 액체 시료의 경우 유동이 불안정한 경우 random walk에 의한 가우시안 퍼짐 이외의 오차 요인도 발생할 수 있다.

Lorentzian distribution

공명점 근처의 물리량은 로렌치안 분포로 표현될 수 있는데, 역

학 교과목에서 공명점 근처에서 구동력을 받아 강제진동되는 감쇠 진자의 경우를 풀면서 비슷한 식을 본 적 있을 것이다. 다음 함수를 통해 기술되는 공명 곡선이 로렌치안 분포이다.

$$y = \frac{A}{(x - B)^2 + C} \quad (6.3)$$

규격화된 형태는 다음과 같다.

$$y = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{(x - x_0)^2 + (\Gamma/2)^2} \quad (6.4)$$

여기서 Γ 는 반치폭을 의미한다.

Voigt profile

공명이 있으면 로렌치안을 따르지만, thermal broadening이 있는 경우에는 각 파장별 분포가 가우시안으로 벌어지면서, 두 분포를 convolution한 분포를 따르게 된다. 이를 Voigt(포크트) 프로파일이라 한다. 이걸 사용하여 회귀 분석을 하기 위해서는 convolution fit을 하거나, 계산 지원이 잘 되는 라이브러리를 찾아 보는 것이 좋다.

bimodal fit 피크가 여러 개인 경우, 가우시안이나 로렌치안 회귀 여러 개를 동시에 해야 한다. 피크끼리 서로 멀리 떨어져 있는 경우, 구간별로 잘라서 회귀를 할 수 있지만 이 실험의 루비 데이터와 같이 피크가 폭에 비해 상당히 가까이 붙어 있는 경우에는 Bimodal fit을 이용해 두 피크를 한꺼번에 회귀해야 한다. 다음의 회귀 모형이

사용될 수 있다.

$$y = A \exp\left(-\frac{(x - B)^2}{2C^2}\right) + D \exp\left(-\frac{(x - E)^2}{2F^2}\right) + Gx + H \quad (6.5)$$

G 는 비스듬한 백그라운드가 있는 경우, H 는 상수 성분의 백그라운드가 있는 경우 도입해서 회귀 오차를 줄일 수 있다. 회귀 변수의 자유도를 주면 식이 더 잘 맞으면서 원하는 물리량을 더 작은 오차로 뽑아낼 수 있다.

생각해 볼 거리

1. 상온에서 Ruby의 Photoluminescence Peak은 어떻게 나오는가? 그리고 왜 그렇게 나오는가?
2. 상온에서 Rhodamine 590의 Photoluminescence 개형은 어떻게 나오는가? 왜 그렇게 나오는가?
3. (동일한 acquisition setting과 align에서) 낮은 온도에서 얻어진 Ruby의 peak은 1)에서의 상온, 저진공에서의 그것과 같은가 다른가? 이를 위해 각 온도에서 얻어진 peak에 대해 적절한 fitting을 진행한 후 온도에 따라 peak position이 어떻게 변화하는지를 분석하여라. 이러한 현상은 왜 나타나는가?
4. 위의 fitting 결과를 이용하여 온도에 따른 ruby peak의 height와 FWHM의 변화에 대해서도 회귀분석을 할 수 있는가? 회귀분석이 가능하다면 이로부터 얻어지는 결과가 온도에 따른 Ruby의 photoluminescence peak의 변화의 원인을 잘 설명할 수 있는가?
5. Stokes Shift에 대해 공부해 보시오.

6. Rhodamine과 Ruby 시료의 Photoluminescence를 비교할 때
는 서로 다른 회귀 모형을 제시하여야 한다. 왜 그럴까?
7. LUMO, HOMO의 개념과 Kasha's rule에 대해 공부해 보시오.
8. Franck-Cordon principle과 overlap integral
9. chromopores
10. Transition lines of Ruby, Jablonski Diagram [3, 4]
11. Stokes Sideband, Vibronic modes [7, 8]
12. debye phonon and temperature dependences [6]

$$\text{참고-1: } x_{c,n}(T) = \epsilon_n + \alpha_n \left(\frac{T}{T_D} \right)^4 \int_0^{T/T_D} dx \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$\text{참고-2: } \Gamma_n(T) = \Gamma_n + \bar{\alpha}_n \left(\frac{T}{T_D} \right)^7 \int_0^{T/T_D} dx \frac{x^6 e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Special thanks to June Ho Yeo, Ho Hyeon Kim, Junha Kang -

2021 Apr 28 중물실 수강생

Bibliography

- [1] Fundamentals of Photonics
- [2] Laser by Siegman, Principles of Lasers by Svelto
- [3] Timothy H. Gfroerer, Photoluminescence in Analysis of Surfaces and Interfaces
- [4] J. Appl. Phys. 72(12), 5535, 15 December (1992)
- [5] J. Appl. Phys. 34(6), 1682, 28 January (1963)
- [6] J. Appl. Phys. 57(2), 165, 15 January (1985)
- [7] M. Fox, Quantum optics : an introduction (Oxford University Press, Oxford New York, 2006).
- [8] H. Watanabe, N. Hayazawa, Y. Inouye, and S. Kawata, DFT Vibrational Calculations of Rhodamine 6G Adsorbed on Silver: Analysis of Tip-Enhanced Raman Spectroscopy, The Journal of Physical Chemistry B 109, 5012 (2005).
- [9] L. Fallarino, C. Binek, and A. Berger, Boundary magnetization properties of epitaxial Cr_{2-x}Al_xO₃ thin films, Physical Review

B 91, 10.1103/physrevb.91.214403 (2015).

- [10] R. C. Powell, The interaction of chromium ions in ruby crystals, Tech. Rep. AD-651914 (Air Force Cambridge Research Laboratories, Bedford, MA, 1966).
- [11] F. Schindler, J. M. Lupton, J. Feldmann, and U. Scherf, enA universal picture of chromophores in π -conjugated polymers derived from single-molecule spectroscopy, Proceedings of the National Academy of Sciences 101, 14695 (2004).
- [12] D. E. McCumber and M. D. Sturge, Linewidth and temperature shift of the r lines in ruby, Journal of Applied Physics 34, 1682 (1963).
- [13] U. Rothamel, J. Heber, and W. Grill, Vibronic sidebands in ruby, Zeitschrift fr Physik B Condensed Matter 50, 297 (1983).
- [14] S. Raghavan, P. K. Imbrie, and W. A. Crossley, Spectral analysis of r-lines and vibronic sidebands in the emission spectrum of ruby using genetic algorithms, Applied Spectroscopy 62, 759 (2008).
- [15] R. G. Munro, G. J. Piermarini, S. Block, and W. B. Holzapfel, Model line-shape analysis for the ruby r lines used for pressure measurement, Journal of Applied Physics 57, 165 (1985).

7

실험 시 주의 사항

이 장에서는 중급물리실험실의 5개 실험들에 대한 주의사항을 기술합니다. 2021학년도 및 2022학년도 실험 수업에서는 학기가 진행되는 동안 칠판 앞쪽에 이와 같은 주의사항들을 기입해 두었었는데, 매뉴얼을 빠르게 정비하고 재배포하지 못해 번거로움이 있었습니다. 이번 교재 정리 작업에서는 이러한 주의 사항들을 책의 부록으로 같이 정리하게 되었습니다.

이외에도 실험기기를 다루며 어려운 점이 있다면, 제작자 조교들에게 연락하거나 실험장비 제조사인 Teachspin 사 내지는 PASCO 사, Thorlabs 등의 영문 매뉴얼 원문을 참고하여 기기의 특성 및 성질, 소개되지 않았던 실험 방법들을 찾아 보기를 바랍니다.

매뉴얼 개선 사항이나 오탏 등이 있다면 중급물리실험의 각 과목들의 내용을 총괄 정리한 2021, 2022년도 담당조교인 김솔(kspace@snu.ac.kr)에게 문의해 주세요. 이후에 이 과목을 맡으시는 조교님들께서도 실험실 운영 및 유지보수, 채점 및 보고서 작성 지도 등에 불편함이 있으신 경우 얼마든지 도움을 드릴 수 있도록 노력하겠습니다.

다음은 다섯 종류의 실험에 대한 각각의 주의사항입니다.

7.1 SPI

- ▶ Detector Slit을 빼먹지 않고 사용했는지 확인하라. 그렇지 않으면 무늬가 너무 밝게 나올 것이다. 전구 실험에서는 싱글포톤 리밋을 못 볼 수도 있다.
- ▶ Source, Double, Detector Slit 모두 위치가 중앙일 때 무늬가 중앙에 오도록 Align하는 것이 좋다.
- ▶ Laser Diode 쪽의 랫치를 잠그면 align이 틀어질 수 있다.
- ▶ 실험 시 거리를 잊지 말고 측정하시오 : 광원 - source slit - double slit - detector 사이의 거리.
- ▶ 새 장비가 도착할 때까지는 레이저를 공유하여 Bulb 실험기기의 얼라인도 수행해야 한다.
- ▶ 레이저 모듈의 방향 주의 - 연장선의 (노랑, 초록, 파랑) 순서가 레이저 다이오드의 (노랑, 빨강, 검정)의 순서와 같게 되어야 한다.
- ▶ 광원 및 PMT 관련 문제가 있는 경우 무리하게 고치려 하지 말고 조교의 도움을 받으시오.
- ▶ PC/IT 및 각 채널에 들어가는 전원선을 반드시 구분하시오. 바꾸면 망가진다.
- ▶ PMT 모듈의 Discriminator를 0 넘게 두어야 광자에 의한 펄스를 오실로스코프로 보기 좋다.
- ▶ 오실로스코프 노이즈 필터 주파수를 최소로 두어야 신호를 잘 읽을 수 있다.
- ▶ PMT 셔터가 닫혀 있고, 전원이 꺼져 있는지, High Voltage 노브가 0으로 가 있는지 반드시 확인하고 실험을 시작/종료할 것.

7.2 LI+H

- ▶ 함수발생기의 Vpp 표시와 오실로스코프의 Reading이 다를 경우 후자를 신뢰한다.
- ▶ 최종 전압이 5볼트 이내가 되도록 이득과 입력전압을 조절하여 실험한다.
- ▶ DC/AC/GND 커플링에 주의한다. 이 실험에서는 DC 및 GND 커플링만 사용한다.
- ▶ 오실로스코프의 프로브 계인을 x10이 아닌 x1로 놓고 실험하라.
- ▶ 오실로스코프의 측정 시에는 채널 1에 RMS, 채널 2에 RMS, 및 위상차 등을 측정하면 좋다. 이때 위상차는 믿을 것이 못 되고, 직접 시간 division 간격을 세서 위상을 보정하는 것이 바람직하다. 오실로스코프의 측정 불확도는 '진폭'과 'Pk-Pk' 값의 리딩 차이가 신호의 지저분함이 얼마나 측정치를 바꾸는지를 의미하는 것이다. 이를 이용해 눈대중으로 불확도를 산출하면 약 2시그마의 유의수준을 가진다.
- ▶ 오실로스코프의 측정치를 저장할 때는 USB 메모리를 지참하여 V-t curve를 csv 파일로 저장할 수 있다.
- ▶ DC 오프셋을 줄 때 Preampl(+/-) 입력 신호에 오프셋을 주면 Duty 비 (펄스의 High 시간 / 펄스의 Low 시간) 가 바뀌므로 락인 디텍션이 잘 되지 않는다. 이때 프리앰프의 (-) 단자에 DC 전압을 걸기 위해 별도의 파워 서플라이를 사용하여 실험하면 된다.
- ▶ Kramer-Kronig 관계를 정성적으로 확인해 보려면 3데시벨 주파수 근처에서 진폭 뿐 아니라 위상의 변화도 같이 관측해야 한다.
- ▶ 락인 전원을 켜고 실험해야 한다. 락인 나무 박스 뒤에 전원 스위치가 있다. (o : off, - : on)
- ▶ 케이블이 잘 빠져 있고, 전원을 모두 껐는지 확인 후 퇴실하시오.

7.3 OT

- ▶ Laser의 파워가 세니, 산란광조차도 눈에 들어가지 않게 조심할 것
- ▶ 렌즈와 거울 부분은 얼라인이 되어 있으니 손대지 말것. 샘플이 정 안 나오면 얼라인을 절대 틀지 말고 조교를 불러 도움을 받는다.
- ▶ 트위저 앞쪽의 상자들에는 수리용 여분의 부품들이 들어있으므로 건드리지 않는다.
- ▶ 얇은 유리판인 커버글라스에 의해 손이 베이지 않도록 주의하시오.
- ▶ Stage 나사 방향에 주의하시오! RHS 방향이 아니다. 위에서 볼 때 시계 방향으로 돌리면 올라가고, 반시계 방향으로 돌리면 내려간다. 나사 체결 구조를 잘 보면 원리를 바로 이해할 수 있는데, 대물 렌즈의 파손에 주의하라.
- ▶ 물과 우유, 시료들 사이에 피펫 팁을 섞어 쓰지 않고, 피펫 팁을 용기 바닥에 대거나, 액체가 들어있는 상태에서 피펫을 뒤집는 행동을 하지 않는다.
- ▶ 모터 속도가 매뉴얼에 나온 대로 충분히 늦춰졌는지 확인하고 실험하라.
- ▶ Laser Thorlabs K-Cube 사용 시 (2022년 기준 안 사용함) 컴퓨터로 레이저 파워를 올리지 말고 모듈에서 직접 천천히 올리시오. 아주 약한 전류 (약 1mA)를 설정하고 부드럽게 버튼을 눌러 레이저가 surge하지 않게 조심히 켜고, 이후 매뉴얼대로 수십 mA의 전류를 가해 작동시킨다. 이때 레이저에 갑자기 큰 전류 (lasing threshold 이상 : > 20mA) 가 흐르거나 끊기면 레이저 다이오드가 망가지므로 다음 조 실험에 지장이 된다.
- ▶ 2022년 기준, Homemadе Laser box를 만들어 두었으니 이를 사용하라.
- ▶ 레이저를 반드시 끄고 퇴실해야 한다. 이때 전류를 반드시 0 으로 내리고 꺼야 한다.

- ▶ 샘플을 반드시 설거지하고 퇴실하시오. 이때 슬라이드글라스는 잘 닦아서 재사용하고, 커버글라스는 전용 접시에 버리시오.
- ▶ 샘플 비드 용액을 희석해서 사용하시오. 10mL 정도의 물에 방울 정도 단위로 넣어서, 빛이 잘 투과할 정도가 되어야 한다.
- ▶ 1마이크로 미만의 비드는 파장 사이즈랑 비슷해지므로 기하광학 효과가 약해 잘 잡히지는 않는다. 굳이 실험할 필요는 없다. 사실 파장과 비슷한 것보다 빔의 waist보다 샘플이 작아 잘 잡혔는지 확인하기가 쉽지 않다.

7.4 CP

- ▶ 각 변위를 ± 360 도 이상 주지 않는다. 구동전압 3볼트 근처에서 공명점이 나타날 수 있다.
- ▶ 실이 풀릴 경우 즉시 조교를 호출하고, 실이 감긴 부분에 손대지 말 것.
- ▶ 오실레이터 모터 전압을 10볼트 아래로 실험하라.
- ▶ 강제진동이 아닐 경우 강제 구동자의 팔을 가장 아래 혹은 가장 위쪽 위치에 배치하시오. 이것은 그때그때 실험 조건에 따라 다른데, 퍼텐셜을 재 보고 메타스테이블이 가장 강하게 보이는 쪽 끝을 골라야 한다.
- ▶ 만약 퍼텐셜을 재 봤는데, 강제 구동자의 팔을 위에서 아래로 돌릴 때, 메타스테이블의 세기가 단조변화하지 않거나(극값을 가지는 경우) 없어지거나 생기지 않는 경우 실험이 불가하므로 조교를 부른다.

* 줄 다시 감는 방법 - 조교용. 수강생은 줄을 건드리지 않는다.

먼저, 줄의 길이는 계측실 테이블 길이인 약 2미터 정도로 맞추어 자른다. 줄의 길이에 따라 결과가 달라지니 주의한다. 이후 매듭이

실 길이의 중점에 오게 둑는다. 이후 큰 훨에는 세 바퀴 왼쪽으로 감고, 작은 훨에는 여섯 바퀴 오른쪽으로 감는다. 이후 퍼텐셜을 확인하면, 강제 구동자가 가장 위쪽에 있을 때 두 상이 다 나오고, 아래로 내릴 수록 준안정상이 사라진다. 줄의 길이가 짧아지면, 거꾸로 위에 있을 때 준안정상이 사라지고, 아래로 보내면 두 상이 다 나온다. 실을 너무 오래동안 짧게 두면 용수철의 소성 변형이 있을 수 있으므로 적정 길이를 잘 지켜야 한다.

7.5 PL

- ▶ 진공 챔버 내부를 만져야 할 때는 반드시 장갑을 착용한다. 땀이나 기름기가 묻으면 진공이 잘 잡히지 않는다.
- ▶ 쿨링 중 200K 이하부터는 밸브를 잠가야 수증기의 응결을 막을 수 있다.
- ▶ 펌프 전원을 제외한 다른 것은 건드리지 않기.
- ▶ 쿨링을 시작하기 전 압력이 10 mTorr 아래로 떨어졌는지 확인 한다.
- ▶ 레이저가 강하니 반드시 레이저 고글을 쓰고 실험하고, 레이저가 다니는 평면 아래로 눈을 내리지 않는다.
- ▶ 진공펌프의 배기관을 반드시 실습실 뒷문을 통해 빼두고 실험 하시오. 또한, 퇴실 시 이를 원상복귀 해두어야 한다.

기타 공통 주의 사항으로는 다음과 같은 점들이 있습니다.

- ▶ 실험 후 모든 장비의 전원을 제거한다.
- ▶ 모든 측정 및 물리량의 불확실도 (Uncertainty)를 기입한다.
- ▶ 데이터 처리의 순서 : 자료 → 회귀 → 회귀 불확도 → 물리량 (최획치) ± (불확실도)

- ▶ 선형 회귀선의 Relative Uncertainty $Y = A + BX \rightarrow \delta B/B = \sqrt{(1/R^2 - 1)/(N - 2)}$ 가 5퍼센트 안쪽인 것이 좋다. 엑셀을 사용할 경우 `linest` 함수를 이용해 1시그마 오차범위를 찾을 수 있다.

- ▶ 수치회귀 하는 방법

```
from scipy.optimize import curve_fit
popt, pcov = curve_fit(함수(회귀모형), 조작변인, 종속변인,
p0=초기값 (필수 아님), sigma=오차막대 (필수 아님))
perr = np.sqrt(np.diag(pcov))

수렴 안 하면 초기값을 조정해본다.
```


8.1 데이터 처리

모든 실험 데이터는 여러 가지 원인에서 기인한 오차로 오염되어 있습니다. 이들 속에서 원하는 물리 현상을 집어내기 위해서는, 오차를 걷어내고 참값을 추정해 내는 방법을 배워야 합니다. 이 장에서는 중급물리실험 1 강좌에서 사용되어야 하는 오차 처리 기법들에 대해 간략히 소개합니다. 자세한 내용은 별도로 제공되는 오차 처리 교본을 참고하세요.

오차와 불확실도

오차의 개념은 측정치가 참값으로부터, 혹은 실험값이 이론치로부터 (보통 이 경우에는 오차보다 편차-deviation의 용어를 쓰기는 합니다.) 얼마나 벗어나 있는지를 정의하는 값입니다. 하지만 참값이 없는 경우, 혹은 이론과 별개로 실험 자체가 얼마나 정밀한지를 논하기 위해서는 불확실도의 정의가 필요합니다. 불확실도는 신뢰구간의 폭을 의미합니다. 최학치에서 불확실도를 뺀 값에서부터, 더한 값 사이에 참값이 있을 확률이 어느 정도 수준 이상이라고 할 때, 우리는 참값이 어느 범위 안에 있다고 주장할 수 있습니다. 이를 찾기 위해 실험/통계적 근거를 얻게 되는데, 그 결과로 최학치 - 참값에 가장 가까울 것이라고 추정되는 평균 혹은 가중 평균 - 및 불확실도를 제시하게 됩니다. 이때 참값이 신뢰구간에 포함될 확률이 얼마나

8.1 데이터 처리	219
오차와 불확실도	219
회귀 분석	221
8.2 좋은 그래프와 나쁜 그래프 :	
Plotting Guide	225
Bad example	226
Better example	227
matplotlib example . . .	228
평가	230
8.3 TeX과 조판	231
8.4 아티클과 레터, Supplemental Material	233
8.5 영문 보고서 작성 시 참고 사항	235
8.6 마무리하며	237

되는지에 따라 신뢰구간의 폭이 달라지게 됩니다. 보다 정확히는, 원하는 수준의 분석 수준에 따라 신뢰구간의 폭이 달라집니다. 이를 결정하는 것은 유의수준입니다. 유의 확률은 참값이 신뢰구간 밖에 있을 확률입니다. 유의 확률을 작게 잡을수록 신뢰구간은 넓게 잡아야 합니다. 실수를 하지 않으려면 제안을 넓게 해야 하는 셈인데, 신뢰구간이 너무 넓으면 실험의 주장이 충분히 강력하지 못할 수 있습니다. 적정선의 유의수준을 지키기 위해 σ 레벨 표기법을 이용해 유의수준을 통일시켜 줄 필요가 있습니다. $n\sigma$ 유의수준이라 함은, 데이터 분포에서 신뢰구간이 표준편차의 n 배가 되는 반폭을 가지는 경우를 의미합니다. 즉 1σ 유의수준은 약 37%의 유의확률, 2σ 유의수준은 약 5%의 유의확률을 가지게 됩니다. 중급물리실험에서는 1σ 유의수준을 잡는 것으로 통일하는 것이 편합니다. 다만, 눈대중으로 신뢰구간이 이 정도 될 것 같다고 제시해 주는 경우 좀 넓게 잡혀서 약 2σ 로 간주하십시오. 눈대중으로 신뢰구간을 재는 것이 허접해 보이지만, 실험자의 최선에 따른 우연오차의 하한을 제시하는 것이므로 항상 안 적어주는 것보다 데이터를 흐리게 읽으면 읽었지, 있는 오차를 안 읽는 것보다 보수적인 방법입니다. 정당한 통계적 절차로 불확도를 얻는 것이 어렵거나 불가능하거나 매우 귀찮은 경우에는 눈대중으로라도 측정장비의 눈금, 데이터의 흔들림 (fluctuation) 등을 고려해서 신뢰구간 범위를 정해주세요. 이후 여러 가지 요인의 불확도를 합칠 때에는 오차의 전파를 사용하여야 하고, 반드시 유의수준이 같은 오차끼리 더해 주어야 합니다.

이러한 오차 분석은 실험 검정에 사용될 수 있습니다. 허용되는 불확도 범위보다, 이론 및 알려진 값으로부터 실험값이 가지는 편차가 더 큰 경우 이론에 문제가 없다는 귀무가설을 기각하기 충분한 통계적 유의성을 가지게 됩니다. 즉, 이러한 분석은 이론이 맞다는 근거는 없지만 이 이론이 맞음에도 불구하고 실험값이 이렇게 잘못 나올 확률이 얼마나 낮을지는 알 수 있습니다. 이것은 주로 이론이 잘못되었거나 부족할 수 있다는 유의성의 근거가 되지만, 이론이 틀릴 확률이 몇 퍼센트이다 등의 의미는 아닙니다. 자세한 내용은 SPI

매뉴얼 및 별도로 제공되는 오차 처리 교재를 참고하세요.

회귀 분석

실험 데이터를 이론과 비교하기 위해서는 회귀 분석이 필요합니다. 회귀 분석은 이론에 따라 조작 변인과 종속 변인 (바꾸어준 값과, 그에 따라 바뀌어 측정되는 값) 간의 관계를 수학적 함수로 정의해 나타낸 회귀 모형을 기술하는 여러 파라미터들의 최적치를 실험 자료와의 비교를 통해 얻어내는 것을 의미합니다. 예를 들어, 이론에 따라 종속변인이 조작변인에 선형으로 의존한다는 것을 알고 있는 경우에는 기울기와 절편, 2개의 파라미터를 조절해 실험 결과를 잘 반영하는 회귀선/추세선을 찾아낼 수 있습니다. 이러한 과정을 회귀 분석이라고 하며, 회귀 분석의 목적은 회귀 파라미터 / 회귀 계수들의 값, 즉 여기에서는 기울기 및 절편의 최적값을 알아내어 그로부터 유의미한 물리량들을 뽑아내는 것입니다. 회귀를 할 때에는 같은 선형회귀이더라도, 만약 이론이 0의 조작변인에서 반드시 0의 종속변인이 나올 것을 보장한다면 절편을 주지 않고 1자 유도 회귀를 할 수도 있습니다. 이처럼 이론에 맞게 회귀에 사용되는 회귀 모형을 바꾸어 볼 수 있습니다. 여러 개의 회귀 변수 자유도를 넣으면 실험치와의 비교를 통해 더 많은 물리현상을 볼 수 있지만, 또 너무 많은 자유도를 넣어 겹치는 경우에는 회귀에 문제가 생길 수도 있습니다. 원치 않는 오차가 계통오차의 형태로 한 방향으로 실험값을 오염시킨 경우, 재고자 하는 물리량과 다른 방향의 회귀 자유도를 주어 이를 제거할 수 있습니다. 가령 시간 측정에서, $1/t$ 꼴 회귀를 해야 하는데 초기 시작 시간이 부정확하여 오차가 생기는 경우 $1/(t + t_0)$ 꼴의 회귀를 하면 시작 시간의 계통오차를 제거할 수 있습니다. 이처럼 회귀 모델을 잘 설계하는 것은 이론과 실험의 비교를 통해 이론을 기각하거나 받아들이고, 물리량의 값을 정량적으로 얻고 그 불확도를 얻기 위해 꼭 세심하게 필요한 과정입니다. 물론 회귀가 잘 맞는다고 그 이론이 참이라는 것은 아니지만, 회귀가 잘 안

맞으면 그 이론이 틀릴 확률에 유의해야 함을 의미합니다. 회귀선들 중에서는 아예 다른 정의를 따르지만 개형이 비슷한 경우가 있습니다. 특히 감쇠하는 과정은 식이 다르더라도 모양이 엇비슷한 경우가 많을 때, 이 경우 로그를 취하거나 하면 감쇠지수에 따른 개형변화를 더 극적으로 관찰할 수 있습니다. 좋은 회귀는 원하는 물리량을 뽑아내기 좋은 것을 파라미터로 잡는 것입니다. 또한 이것은 잘 맞고 저 모델은 잘 안 맞는다는 것을 가려낼 수 있는 강력한 검정력을 가지면 좋습니다. 이에 따라 비슷한 개형이 여러 개 나올 수 있는 식을 회귀 모델로 잡으면 별로 좋지 않습니다.

한편 회귀가 잘 되었는지 평가하기 위한 지표로는 상관계수 R^2 값이 사용되곤 합니다. 선형회귀에서는 이 값을 처리한 $\sqrt{1/R^2 - 1}$ 이 불확실도에 비례하므로 유용하게 쓰일 수 있으나, 비선형회귀에서는 정비례 관계가 아닙니다. 그럼에도 불구하고 1에 가까울수록 회귀가 잘 맞고, 0에 가까울수록 회귀가 잘 안 맞는다는 것을 의미합니다. 이 때 제곱오차들은 다음과 같이 정의됩니다. 실험치가 y_i , 회귀함수가 $f(x_i)$, 실험치의 평균이 \bar{y} 라고 할 때 다음이 정의됩니다.

$SSE = \sum_i (y_i - f(x_i))^2$: 데이터가 회귀선으로부터 떨어진 정도. 작을수록 회귀가 잘 맞습니다.

$SST = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$: 데이터가 가지는 총 분산.

$SSR = \sum_i (f(x_i) - \bar{y})^2$: 회귀선이 데이터의 평균으로부터 떨어진 정도; 즉 회귀선에 의해 데이터에 생기는 분산.

$$R^2 = 1 - SSE/SST = SSR/SST : 상관계수의 정의.$$

$SST = SSR + SST$: 데이터가 가지는 분산의 전체 값은 회귀선에 의한 분산과 회귀선으로부터 데이터의 편차에 의해 발생하는 분산의 합과 같습니다.

최소제곱법 (least square method)을 이용하면 회귀 계수들을 찾아낼 수 있습니다. 최소제곱법은 회귀선과 데이터 사이의 편차제곱합, 즉 SSE를 최소화하는 파라미터들을 찾는 것입니다. 회귀 또는 최적화 프로세스에서 최소화시킬 목적이 되는 대상을 loss function 이라 합니다. 이 경우에는 SSE를 loss function으로 합니다. 이를 최소화하기 위해 SSE를 각각의 회귀 파라미터로 편미분한 것이 다 0이 나오면 회귀가 최적점에 수렴하였다고 할 수 있습니다. (제곱오차가 최소) 이를 최소자승법이라고 합니다. 간단한 경우 야코비안 행렬을 풀어 손으로도 계산할 수 있으나, 계산량이 많아 통계 패키지를 사용하는 것이 일반입니다. Python의 `scipy.optimize.curve_fit` 기능, MATLAB의 `fit`, Origin, R 등의 여러 통계 패키지가 회귀분석을 지원합니다. 한편 복잡한 회귀 모델을 이용해 분석해야 하는 경우에는 경사강하법 등을 사용해 직접 회귀를 구현하는 방법도 있습니다.

예를 들어 감쇠 진동의 진폭, 감쇠상수($\gamma = b/2m$), 진동수 등의 매개변수를 실험치와 이론식에 의한 예측치의 비교, 즉 제곱오차합 (SSE)이 최소가 되게 만드는 변수일 때가 최화 (best estimation) 일 것임을 간주하여 물리량을 얻는 기법으로 사용될 수 있습니다. 이때 단순히 진동수, 진폭 등의 최화치만 제시하는 것이 아닌, 물리량의 불확도를 얻기 위해서는 회귀계수의 공분산을 얻을 필요가 있는데, 이는 데이터 포인트들이 가지는 회귀선으로부터의 편차제곱합에 의해 얻어진 불확실도가 추세 곡선의 파라미터에 전파되는 오차의

전파 관계식으로부터 유도되며, 선형 회귀의 경우 회귀계수의 불확실도를 해석적으로 얻을 수 있으나 비선형 회귀를 사용할 경우 통계 패키지에서 제공하는 공분산을 사용해 얻을 수 있습니다. python의 경우, 다음과 같은 방법으로 회귀계수의 최적치 및 불확도를 얻을 수 있습니다.

```
from scipy.optimize import curve_fit

popt, pcov = curve_fit(회귀 모형(함수), 조작 변인 자료, 종속
변인 자료, (필요시) p0 = [초기값])
```

이때 popt 배열에는 각 회귀계수의 최적치가 순서대로 얻어지며, pcov 배열은 $n \times n$ 2차원 배열으로 그 대각 성분이 각 회귀 계수의 공분산을 의미합니다. 이에 제곱근을 취하면 회귀계수의 1-시그마 유의수준 하 불확실도를 얻습니다. 다른 통계 패키지를 이용해서도 비슷한 일을 할 수 있습니다.

너무 어려운 경우에는, 회귀 모형에 적절한 값을 대입하여 얻은 개형을 실험치와 비교하여 눈대중으로 회귀 파라미터들을 찾아주어도 좋습니다. 이는 수치 회귀를 할 때 수렴성을 높이기 위해서 초기 추정을 최대한 눈대중으로 실제 최적 위치에 가깝게 맞춰 주는 것이 도움이 되기 때문에, 어떤 파라미터가 어느 정도의 값을 가져야 회귀가 잘 되는지 감을 잡고 있으면 좋습니다.

수치 회귀는 제곱오차를 수치 반복 연산을 이용해 최소화시키기 때문에, 초기 추정치가 좋지 않으면 수렴성을 기대하기 힘듭니다. 진동하는 함수나 가우시안 함수 등의 회귀모형을 사용하는 경우 육안으로 피크의 크기/위치/폭, 흔들림의 진폭/중심(평균)/주기 등을 추정하여 비슷한 order로 맞춘 초기값을 선정하여 수렴성을 높일 수

있습니다.

또한, 회귀에 감쇠 등의 부가적인 보정항이 들어가는 경우, 이 초기값은 최초에는 보정이 없는 경우의 값을 대입하는 것이 수렴성에 좋습니다. secondary effect들이 포함된 경우에는 이를 무시한 초기값을 넣어 주면 회귀 과정에서 data와의 fit을 높이기 위해 얼마만큼의 감쇠가 필요한지 통계 패키지가 수렴하며 찾아 주게 됩니다.

자세한 사항은 PL 매뉴얼에 기입된 내용을 참고하거나, 별도로 제공되는 오차 처리 교본인 Error Analysis for Experimental Physicists를 참고하세요.

8.2 좋은 그래프와 나쁜 그래프 : Plotting Guide

* 이 부분의 본문은 2022년도 김명현 조교의 eTL에 공지한 내용을 바탕으로 하고 있습니다.

실험 보고서를 작성하면서 그래프를 그릴 일이 많이 있는데, 어떤 부분들을 신경 써야 하는지 알려드리기 위해서 공지를 올립니다.

그래프는 읽기 쉽고, 전달하고자 하는 정보가 잘 담겨있어야 합니다. 이 원칙을 염두에 두면서 글자 크기, 글자 색, 선의 굵기, 축 제목, 단위, 오차막대 등 그래프의 많은 parameter들을 신경 써야 합니다. 첨부파일에 올린 "Preparing figures for publication and presentations"를 보면 자세히 나와 있습니다.

Bad example

수강생들이 범하기 쉬운 실수를 모아 놓은 예시를 들면 아래와 같습니다. (아래 그림에 같은 그래프 3개가 나열되어 있는데 여러 panel을 이용한 그래프의 예시를 만들기 위해서 한 것일 뿐입니다.)

NATURE PHYSICS LETTERS

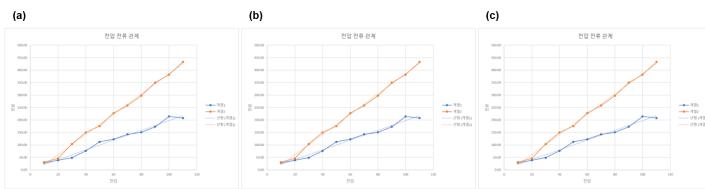


Fig. 4 | Emergence of local magnetic moments in monolayer WSe₂. **a.** Out-of-plane magnetic-field dependence of MCD at $\nu=1$ and $\nu_x=\nu_z\approx 0.3$ (at which the heterostructure is an excitonic insulator) for varying temperatures. The spectral dependence of the MCD is determined as the difference between the left- and right-handed reflected light intensity divided by the total reflected light intensity. It is integrated over a narrow spectral range near the repulsive polaron resonance (1.73 eV; Methods). **b.** Temperature dependence of the inverse MCD slope around zero magnetic field (which is proportional to the inverse magnetic susceptibility) as a function of temperature at $\nu_x\approx 0.30$ and 0.45. The error bars are estimated from the linear fit to the low-field data in **a.** The magnetic susceptibility follows the Curie-Weiss dependence (solid lines) at high temperatures with small negative Weiss constants (x intercepts). The magnitude of the Weiss constant is compatible with weak antiferromagnetic exchange interactions between the distant local moments.

from optical studies (Fig. 3a and Extended Data Fig. 7) (the larger electric field values here compared with Fig. 3a,b are due to a thinner hBN spacer in the capacitance device). The state persists up to around 120 K. Details of the capacitance measurements and results at other temperatures are included in Methods and Extended Data Figs. 4 and 5.

We evaluate the charge gap of the excitonic insulator by integrating

(*논문은 Gu, J., Ma, L., Liu, S. et al. Dipolar excitonic insulator in a moiré lattice. Nat. Phys. (2022)을 편집한 것입니다. 논문 내용과 그림은 아무 연관 없습니다.)

이 그래프에서의 실수를 나열해보면,

1. 그래프 축의 단위 없음
2. 오차 막대 없음
3. 본문의 글자 크기에 비해서 그래프의 크기가 작아서 읽기가 어려움
4. 글자 색과 축의 색깔이 회색. 보통 검은색을 사용합니다.
5. 그래프의 윤곽선. 보통 윤곽선은 사용하지 않습니다.
6. Grid. 정보 전달에 있어서 꼭 필요한 경우가 아니면 grid는

사용하지 않습니다.

- 그래프 title. 그래프의 title은 보통 사용하지 않고 필요하다면 caption을 이용합니다.

Excel로 그린 default 설정의 그래프를 그대로 가져다가 사용하면 이런 실수를 하기 쉽습니다.

Better example

그래프가 들어갈 위치의 공간을 고려하여 그래프 크기와 글자 크기를 결정하고, 거기에 맞춰서 선 굵기, 마커 크기, 눈금 간격 등을 조절해야 합니다. 그리고 오차 막대, 단위도 삽입하고 중요한 의미가 없는 선은 가독성을 위해서 삭제할 수도 있습니다. 그러면 다음과 같이 수정할 수 있습니다.

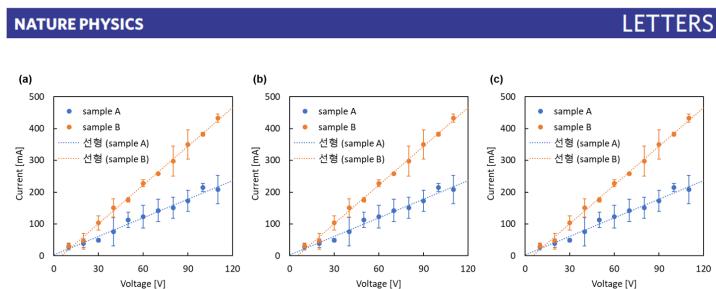


Fig. 4 | Emergence of local magnetic moments in monolayer WSe₂. **a**, Out-of-plane magnetic-field dependence of MCD at $\nu = 1$ and $\nu_1 = \nu_2 \approx 0.3$ (at which the heterostructure is an excitonic insulator) for varying temperatures. The spectral dependence of the MCD is determined as the difference between the left- and right-handed reflected light intensity divided by the total reflected light intensity. It is integrated over a narrow spectral range near the repulsive polaron resonance (1.73 eV; Methods). **b**, Temperature dependence of the inverse MCD slope around zero magnetic field (which is proportional to the inverse magnetic susceptibility) as a function of temperature at $\nu_1 \approx 0.30$ and 0.45. The error bars are estimated from the linear fit to the low-field data in **a**. The magnetic susceptibility follows the Curie-Weiss dependence (solid lines) at high temperatures with small negative Weiss constants (x intercepts). The magnitude of the Weiss constant is compatible with weak antiferromagnetic exchange interactions between the distant local moments.

from optical studies (Fig. 3a and Extended Data Fig. 7) (the larger electric field values here compared with Fig. 3a,b are due to a thinner hBN spacer in the capacitance device). The state persists up to around 120 K. Details of the capacitance measurements and results at other temperatures are included in Methods and Extended Data Figs. 4 and 5.

We evaluate the charge gap of the excitonic insulator by integrat-

θ denote the sample temperature and Weiss constant, respectively. Such a behaviour is in contrast to that of an isolated monolayer at comparable hole-doping densities²⁷ but compatible with that of local magnetic moments²⁸ induced by exciton formation. The Weiss constant obtained from the fits (solid lines) changes from approximately 0 to -2 K when the exciton density changes from $\nu_2 \approx 0.30$ to 0.45. It suggests a weak antiferromagnetic exchange interaction

matplotlib example

script-based 프로그램을 이용하여 그래프를 그리면 위의 과정들을 한 번에 그리고 repeatable하게 할 수 있습니다. matplotlib를 이용한 그래프 예시는 다음과 같습니다.

NATURE PHYSICS LETTERS

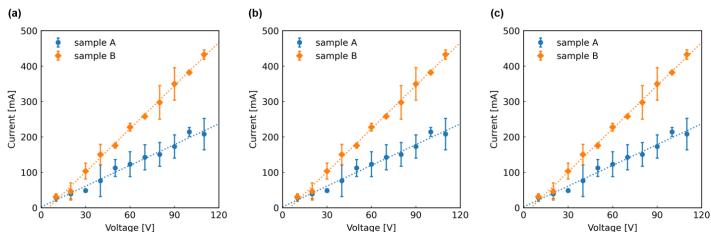


Fig. 4 | Emergence of local magnetic moments in monolayer WSe₂. **a**, Out-of-plane magnetic-field dependence of MCD at $v = 1$ and $v_x = v_z \approx 0.3$ (at which the heterostructure is an excitonic insulator) for varying temperatures. The spectral dependence of the MCD is determined as the difference between the left- and right-handed reflected light intensity divided by the total reflected light intensity. It is integrated over a narrow spectral range near the repulsive polaron resonance (1.73 eV; Methods). **b**, Temperature dependence of the inverse MCD slope around zero magnetic field (which is proportional to the inverse magnetic susceptibility) as a function of temperature at $v_x \approx 0.30$ and 0.45 . The error bars are estimated from the linear fit to the low-field data in **a**. The magnetic susceptibility follows the Curie-Weiss dependence (solid lines) at high temperatures with small negative Weiss constants (x intercepts). The magnitude of the Weiss constant is compatible with weak antiferromagnetic exchange interactions between the distant local moments.

from optical studies (Fig. 3a and Extended Data Fig. 7) (the larger electric field values here compared with Fig. 3a,b are due to a thinner hBN spacer in the capacitance device). The state persists up to around 120 K. Details of the capacitance measurements and results at other temperatures are included in Methods and Extended Data Figs. 4 and 5.

We evaluate the charge gap of the excitonic insulator by integrating

θ denote the sample temperature and Weiss constant, respectively. Such a behaviour is in contrast to that of an isolated monolayer at comparable hole-doping densities³⁰ but compatible with that of local magnetic moments induced by exciton formation. The Weiss constant obtained from the fits (solid lines) changes from approximately 0 to -2 K when the exciton density changes from $v_x \approx 0.30$ to 0.45. It suggests a weak antiferromagnetic exchange interaction

그래프를 그릴 때 사용했던 데이터와 코드는 아래에 있습니다. 이 예시 외에도 구글에 검색해보면 많은 자료를 찾을 수 있습니다. 이 예시 코드의 설정 값이 가장 좋다고 말씀드리는 것이 아니며, 상황에 맞게 설정 값을 수정해야 하고 저널의 성격이나 개인의 취향에 맞춰서 더 보기 좋게 그리는 방법이 있을 수 있습니다. 그리고 꼭 script를 이용하여 그래프를 그려야 하는 것은 아니고 이런 방법도 있음을 소개하는 것이므로 각자 제일 능숙하게 사용할 수 있는 방식으로 그래프를 그리시면 됩니다.

DATA :

voltage[V]	current1_mean[mA]	current1_error	current2_mean[mA]	current2_error
10	28.52	10.12	30.86	8.56
20	38.92	13.25	45.84	24.41
30	48.60	4.98	103.46	22.47
40	76.22	44.55	150.36	28.60
50	112.31	23.97	175.55	6.88
60	122.96	35.23	227.60	10.94
70	142.54	35.55	258.02	3.87
80	150.70	33.36	297.31	47.34
90	172.92	32.88	349.80	45.89
100	214.12	12.76	382.16	6.07
110	208.09	44.53	432.65	13.31

SCRIPT :

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import matplotlib as mpl
4  import matplotlib.ticker as ticker
5  from scipy.optimize import curve_fit
6  mpl.rcParams.update({
7      'font.size': 9,
8      'font.family': 'sans-serif',
9      'font.sans-serif':'DejaVu Sans',
10     'xtick.major.size': 2,
11     'xtick.minor.size': 1.5,
12     'xtick.major.width': 0.5,
13     'xtick.minor.width': 0.4,
14     'xtick.labelsize': 9,
15     'xtick.direction':'in',
16     'xtick.top': False,
17     'ytick.major.size': 2,
18     'ytick.minor.size': 1.5,
19     'ytick.major.width': 0.5,
20     'ytick.minor.width': 0.4,
21     'ytick.labelsize': 9,
22     'ytick.direction':'in',
23     'ytick.right': False,
24     'savefig.dpi': 600,
25     'axes.linewidth': 0.75,
26     'legend.frameon': 'False',
27 })
28
29 V,I1,I1err,I2,I2err = np.loadtxt('data_example.txt',skiprows=1,unpack=True)
30
31 figure_width = 3.2 # inch
32 figure_hight = figure_width
33
34 def f_lin(x, A, B):
35     return A + x*B
36
37 fig, ax = plt.subplots(figsize=(figure_width,figure_hight))
38
39 ax.errorbar(V, I1, yerr=I1err,
40             marker='o',
41             markersize=4,
42             linestyle='None',
43             elinewidth=1.2,
44             capsize=1.5,
45             capthick=1.2,
46             color='C0',
47             label='sample A')
48

```

```

49 ax.errorbar(V, I2, yerr=I2err,
50             marker='D',
51             markersize=4,
52             linestyle='None',
53             elinewidth=1.2,
54             capsizes=1.5,
55             capthick=1.2,
56             color='C1',
57             label='sample B')
58
59
60 popt,pcov = curve_fit(f_lin, V, I1)
61 ax.plot(np.array([0,500]), f_lin(np.array([0,500]),*popt),
62         marker='None',
63         linestyle=':',
64         linewidth=1.2,
65         color='C0')
66
67 popt,pcov = curve_fit(f_lin, V, I2)
68 ax.plot(np.array([0,500]), f_lin(np.array([0,500]),*popt),
69         marker='None',
70         linestyle=':',
71         linewidth=1.2,
72         color='C1')
73
74 ax.set_xlabel('Voltage [V]', fontsize=9)
75 ax.set_ylabel('Current [mA]', fontsize=9)
76 ax.set_xlim(0,120)
77 ax.set_ylim(0,500)
78
79 ax.xaxis.set_major_locator(ticker.MultipleLocator(30))
80 ax.yaxis.set_major_locator(ticker.MultipleLocator(100))
81
82 ax.legend(loc='upper left', fontsize=9)
83 fig.savefig('./figure_example.png', bbox_inches='tight')
84 plt.close()
85

```

<https://www.mrl.ucsb.edu/~seshadri/PreparingFigures.pdf>

평가

* 2022년 기준이나, 크게 변하지 않을 것입니다.

그래프의 aesthetic을 평가하는 것은 주관적이기 때문에 정확히 어떤 기준으로 평가할 것은 아니고, 중급물리실험에서 publication quality를 요구하는 것도 아닙니다.

그러나 그래프의 quality를 아예 신경 쓰지 않았거나 꼭 들어가야 하는 요소들(오차막대, 축 제목, 단위 등)이 없으면 감점입니다. 특히 그래프의 필수 요소들은 불확도 분석, fitting과 함께 중요하게 평가되는 부분이므로 신경 써서 그래프를 그려주시길 바랍니다.

8.3 TeX과 조판

물리학 뿐만 아니라, 여러 학문 분야에서 발견과 성과를 자연 없이 보고하고 공유하는 것은 매우 중요합니다. 따라서 여러 연구자가 작성한 논문을 같은 양식으로 묶어 한 학술지 내에 병합하는 조판 과정이 중요도를 띠게 되고, 학술지의 방향이나 논조와 맞지 않거나 근거가 부족한 논문들은 게재가 거부됩니다. 그러므로 신속하게 저널 에디터 및 referee의 의견을 반영하여 조판된 내용을 수정하면서도 문서의 양식이 일관되게 유지할 수 있도록 하는 것이 매우 중요합니다. 특히 어떤 연구 분야의 Originality가 중요시되는 경우에는, 이러한 조판 작업을 외부에 위임하지 않고 연구자 및 논문의 주 저자가 직접 수행하는 것이 일반입니다. 이러한 용도로 사실상 표준화된 도구로서 TeX이 사용되고 있습니다. 물리학 분야에서는 이론, 실험을 불문하고 명망 있는 여러 저널에 좋은 아이디어나 성과, 실험 결과를 보고하기 위해서는 충분한 TeX 실력 연습이 필요합니다. 이러한 목적으로, TeX을 이용한 조판 연습이 권장되는데, 화면에 표시되는 문서를 보고 마우스로 드래그하거나 조작하여 문서를 작성하는 modern-days word processor들의 방식과는 다르게, 문서의 어떠한 부분이 어느 위치에 어느 형식으로, 어떤 Figure와 함께 어떤 참고 문헌을 인용해서 작성될 것인지를 스크립트로 작성하여 코딩하는 형태의 문서 작성이 요구됩니다. 이러한 방식에 익숙해지면 수식 입력, 다이어그램 작성, Figure 삽입 및 깔끔한 표 기입, 참고 문헌 관리 및 문서의 양식 조절이 아주 유리해집니다. 따라서 한번 작성해 놓은 내용이 특정 저널에서 기각되면, 다른 저널을 타게팅하여 각

저널에서 제공하는 포맷을 받아 문서를 쉽게 재정비할 수 있는데요. 이러한 이유로 TeX과 친숙해지는 것은 진입 장벽이 높지만, 물리학을 연구하는 데 있어 강력하게 권장되고 있습니다.

최근에는 TeX 사용을 편리하게 하기 위한 여러가지 도구들이 제공되고 있습니다. 유료 텍 프로그램을 설치하는 경우에는 스크립트를 편집하는 즉시 변경내용이 옆에 preview 문서로 표시되기도 하고, 편집한 줄의 내용이 어느 부분에 해당하는지 문서에서 보여주기도 합니다. 또한 자동 완성 기능으로 복잡한 스크립트를 모두 외울 필요 없이 어느 정도 각을 잡아주는 기능들이 존재하여 사용이 비교적 편리해지게 되었습니다. 이러한 분위기 속, 직접 설치하지 않고 다른 저자들과 협업하여 텍스트를 다듬고 내용을 미려하고 풍성하게 만드는데 유리하게끔 지원되는 웹 기반의 툴로서 Overleaf가 널리 사용되기 시작하였습니다. 무료 플랜을 이용하면 TeX을 언제 어디서나 인터넷에 접속하여 문서를 편집해 볼 수 있는데, 이를 통해 본 강좌의 보고서 작성은 연습해 보면 좋을 것 같습니다.

TeX 설치 가이드. <http://www.ktug.org/xe/?mid=Install>

Overleaf 홈페이지. <https://ko.overleaf.com>

Overleaf TeX Guide : 어려운 텍 문법을 어떻게 사용하는지 예시와 함께 친절한 가이드가 되어 있어, 몇 분 ~ 몇 시간 읽어보면 쉽게 파악할 수 있습니다.

TeX은 몇 번 써 보면 나중에 필요할 때 얼마든지 몇 번 찾아보고 손쉽게 사용할 수 있지만, 아예 경험이 없다면 진입 장벽이 매우 높습니다. 사람에 따라 다르지만 통상 일주일이면 낙낙하게 간단한 문서에 원하는 내용을 정리하고, 필요한 양식을 다운받아 사용할 수

있는 정도를 익혀 볼 수 있습니다. 마스터하지 않더라도 모르는 기능들은 그때그때 찾아 쓸 수 있을 정도로 친숙해지면 유리한데요. 이후 네댓 번의 보고서 및 출판물을 TeX 작업을 해 본다면, 무리 없이 텍에 적응할 수 있을 것이라고 생각합니다.

8.4 아티클과 레터, Supplemental Material

논문을 저널에 Publish할 때에는 몇몇 형식을 따라야 합니다. 중급물리실험에서 흥내낼 만한 포맷으로는, Article 포맷과 Letter 포맷이 있습니다. Article 포맷은 1-column으로 넓직하고 읽기 편한 장점을 가지지만, 분량이 길어진다는 단점이 있습니다. plot을 시원 시원하게 넣을 수 있다는 장점도 있습니다. 이러한 양식의 논문을 작성할 때 참고할 것들은 이러한 형식을 사용하는 저널의 웹 사이트에서 가이드라인 등을 얻을 수 있습니다. 1-column 포맷을 따르는 저널의 예시로는 New Journal of Physics가 있습니다.

<https://iopscience.iop.org/journal/1367-2630>

다음으로는, 물리학에서 가장 널리 쓰이는 포맷 중 하나인 Letter 형식은 2-column의 잘 정리된 구조의 글을 쓰도록 유도합니다. APS (미국물리학회)에서 제시하는 RevTex 양식을 Overleaf 또는 APS 웹 페이지에서 확인할 수 있습니다. 양식에는 Section을 나누어 서술하고 있고, 학부 수업에서 낼 보고서도 이런 식으로 쓰는 것이 바람직하지만 최근 다수의 논문들은 논리전개의 자연스러움을 위해 섹션을 나누는 것을 생략하는 경우가 꽤 있습니다. 대부분의 PRL 페이퍼들은 섹션 구분을 생략합니다. 주의해야 할 것은 3500자 분량 제한이 있어 짧게 읽을 수 있도록 작성하는 것이 권장된다는 점입니다. 연구에는 재현성 확보가 매우 중요한데, 이에 따라 본문에서

유도하기에는 좀 긴 내용들이나 실험에 관한 디테일한 셋업 및 처리 방법 등은 SM으로 분리하여 제출하는 것이 일반입니다. 원래는 SM 도메인 아티클/레터의 형식을 어느정도 따르고, 본문에 붙여 쓰거나 별도의 파일로 제출하는데, 중급물리실험에서 보고서의 길이를 줄이기 위해 내는 경우에는 양식을 안 지켜도 감점이 없습니다. 한번 써 보는 것에 의의를 두고, 원본 데이터를 잘 첨부해서 실험을 상세히 설명해 보세요. 장황할 수도 있고, 간결하게 정리될 수도 있습니다. 좋은 SM을 쓰기 위해서는 남의 논문을 많이 읽어보아야 어떤 점들이 궁금할지, 어떤 점들을 알려주면 도움이 될지 감을 잡을 수 있습니다. 관련한 내용은 아래 링크에서 가이드를 확인할 수 있습니다.

<https://journals.aps.org/prl/authors/supplemental-materials-jou>

한편, 레터 양식을 따르는 대표적인 저널들은 APS의 Physical Review 저널들입니다. 대표적으로 PRL (Phys. Rev. Lett.) 가 있으며 다수의 노벨 물리학상이 담겨 있는 저명한 저널입니다. 이외에도 분야별 Phys. Rev. A, Phys. Rev. B., 등등 여러 가지 저널이 나뉘어져 있습니다. 모두 APS의 RevTeX 양식을 사용하니 참고해 보고, 유명한 논문 몇 편을 읽어보기를 권장합니다. 자연스러운 글 솜씨 및 논리 전개, 양식과 친해지는 연습 등을 해 볼 수 있습니다.

<https://journals.aps.org/prl/>

한편 PRL 기준으로 분량 구분은 약 다음과 같은 전개가 좋습니다.

1. Introduction, about 2 paragraphs. One providing a coarse viewpoints on the current works and related field. One for detailed approaches used in this work.

2. Key essence features - experimental observation or important results, or important assumptions, 1 paragraph.
3. Experiment overview, sample preparation / apparatus / method. About 2 paragraph.
4. Main texts, 7 to 10 paragraphs are adequate. explains about the result and interpretations.
5. Summary, 1 paragraph.
6. Acknowledgement, 1 paragraph.

참고하세요.

한편, Nature 등 3-column 형식을 요구하는 저널도 있습니다.

<https://www.nature.com/subjects/physics/nature>

8.5 영문 보고서 작성 시 참고 사항

* 이 부분의 본문은 2022년 홍승주 조교의 eTL에 공지한 내용을 바탕으로 하고 있습니다.

보고서를 영어로 작성하는 것이 필수는 아니지만, 영어로 작성하신 분들이 많아 홍승주 조교가 영어 논문 작성법 강좌에서 들은 몇 가지 코멘트를 공유합니다. 영문법이나 영어의 fluency가 채점 대상은 아니지만, 읽기 좋고 내용을 깔끔하게 전달할 수 있는 미려한 텍스트를 쓰는 것은 매우 중요한 능력입니다. 혹시 놓치고 있는 부분들이 있다면 참고해서 자연스러운 텍스트를 만드는데 도움이 되기 바랍니다. 우리말이면 다시 읽어보면서 이상한 것들이 좀씩 느

껴지는데, 모국어가 아닌 언어로 보고하는 경우 표현이 이상하거나 어색한 것을 눈치채지 못하고 놓치는 경우가 많습니다. 일상에서 자주 쓰는 용어더라도 격식을 갖추는 보고서에서 가급적 쓰지 말아야 할 표현들도 많지요.

Formal writing에서 you는 사실상 안 쓴다고 보면 됩니다. You 가 들어갈 자리에는 one을 쓰는 걸 고려해보시길 바랍니다. 예전에는 논문에 I/We가 그렇게 자주 등장하지 않았습니다. 그러나 요즘에는 꽤 등장하는 추세이긴 합니다. 그럼에도 불구하고 논문에 I/We가 너무 자주 등장하는 것은 그리 권장되지 않습니다. 따라서 적절히 수동태를 섞어서 쓰시길 바랍니다. 부사는 보통 문장 중간으로 들어갑니다. (ex. Actually, this method concentrates on ... → This method actually concentrates on ...) Then을 많이 쓰시게 되는데 Then, we ... 보단 We then ... 이 formal 합니다.

단위는 숫자와 한 칸 띄어서 씁니다. Introduction의 경우, 큰 그림에서 작을 그림으로 가는 순서로 작성합니다. 관사의 경우, 저도 많이 헷갈리는 부분이라 어쩔 수 없네요... 시제의 경우에도 분야 by 분야가 좀 심한 편이라 함부로 comment를 드리기 애매합니다. 근데 논문 읽어보면 생각보다 현재 시제가 많이 쓰일 겁니다. 과거 시제로 뒤덮으신 분이 보여서 얘기드립니다. 단어가 너무 repeat 되는 걸 조심하십시오.

Parallelism이라는 것이 있습니다. 뭔가 나열된 구조에서는 서로 문장 구조가 비슷하게 쓰는 것이 좋습니다. This + summary word라는 구문이 있습니다. 앞에서 무언가를 설명한 다음에 뒤의 문장을 "This + 앞을 summary하는 단어"로 시작하는 건데, 글의 flow를 좋게 해주는 구문입니다. show, demonstrate, illustrate, provide, describe 등 논문에서 자주 쓰이는 단어들이 있습니다. 이를 reporting verb라고 하는데, 이런 단어를 적절히 사용하는 것도 좋습니다.

논문에서 명령문은 별로 등장하지 않습니다. Abstract의 경우, 전체 내용을 요약한다는 느낌으로 전체 내용의 순서(IMRD)에 맞게 쓰시면 됩니다.

8.6 마무리하며

중물실은 서울대학교 물리천문학부의 물리학 전공필수 과목 중 가장 귀찮은 태스크가 많은 과목입니다. 시대에 따라 중물실의 흐름은 많이 달라져 왔는데, 근본 있게 정립된 기준이 있지 않았어서 맡으시는 교수님마다 약간씩 다른 스타일을 가지기는 했지만 항상 많은 로드의 실험을 해야 했고, 장비 고장에 시달리다가 실험을 못 끝내는 경우도 많았습니다. 2019년까지 존속했었던 홀 효과 컨택 실험의 경우에는 10시간 넘게 contact을 시도해도 의미 있는 결과를 얻지 못하는 경우도 허다했습니다. 그럼에도 고체 실험에서 필수적으로 해 보아야 하는 좋은 경험이었는데, 물리학 전반에서 사용되는 이런저런 실험 스킬을 익히다 보면 매우 힘든 부담을 갖게 됩니다. 그러다 보니 보고서를 대충 쓰고 넘어가는 경우가 항상 많았는데, 2021, 2022년도에는 아주 우수한 퀄리티의 보고서를 특히 많은 학생들이 써 주어서 고마웠습니다. 사실상 전자학과 같은 중급물리 실험 2를 제외하면, 물리학과에서 나름 각 잡고 물리 실험에 대한 보고서를, 스스로 뽑은 데이터, 스스로 그린 플롯, 스스로 전개한 논리 설명으로 레터나 아티클 양식을 갖추어 완성해 볼 수 있는 거의 유일한 전공필수과목이 중급물리실험 1입니다. 선배들이 써 놓은 우수보고서도 엄청나지만, 힘든 실험과 바쁜 학기 속에서도 나름대로 최선의 공을 들여서 한 번쯤 학위 과정 동안 자부할 수 있을 만한 퀄리티의 보고서를 만들어 보기로 강력히 권장합니다. 서울대학교 물리천문학부의 교과 과정 커리큘럼에는 제대로 된 데이터 처리나 통계 분석 및 보고서 작성법을 배우는 과정이 잡혀 있지는 않습니다. 중급물리실험 1을 통해 그러한 경험을 충분히 쌓아 갈 수 있기를 바

라며, 힘들게 실험만 하다가 끝난 과목으로 기억에 남기보다는, 내 인생에서 처음으로 완성도 있게 만들어 본 보고서를 쓴 과목으로 기억에 남기를 바랍니다. 중물실에서 겪은 이런저런 형태의 데이터들과 실험 스킬들을 잘 마음에 담고 있다면, 앞으로 살아가면서 어떤 종류의 데이터를 마주하더라도 처리하기 겁나서 이론과 비교해보지 못하는 경우는 없을 것입니다. 실험 설계, 오차 처리, 회귀 분석, Plotting 및 알아낸 것들을 report하는 방법 전반에 걸쳐, 중급물리실험에서 연습했던 내용들이 앞으로 무슨 일을 하면서 살아가더라도 마음속으로는 학자의 자세로, 주변을 연구하며 살아갈 수 있는 계기가 되었으면 좋겠습니다. 중급물리실험의 강좌 제공 머터리얼들을 규격화하고 정규화하는 과정에서, 어려워지고 까다로워진 부분들 및 잊은 장비 고장으로 고생하고 끝내 포기했었던 몇 명의 수강생분들, 어려운 실험들도 포기하지 않고 해내서 조교들도 많은 걸 배우게 해 준 수강생분들, 매뉴얼 정리 및 실험환경 개선에 힘써 준 모든 조교님들 및 코로나로 어려운 시기에 대면 실험 수업을 잘 유지할 수 있도록 운영해 주신 교수님께 감사드립니다.

9

우수 보고서 예시

한정된 Material을 보고 처음 실험을 하다 보면 막막한 점이 너무 많습니다. 또한 퀄리티 있는 보고서를 만들어내는 데도 부담이 클 수 있지만, 한번 학부 과정에서 가장 공을 들인 보고서를 만들어 볼 기회이니 참고할 자료가 많으면 도움이 크게 될 것입니다. 이에 배울 점이 많은 보고서들을 아래에 첨부합니다. 그 목록은 다음과 같습니다.

1. Single Photon Interference, 최이선, 2022
2. Lock In + Hall, 김수진, 2022
3. Optical Tweezers, 권민성, 2022
4. Chaotic Pendulum, 최영환, 2022
5. Photoluminescence, 여준호, 2021

힘든 학기 과정 중에도 매뉴얼에서 제공해 준 가이드를 뛰어넘는 우수한 보고서를 작성해 준 수강생분들께 감사드립니다.

Single Photon Interference

Ysun Choi

Department of Physics and Astronomy, Seoul National University, Seoul 08826, Korea
E-mail: ysunnchoi@snu.ac.kr

Abstract. In this experiment, the diffraction of light in various aperture such as single slit and double slit was experimented in the two cases of multiple-photon limit and single-photon limit to demonstrate the wave nature of light.

(Dated: 2 June 2022)

1. Introduction

In this experiment, diffraction in the case of (asymmetric) double slits and single slits was experimented on multiphoton limit using laser and single-photon limit using bulk and pmt. The diffraction theory is described by assuming the far-field Fraunhofer limit below.

1.1. Diffraction at an arbitrary aperture

Based on Huygen's principle, each point of an aperture can be assumed as a independent point source. Therefore, when complex amplitude of field at each point (x', y') is given as $f(x', y')$, the resulted complex field at point (x, y, z) can be obtained as :

$$u(x, y) \propto \int f(x', y') e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2)^{1/2}} dx' dy' \quad (1)$$

The intensity I is proportional to $|u(x, y)|^2$. Additionally, in the case of non-monochromatic wave, the total intensity is obtained considering the total sum of weighted contribution of each λ . The case of 1D & Lorenzian distribution is shown below :

$$I(x) = \int I(x, \lambda) g(\lambda) d\lambda, \text{ where } g(\lambda) \propto \frac{\sigma^2}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \sigma^2} \quad (2)$$

1.2. Fraunhofer diffraction theory at single & double slit

Using far-field approximation and defining θ as the angle between the line connecting the point on the screen to the center point of the slit and the central optical axis, the diffraction pattern of single slit can be obtained as below :

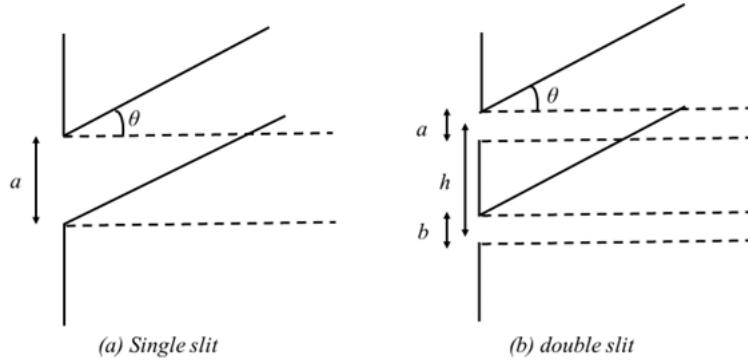


Figure 1. aperture of single(left) double(right) slit interference

$$I = A^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \beta = \frac{1}{2} k a \sin \theta \quad (3)$$

Also in the case of (asymmetric) double slit, where $\beta_1 = \frac{1}{2} k a \sin \theta$, $\beta_2 = \frac{1}{2} k b \sin \theta$, $\alpha = \frac{1}{2} k h \sin \theta$,

$$I = A^2 \left(\frac{\sin \beta_1}{\beta_1} \right)^2 + B^2 \left(\frac{\sin \beta_2}{\beta_2} \right)^2 + 2AB \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\beta_1 \beta_2} \cos(\alpha + \phi) \quad (4)$$

1.3. Wave-particle-duality of light

From Thomas Young's double-slit experiment and Maxwell's electromagnetism, light has been argued as a wave for a long time. Then Einstein explained the photoelectric effect with the photon theory, and wave-particle duality of light emerged. De-Broglie subsequently argued for the theory of material waves, and the results of the electron diffraction experiments by Thompson and Davisson-Germer demonstrated the wave-particle duality of general matter. This experiment aims to confirm the wave-particle duality of light, by confirming that an interference pattern such as a general laser appears in a system in a single-photon limit using pm tube and pcit, which are capable of detecting each single photon.

2. Methods

The experiments are exceeded with PM tube kit of Hamamatsu's, and Teachspin's oscilloscope, etc. The aligning process and interference experiments with single & double slit are described below.

2.1. Aligning

After aligning source slit, double slit and laser (or source bulb) by checking tilting and intensity ratio from each slit, finding adequate position of a blocker slit is proceeded.

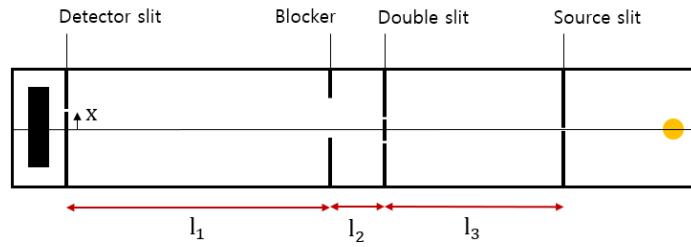


Figure 2. Configuration of source, slits, detector inside the U-channel

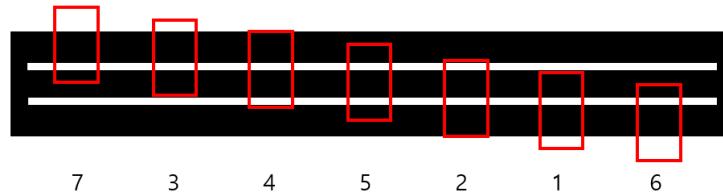


Figure 3. Each location numbering of blocker. From the center (5), (2) and (4) shows the boundary limit of double-slit interference case. (3) and (1) shows the position firstly reaching the single-slit case, (7) and (6) shows total single-slit limit case.

The each position is indicated above Figure 3, and each are found by observing intensity change. There are three types of double slits used in the experiment, indicated as number 14, 15, and 16, which all the width are 0.085mm and the distances between the two slits are 0.356, 0.406 and 0.457mm, respectively. The blocker slit width is 1.778mm, and the distances are $l_1 = 48.9\text{cm}$, $l_2 = 0.9815\text{cm}$, $l_3 = 38.9\text{cm}$. Wavelength of the diode laser is $670 \pm 20\text{nm}$, and in the case of bulb (after a filter) is $546 \pm 10\text{nm}$.

2.2. Laser interference - multiple photon limit

After aligning, double slit interference was firstly done for 14, 15, 16 number slit respectively. Also for each slit, the single slit interference experiments (by locating the blocker at location 6&7) were also proceeded. Additionally, an asymmetric double-slit diffraction experiment was also conducted, by dividing the distance between the blocker positions 3 and 4 into 4 equal parts and recording diffraction results at each of the five positions.

2.3. Bulb interference - single photon limit

Similarly in the case of diode laser, interference experiment using bulb at single photon limit was proceeded. After confirming the adequate voltage for photomultiplier tube, the threshold voltage for PCIT was found - by cross-checking the oscilloscope signal of PMT and PCIT. The threshold voltage was decided so that the PMT and PCIT photon signal has the same number. Also, the detector blocker and the intensity for each step

of bulb is calibrated. The remaining interference experiments are again similarly done as in the case of laser.

3. Results and Discussion

3.1. Laser interference - multiple photon limit

3.1.1. Align information

The left, right peak intensity data when aligning the double slit, and the each blocker position is shown below. Blocker position is in the order of Figure 3.

slit	peak difference(%)	visibility(-)	blocker location(mm)						
14	5.60±0.07	78.00±0.56	5.800	5.600	5.460	4.820	4.140	3.980	3.815
15	5.05±0.08	77.21±0.41	5.735	5.560	5.440	4.795	4.140	3.980	3.780
16	1.02±0.07	45.86±0.76	5.400	5.220	5.050	4.460	3.930	3.690	3.535

3.1.2. Double/single slit interference, monochromatic case

The double and single slit interference result was fitted assuming the monochromatic wave, by fitting function indicated below :

$$I(x)_{single} = A^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \beta = \frac{1}{2} k a \sin \theta \quad (5)$$

$$I(x)_{double} = A^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 (\cos \gamma)^2, \beta = \frac{1}{2} k a \sin \theta, \gamma = \frac{1}{2} k h \sin \theta \quad (6)$$

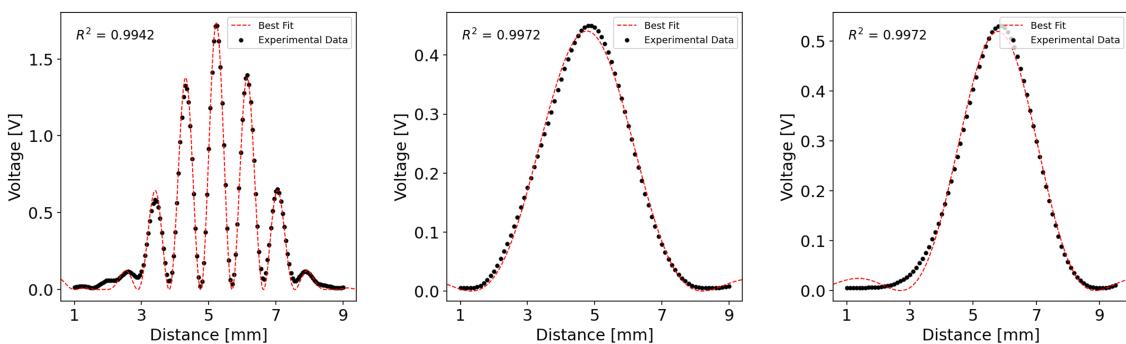


Figure 4. Interference data and best fits plotted in the case of slit 14.

The left and right slit width obtained from the single-slit interference fit is shown in the table below. Using the null hypothesis that the two slit widths are the same, the result of performing the t-test on each type of slit is shown below. It is concluded that the obtained p-value is 0.05 or less, and the null hypothesis cannot be rejected within the 5% significance level, and the width of the two slits is not significantly different.

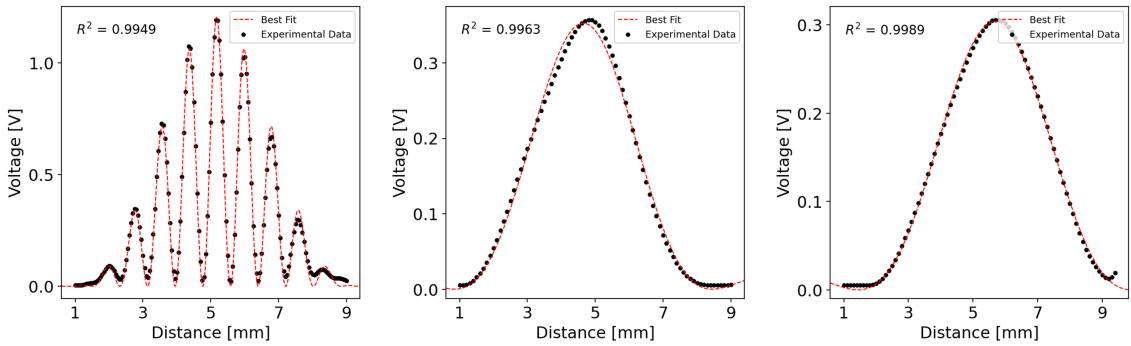


Figure 5. Interference data and best fits plotted in the case of slit 15.

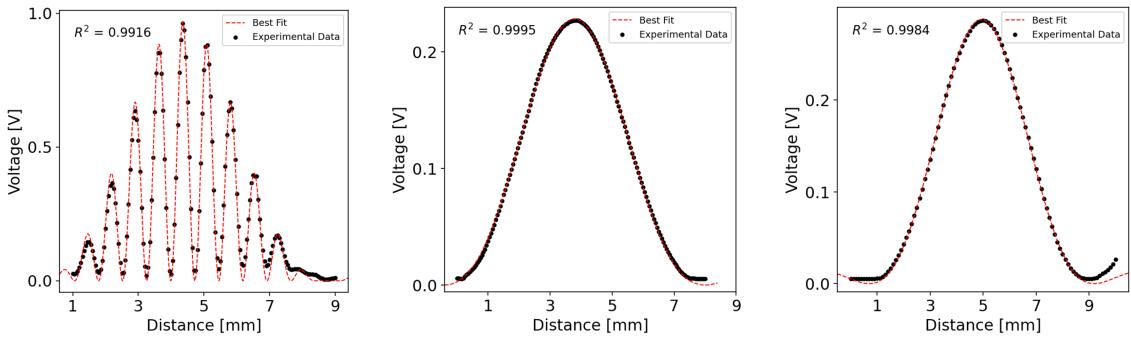


Figure 6. Interference data and best fits plotted in the case of slit 16.

slit	left width [m]	1σ	right width [m]	1σ	p-value
14	0.100E-3	0.18E-4	0.111E-3	0.25E-4	0.6637
15	0.089E-3	0.19E-4	0.080E-3	0.10E-4	0.6134
16	0.081E-3	0.05E-4	0.079E-3	0.09E-4	0.8093

3.1.3. asymmetric double slit interference

For the interference data obtained by placing the blocker between the single slit region and double slit region (five points : 3, 4, and the quartering points between), regression was performed by assuming an asymmetric double slit. The fitting function and the result is shown below Figure 7.

$$I = A^2 \left(\frac{\sin \beta_1}{\beta_1} \right)^2 + B^2 \left(\frac{\sin \beta_2}{\beta_2} \right)^2 + 2AB \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\beta_1 \beta_2} \cos(\alpha + \phi) \quad (7)$$

It can be seen that the more the fitting result deviates from the center, the more incorrect the result is. In addition, the difference between the positions of the blockers recorded on the actual alignment is about twice as large as the slit width known as the true value, even though both of the results of the above asymmetry are double-slit and single-slit boundaries using blockers. This is further discussed later.

3.1.4. Double/single slit interference, with considering bandwidth

Above all fitting was done again assuming the laser has bandwidth and lorentzian

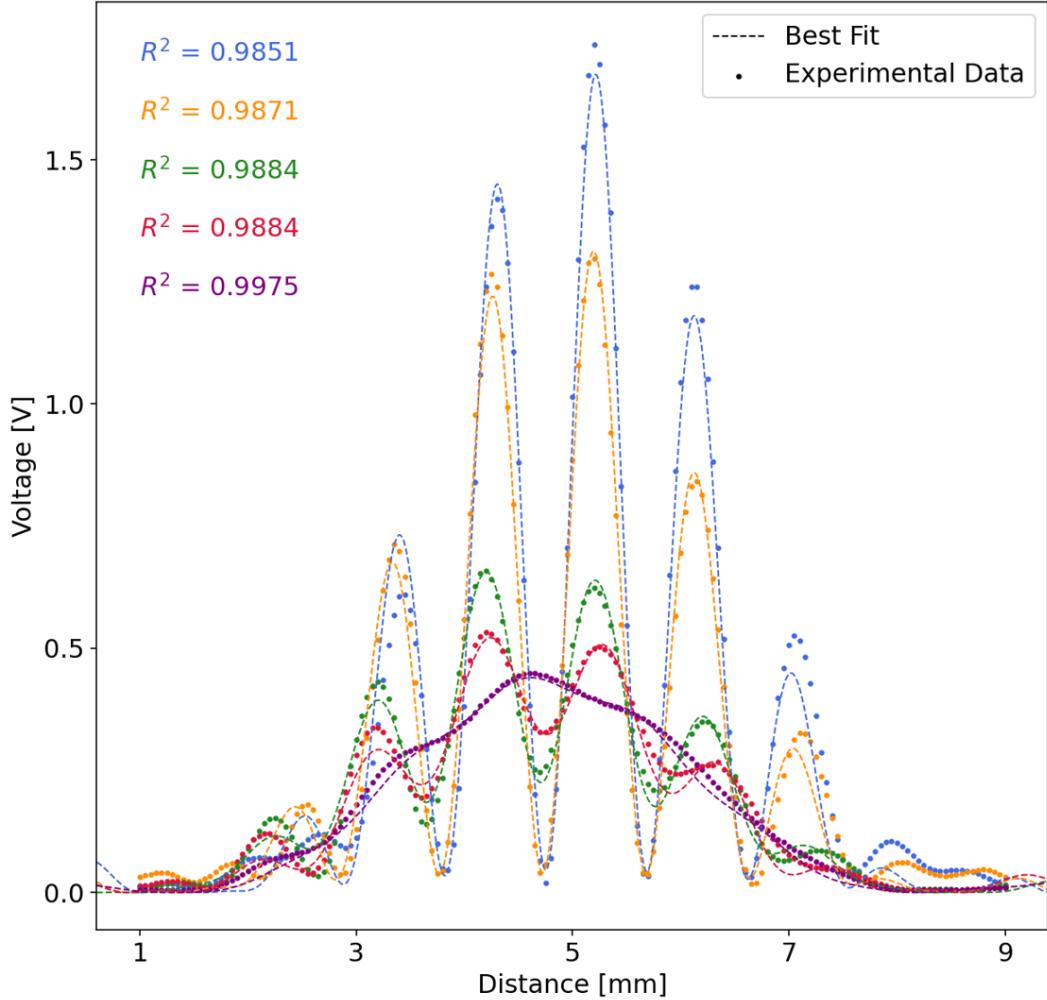


Figure 7. Interference result and best fits for asymmetry case

spectral strength. The fitting function now has an integrated form, shown below :

$$I(x)_{single} = \int A^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 g(\lambda) d\lambda \quad (8)$$

$$I(x)_{double} = \int A^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 (\cos\gamma)^2 g(\lambda) d\lambda \quad (9)$$

In the newly obtained double slit result, it can be seen that the problem - in which the minimum point intensity was not zero - can be solved by introducing the bandwidth. This bandwidth fitting was performed not only in the shown double slit but also in both single slit regions. When adding the information on λ_0 and bandwidth obtained for all three slits of 14, 15, and 16, weights proportional to the reciprocal of the deviation of each case are used. The spectral strength is obtained as shown in the following figure.

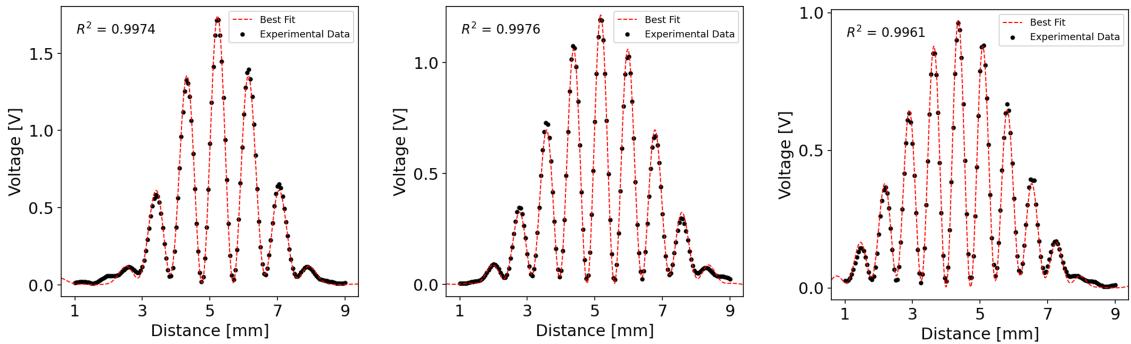


Figure 8. The double slit interference result and best fit considering bandwidth for 14 (left), 15 (center), 16 (right).

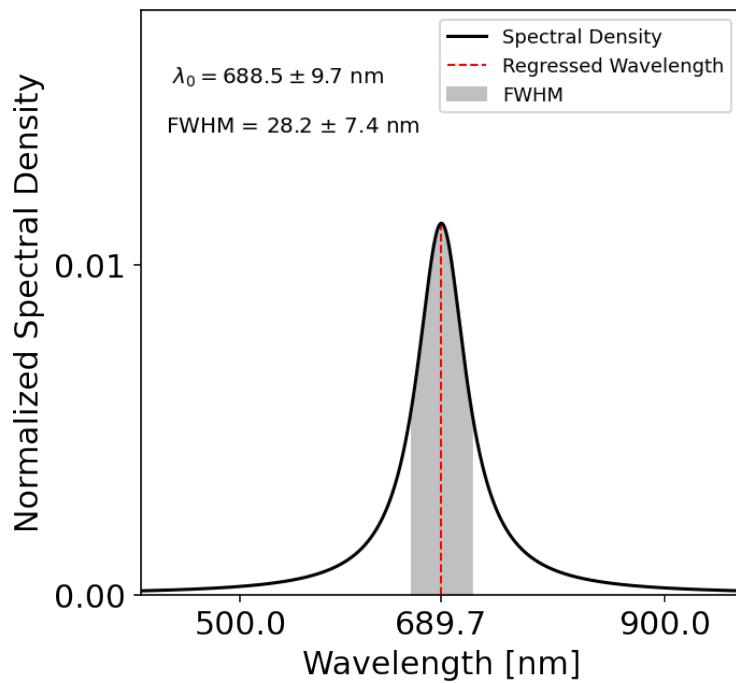


Figure 9. The final wavelength characteristic of laser from the integrated information from the total case.

3.2. Bulb interference - single photon limit

3.2.1. PMT preparation

First, the result of obtaining the pmt upper/lower threshold voltage - that does not detect noise in the dark signal - is as follows. The below experiments were proceeded at approximately half point voltage 500[V].

Left figure of 11 shows the number of pure photon signals of pmt with a magnitude greater than threshold voltages after correcting the dark signal . Next, the (scaled) signal numbers of pcit and pmt, respectively, by the function of the threshold voltage is also plotted. It can be seen that the photon counting results of pcit and pmt were exactly the same within the error range (after adequate scaling) after 0.07 – 0.08 V.

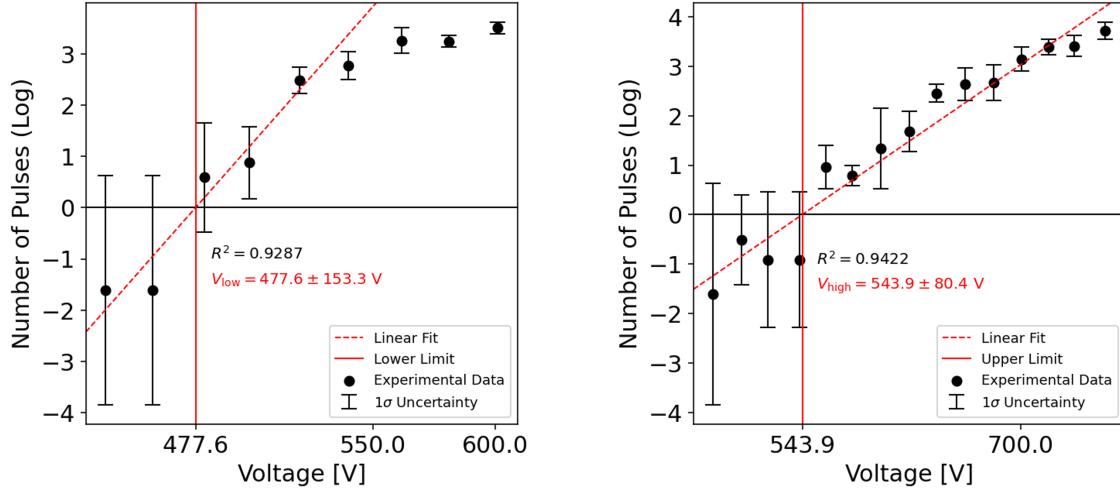


Figure 10. The lower voltage limit (left), higher voltage limit (right). The y-axis is regressed with log scale, and the x-intercept through which the regression line passes $y=0$ is set as a limit point.

Therefore, for convenience in resolution, 0.08 V was adopted as the threshold voltage of pcit. Additionally, the pmt signal number is counted within 0.2s and pmt gain efficiency is known as 4% around threshold voltage 0.08, so the calibration constant for real photon number per second from pcit signal count is 362.5.

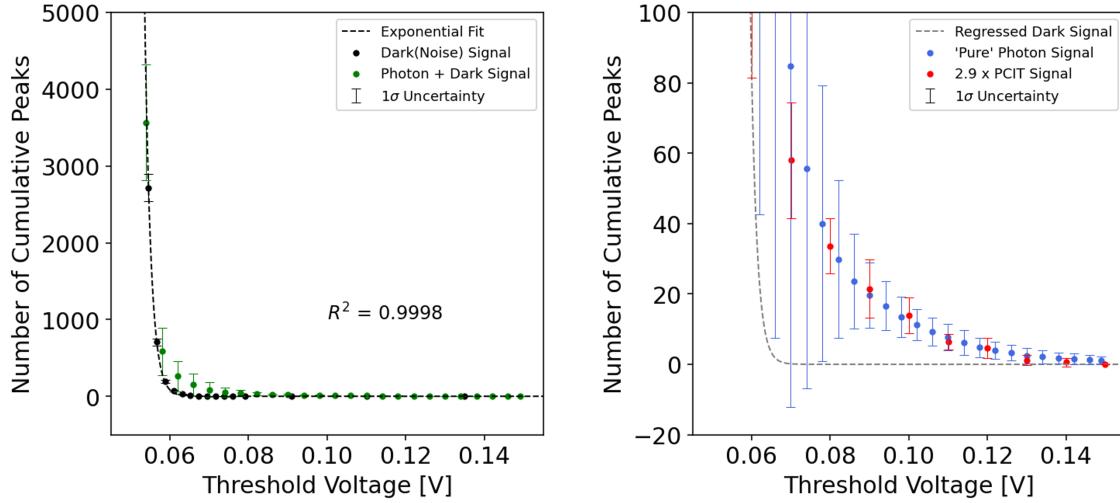


Figure 11. The pmt signals regulating threshold voltage (left), scaled signal numbers of pmt and pcit as a function of threshold voltage.

3.2.2. Bulb-detector calibration

The detector transfer function was obtained by measuring the intensity by moving the detector to various locations. Basically, the shape of single-slit diffraction from the source slit was obtained, and Gaussian fitting was performed to simply obtain the center

position. The center location is indicated in Figure 12. Also, the fitting function for pcount pulse count in the case of different bulb powers is shown below.

$$y = ax^n, a = 0.058 \pm 0.007, n = 5.233 \pm 0.096. \quad (10)$$

When using the scaling factor 362.5, and scaling the reciprocal of the ratio of photons passing the detector slit (which can be obtained comparing the integrated single slit interference result and the detector slit width) 0.0177, the number of photon entering the source slit per second is $(5.5 \pm 0.6) \times 10^6$ (case of bulb power 5). Additionally, considering the ratio of photon passing the source slit (which can be assumed as the slit relative to total area) 0.0085, the number of photons which bulb emits per second is $(6.5 \pm 0.7) \times 10^8$. Therefore, the bulb power can be obtained as :

$$P = (2.37 \pm 0.25) \times 10^{-10} [W] \quad (11)$$

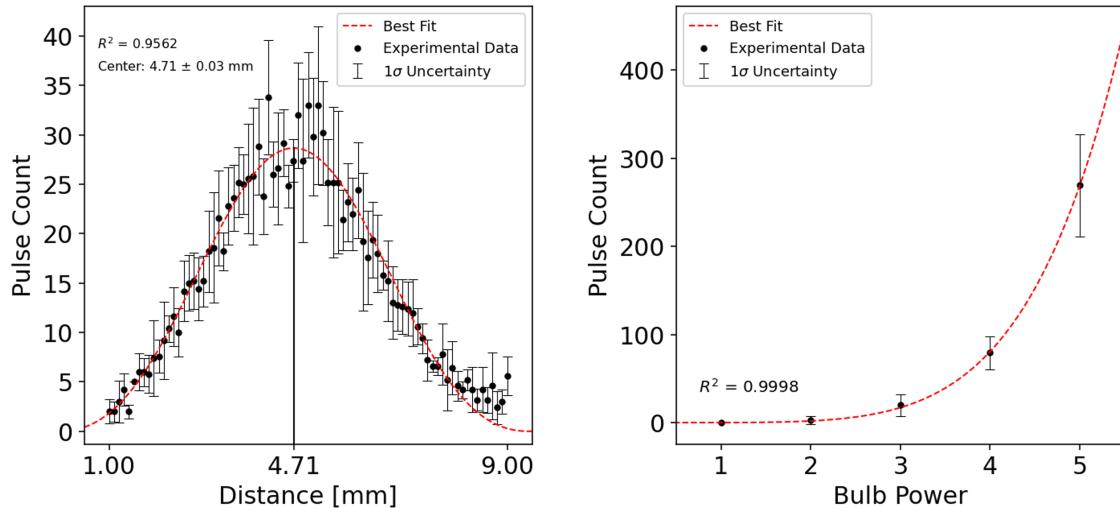


Figure 12. The detector (left) and bulb calibration (right)

3.2.3. single slit interference, monochromatic case

The single slit interference of each slit is obtained below, and the p-values again are obtained. All is over 0.05, and the width of the two slits is not significantly different.

slit	left width [m]	1σ	right width [m]	1σ	p-value
14	0.092E-3	0.43E-4	0.090E-3	0.47E-4	0.9686
15	0.081E-3	0.31E-4	0.073E-3	0.40E-4	0.8438
16	0.080E-3	0.62E-4	0.075E-3	0.45E-4	0.9348

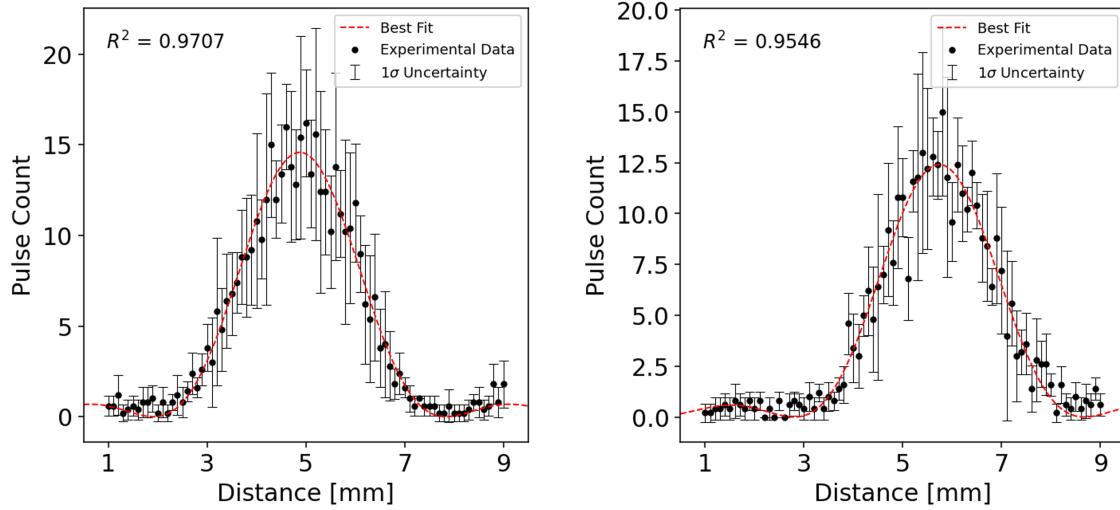


Figure 13. Left/right single slit result of 14 slit. The remaining ones for 15 & 16 are attached in the supplemental material.

3.2.4. double slit interference, monochromatic case

The double slit interference experiments are proceeded varying the bulb power as 3, 4, 5, and also for all three different slits. Results are shown below, and the non-plotted figures are all attached in supplementary.

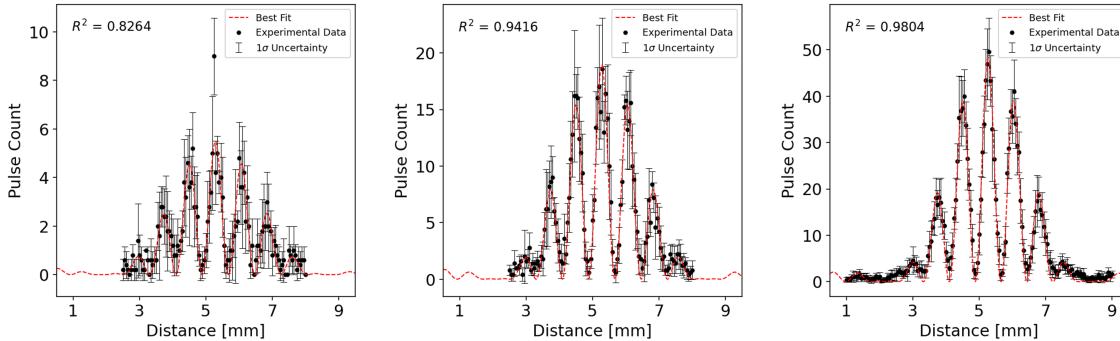


Figure 14. The result varying the bulb power, in the case of 14 slit. Bulb power is 3 (left), 4 (center), 5 (right).

3.2.5. considering bandwidth

As in the laser experiment, the regressions were entirely done again considering the spectral bandwidth of the source. The plotted figure below shows the better fitted version of Figure 15.

Also, total spectral strength integrating all $(\lambda_0, \sigma_{lambda})$ information from each regression cases are plotted below Figure 17.

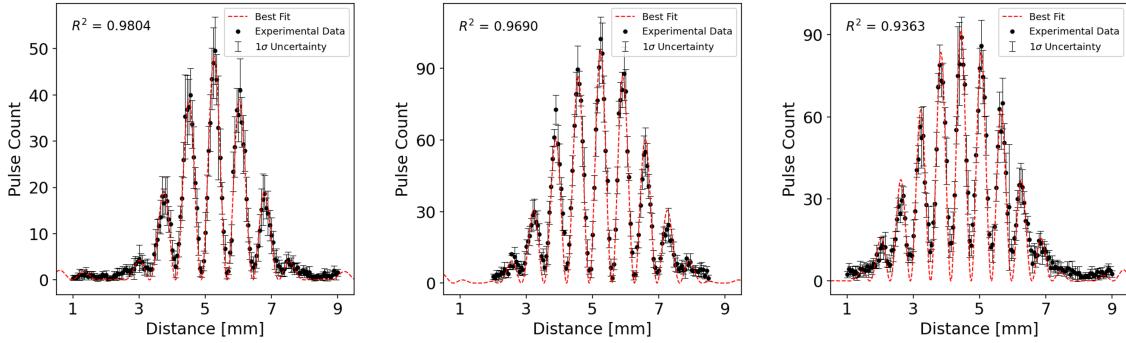


Figure 15. The result for slit 14 (left), 15 (center), 16 (right), in the case of bulb power 5.

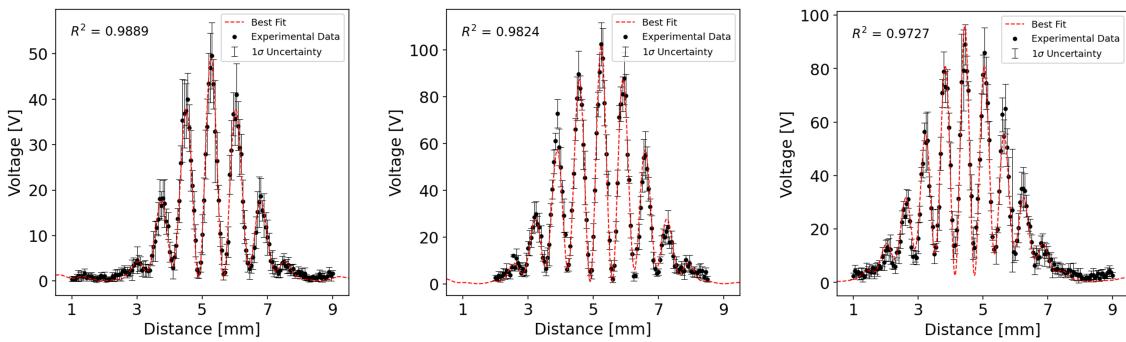


Figure 16. Bandwidth-considered fitted result for Figure 15.

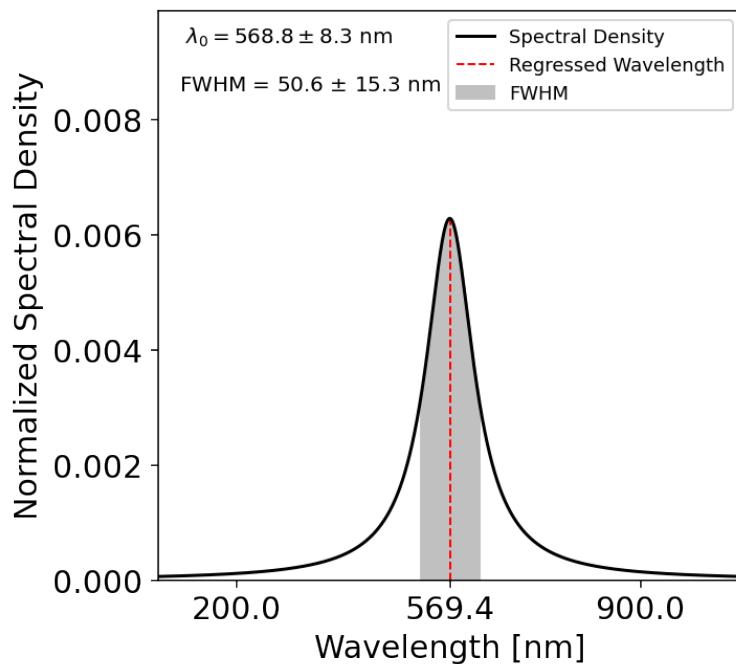


Figure 17. The final wavelength characteristic of bulb source.

3.3. Further discussion

3.3.1. Single and multi photon limit

Using the obtained bandwidth of the source, $\Delta p = \frac{h}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$. And also from uncertainty principle $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$, Δx can be obtained, which can be interpreted as the 'size' of the wave-packet and also a single photon. For each case of laser and bulb :

$$\Delta x \sim \frac{\lambda_0^2}{4\pi\Delta\lambda} \sim 1.34 \pm 0.35\mu m(\text{laser}), 0.51 \pm 0.16\mu m(\text{bulb}) \quad (12)$$

First, in the case of laser, 3.37×10^{15} photons per second (1mW power data was used) are emitted from the source. Also utilizing 0.0085 - the ratio of photon passing the source slit, and the fact that photons pass through the u-channel in 3 ns, the 8.6×10^5 photons are in the U-channel at each moment. Now suppose that these photons are roughly in a row, the distance between them is approximately $0.35\mu m$. This is smaller than Δx , so therefore it can be thought of as a multi-photon region where multiple photons can interfere.

Next, for the case of bulb, $(1.7) \times 10^{-2}$ photons are in the U-channel each moment. Therefore, at each moment, at most one photon exists in the u-channel, which is of course much larger than the delta obtained above and the case can be concluded to be a single-photon limit.

3.3.2. Considering misalignment and blocker diffraction

In the case of laser experiment, assuming that the blocker completely obscures the front of the double slit, the gap between the blocker positions 3 and 4 should be equal to the slit width of 0.085 mm. However, the gap between the two positions was actually measured to be nearly twice as much, and also in the case of the asymmetric interference, the regression result was poor.

As a cause of this phenomenon, it is possible to suggest that diffraction occurs because there is basically a distance of about 1 cm between the double slit and the blocker. The width of the blocker slit is about 2 mm, and it does not affect the diffraction result when positioned in the middle, but when the boundary directly affects as the asymmetric case, this effect should be considered. The second cause - the misalignment of the double slit compared to the source slit can be suggested, too. Basic alignment was confirmed by the difference in intensity of peak from two slits, but since light from source slits to double slits is influenced by single slit diffraction, it is difficult to confirm the (phase difference) effect of misalignment only by the difference in intensity. Considering these effects, we decided to retry the fit using the Fraunhofer formula, considering the triple diffraction of source slit-double slit, double slit-blocker, blocker-detector slit and wavelength bandwidth at the same time, for one case of asymmetric case which showed the poor fit result. The figure below shows the result of fitting when fixing all dimensions

of the aperture and the wavelength line width of the source as true values, and changing only the misalignment and blocker positions of the double slit.

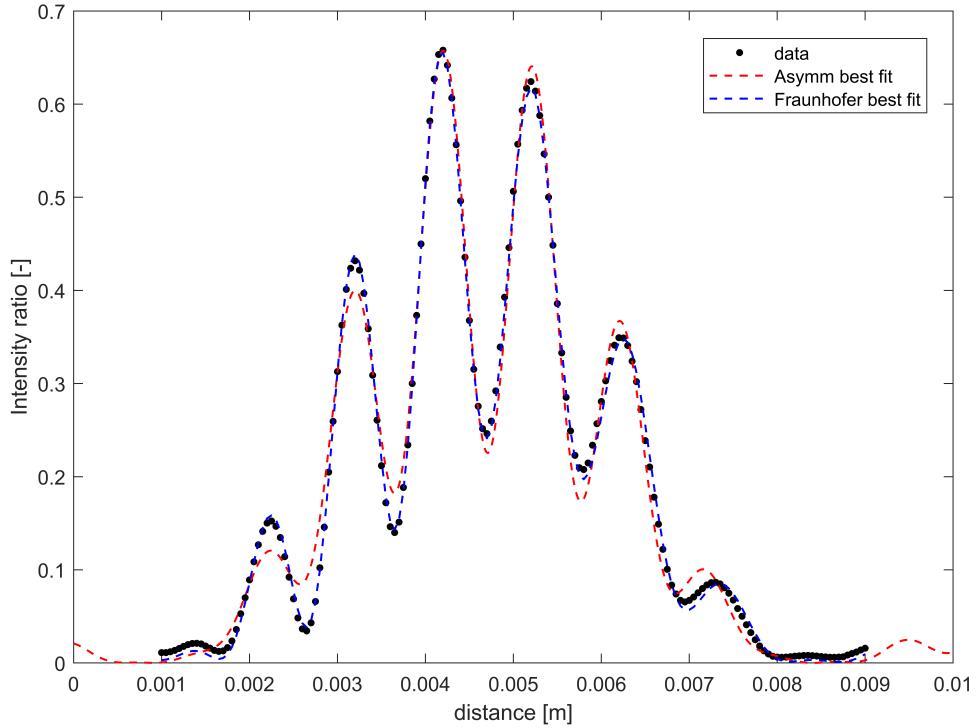


Figure 18. The newly fitted data using 3-order Fraunhofer diffraction.

While the fitting model in the main text uses too many fitting variables compared to the resolution of the data, and consequently couldn't get enough accuracy with the true value, it can be seen that the fitting model describes both asymmetry and functional shapes very well only by the operations that can be performed in the experiment.

4. Summary

In this experiment, diffraction of double slits, single slits, asymmetric double slits, etc. was tested in both the laser case of multi-photon region and the single-photon region. Fitting was performed with various regression equations. In both cases, the wave nature of light could be confirmed. In addition, more detailed calibration of pmt and pcit was conducted, and we also showed that the new fitting considering several-time-Fraunhofer diffraction obtained better results than the existing traditional fitting function.

Lock-in Detection and Hall Effect 실험 보고서

Sujin Kim, 김수진

Department of Physics and Astronomy, Seoul National University, Seoul 08826, Korea

E-mail: pesa11@snu.ac.kr

Abstract. 이번 실험은 잡음이 섞인 전기 신호에서 원하는 주파수의 신호를 걸러내는 Lock-in detection을 주제로 하였다. Lock-in detection의 원리를 이해하고 kit를 활용해 직접 이용해보고, 이를 바탕으로 hall effect를 정밀하게 측정하는 것을 목적으로 한다. 먼저 lock-in detection의 구성 요소 4가지에 대한 calibration 실험을 진행했다. 주파수에 따라 preamp의 gain, 위상차, low-pass filter의 gain 등이 변화함을 관찰하였고 그에 따른 output 신호의 변화를 관찰하였다. 그리고 이 실험 결과를 통해 lock-in detection의 최적 조건을 찾았다. 그 이후 적절한 실험 조건 하에서 다양한 signal to noise 값에 대한 lock-in detection을 직접 수행해 보았고, 입력 신호의 DC offset에 따라 변화함을 관찰하였다. 마지막으로 lock-in detection을 hall effect에도 적용하여 최종적으로 자석의 자기 쌍극자 모멘트 값을 계산하였다.

(Dated: 15 June 2022)

1 Introduction

일상생활에서 활용되는 다양한 전기 신호들은 오차와 noise를 포함하고 있다. 이렇게 noise가 섞인 신호에서 원하는 미세한 신호를 검출해내기 위해서는 원하는 신호를 걸러 증폭해야 한다. Lock-In Detection은 복잡한 신호 속에서 원하는 주파수의 신호만 골라낼 수 있다. 이번 실험에서는 Lock-In Detection의 원리를 이해하고 직접 활용해본다. 그리고 이를 바탕으로 주변 잡음에 민감하게 반응하는 Hall effect를 정밀하게 측정하여, 자석의 자기 쌍극자 모멘트를 측정하는 것을 목적으로 한다.

1.1 배경 이론

1.1.1 Lock-In Detection [2]

Lock-In Detection은 여러 주파수가 섞인 신호에서 원하는 주파수의 신호를 걸러내는 역할을 한다. 그 원리는 다음과 같다. Lock-In amplifier는 noise의 임의의 시간에 대한 시간 적분의 평균값이 0이 된다는 사실을 이용한다. 이는 이 noise가 아무런 유의미한 정보를 담고 있지 않을 때 성립하는 가정이다. 우리가 원하는 유의미한 신호를 담고 있는 경우, 동일한 주파수를 가진 reference signal과 mixing하면 시간적분 평균값이 0이 아니다. Lock-In amplifier는 적절한 reference signal을 주어 원하는 주파수의 신호를 DC 성분으로 변환한 뒤, 이를 low pass filter를 통해 걸러내는 방식으로 작동한다. 얼마나 정확하게 원하는 주파수의 신호를 걸러낼 수 있는지는 low pass filter의 roll-off에 크게 의존한다. roll off란 filter의 critical frequency에서 벗어날 때 gain이 얼마나 빠르게 감소하는지 기울기를 의미한다. 이를 수식으로 설명하면 다음과 같다. Input signal의 위상을 ϕ , 진동수를 ω_{in} , 진폭을 $\sqrt{2}V_0$ 라 하면 식 (1)과 같이 쓸 수 있다.

$$V_{input}(t) = \sqrt{2}V_0 \cos(\omega_{in}t + \phi) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} (e^{i(\omega_{in}t + \phi)} + e^{-i(\omega_{in}t + \phi)}) \quad (1)$$

이에 대해 부여하는 reference signal의 진동수 ω_r 로 나타내면 식 (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$V_R(t) = \sqrt{2}e^{-i\omega_r t} = \sqrt{2}\cos(\omega_r t) - i\sqrt{2}\sin(\omega_r t) \quad (2)$$

두 신호를 mixing한 signal은 식 (3)과 같다.

$$V_{mix}(t) = V_{input}(t)V_R(t) = V_0 \left[e^{i(\omega_{in}-\omega_r)t + \phi} + e^{(-i(\omega_{in}+\omega_r)t + \phi)} \right] \quad (3)$$

이 때 $\langle e^{-i((\omega_{in}+\omega_r)t + \phi)} \rangle = 0$ 이 된다. 그리고 $\omega_{in} = \omega_r$ 이 성립할 경우 mixed signal은 식 (4)와 같은 DC 신호가 된다.

$$V_{mix}(t) = V_0 e^{(i(\omega_{in}-\omega_r)t + \phi)} = V_0 e^{i\phi} \quad (4)$$

이제 이렇게 변환된 DC 성분을 low pass filter로 걸러내어 원하는 신호만 걸러내는 것이다. 그리고 Lock-In Detection은 위상 의존성을 가진다. 앞선 식에서 볼 수 있듯이 input 신호와 reference 신호 사이의 위상차 ϕ 에 따라 출력 전압이 달라진다. 즉, Lock-In Detection은 주파수, 위상차에 민감하게 반응하는 장치이다.

Lock-In Detection을 실제로 구현하기 위해 DBM(Double Balanced Mixer)를 활용한다. 이 Mixer는 Figure 1.과 같은 회로를 가지고 있으며, input 신호에 reference 신호의 부호를 곱한 것이 output으로 나가는 구조를 가지고 있다. DBM에 low pass filter를 연결하여 Figure 2.와 같이 신호를 걸러낼 수 있다.

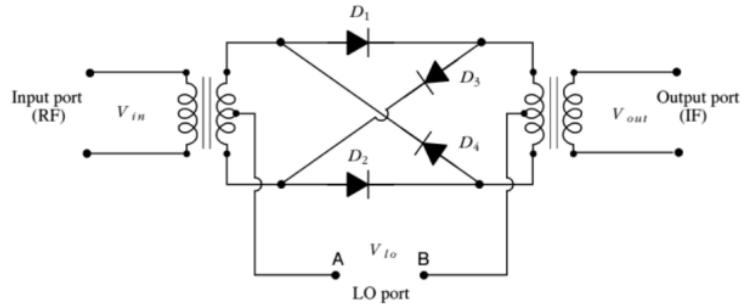


Figure 1. DBM의 회로 개요도. $V_{out} = V_{in} \operatorname{sgn}(V_{lo})$ 의 구조이다.

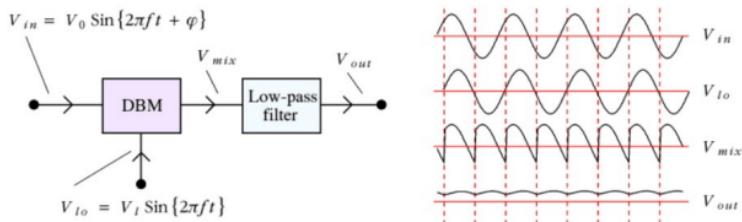


Figure 2. Lock-In Detection의 회로 개요도 및 신호의 예시. DBM을 지난 파형은 Figure 1.의 식을 따르고, low pass filter에서 DC 성분으로 신호가 걸러진다.

1.1.2 Hall Effect [1]

Hall effect는 어떤 시료에 전류가 흐르고 그 전류의 방향에 수직인 방향의 자기장이 걸리면, 시료 내에 전류, 자기장의 방향에 모두 수직인 방향으로 전위차가 생기는 현상이다.

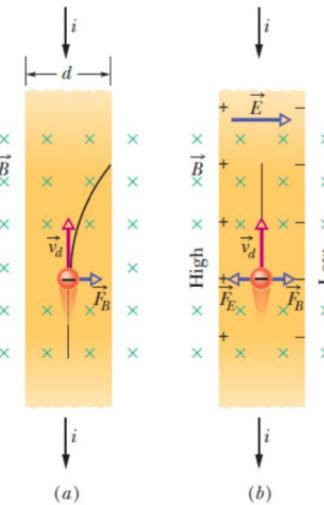


Figure 3. Hall effect의 발생 원리. 시료에 전류가 흐르고, 내부의 전자가 유동속도로 움직일 때 수직방향의 자기장이 걸린다.

Figure 3.와 같이 시료에 전류 i 를 흘려주고 이에 수직한 방향으로 자기장 B 를 걸면, 전류와 반대방향으로 움직이는 전자들은 로렌츠 힘을 받아 진행 방향이 오른쪽으로 휘게 된다. 이렇게 여러 전자들이 시료의 오른쪽에 쌓이게 되면, 상대적으로 왼쪽에는 양전하의 밀도가 증가하여 시료 내에 전기장이 새기게 된다. 즉, 전위차가 형성되어 전기장에 의한 힘이 전자에 가해진다. 전기력과 로렌츠 힘의 방향은 반대이고, 이 두 힘이 평형을 이루기 전까지 전기장이 강해진다. 평형 상태에서의 전위차는 식 (5)와 같다.

$$V_H = Ed \quad (5)$$

전기력과 로렌츠 힘이 평형을 이루므로 전자의 유동속도 v 에 대해 식 (6)과 같이 쓸수 있다. 즉, 홀 전압은 전자의 유동속도와 자기장의 곱에 비례한다.

$$eE = evB \quad (6)$$

전자의 유동속도와 전류 사이의 관계가 식 (7)과 같이 써진다. n 은 전하 밀도, e 는 전자의 전하량, A 는 시료의 단면적이다. 즉, 전자의 유동속도는 전류에 비례하고, 입력 전압에 비례하게 된다.

$$i = -nevA \quad (7)$$

결론적으로 홀 센서의 출력전압이 되는 홀 전압은 입력 전압과 자기장의 직교 성분의 곱에 비례하여 얻어진다. 이 관계를 활용하여 홀 센서의 출력전압으로 자기장을 측정하고, 자석의 쌍극자 모멘트를 측정할 수 있다.

이번 실험에서는 NdFeB 자석과 막대자석을 활용하여 자기장을 생성한다. 홀 전압을 바탕으로 자석의 쌍극자 모멘트를 측정하기 위해서는 자석이 생성하는 자기장 식을 얻어야 한다. 두 자석 모두 직육면체 형태의 자석이며, 이 자석에 의해 가해지는 수직방향의 자기장 성분을 Biot-Savart law를 바탕으로 계산할 수 있다. 막대자석의 경우 직사각형 형태의 코일에 일정한 전류가 흐르는 형태로 생각할 수 있다. 자석의 한 면을 이루는 가로길이를 a , 세로 길이를 b 라고 하고 그 면에 수직 방향인 성분을 z 방향으로 설정하자. z 방향 길이 h 를 가지는 자석의 z 방향 자기장은 다음과 같다.

$$B(z) = \frac{\mu_0 m}{ab\pi} \left[\arctan \frac{ab}{2z\sqrt{4z^2 + a^2 + b^2}} - \arctan \frac{ab}{2(z+h)\sqrt{4(z+h)^2 + a^2 + b^2}} \right] \quad (8)$$

입력 전압에 대한 홀 전압의 비를 바탕으로 자기장을 계산하고, 위 식으로부터 자석의 쌍극자 모멘트를 측정할 수 있다.

2 Experiment

이번 실험에서는 Teachspin Lock-In Amp. Kit를 활용하여 실험을 진행하였다. Function generator, oscilloscope 를 활용하여 신호를 만들고 분석하였다. Lock-in kit에서 preamp, detector, low-pass filter, phase shifter, noise generator를 이용하여 실험을 진행하였다. Lock-In detection을 위해서는 function generator로 생성한 신호를 preamp를 활용해 증폭하고, noise generator를 거쳐 적절한 noise를 포함시킨다. 그리고 주파수를 알고있는 reference signal의 phase를 phase shifter를 활용해 적절히 조절한 뒤, DBM을 활용해 두 신호를 mixing한다. 이는 장치의 Lock-in detector가 담당한다. 그리고 low-pass filter를 거쳐 DC 성분 진폭을 검출한다. 키트에 내장된 reference oscillator의 성능이 좋지 않으므로 function generator를 활용해 생성하였다. 그리고 모든 검출 과정은 오실로스코프를 활용하였다. Hall effect 실험의 경우 MG910 GaAs 홀 소자를 활용해 실험을 진행하였다. 이 소자는 4-probe contact가 이미 형성되어 온 완성형 소자로, 내부 증폭 없이 편리하게 홀 효과를 측정할 수 있었다. 홀 소자는 역전압, 가열, 과전압, 과전류 등에 민감하므로 이에 주의하여 실험을 진행하였다. 모든 실험에 대한 구체적인 실험 조건은 SM에 기재되어 있다.

2.1 Lock-in amplifier 구성 요소 실습

Lock-in amp를 구성하는 요소들은 완벽하지 않아, 사전의 calibration 실험을 거쳐야 한다. 이를 바탕으로 최적의 lock-in detection 조건을 찾아 추후의 lock-in 실험에서 활용하도록 한다.

2.1.1 주파수에 따른 Preamp gain의 변화 확인 실험

Preamp의 gain은 입력 신호를 몇 배로 증폭할 것인지를 결정한다. Gain 값은 사용자가 설정해줄 수 있지만, 특정 주파수 영역을 벗어나면 gain이 감소하기 시작한다. Figure 4와 같은 실험 구성을 만들고, preamp의 gain이 3dB 줄어들기 시작하는 3dB frequency를 측정한다. 여러 주파수에서 gain값을 기록하고, 이 데이터를 선형회귀하여 3dB frequency를 계산한다. 높은 gain에서는 입력 전압을 충분히 낮추어 장비의 손상을 방지하였고, function generator

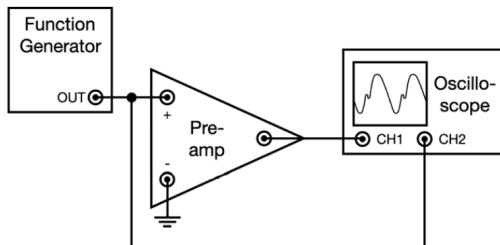


Figure 4. 주파수에 따른 preamp gain의 변화 확인 실험의 회로도.

의 입력 신호도 오실로스코프에 함께 나타내어 2채널 진폭 비교의 방식으로 gain을 계산하였다. 실험은 preamp gain 2, 10인 조건으로 진행하였다.

2.1.2 Phase shifter의 거동

Phase shifter도 마찬가지로 주파수에 따라 틀어지는 현상이 발생한다. Figure 5와 같은 실험 구성으로 Phase shifter의 phase를 0으로 고정해 놓은 상태에서, 주파수를 변경해가며 실제 신호의 위상차를 측정한다. 선형 회귀를 통해 phase와 주파수 간의 slope를 계산한다.

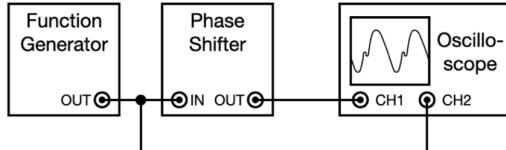


Figure 5. 주파수에 따른 phase shifter 거동 확인 실험의 회로도.

2.1.3 DBM 활용 실험

Lock-in amplifier는 입력 신호와 reference signal의 위상차에도 크게 영향을 받는다. Figure 6과 같은 실험 구성에서 두 신호의 위상차를 변경시켜가며 출력되는 mixed 신호를 직접 확인하였다.

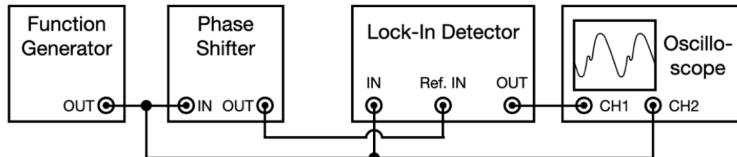


Figure 6. 위상차에 따른 DBM mixed 신호 확인 실험의 회로도.

2.1.4 Low-pass amplifier 실험

Low-pass amplifier는 시상수, roll off를 조절할 수 있다. Figure 7과 같은 실험 구성을 만들고, 실험에서 사용 가능한 roll off, 시상수의 조합을 바꾸어 가며 주파수에 따른 gain을 측정한다. 실험에서 사용한 roll off 값은 12dB/oct, 6dB/oct이고 시상수 값은 0.3, 0.1, 0.03으로 총 6가지의 실험 조건에서 실험을 진행하였다.

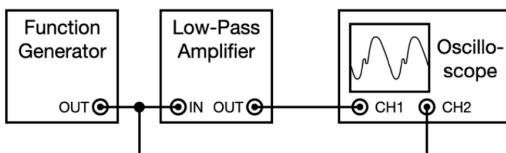


Figure 7. Low-pass amplifier 실험의 회로도.

2.2 Lock-in amplifier 활용 실험

2.2.1 Noise가 포함된 signal의 FFT 관찰

입력 신호를 noise generator에 통과시켜 noise를 섞을 수 있다. Figure 8과 같은 실험 구성에서 오실로스코프를 활용해 noise를 섞기 전과 후의 FFT 스펙트럼을 관찰한다.

2.2.2 Lock-In detection 수행

앞서 진행했던 실험들의 결과를 바탕으로, lock-in detection을 진행할 수 있는 최적의 조건에서 Figure 9의 회로를 구성한다. 그리고 다양한 S/N(signal to noise ratio)값에 대해 signal을 잡음으로부터 걸러낸다. 신호가 최대가 되는 phase를 찾기위해, phase에 따른 low-pass amplifier의 출력을 측정하여 phase에 따른 gain의 2차 함수 fitting을 진행한다.

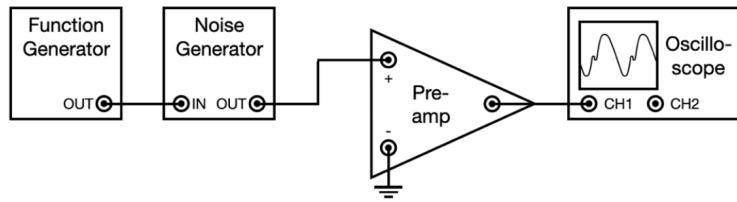


Figure 8. Noise가 포함된 signal의 FFT 관찰 실험의 회로도.

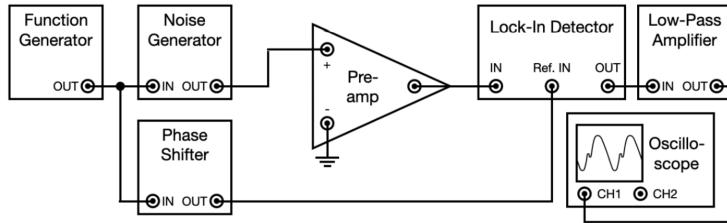


Figure 9. Lock-in detection 실험의 회로도.

2.2.3 Lock-In detection의 DC-offset 영향 측정

이상적인 lock-in detection에서는 입력 신호에 DC offset을 더해도 결과가 달라지지 않아야 한다. 그러나 실제 실험계에서는 이를 따르지 않을 수 있어, function generator의 DC offset에 따른 gain의 변화를 측정해 이를 확인해보았다. 그리고 DC offset에 따른 gain을 선형 회귀하여 기울기를 구하였다.

2.3 Hall effect 실험

자석을 홀 소자의 면에 수직한 자기장이 걸리도록 위치하면 홀 소자에서 홀 효과가 발생한다. 이 신호를 lock-in detection을 이용해 검출해내는 실험이다. Figure 10과 같은 실험 구성에서, 자석과 홀 소자 간의 거리를 변경시키며 gain을 측정한다. Lock-in detection이 최대로 일어날 수 있는 위상을 찾고, 거리에 대한 gain 그래프를 바탕으로 식(8)로 회귀하여 자석의 쌍극자 모멘트를 계산한다.

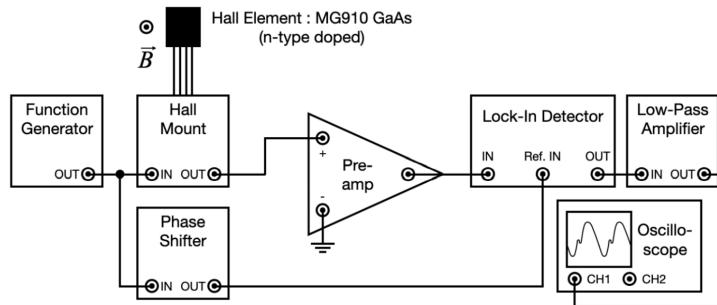


Figure 10. Hall effect 실험의 회로도.

3 Result

3.1 Lock-in amplifier 구성 요소 실험

3.1.1 주파수에 따른 Preamp gain의 변화 확인 실험

주파수에 따른 preamp의 gain 변화는 Figure 11과 같다. 낮은 주파수에서는 gain이 preamp의 gain값과 일치하지만, 특정 주파수 이상의 경우 gain이 살짝 증가했다가 선형적으로 감소하는 경향을 보인다. 각각의 데이터에서 감소하는 경향을 가진 부분을 잘라 선형 회귀를 하면, Figure 12의 그래프를 얻을 수 있다. R^2 값에 의해 선형 회귀가 적절함을 알 수 있다. 또한 회귀를 통해 3dB frequency를 구하는 방법은 다음과 같다. 식 (9)에 의해, 3dB 만큼 감소하는 것은 약 0.707배의 gain 감소를 의미한다는 것을 알 수 있다. 이를 바탕으로 구한 gain에 따른 3dB frequency와 불확실도는 Table 1과 같다.

$$-3dB = 20\log(Gain), \quad Gain = 0.707 \quad (9)$$

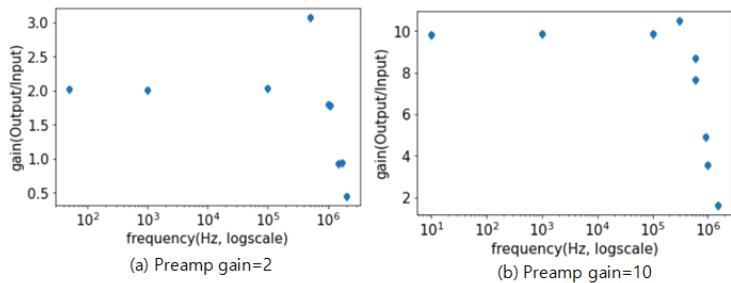


Figure 11. 주파수에 따른 gain의 변화를 나타낸 그래프. 주파수는 logscale로 나타나 있다. (a) Preamp gain=2, (b) Preamp gain=10인 경우.

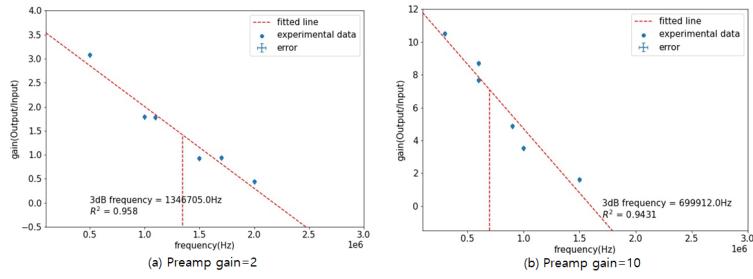


Figure 12. 주파수에 따른 gain의 변화를 나타낸 그래프. 주파수는 3dB frequency 근처에서만 나타났다. (a) Preamp gain=2, (b) Preamp gain=10인 경우. 각각 $R^2 = 0.958, 0.9431$ 이다.

Preamp gain	3dB frequency(Hz)
2	1346705.0 ± 36222.5
10	699912.0 ± 69688.0

Table 1. Preamp gain에 따른 3dB frequency와 1σ 불확실도.

3.1.2 Phase shifter의 거동

주파수에 따른 위상차는 Figure 13과 같이 나타났다. 이 그래프에서 phase shifter의 값이 0으로 고정되었음에도

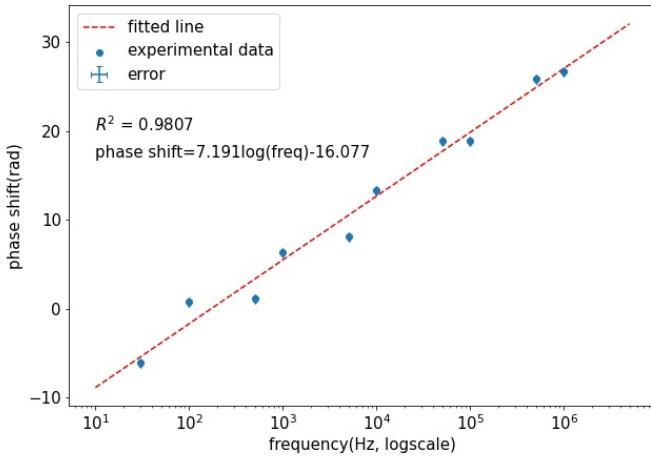


Figure 13. 주파수에 따른 위상차를 나타낸 그래프. $R^2 = 0.9807$ 로 선형 회귀가 적절함을 알 수 있다. 선형 회귀 함수는 $\text{phase shift} = 7.191\log(\text{frequency}) - 16.077$.

불구하고 주파수의 logscale에 선형적으로 위상차가 변화한다는 것을 알 수 있다. 그래프에서 y축의 위상차 값은 0

부터 360도 사이의 측정 값을 적절한 정수 n 에 대해 $360n$ 의 값을 더하거나 빼어 계산하였다. 그래프의 기울기는 7.191 ± 0.356 으로 나타났다.

3.1.3 DBM 활용 실험

Phase shifter의 값을 조정하여 input과 reference signal의 위상차가 $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 가 되는 위치에서 mixed signal을 얻었다. Input signal과 mixed signal을 함께 나타낸 그림은 Figure 14와 같다. 이 때 preamp의 gain은 2로 두었다. 위상차가 0일 때 모든 output signal이 양수가 되어 나타나고, 반대로 π 일 때는 모두 음수로 나타남을 알 수

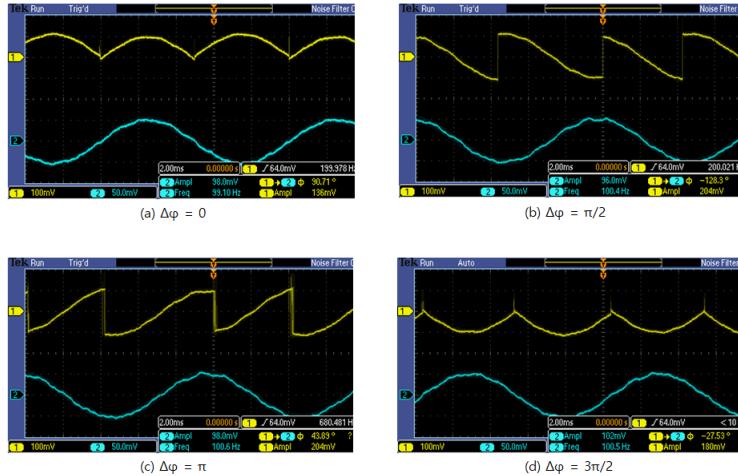


Figure 14. 위상차에 따른 input signal(2)과 output signal(1). 동일한 input signal임에도 output signal의 개형이 위상차에 따라 변화한다.

있다. 또한 위상차가 $\pi/2$ 일 때와 $3\pi/2$ 일 때는 대칭적으로 나타나며, reference signal이 0이 되는 지점에서 output signal의 값이 0이 되는 것을 확인할 수 있다. 앞서 언급한 DBM의 작동 방식을 직접 확인해 볼 수 있었다.

3.1.4 Low-pass amplifier 실험

Low pass amplifier의 시상수, roll off 값을 변경해가며 주파수에 따른 gain 값을 plot하면 Figure 15와 같다. 시상수가 클 수록 cut off frequency가 작아지고, roll off가 클 수록 cut off frequency 이후에 gain의 감소가 급격하게 나타난다는 것을 알 수 있다. Fitting 함수는 식 (10)을 이용하였다. 모든 그래프에서 R^2 값이 적절하므로, low pass filter가 이론과 잘 맞게 거동한다는 것을 알 수 있다. 그래프에서 시상수, roll off에 따른 경향과 fitting 함수에 관해서는 discussion에서 다루도록 하겠다.

3.2 Lock-in amplifier 활용 실험

3.2.1 Noise가 포함된 signal의 FFT 관찰

Noise generator를 통해 noise amplitude를 변화시켜가며 signal에 포함시켰다. 그 결과 output signal과 FFT spectrum을 관찰하면 Figure 16과 같았다. Noise amplitude가 증가할수록 복잡한 FFT 스펙트럼을 보인다는 것을 알 수 있다. 즉, noise는 여러 주파수 성분이 섞인 신호를 더하여 signal을 복잡하게 만든다는 것을 알 수 있다.

3.2.2 Lock-In detection 수행

다양한 S/N 값에 대해 lock-in detection 실험을 진행하였다. Gain이 최대가 되는 phase를 찾기 위해 Figure 17과 같이 각 S/N 값에 대해 gain-phase 그래프를 그려 2차함수 회귀를 진행하였다. R^2 값을 통해 회귀가 적절함을 알 수 있다. 그 결과 center phase는 다음 표와 같이 나타났다.

Noise amplitude	center phase(degree)
10^{-4}	186.25 ± 0.94
10^{-2}	187.64 ± 1.42
10^{-1}	180.34 ± 0.44

Table 2. S/N 값에 따른 center phase의 값. 불확실도를 1σ 로 함께 기재했다.

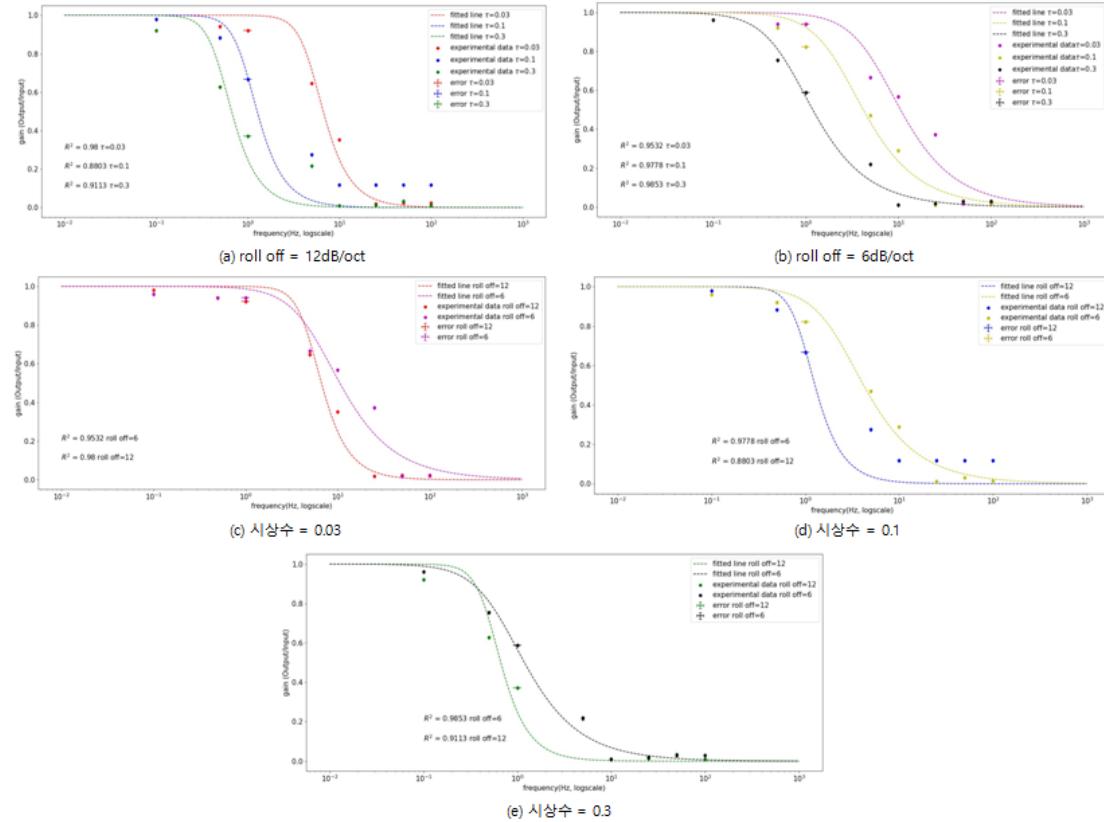


Figure 15. 시상수, roll off에 따른 주파수-gain 그래프. (a) roll off를 12dB/oct, (b) 6dB/oct로 고정하고 3가지 시상수에 대한 그래프. (c), (d) 시상수를 0.03, 0.1, (e) 0.3으로 고정하고 2가지 roll off 값에 대한 그래프. R^2 값을 그레프에 함께 나타나였다.

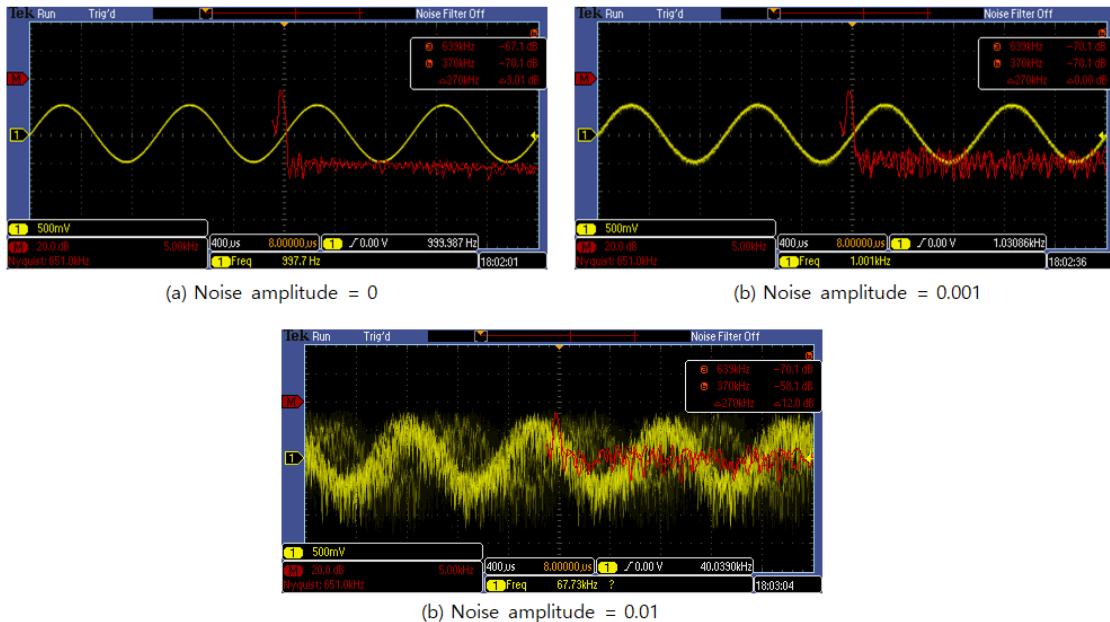


Figure 16. Noise amplitude에 따른 output signal(노랑)과 FFT spectrum(빨강)의 형태. Noise amplitude의 값이 (a) 0, (b) 0.001, (c) 0.01로 점점 증가함에 따라 FFT와 output signal이 복잡하게 나타난다.

3.2.3 Lock-In detection의 DC-offset 영향 측정

Function generator를 활용해 DC offset을 입력 신호에 부여함에 따라 gain은 선형으로 변화하였다. Figure 18.을 보면 $R^2 = 0.95$ 이므로 선형 회귀가 잘 맞으며, 따라서 gain-DC offset의 관계가 선형적임을 알 수 있다. 그레프의

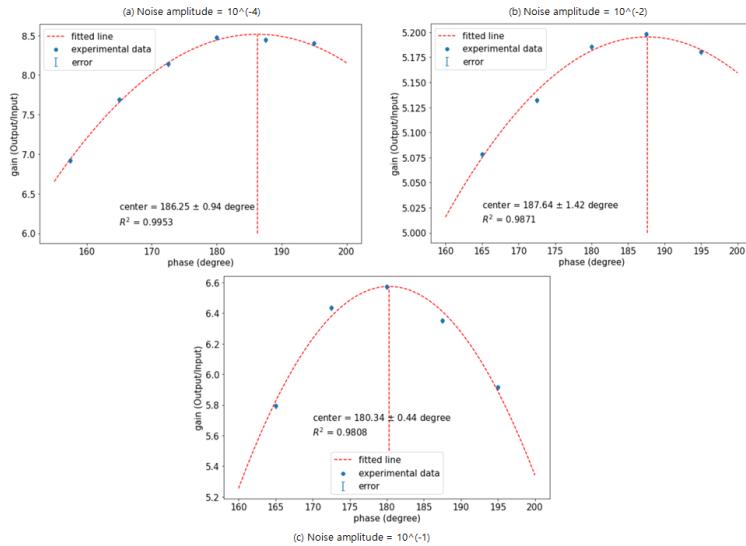


Figure 17. Noise amplitude를 (a) 10^{-4} , (b) 10^{-2} , (c) 10^{-1} 로 변화시켜 관찰한 phase에 따른 gain의 그래프. 각각 R^2 값은 0.9953, 0.9871, 0.9808이다.

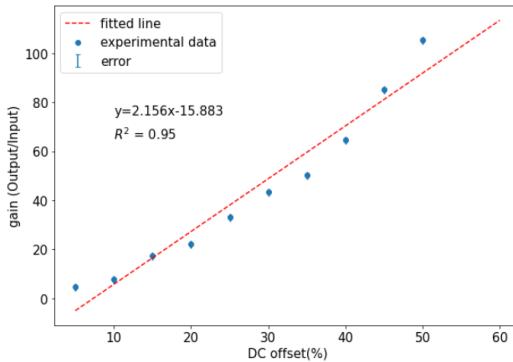


Figure 18. DC offset에 따른 gain의 그래프. $R^2 = 0.95$ 로 선형 회귀가 잘 맞으며, $y = 2.156x - 15.883$ 의 선형 그래프를 따른다.

기울기는 2.156 ± 0.175 로 도출되었다.

3.3 Hall effect 실험

Hall effect 실험에서는 홀 소자와 자석 사이의 거리를 조절해가며 gain값을 측정할 수 있었다. 이번 실험에서 사용한 홀 소자는 50mT의 자기장에 45mV의 홀 전압을 출력한다. 홀 센서는 linear sensor이므로, 측정한 output 전압값으로부터 가해진 자기장을 계산할 수 있다. 이 때 output 전압값에서 아무런 자기장이 가해지지 않았을 때의 offset 전압값을 빼주어야 한다. 이렇게 구한 자기장을 바탕으로 자석 사이의 거리-자기장 그래프를 그리면 Figure 19과 같다. 이를 식 (8)을 바탕으로 fitting하면 점선의 그래프를 얻을 수 있다. $R^2 = 0.9894$ 이므로 실험이 이론과 잘 부합함을 알 수 있으며, 계산된 자석의 자기 쌍극자 모멘트는 $47.42 \pm 23378 J/T$ 이다.[3] 또한 자석과 홀 센서 사이의 거리에 따라 출력이 최대가 되는 phase와 출력 전압은 다음과 같다.

자석까지의 거리(mm)	phase(degree)	output voltage(mV)
30	212.5	5832 ± 32.44
20	210	5843 ± 29.48
10	210	5895 ± 37.91
5	210	6003 ± 46.82
3	210	6049 ± 46.47
2	210	6129 ± 41.85
1	210	6363 ± 45.16

Table 3. 자석까지의 거리에 따른 출력 최대 phase와 출력 전압. 출력 전압은 불확실도를 함께 기재하였다.

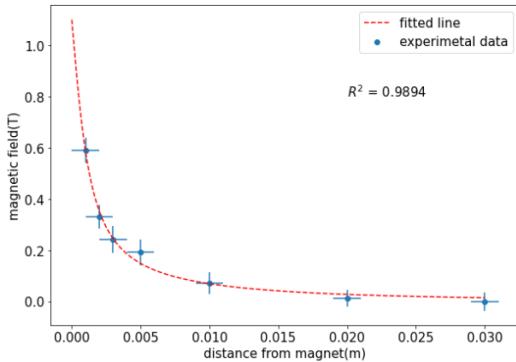


Figure 19. 자석까지의 거리에 따른 자기장 그래프. $R^2 = 0.9894$ 이므로 이론과 실제가 잘 부합함을 알 수 있다.

4 Discussion

4.1 Low-pass amplifier의 gain-frequency 곡선

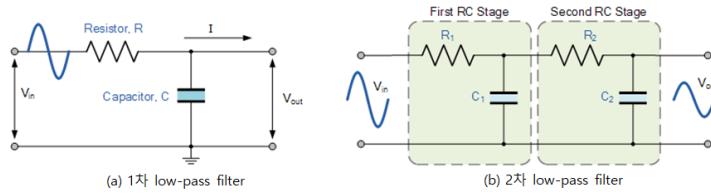


Figure 20. (a) 1차, (b) 2차 low pass filter의 회로도.

Low-pass amplifier의 실험 결과, 시상수가 증가할수록 cut off frequency가 감소하고 roll off가 증가할수록 cut off frequency 이상에서 gain이 급격하게 감소했다. 이러한 결과가 나타나는 이유는 다음과 같이 해석할 수 있다. 단순한 low-pass filter의 경우 Figure 20.(a)와 같은 회로도를 가진다. 전체 임피던스는 $\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$ 이며, output 단자의 임피던스는 $1/\omega C$ 이다. 따라서 gain을 계산해보면 식 (10)을 따를 것이다.

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f\tau)^2 + 1}}, \quad \tau = RC \quad (10)$$

이 식에 의해 gain이 급격하게 감소하는 cut off frequency는 근사적으로 $1/\tau$ 라고 할 수 있다. 일반적으로 이 τ 값을 시상수라 하며, 따라서 시상수가 증가할수록 cut off frequency가 감소하는 것을 설명할 수 있다. 또한 roll off의 경우, 6dB/oct는 1차 low-pass filter의 roll off 값이다. 12dB/oct는 2차 low-pass filter의 roll off 값이다. 2차 low-pass filter는 RC 회로를 2번 연속해서 연결한 것으로 Figure 20.(b)와 같이 나타난다. 이렇게 회로를 연결하면 1차 low-pass filter의 gain 함수를 제곱하는 효과를 준다. 따라서 logscale로 표현되는 dB 차원에서는 2배가 된 값으로 나타나게 된다. 이러한 원리로 2배 더 강한 roll off를 형성하였으며, 실험 데이터 상으로도 기울기의 변화를 관찰할 수 있었던 것이다.

4.2 오차 분석

먼저 lock-in detection 실험의 경우, gain을 측정하는 과정에서 오차가 존재했을 것이다. 오실로스코프 상에서 나타나는 output 전압값이 크게 변동하여 정확한 값을 읽기 어려웠다. Hall effect 실험의 경우 phase 조절 과정에서 최대의 진폭을 가지는 지점을 찾기 어려웠다. 따라서 최대 출력이 나오는 phase 값에 오차가 발생하였을 것이다. 또한 자석과 훌센서를 위치시킬 때 그 상태를 유지하기 어려웠다. 따라서 자석과 훌센서 사이의 거리 측정에 오류가 있었을 것이다. 자기 쌍극자 모멘트 측정 시, 자석의 정확한 크기 값을 알아야 했다. 그러나 자석이 깨져있어 정확한 치수를 재기 어려웠고, 따라서 자기 쌍극자 모멘트 값을 정확히 측정할 수 없었다. 이번 실험에서는 선형 회귀 혹은 2차 함수를 취하여 적절한 값을 구하는 경우가 많았는데, 이러한 회귀가 적합한지 알 수 없다. R^2 값을 보면 나름 타당하다고 할 수 있지만, 실제 함수의 형태를 정확히 알 수 없기 때문에 오류가 발생하였을 수 있다.

5 Conclusion

이번 실험에서는 Lock-in detection을 수행하였으며, 이를 바탕으로 hall effect를 관찰하고 자석의 쌍극자 모멘트를 측정했다. 먼저 Lock-in kit를 구성하는 여러 요소들을 calibration하는 실험을 진행하였다. 그 결과, 주파수가 증가함에 따라 preamp의 gain이 감소하는 현상을 보았고, 3dB frequency를 측정할 수 있었다. 그리고 주파수의 logscale에 선형 비례하여 위상차가 생긴다는 것을 확인하였다. Input 신호와 reference signal의 위상차에 따른 mixed signal을 관찰하였다. 마지막으로 low-pass filter의 시상수, roll off 값을 변경해가며 low-pass filter가 어떻게 높은 주파수를 cut off 하는지 관찰하였다. 이를 바탕으로 직접 잡음이 섞인 신호에서 원하는 주파수의 신호를 걸러내어 보았다. FFT를 활용해 신호에 섞인 noise를 확인하였고, 이를 lock-in detection의 방식으로 걸러내었다. 걸러낸 신호가 입력 신호의 DC offset에 대해 선형적으로 변화함을 확인하였다. 그리고 이 회로에 훨 소자를 연결하여, 자석을 활용해 훌 효과를 만들고 lock-in detection의 방식으로 훌 전압을 출력였다. 그리고 이를 바탕으로 자석의 쌍극자 모멘트를 측정해 보았다. Low-pass filter의 시상수와 roll off에 대해 탐구하였으며, 실험에서 있었던 오차를 분석했다. 결론적으로 이 실험을 통해 lock-in detection이 잡음이 섞인 신호를 어떻게 걸러내는지 이해하고, 직접 활용해 볼 수 있었다.

References

- [1] Walker, Halliday, Resnick. R, 『일반물리학』 10판, 범한서적주식회사(2017).
- [2] K. Sol, 실험 매뉴얼 Lock-in Detection and Hall Effect (2021).
- [3] Jonathan F. Reichert, Geroge S. Herold, Signal Processor Lock-In Amplifier Instructor's Manual, TeachSpin, Inc(2002).

Intermediate Physics Lab Report : Optical tweezers

Author, 권민성

Department of Physics and Astronomy, Seoul National University, Seoul 08826, Korea
E-mail: mhee7173@snu.ac.kr

Abstract. 본 실험에서는 Optical tweezers module을 사용하여 micron-sized particle을 trapping하고 움직여보았다. 원유 지방 입자가 초점에 trapping 되는 것을 통해 Optical tweezers의 z 방향 trapping force를 확인하였다. 또한 silica bead의 브라운 운동을 통해 용액의 유효 점성 최획치를 구하고 이를 기반으로 maximum trapping force를 계산하였으며, 그 값은 유효 점성의 경우 $\sim mPa\ s$, trapping force의 경우 $\sim pN$ 정도로 작용함을 확인하였다. 이를 통해 Optical tweezers의 사용법을 익히고 trapping force가 어느 정도 크기로 작용하는지 확인하였다.

(Dated: 19 May 2022)

1. Introduction

빛은 운동량을 지니며 물체에 의해 빛의 운동량이 변하면 물체는 빛의 운동량 변화와 크기는 같고 방향은 반대인 운동량을 얻게 된다. 이러한 원리로 초점이 맷힌 빛을 이용하면 Optical tweezers를 만들 수 있으며 이는 미소 입자를 조작하거나 세포 혹은 분자를 다루는 데 사용된다. 본 실험에서는 Optical tweezers의 작동 원리를 이해하고 사용법을 익혀 Optical tweezers의 trapping force를 측정하였다.

A. Optical tweezers

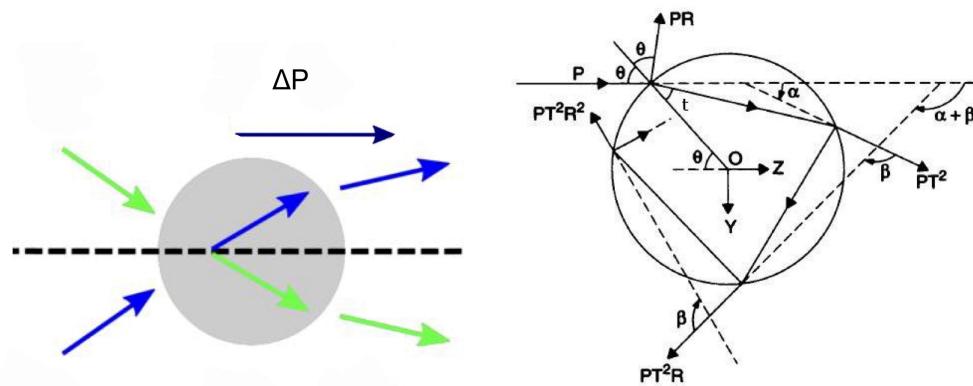


Figure 1: left) 구형 물체에 빛이 입사하는 경우, right) Ray Optics regime ($\lambda \ll R$)[1]

Fig. 1의 왼쪽 그림과 같이 초점이 맷한 Gaussian intensity profile(TEM00 mode)의 빛이 dielectric, linear, isotropic, nondispersive, spatially nondispersive 물체에 가해진다고 생각하자. 물체를 통과하며 그림과 같이 빛의 운동량이 바뀌고, 물체는 바뀐 운동량과 크기는 같고 방향은 반대인 힘을 받으며 이 경우 복원력은 초점 방향을 향한다. 즉 빛의 초점에 optical trap이 형성된다.

물체의 크기가 빛의 파장보다 큰 경우 Ray optical approach가 가능하다. Fig. 1의 오른쪽 그림과 같이 물체에 θ 의 각도로 단위 시간당 에너지 P_{beam} 인 빛이 입사하는 경우 물체가 받는 힘은 다음과 같다. 이때 R_r 은 reflectance, T 는 transmittance이다.

$$F_z = n_m \frac{P_{beam}}{c} Q_s, \quad Q_s = 1 + R_r \cos(2\theta) - \frac{T^2 (\cos(2\theta - 2t) + R_r \cos(2\theta))}{1 + R_r^2 + 2R_r \cos(2t)} \quad (1)$$

$$F_y = n_m \frac{P_{beam}}{c} Q_g, \quad Q_g = R_r \sin(2\theta) - \frac{T^2 (\sin(2\theta - 2t) + R_r \cos(2\theta))}{1 + R_r^2 + 2R_r \cos(2t)} \quad (2)$$

위 식을 초점이 맷한 Gaussian intensity profile(TEM00 mode) 빛에 대해 구면의 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 적분하면 구형 물체에 가해지는 힘을 알 수 있다.

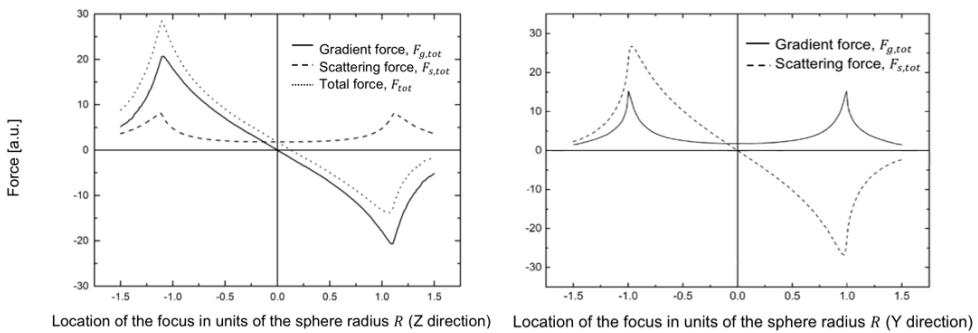


Figure 2: Ray Optics regime ($\lambda \ll R$)에서 focus로부터 구형 물체의 거리에 따른 복원력[1]

Fig. 2에서 Optical trap이 형성된 모습을 확인할 수 있다. 본 실험에서 사용하는 bead의 크기는 $\sim \mu\text{m}$ 정도의 크기이고 Laser는 658nm의 파장을 가진다. 일반적인 scattering을 고려하여 나타낸 빛의 세기와 복원력의 크기는 다음과 같다.

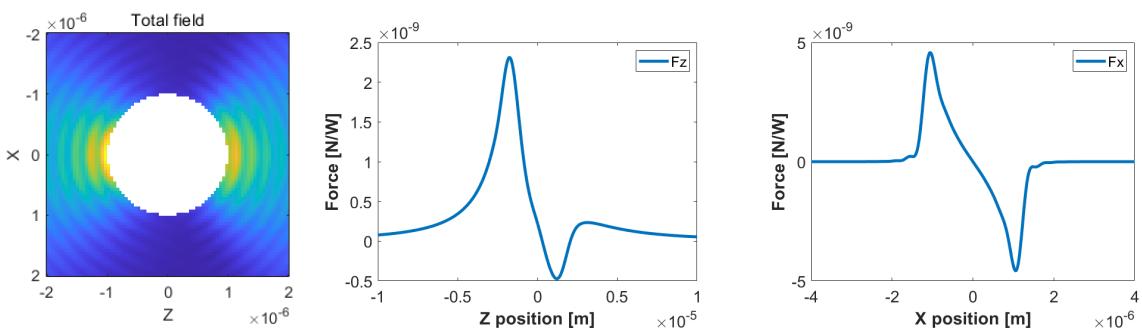


Figure 3: 구형 물체에 의해 scattering 된 빛의 세기와 focus까지의 거리에 따른 복원력의 크기, $R = 1\mu\text{m}$, $NA = 1$, $n_{bead} = 1.59$

B. Brownian motion

유체에 떠 있는 micron-sized particle은 열운동 하는 유체 분자의 충돌에 의해 무작위적인 운동을 보인다. 이를 브라운 운동이라 하며 브라운 운동은 Langevin equation을 통해 기술할 수 있다.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{ext} \quad (3)$$

$\langle x \frac{dx}{dt} \rangle = g$ 라 하자. Eq. 3에 x를 곱하고 시간평균 한 후 $\langle x F_{ext} \rangle = 0$ 과 Equipartition theorem ($\langle mv^2 \rangle = k_B T$)을 이용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\langle mx \frac{d^2x}{dt^2} \rangle + \langle \mu x \frac{dx}{dt} \rangle = \langle x F_{ext} \rangle \rightarrow m \frac{dg}{dt} - \langle mv^2 \rangle + \mu g = 0 \quad (4)$$

$$\langle x \frac{dx}{dt} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{k_B T}{\mu} \left(1 - e^{-\frac{\mu}{m} t} \right) \rightarrow \langle x^2 \rangle \approx \begin{cases} \frac{k_B T}{m} t^2, & t \ll \frac{m}{\mu} \\ \frac{2k_B T}{\mu} t, & t \gg \frac{m}{\mu} \end{cases} \quad (5)$$

C. Stoke's formula

Navier-Stokes 방정식에서 nonlinear term의 영향을 무시하고, 유체가 incompressible이라 고 가정하면 일반적으로 구형 물체에 속도 v 의 steady flow가 흐르는 경우 물체에 가해지는 힘을 계산할 수 있다.[3]

$$F = \int (-p \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) dS = 6\pi R \eta v \quad (6)$$

이 때 stress tensor $\sigma_{ik} n_k = -pn_i + \sigma'_{ik} n_k$ 이며 $p = -\frac{3\eta v}{2R} \cos \theta$, $\sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta v}{2R} \sin \theta$ 이다. Stoke's formula는 $Re \lesssim 0.5$ 인 경우 성립하며 본 실험의 경우 flow 속도는 $\sim 0.1 mm/s$, 물체의 크기는 $\sim 1 \mu m$, dynamic viscosity는 $\sim 1 mPa \cdot s$ 이므로 Stoke's formula를 충분히 사용할 수 있다. 이제 Stoke's formula와 Brownian motion에서 얻은 방정식을 합치면 실험에서 사용할 식을 얻을 수 있다. Eq. 6에서 $\mu = 6\pi\eta R$ 이고 위의 조건에서 $t \gg \frac{m}{\mu}$ 이므로 브라운 운동의 2차원 mean-squared distance의 ensemble average는 다음과 같다.

$$\frac{d \langle r^2 \rangle}{dt} = \frac{2k_B T}{3\pi\eta R} \quad (7)$$

2. Method

본 실험에서는 서울대학교 중급물리실험실에 장비된 Optical tweezers module을 사용하여 실험을 진행하였다.

A. 샘플 제작

샘플로는 silica beads(지름 1, 2, 3 μm)와 원유를 희석하여 사용하였다. 구체적인 샘플 제작법은 아래와 같다.

- (i) silica beads 용액을 잘 흔들어 준 후 비커에 silica beads 용액을 1 방울 넣고 증류수로 약 100배 희석한다.

- (ii) 슬라이드 구멍에 용액을 2~3방울 떨어뜨리고 커버글라스를 기울인 상태로 천천히 덮는다. 이때 흐름과 공기 방울이 생기지 않도록 유의한다.

슬라이드 구멍에 용액을 적게 떨어뜨리는 경우 공기 방울이 생겨 흐름이 생기기 쉬우며, 와이퍼를 사용하여 커버글라스를 눌러줄 경우 공기 방울이 생겨 흐름이 생김에 주의한다. 또한 샘플을 제작한 후 오랜 시간 방치하면 희석한 용액이 증발, silica beads가 침전하여 실험에 지장이 있을 수 있다.

B. 소프트웨어 세팅

- (i) 실험은 ThorCam program의 카메라 기능을 이용하여 실시간 영상을 활용하며 녹화는 avi형식으로 진행한다. 이때 image quality와 pixel clock, FPS를 최대로 설정하게 되면, dropped pct가 $50\pm5\%$ 를 유지하여 FPS가 시간에 따라 변하기 때문에 time interval을 알 수 없게 된다. 따라서 설정은 dropped pct를 최소화하면서 입자를 분간하는 데 어려움이 없을 정도로 설정해야 하며 본 실험의 경우 image quality 75, pixel clock 21MHz, FPS 10으로 사용하였다. 이 경우 dropped pct는 $\sim 1\%$ 이다.
- (ii) Sample positioning stage controller는 setting-advanced 탭에서 각각의 모터에 대해 max velocity $0.03mm/s$, Acceleration $1mm/s^2$ 로 설정하고 Drive Array Velocities 를 0.005, 0.01, 0.02, 0.03 mm/s 로 설정한다. trapping force를 측정하는 실험에서는 상황에 따라 Drive Array Velocity를 수정하여 사용하였다.

C. 레이저 초점잡기

positioning stage를 충분히 밑으로 내리고 샘플을 로딩한다. 이후 샘플을 천천히 올리며 초점 평면이 샘플에 위치하도록 조정한다. 이때 레이저 포인트가 3번 나타났다 사라지는 데, 3번째 레이저 포인트가 생겼을 때가 올바르게 초점이 형성된 상태이다. 샘플을 로딩할 때와 3번째 레이저 포인트가 생겼을 때 대물렌즈와 샘플 간의 충돌을 유의한다.

위 과정을 모두 마쳤다면 이제 Optical tweezers를 사용한 실험을 진행할 수 있다.

D. Manipulating a Dairy Cream Particle in a Cream/Water Emulsion

증류수에 원유를 혼합시킨 용액을 Optical tweezers로 조작해본다. 특히 레이저를 켜고 끌 때, 크림 입자를 포획한 상태에서 샘플을 위아래로 움직일 때 우유 콜로이드가 어떻게 되는지 확인해본다.

E. Measuring the holding force of the optical tweezers

본 실험에 앞서 브라운 운동하는 입자의 Mean squared displacement를 계산하여 유효 점성(η)을 다음과 같이 구하여야 한다.

- (i) Silica beads를 trapping 하는 실험과 같은 상황에서 Metric scaling을 진행한다. draw 기능을 이용하여 원을 화면 양단에 그려 놓은 후 고정된 bead를 positioning stage 를 움직여가며 그려 놓은 원 한 쪽에서 다른 쪽으로 이동시킨다. 후에 전후 좌표를 기록하여 그 거리를 계산한다.

- (ii) 슬라이드에 온도 센서를 부착한 후 온도를 측정한다.(측정값 : 294K) 분석 시 슬라이드가 샘플과 열평형을 이루고 있다고 가정한다.
- (iii) 흐름이 없는 샘플을 만든 후 여러 입자에 대해 브라운 운동을 ThorCam 기능을 이용하여 녹화한다. 이후 트래커 프로그램을 사용하여 변위 데이터를 수집한다.
- (iv) 데이터를 회귀분석하여 유효 점성(η)을 구한다.

이후 Laser의 전류를 30~80mA 사이 8개 값에 대해 stage를 움직여가며 입자를 trapping 할 수 있는 최대 속력을 구하고 위에서 구한 유효 점성 값과 Eq. 6를 사용하여 maximum trapping force를 구한다.

3. Results

A. Manipulating a Dairy Cream Particle in a Cream/Water Emulsion

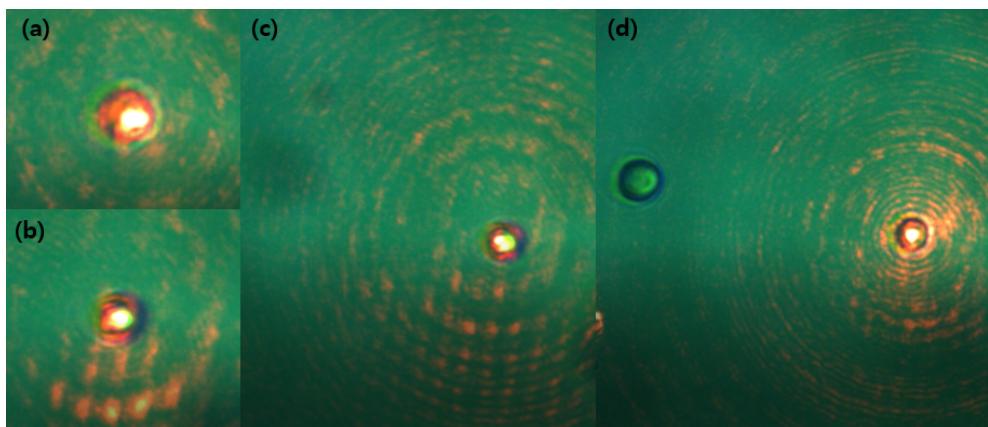


Figure 4: (a)레이저를 칸 직후, (b)레이저에 Cream particle이 포획된 상태 (c),(d)Cream particle을 포획한 후 스테이지를 위아래로 움직인 상태

Fig. 4의 (a), (b)에서 Cream particle이 Optical tweezers에 의해 z 방향 힘을 받아 focal plane 상으로 끌려 내려오며 크기가 작아지는 모습을 확인할 수 있으며 (c), (d)에서 스테이지를 z 방향으로 움직였음에도 Cream particle은 focal plane에 고정되어있어 크기가 변하지 않고 focal plane의 위치가 변함에 따라 보이지 않던 particle이 (d)의 왼쪽에 보이는 상황이다. 이를 통해 Optical tweezers의 z 방향 trapping force가 존재함을 확인할 수 있다.

B. Measuring the holding force of the optical tweezers

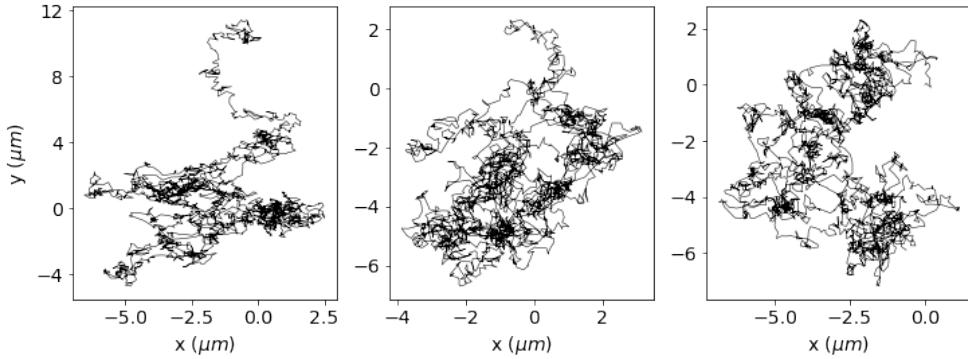


Figure 5: $d_{beads}=3 \mu m$ 인 bead 3개의 브라운 운동 궤적

실제 데이터에서 Eq. 5를 활용하면 선형 경향성을 보기기에 쉽지 않다. 따라서 이를 다시 시간과 입자에 대해 평균 내어 아래의 식을 사용한다. 이때, M은 평균한 입자의 수이며 식의 기울기는 Eq. 5 기울기의 절반임을 유의한다.

$$\langle r^2 \rangle(t_n) = \frac{1}{nM} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^n r_j^2(t_i) \approx \frac{k_B T}{3\pi\eta R} t_n \quad (8)$$

실험을 통해 구한 Eq. 8의 $\langle r^2 \rangle$ 의 불확실도는 실험 과정에서 얻은 불확실도에 더불어 Jackknife resampling method를 사용하여 추정하였다. 회귀직선의 기울기의 불확실도는 이론적으로 $\sigma_{A_i} = \sqrt{\sum_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial Y_j} \right)^2 \sigma_{Y_j}^2}$ 을 따르며 브라운 운동의 경우 데이터의 불확실도가 회귀 불확실도에 비해 크므로 이 또한 고려하여 σ_{Y_j} 를 계산하였다.[2] 다음은 각각의 silica beads에 대한 브라운 운동 Mean squared displacement와 레이저 전류에 따른 trapping 이 가능한 최대 유속(스테이지의 속도) 데이터이다.

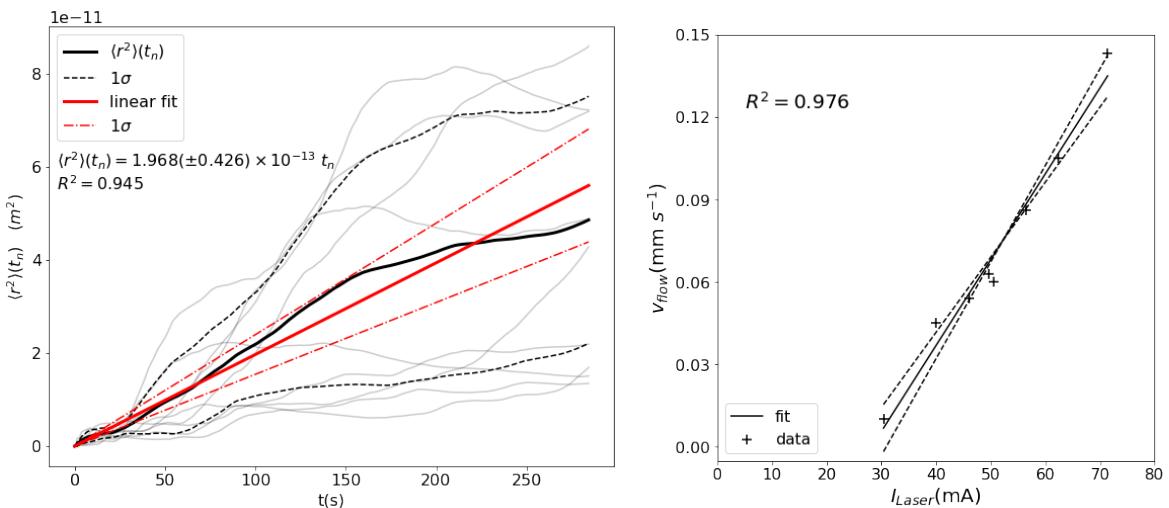


Figure 6: $d_{bead}=3 \mu m$, $v_{flow} = -8.811(\pm 1.023) \times 10^{-2} + 3.123 (\pm 0.196) \times 10^{-3} I_{Laser}$

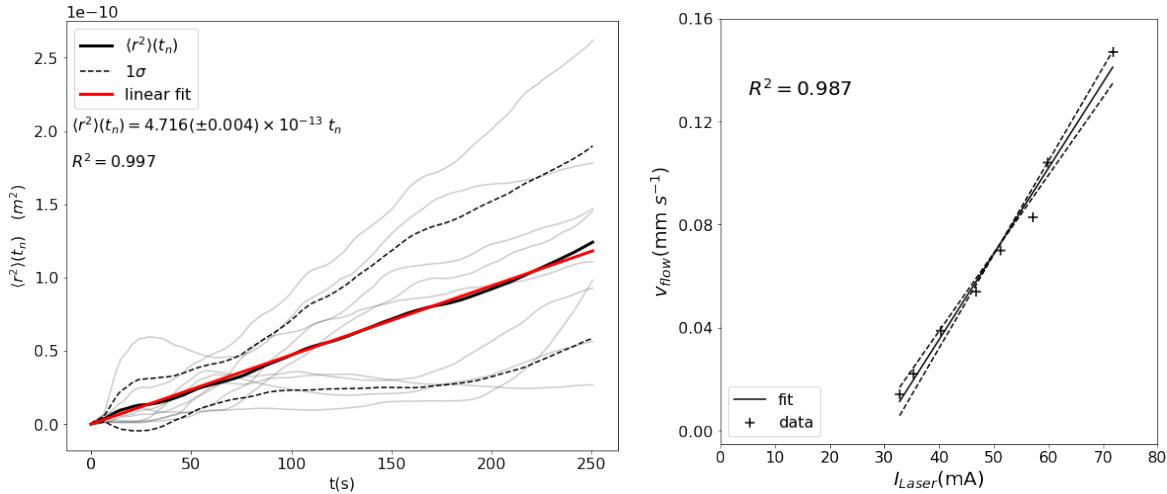


Figure 7: $d_{bead}=2 \mu m$, $v_{flow} = -9.772(\pm 0.077) \times 10^{-2} + 3.326 (\pm 0.151) \times 10^{-3} I_{Laser}$

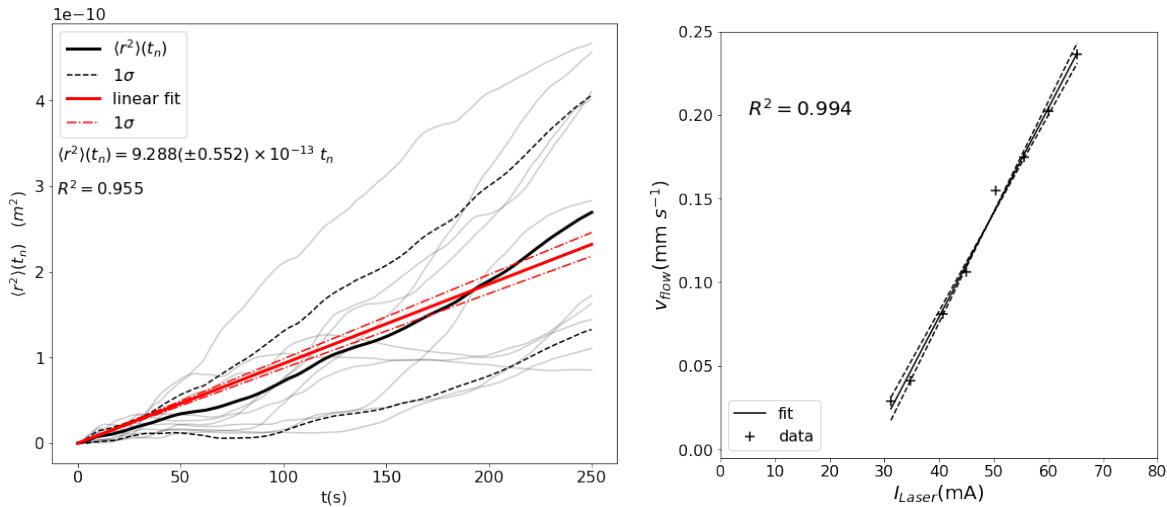


Figure 8: $d_{bead}=1 \mu m$, $v_{flow} = -1.707(\pm 0.093) \times 10^{-1} + 6.245 (\pm 0.189) \times 10^{-3} I_{Laser}$

위 그림의 브라운 운동 데이터에서 배경의 불투명한 데이터는 각 입자에 대해 시간 평균한 mean squared displacement이다. Fig. 7의 왼쪽 그림의 경우 linear fit 회귀선의 불확실도가 매우 작아 상한과 하한을 표기하지 않았다. 회귀식의 경우 v_{flow} 의 단위는 mm/s, I_{Laser} 의 단위는 mA이다.

4. Discussion

A. drift velocity

Results 절에서 사용한 모든 브라운 운동 결과 데이터는 drift velocity를 0으로 두고 산정하였다. 일반적으로 drift velocity는 0이 아니지만, 통계적으로 drift velocity가 존재한다고 할 수 없음을 검증한 후 사용한 결과이다. 일반적으로 브라운 운동의 Δx 는 어떤 분포를 따르는지 알 수 없지만, 본 실험에서 사용한 FPS 10, 즉 0.1초 동안 입자의 좌표 변화 (x

혹은 Δy)는 Central Limit Theorem을 사용하여 정규분포로 근사할 수 있다. 실제로 이 값들이 정규분포를 따르는지 알기 위해서 정규성 검정인 Shapiro-Wilk normality test를 진행하였고 각 bead 지름에 대한 Δx 와 Δy 의 결과를 아래 표에 나타내었다. 또한 변위가 정규성을 따름을 일정 신뢰수준에서 검정하고 난 후 귀무가설 $< \Delta x, \Delta y$ 의 평균이 0이다>에 대하여 양측검정을 시행하였다.

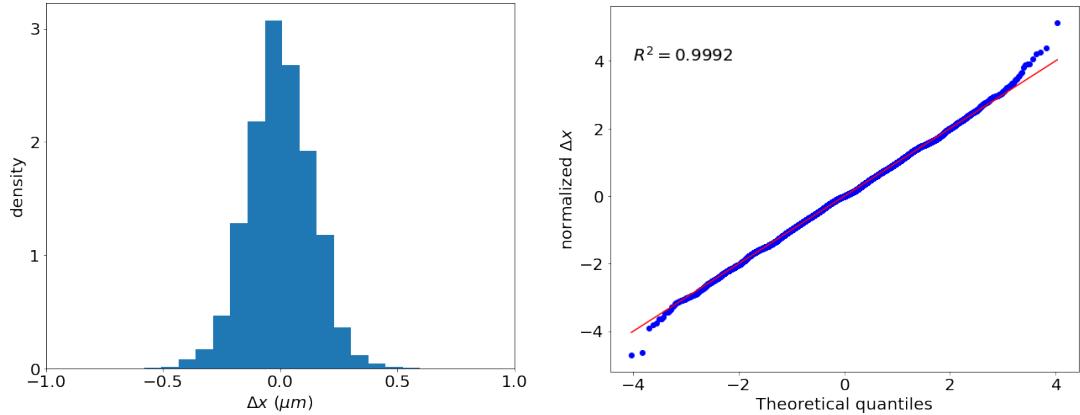


Figure 9: $d_{bead}=3 \mu m$ 인 bead의 브라운 운동 Δx 에 대한 히스토그램과 QQplot

Diameter (μm)	coord.	mean (μm)	σ (μm)	S.W. test p-value	Sample mean t-test
3	Δx	4.975×10^{-3}	0.1301	0.2770	0.9999
3	Δy	-1.099×10^{-2}	0.1371	0.1019	0.9936
2	Δx	8.485×10^{-4}	0.3085	0.1161	0.9978
2	Δy	7.608×10^{-4}	0.2486	0.6072	0.9975
1	Δx	1.186×10^{-3}	0.3758	0.0994	0.9975
1	Δy	6.070×10^{-4}	0.4277	0.1385	0.9989

Table 1: bead의 diameter와 coord.에 따른 평균과 표준편차, Shapiro-Wilk test p-value, Sample mean test p-value

Tab. 1에 따라 유의수준 0.05에서 0.1초당 각 좌표의 변화를 가우스 분포로 근사할 수 있으며, drift velocity가 0이라는 귀무가설을 기각할 수 없다. 따라서 본 실험 분석에서는 drift velocity를 0으로 두었다.

B. viscosity and trapping force

Result 절의 그래프에서 약 30mA 보다 큰 구간의 경우 Laser current와 v_{flow} 가 선형인 구간이 존재하며, 이때 v_{flow} 는 식 Eq. 6에서 drag force에 비례하고, 식 Eq. 2에서 maximum trapping force가 beam power에 비례하므로 본 실험에 사용한 장비는 Laser current와 beam power가 선형인 시스템이다. 또한 Laser current가 존재하지만, 입자가 trapping이 안되는 구간이 존재한다. 회귀 결과와 식 Eq. 6, Eq. 8를 사용하여 각 bead에 대해 유효 점성과 $I_{Laser} = 60mA$ 일 때 trapping force를 측정한 값은 다음과 같다.

Diameter (μm)	$I_{threshold}(mA)$	$\eta(mPa \cdot s)$	maximum trapping force(pN)
3	28.213 ± 3.724	1.459 ± 0.316	4.095 ± 1.095
2	29.381 ± 1.354	0.913 ± 0.001	1.753 ± 0.157
1	27.334 ± 1.704	0.927 ± 0.055	1.783 ± 0.166

Table 2: bead의 diameter에 따른 trapping $I_{threshold}$, 유효 점성, maximum trapping force

Tab. 2에 계산한 유효 점성은 유의수준 0.05에서 모두 같다. 위 결과를 matlab의 Optical Tweezers Toolbox[5]를 사용하여 분석해보자. $R = 1.5\mu m$ 이고 polystyrene의 경우 $n_{bead} = 1.59$, $\lambda = 658nm$ 임을 사용하였을 때, 레이저가 gaussian TEM00 mode의 경우 $NA = \frac{\lambda}{\pi w_0} = 0.095 \pm 0.005$ 이다. 하지만 이 경우 z방향 trap이 존재하지 않는다.(SM에 첨부함) 실험을 통해 z방향 trap이 존재함을 확인하였는데, 이는 Laser의 출력과 전류의 비를 1이라고 가정하였기 때문에 생긴 모순이며, 이를 통해 Laser의 출력과 전류의 비가 정확히 1은 아니며 trapping 가능한 전류에 하한값이 존재하는 이유도 브라운 운동에 더불어 Laser 출력과 전류 사이에 일정 threshold가 존재하는 데 기인한 것으로 추측할 수 있다.

C. viscosity estimation

위의 과정을 통해 유효 점성을 구할 때, 각 데이터가 대칭적인 분포를 가질 것이라 가정한 후 가중평균화하였다. 앞에서 각 Δx 가 근사적으로 정규분포를 따름을 확인하였으므로 $(\Delta x)^2$ 이 카이제곱 분포를 따름을 통해 더 낮은 불확실도로 유효 점성을 추정할 수 있다.[4]

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta R} \Delta t \quad (9)$$

$$\frac{(n-1)\widehat{(\Delta x)^2}}{\langle (\Delta x)^2 \rangle} \sim \chi(n-1) \approx N(n-1, 2n-2) \quad (10)$$

이를 이용하여 추정한 지름 $3\mu m$ 실험에서의 유효 점성은 $\eta = 1.607 \pm 0.010 \text{ mPa s}$ 이다.

D. error analysis

본 실험의 오차 요인으로 motor의 backlash오차, scaling 중 생긴 오차, dropped pct이 0이 아니어서 생긴 time interval 오차, focal plane과 스테이지가 완전히 평행하지 않아 스테이지를 움직였을 때 scaling이 변하여 생기는 오차 등이 있으며 이는 모두 추정치의 불확실도 계산에 고려하였다. 추가적으로 Fig. 9의 원쪽 히스토그램을 bins를 많이 늘렸을 때 히스토그램에 fringe pattern이 나타나는데, 이를 통해 digitization error가 추가되었을 것이라 추측할 수 있다.(SM에 첨부) 이외에도 외부 진동에 의해 입자가 흔들리는 경우 등이 있으나 무시가능한 정도의 오차라 판단하여 분석에 추가적으로 고려하지는 않았다.

References

- [1] S. H. Shin, Department of Physics and Astronomy, *Intermediate physics experiment, Optical tweezers manual*, 2021
- [2] S. Kim, Department of Physics and Astronomy, *Error Analysis for Experimental Physicists*, 1st ed., 2021.
- [3] G. Falkovich, CAMBRIDGE, *Fluid Mechanics*, 2011.
- [4] 서울대학교 자연과학대학 통계학과, 영지문화사, «일반통계학», 개정판, 2019(1996).
- [5] I. Lenton, *Optical Tweezers Toolbox(version 1)*, github, <<https://github.com/ilent2/ott>>, 2022.
5. 19.

중급물리실험 1 : 혼돈 진자

최영환

물리학과, 원자핵공학과, 서울대학교, 서울 08826, 대한민국

E-mail: cyhwan98@snu.ac.kr

Abstract. 혼돈진자는 카오스 현상을 보일 것으로 예측되는 동역학 계이다. 이 보고서에서는 감쇠가 있는 혼돈진자 계의 동역학을 분석하고 감쇠를 적절히 제거함으로써 주어지지 않은 값인 혼돈진자의 퍼텐셜, 즉 복원력을 특정할 수 있는 방법이 제시되었다. 비선형 회귀를 통하여 진자의 감쇠 계수들을 구하였고, 자석과 원판 사이의 거리를 조절해가며 감쇠 계수와 어떤 관계가 있는지를 탐구하였다. 또한 진자는 안정상(Stable), 준안정상(Metastable), 이중가둠상(Doubly Trapped)을 가지는데, 진자가 가지는 에너지를 이용하여 이를 상을 정량적으로 구별할 수 있는 방법과, 각변위-각속도 위상공간 상에 표시되는 진자의 에너지가 얼마인지 특정할 수 있는 방법이 제시되었다. 강제 진동자와 실 훌더 사이의 길이가 변하여 퍼텐셜의 모양이 바뀌는 경우에도 동일한 방법으로 변경된 퍼텐셜을 구하는 방법이 제시되었다. 위상공간을 이용하여 진자가 가지는 에너지와 엔트로피를 대응할 수 있었으며, 그 결과 시간에 따른 엔트로피와 온도의 변화를 확인할 수 있었다. 나아가 혼돈진자 역학계에서 온도와 에너지를 정의하여 계의 열용량을 구할 수 있었고, 그 값이 안정상 또는 준안정상일 경우 발산하는 지점과 음의 값을 가지는 지점이 있음을 확인하였다. 임계온도 근처에서 열용량과 온도를 비선형 회귀근사 함으로써 임계지수 α 를 구하였으며, 이 값이 기존 란다우 평균장 이론과 비교하였다. 서로 다른 온도에 대해 계가 가질 수 있는 자유에너지와 정량적으로 비교해 보았다. 계에 강제구동력이 가해졌을 때 계의 진폭에 대해 분석하였으며, 대략 모터 전압 3.5V에서 특이점을 가지고 5.5V에서 공명점을 가지는 것을 확인하였다. 마지막으로, 카오스 현상을 보이는 듯한 계를 정량적, 정성적으로 분석함으로써 계가 관측 시간 동안에는 카오스 현상을 보인다는 것을 확인할 수 있었다.

(Dated: 5 May 2022)

1. Introduction

1.1. 혼돈 진자의 동역학

이상적인 진자는 조화 진동자로 근사될 수 있다. 조화 진동자는 평형점으로부터 질량 m 을 가지는 점이 평형점으로부터 변위 x 만큼 이동하였을 때, 변위의 반대 방향으로 변위에 비례하는 복원력을 받는 계를 말한다. 시간에 대한 외력 $F(t)$ 가 가해질 때 일반적으로 조화 진동자의 운동 방정식은 식 Eq. (1)으로 주어진다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m} \quad (1)$$

이상적인 경우와는 달리 현실에서는 물체의 운동방향의 반대 방향으로 항력이 작용하게 된다. 항력은 일반적으로 물체의 속도가 증가함에 따라 증가하며, 그 관계는 경험적인 수식으로 얻어질 수 있다. 항력은 물체의 속도가 작을 때 일반적으로 Eq. (2)로 주어지고, 힘의 크기가 속도에 비례함을 알 수 있다 [1].

$$F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A = \gamma \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

즉 진자에 항력을 고려하게 되면 진자의 운동방향의 반대 방향으로 비복원력인 항력을 받게 되므로 시간이 지남에 따라 에너지를 잃게 된다. 이러한 계를 감쇠 진동자라고 하며, 운동방정식은 Eq. (3)으로 주어진다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad (3)$$

만약 계수 k, γ 와 진동자의 질량 m , 시간에 따른 외력 $F(t)$ 와 입자의 초기 위치와 속도 x_0, v_0 를 알고 있고, 외력 $F(t)$ 에 대한 특수해를 알고 있다면 방정식의 해, 즉 입자의 운동을 해석적으로 구할 수 있다. 그러나 만약 항력이 속도에 비례하지 않고 속도의 n 승에 비례하는 경우 일반적인 해석해가 존재하지 않는다. 이때 입자의 운동방정식은 Eq. (4)으로 주어지며 수치적인 방법을 이용해 해를 구하여야 한다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} |\dot{x}|^{n-1} \dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad (4)$$

실험에 사용되는 진자는 병진운동을 하지 않고 회전운동을 한다. 이 경우 입자의 질량 m 은 관성모멘트 I , 변위 x 는 각변위 θ , 외력 $F(t)$ 는 토크 $\tau(t)$ 로 쓸 수 있고, 복원력에 해당하는 $-kx$ 는 복원 토크 $-k\theta$ 로, 항력에 해당하는 $-\gamma(\frac{dx}{dt})^n$ 은 감쇠 항 $-\gamma\dot{\theta}^n$ 으로 쓸 수 있으므로 운동방정식은 Eq. (5)으로 쓸 수 있다.

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma}{I} |\dot{\theta}|^{n-1} \dot{\theta} + \frac{k}{I} \theta = \frac{\tau(t)}{I} \quad (5)$$

본 실험에서 사용되는 진자의 모식도는 Figure 1과 같다. 외부 구동력이 x_1 의 사인형 진동으로

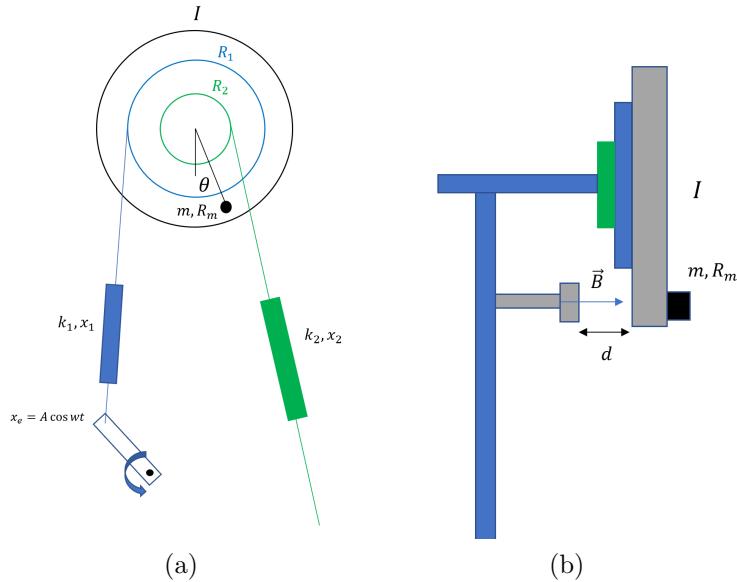


Figure 1: 실험 장치의 모식도. (a) 실험 장치의 정면도에 따르면 원판형 진자에 2개의 용수철 k_1, k_2 와 $A \cos \omega t$ 의 변위를 주는 모터가 실로 연결되어 있다. 질량 m 의 추는 원판에 고정되어 같이 회전한다. (b) 장치의 측면도. 원판형 진자의 뒤에서 거리 d 만큼 떨어진 자석이 자기장 \vec{B} 를 가하여 진자를 감쇠시킨다.

주어지는 경우 복원 토크는 Eq. (6)와 같고, 감쇠 항은 Eq. (7)와 같다 할 수 있다.

$$\tau = -mgR_m \sin(\theta) - k_2(x_{2,0} + R_2\theta) + k_1(x_{1,0} + A \cos(\omega t) - R_1\theta) \quad (6)$$

$$\tau_D = -\gamma |\dot{\theta}|^{n-1} \dot{\theta} \quad (7)$$

그러므로 운동 방정식은 Eq. (8)으로 주어진다.

$$(I + mR_m^2)\ddot{\theta} = \tau + \tau_D = -mgR_m \sin \theta - \gamma|\dot{\theta}^{n-1}|\dot{\theta} - k_2(x_{2,0} + R_2\theta) + k_1(x_{1,0} - R_1\theta + A \cos wt) \quad (8)$$

이때 복원력에 의한 복원 토크는 변위각 θ 에만 의존하는 퍼텐셜 $V(\theta)$ 을 이용하여 Eq. (9)와 같이 축약하여 쓸 수 있다.

$$(I + mR_m^2)\ddot{\theta} = -\frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} - \gamma|\dot{\theta}^{n-1}|\dot{\theta} \quad (9)$$

V 의 θ 에 대한 미분이 θ 에 대한 일차식과 삼각함수의 덧셈꼴로 나타나므로, 실제 감쇠를 분석할 때 퍼텐셜 $V(\theta)$ 로 추정될 함수와 파라미터들은 Eq. (10)와 같이 쓸 수 있다.

$$V(\theta) = a_1\theta^2 + a_2\theta + a_3 + a_4 \cos(\theta + b_5) = b_1 + b_2(\theta - b_3)^2 + b_4 \cos(\theta) + b_5 \sin(\theta) \quad (10)$$

실제 실험에서는 감쇠를 조절하기 위해 Figure 1 (b)처럼 자석을 금속 원판 근처에 거리 d 만큼 떨어뜨려 놓는다. 자석 주변 불균일한 자기장 근처에서 금속 물체가 운동하면 금속 물체의 입장에서는 통과하는 자속이 변하는 것처럼 느껴지고, 유도 기전력이 발생하여 금속 내 유도 전류가 흐르게 된다. 이때 발생하는 유도 기전력의 크기는 자속 변화의 속도에 비례하고, 유도 전류는 유도 기전력에 비례한다. 즉 원판의 회전속도와 원판에 유도되는 전류의 세기는 비례할 것이다. 전류가 자기장 속에서 받는 힘은 로렌츠 힘인데, 로렌츠 힘의 크기는 자기장의 세기와 전류의 곱에 비례하므로, 원판의 회전속도와 원판이 유도전류에 의해 받는 힘은 비례할 것으로 예측할 수 있다. 즉, 감쇠력이 온전히 자석에 의해서만 일어난다면 n 은 1에 가까울 것으로 예측할 수 있다. [2] 그러나 실제 실험에서는 감쇠가 온전히 자석에 의해서만 일어나는 것은 아니다. 공기와의 마찰 또는 원판과 베어링 사이의 마찰 등 여러가지 다양한 감쇠 현상들이 나타날 수 있고 그러한 경우에는 감쇠력의 크기가 각속도에 정비례한다는 보장이 없으므로 n 이 1에서 벗어날 수 있을 것으로 예측된다. 자석과 원판 사이의 거리 d 를 조절함으로써 로렌츠 힘에 의한 감쇠의 세기를 조절할 수 있으므로, 로렌츠 힘이 감쇠의 지배적인 성분이 된다면 n 은 1에 근접할 것으로 예상할 수 있다. 실제 운동에서 나타나는 감쇠를 기술하는 수식 Eq. (4)의 계수(감쇠계수)를 파악하기 위해서는 실제 운동을 측정하고 운동 방정식 Eq. (8)에 대입하여 γ 와 n 을 추정하는 방법이 있다. 그러나 이 방법은 올바른 해에 수렴시키기 매우 어렵기 때문에 실제 감쇠를 분석하는데 무리가 있다. 운동 방정식 대신 에너지를 사용하면 비교적 쉽게 감쇠를 추정할 수 있다. 감쇠는 비복원력이므로 외부에서 에너지 공급이 없다면 감쇠를 통해 감소한 역학적 에너지는 다시 계의 역학적 에너지로 변환되지 않는다. 즉 오직 감쇠를 통해 계의 역학적 에너지가 감소하고 있는 상황이라면 감쇠된 에너지와 남은 역학적 에너지의 합은 일정하다고 볼 수 있고, 이는 Eq. (11)로 표현될 수 있다.

$$U_0 = U + \int_0^t \tau_D d\theta = K + V - \int_0^t \tau_D \dot{\theta} dt = \frac{1}{2}(I + mR_m^2)\dot{\theta}^2 + V(\theta) + \gamma \int_0^t |\dot{\theta}|^{n+1} dt \quad (11)$$

만약 감쇠가 없다면, 즉 $\gamma = 0$ 이면 $-\dot{\theta}^2$ 을 θ 에 대해 그리는 것만으로도 퍼텐셜의 개형을 알 수 있다. 그러나 감쇠항 때문에 실제 측정 데이터로 $-\dot{\theta}^2$ 를 그려보면 진동이 진행됨에 따라 점차 퍼텐셜이 증가하는 것 같은 모양을 보여준다. 이 증가하는 모양의 퍼텐셜에서 적절한 γ 와 n 값을 선택하여 감쇠를 보정해준다면, 감쇠항이 Eq. (7)로 주어진다는 가정이 맞는 한 모든 퍼텐셜 커브가 하나의 곡선으로 수렴할 것이고, 그 곡선이 감쇠를 제거한 계의 퍼텐셜 $V(\theta)$ 라 할 수 있다. 감쇠를 제거하여 퍼텐셜 $V(\theta)$ 를 구하는 데에는 비선형 회귀가 사용되었다. (물론 이렇게 해도 수렴하지 않을 수 있다. 애초에 감쇠가 하나의 term으로 나타나지 않을 것임) - 이거는 discussion에 이 실험에서는 관성 모멘트 I 와 추의 질량 m , 용수철 상수 k_1, k_2 의 값을 모르기 때문에 에너지의 단위가 변형될 것이다. 운동에너지 K 는 $I + mR_m^2$ 와 $\dot{\theta}^2$ 의 곱에 비례하는데, $I + mR_m^2$ 의

값을 모르므로 운동에너지는 $\dot{\theta}^2$ 으로 쓸 것이다. 이 경우 에너지의 단위는 $[J]$ 이 아닌 $[rad^2/s^2]$, 즉 $[s^{-2}]$ 으로 변형되며 이를 수식으로 나타내면 Eq. (12)으로 쓸 수 있다.

$$U'_0 = K' + V' - \int_0^t \tau'_D \dot{\theta} dt = \dot{\theta}^2 + \frac{2}{1 + mR_m^2} V(\theta) + \frac{2\gamma}{1 + mR_m^2} \int_0^t |\dot{\theta}|^{n+1} dt = \dot{\theta}^2 + V'(\theta) + \gamma' \int_0^t |\dot{\theta}|^{n+1} dt \quad (12)$$

추후 이 보고서에서 논의될 퍼텐셜 V 와 감쇠 상수 γ 는 Eq. (12)에 쓰인 V' 과 γ' 를 말하는 것으로, 실제 물리적 단위가 아닌 변형된 단위를 사용할 것이다. 실의 길이에 따라 - 외부 구동력

1.2. 역학계의 열역학적 기술

1927년 Heisenberg의 불확정성 원리가 발표되었다. 불확정성 원리란 입자의 운동량과 위치를 동시에 측정한 경우 두 정확도의 곱에는 상한이 있다는 것이다. [3]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (13)$$

입자가 운동하고 있는 경우 입자를 위치 - 운동량 위상공간에 있는 점으로 나타낼 수 있는데, 그 점은 위상공간 상 크기가 0인 점이 아니라 불확정성 원리에 의하여 크기를 가지는 미시상태 (Microstate)라는 것이다. 불확정성 원리에 의해 이 미시상태의 크기는 대략 \hbar 로 고려된다. 어떠한 계가 입자수와 에너지가 보존될 경우, 즉 평형에 도달한 고립계일 경우 통계역학의 기본 가정에 의하여 모든 접근 가능한 미시상태는 동일한 확률로 관찰된다. 이 계가 도달 가능한 미시상태의 총 갯수를 Ω 라고 한다면, 이 계의 엔트로피는 볼츠만 엔트로피 공식 (Boltzmann's Entropy Formula) Eq. (14)에 의해 주어지고 이를 미세 정준 엔트로피 (Microcanonical Entropy)라 한다.

$$S = k_B \ln(\Omega) \quad (14)$$

진자의 움직임을 변위-운동량 위상공간 상에 표현한 그림은 Figure 2와 같다. 진자가 감쇠 없

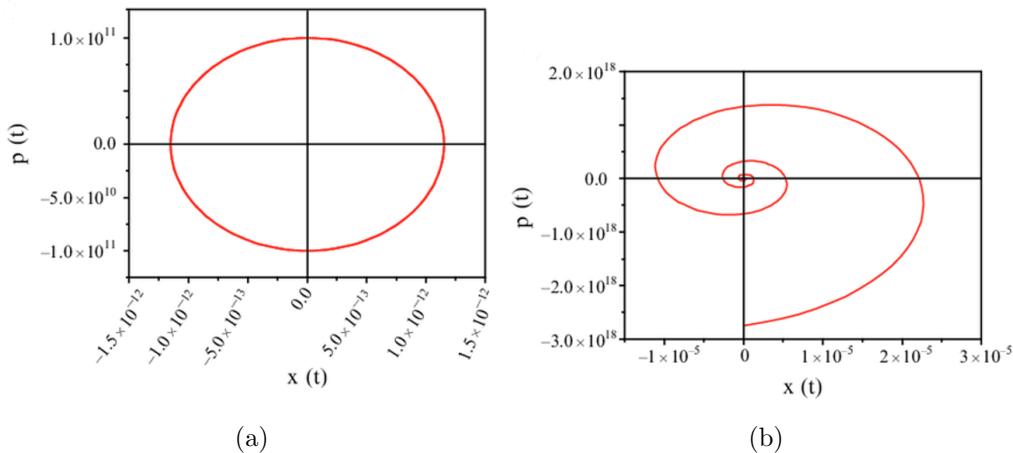


Figure 2: 위상공간 상의 진자의 궤적. x 축은 변위, y 축은 운동량을 나타낸다. (a) 진자에 감쇠가 없는 경우 에너지 보존 법칙에 의해 운동량과 변위가 타원의 방정식을 만족하게 되어 타원형 자취를 그리게 된다. (b) 진자에 감쇠가 작용한 경우 에너지를 잃으면서 변위와 운동량이 점유할 수 있는 범위가 줄어든다. 충분한 시간이 흐르면 궤적은 원점으로 수렴한다.

이 운동한다고 가정하자. 이때 위상공간 상 진자의 궤적은 Figure 2와 같이 주어진다. 진자가 위상공간 상에 점유하는 미시 상태의 갯수는, 진자가 위상공간의 한 영역을 점유하므로 해당 영역의 면적을 미시상태의 크기로 나눠준 것과 같다. 그러나 본 실험에서는 진자가 위상공간의

영역을 얼마나 점유하는지 측정할 방법이 없으므로 엄밀한 의미의 미세 정준 엔트로피를 계산할 수 없다. 그러나 진자가 위상공간 상 점유하는 영역과 진자가 한 주기동안 그리는 위상공간을 감싸는 궤적의 영역이 동일한 방식으로 거동한다는, 즉 비례할 것이라는 가정을 통해 역학계의 주기 평균 미세 정준 엔트로피를 구할 수 있다. 한 주기동안 그리는 궤적의 넓이를 A 라 한다면 현 실험에서 쓰이는 변형된 주기평균 엔트로피는 Eq. (15)와 같이 쓸 수 있다.

$$S' = \ln(A) \quad (15)$$

엔트로피는 볼츠만 상수와 동일한 차원인 $[J/K]$ 를 가지지만 본 보고서에서 사용되는 변형된 엔트로피는 무차원량이다. 엔트로피를 통해 역학계의 온도를 정의할 수 있다. 온도의 열역학적 정의는 Eq. (16)로 주어진다.

$$T = \frac{\partial E}{\partial S} \quad (16)$$

감쇠가 일어나지 않는 단순 조화 진동자와 같은 역학계는 에너지 보존이 성립하므로 에너지 E 가 변하지 않고, 온도를 정의할 수 없다. 그러한 계는 에너지와 같은 보존량이 존재하고, 초기 정보를 잃어버리지 않기 때문에 적분가능계 (Integrable System)라 불린다. 이 경우 열역학이나 통계역학적 접근 방식을 취할 수 없다. 그러나 Figure 2 (b)와 같이 감쇠가 일어나는 경우 에너지 보존이 성립하지 않고, 에너지와 엔트로피가 시간에 대해 변하게 된다. 따라서 Eq. (16)에 의해 역학계의 온도를 정의할 수 있다. 일반적으로 감쇠가 있는 진자의 온도는 시간이 지날수록 감소하며, 변형된 엔트로피를 사용하는 경우 평형점에 도달하게 되면 온도는 0에 수렴한다.

1.3. 란다우 상전이 이론

본 실험에 사용되는 진자는 외부 구동력이 없는 경우 계속해서 에너지를 잃는다. 진자의 에너지가 안정 평형점과 준안정 평형점 사이에 존재하는 퍼텐셜의 국소 최댓값보다 큰 경우 진자는 초기조건에 따라 안정 평형점으로 갈 수도 있고 준안정 평형점으로 갈 수도 있다. 이 상태를 이중 가둠(Doubly Trapped) 상태라 한다. 그러나 진자의 에너지가 퍼텐셜의 국소 최댓값보다 작아진 경우 진자는 안정 평형점 근처의 퍼텐셜이나 준안정 평형점 근처의 퍼텐셜을 점유하게 된다. 안정 평형점 근처의 퍼텐셜에 갇히는 상태를 안정(Stable) 상태라 하고 준안정 평형점 근처의 퍼텐셜에 갇히는 상태를 준안정(Metastable) 상태라 한다. 계가 계속 에너지를 잃기 때문에 외부에서 에너지 공급 없이 두 상태는 서로 전이할 수 없다. 역학계의 온도가 감소하므로, 이중가둠 상에서 안정 또는 준안정 상으로 전이하는 것을 상전이 이론을 통해 설명할 수 있다. 질서 매개변수 (Order Parameter)는 상전이의 시작을 표시하는 척도이다. 무질서 상에서 질서 상으로 전이할 경우 질서 매개변수는 0에서 0이 아닌 값으로 변화한다. 시스템이 임계온도 T_c 이상에서 사라지는 질서 매개변수 η 로 특징지어지는 두개의 상을 가진다고 가정하자. 이때 임계온도 근처에서 비열과 질서 매개변수는 Eq. (17), Eq. (18)와 같이 표현된다.

$$c \propto |T - T_c|^{-\alpha} \quad (17)$$

$$\eta \propto |T - T_c|^{\beta} \quad (18)$$

위 α , β 와 같은 값을 임계지수(Critical Exponent)라 한다. 소련의 물리학자 레프 란다우 (Lev Landau)는 란다우 자유 에너지 (Landau Free Energy)의 도입을 통해 상전이를 설명하였다. 란다우 자유 에너지는 계의 제어변수(온도, 압력 등)를 K 라 했을 때 Eq. (19)와 같이 멱급수 형태로 주어진다.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n([K]) \phi^n \quad (19)$$

란다우 에너지는 상전이점에 최소값을 가진다. 계가 질서 매개변수의 부호가 바뀌는 것에 대해 대칭성을 가지고 있고 질서 매개변수와 결합한(Conjugate) 외부장이 존재한다고 가정하자. 질서 매개변수가 상전이점 근처에서 매우 작다는 것을 이용하면 Eq. (20)와 같이 쓸 수 있다. [4]

$$F = -h\phi + a_2\tau\phi^2 + a_4\phi^4 \quad (20)$$

이 란다우 자유 에너지 F 의 형태가 동일한 계의 경우 동일한 임계지수를 공유하게 되고, 이들은 Universality Class를 형성한다고 한다. 즉 계의 모든 열역학적 세부사항을 알 필요 없이 임계 현상에 대해 란다우 자유 에너지만을 이용하여 현상학적으로 분석할 수 있다.

1.4. 카오스 이론

1961년 기상학자 Lorenz가 날씨 시뮬레이션을 위해 미분방정식을 수치적인 방법으로 풀던 중 방정식의 결과가 초기조건에 극히 민감하다는 사실을 발견했다. 이를 설명하기 위해 초기 조건이 아주 조금만 다를지라도 그 차이가 연쇄적으로 다른 차이를 발생시켜 결괏값의 큰 차이로 이어진다는 가설이 제기되었고 카오스 이론에 대한 연구가 시작되었다. 현재 카오스 이론에서 카오스로 정의되기 위해서는 Devaney가 제시한 세가지 기준을 만족해야 한다. [5] (1) 초기 조건에 민감할 것, (2) 위상적으로 전이할 것 (Topologically Transitive), (3) 조밀한 주기성 궤도 (Dense Periodic Orbit)을 가질 것. 초기 조건에 민감하다는 것은 극미한 초기조건의 차이가 시간이 지남에 따라 큰 결과로 벌어질 수 있다는 의미이고, 위상적으로 전이해야 한다는 것은 입자가 운동하는 위상공간 상 두 지점을 잡았을 때, 한 지점에서 출발한 입자가 시간이 지나면 다른 지점이 아무리 작더라도 결국 지나친다는 의미이다. 조밀한 주기성 궤도를 가져야 한다는 것은 충분한 시간이 지난 후 위상공간 상 아무리 작은 영역을 잡더라도 그 영역 내 입자의 궤적이 존재한다는 것이다. 닫힌 위상공간에서 (2), (3)번 기준을 만족하면 (1)번은 자동으로 만족하고 혼돈 진자의 위상공간은 진자가 가질 수 있는 각변위와 각속도에 한계가 있으므로 닫힌 위상공간으로 볼 수 있으므로 혼돈 진자가 카오스임을 입증하기 위해서는 기준 (2), (3)을 만족함을 보이면 된다. 그러나 현실적으로 무한한 시간동안 진자의 운동을 측정해 위상공간에 그릴 수 없으므로 충분히 긴 시간동안 진자의 위상공간을 찍고 진자가 위상공간을 충분히 조밀하게 메우면 카오스인 것으로 판단할 수 있다. 위상 공간 외에도 카오스를 보여줄 수 있는 방법으로는 푸앵카레 산포도 (Poincare Plot)이 있다. 시간에 따라 변하는 데이터 x 가 있다고 했을 때 한 축의 인덱스는 기준 시간 $x(t)$ 으로 하고 다른 축은 지연된 시간 $x(t+1)$ 로 정하여 산포도를 그리는 방법이다. 카오틱 거동을 보일 때 i 번째 평형점을 지나는 시점을 T_i 라 하자. 이때의 각변위를 $\theta(T_i)$ 라 할 때 그려야 하는 푸앵카레 산포도는 $(\theta(T_i + T_p), \theta(T_{i+1} + T_p))$ 를 찍은 점들이다. 여기서 T_p 는 지연된 시간으로 일반적으로 ΔT_i 에 비해 매우 작은 값을 이용한다. 만약 카오스 현상을 보이지 않는다면 푸앵카레 산포도는 $y = x$ 꼴로 나올 것이나 카오스 현상을 보이는 경우 $y = x$ 에서 벗어나는 모습을 보일 것으로 예상된다.

계에 카오스가 나타났는지 확인할 수 있는 방법은 신호를 고속 푸리에 변환(FFT, Fast Fourier Transform)하여 주파수 성분들의 비율이 어떤지 보는 것이다. 만약 카오스가 나타나지 않는다면 주기를 가진 몇개의 사인파의 합 형태일 것이므로 FFT를 하여도 주파수 공간에서 여러 피크가 나타나지 않을 것이다. 그러므로 FFT 결과 주파수 공간에서 여러 피크들이 보인다면 카오스가 나타난 것으로 생각할 수 있다. 앞서 언급한 방법들 외에 계가 얼마나 카오스에 가까운지 판단하는데 리아푸노프 특성 지수 (Lyapunov characteristic exponent)를 이용할 수 있다. [6] 리아푸노프 지수는 계의 혼돈 거동에 대한 초기 조건의 의존도를 정량적으로 표기해 주므로, 혼돈 진자의 거동이 얼마나 카오스에 가까운지 정량적으로 판단할 수 있다. 약간의 차이가 있는 두개의 초기 상태를 가진 계를 생각하고, 초기 상태를 $x_0, x_0 + \epsilon$ 이라 하자. 이 두개의 초기값으로부터 시작해 n 번 되풀이하여 얻어지는 2개의 결과값 x_n 사이의 차이가 d_n 이라 할 때, 리아푸노프 지수 λ 는

근사적으로 Eq. (21)으로 표기된다.

$$d_n = \epsilon e^{n\lambda} \quad (21)$$

위 수식에서 출발하여 최종적으로 n 이 무한히 커질 때 리아푸노프 지수는 Eq. (22)로 주어짐이 알려져 있다.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right| \quad (22)$$

리아푸노프 지수 λ 가 0보다 크다면 계가 카오스인 것으로 간주할 수 있다.

$$\lambda|_{x_n} = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{f^{(n)}(x + \epsilon) - f^{(n)}}{\epsilon} \right) \quad (23)$$

실제 실험 데이터를 분석할 때는 Eq. (22) 대신 이산 형태의 데이터를 가지고 있으므로 Eq. (23)을 이용하여 분석한다.

2. Method

2.1. 실험 기본 구성

실험을 위해 PASCO 사의 EX-5523A 장치가 사용되었다. 실험의 기본 설정은 기본적으로 주어진 장치의 구성과 달라지지 않았으며, 장치에 연결된 CAPSTONE 소프트웨어를 통해 EX-5523A 장치의 데이터를 얻고 강제 진동자에 전압을 인가해 사인 형태의 외부 구동력을 걸어줄 수 있다.

2.2. 외부 구동력이 없는 경우 진자의 운동

감쇠를 분석하기 위해 강제 진동자의 각도(ϕ)를 맨 위로 고정한 후, 진자의 평형점으로부터 시계방향으로 2π 보다 조금 덜 회전시킨 후 놓는다. 진자의 평형점으로는 안정 평형점(Stable)과 준안정 평형점(Metastable)이 있는데, 실험은 안정 평형점을 기준으로 진행하였다. 안정 평형점에서 반시계 방향으로 2π 만큼 회전시킨다면 퍼텐셜이 너무 커져 회전의 각변위 진폭이 2π 를 넘기게 되고 실험 장치의 왼쪽 용수철이 자연길이 이하로 압축되며 실이 느슨해지는 결과를 낳는다. 자연길이 이하로 압축된 스프링은 더이상 흑의 법칙을 만족하지 않고, 또한 장력은 음수가 될 수 없으므로 이 경우 퍼텐셜 V 의 개형이 원래 모양과는 달라지는 결과를 낳는다. 그러므로 왼쪽 용수철의 길이가 항상 자연길이 이상으로 유지될 수 있도록 왼쪽 실의 장력이 항상 존재하는 범위 내에서 모든 실험을 진행하였다. 자석과 원판 사이 거리 d 는 14종류, 각각 안정 평형점에 빠질 때와 준안정 평형점에 빠질 때를 기준으로 28개의 데이터를 얻었다. 상전이 분석을 위하여 자석과 원판 사이 거리 d 를 최대로 설정해 감쇠를 최소화시키고 강제 진동자의 각도 (ϕ)를 변경해 가며 데이터를 얻는다. 진동의 초기 조건은 동일하게 진자의 평형점으로부터 시계방향으로 2π 보다 조금 덜 회전시킨 후 놔주었다. 강제 진동자의 각도를 조절하는 것은 장치의 실을 고정시켜주는 부분과 강제 진동자에 실이 연결된 부분 사이의 거리를 기준으로 변경해 주었다. 실의 길이는 100mm부터 155mm까지 5mm씩 변경해가며 12가지 종류에 대해 실험을 진행하였다.

2.3. 외부 구동력이 있는 경우 진자의 운동

강제 진동자에 직류 전압을 인가하면 강제 진동자가 해당 전압에 비례하는 각속도로 회전한다. 이는 진자에 사인파 모양의 강제 구동력을 주는 것으로 볼 수 있다. 진자를 안정 평형점에 맞춘 후, 모터에 인가되는 전압을 올려가며 강제 구동력의 진동수를 높여간다. 강제 구동력의 주파수와 진자의 고유 진동수가 가까워지면 진자의 진폭이 매우 커지는데, 이를 공명 현상이라 한다.

즉 강제 구동력의 진동수를 높여가며 공명 진동수를 찾고, 해당 공명 진동수 근처에서 조밀하게 모터 전압을 조절하며 공명 진동수 근처에서 진폭 데이터를 얻었다. 모터의 전압은 2.9 V 부터 3.9 V까지, 그리고 4.9 V부터 6.5 V까지 0.2 V 간격으로 찍었다. 중간 지점인 4.5 V에 대해서도 진폭을 측정하였다. 진자의 움직임을 지배하는 운동방정식의 일반해의 영향을 줄이기 위해 해당 전압으로 맞춘 뒤 10초 이후 일반해가 충분히 감쇠되었다고 판단한 후 측정을 진행하였다. 진폭을 측정하기 위해 각변위가 평형점에 도달하는 지점을 기준으로 주기로 설정한 후 파형을 잘라서 분석하였다. 각 잘린 파형들은 사인파 모양이 아니므로 제일 높은 지점이 진폭이라고 말하기 어려운 부분이 있다. 만약 진동이 사인파 형태인 경우 각변위를 제곱하고 주기 평균을 내주면 진폭의 제곱의 절반임을 확인할 수 있다. 즉 변위의 제곱평균에 2를 곱한 후 그 제곱근을 유효 진폭이라 가정하면, 이는 사인파 형태가 아닌 파동의 파형에도 적용되므로 같은 원리로 주기에 해당하는 각변위를 제곱하고 해당 구간의 주기에 대해 평균을 내준 후 2를 곱한 후 제곱근을 취하면 해당 주기에 대해 유효 진폭을 계산할 수 있다. 이를 이용하면 각 주기별로 유효 진폭을 구할 수 있으므로 유효 진폭의 평균값과 표준편차 값도 구할 수 있다. 혼돈 진자가 카오스 현상을 보이는 것을 확인하기 위하여 강제 진동자에 4.9V의 전압을 걸어주고 약 5분간 위상공간에서 어떻게 진자가 움직이는지 측정한다. 이때 진자가 카오스를 보인다면 위상 공간을 충분히 조밀하게 채울 것으로 기대된다. 즉 위상공간 위 임의의 점에 대하여 진자가 움직였던 궤적이 충분히 가까운 것이다. 리아푸노프 지수를 계산하기 위해서는 진자의 시작 시점 및 강제 진동자의 초기 위치를 동일하게 유지하여 초기조건을 거의 동일하게 일치시킨 후 실험을 진행한다. 초기조건을 거의 동일하게 일치시키더라도 오차가 반드시 존재하기 때문에 그 오차가 초기조건의 미세한 차이인 ϵ 역할을 하게 된다. 마지막으로 카오스 현상을 보일 것으로 예상되는 데이터들로 FFT와 푸앵카레 산포도를 그려 예상대로 나오는지 확인한다.

3. Results

3.1. 퍼텐셜 특정

강제 구동력이 없는 경우 감쇠에 대해 분석할 수 있었다. 자석과 원판 사이의 거리를 총 5.00mm 부터 20.20mm까지 14개의 단계로 조정하였고 각 거리별로 감쇠력의 계수를 구할 수 있었다. Figure 3은 원판과 자석 사이의 거리가 8.09mm일 때 시간에 따른 각변위의 값이다. 안정 평형점으로 빠질 때 안정 평형점의 퍼텐셜의 너비가 더 넓으므로 준안정 평형점으로 빠질 때에 비해 더 진폭이 큰 것을 알 수 있다.

Figure 4의 (a),(b),(c)는 어떻게 감쇠를 제거해줬는지 나타낸다. 감쇠가 일어나므로 진폭이 갈 수록 줄어드는 것을 확인할 수 있는데, 첫번째, 즉 제일 넓은 범위를 가지는 반주기를 기준으로 설정한다. 그리고 기준이 되는 곡선을 제외한 나머지 곡선들을 기준 곡선으로 수렴시키는 감쇠 계수를 비선형 회귀를 이용하여 구한다. 여기서 나온 감쇠 계수를 이용하여 기준이 되는 곡선에 보정시킨다. 즉 처음 기준이 되는 곡선도 엄밀히 말하면 감쇠가 일어나는 중이므로 원래 퍼텐셜의 모양과 같다고 할 수 없다. 그러므로 기준이 되는 곡선에 나머지 곡선들을 수렴시키는 감쇠 계수를 구한 후 기준이 되는 곡선을 보정해 주면 보정 전에 비해 원래 퍼텐셜의 모양에 가까워지게 된다. 다시 보정된 퍼텐셜에 나머지 곡선들을 수렴시키는 감쇠 계수를 구한 후, 그 감쇠 계수를 이용하여 다시 기준 퍼텐셜을 보정해준다. 실험을 분석한 코드에서는 이 과정을 10번 반복하였고, 어떤 예외도 없이 잘 수렴하는 것을 확인할 수 있었다. Figure 4의 (a)는 보정 전 감쇠 계수에 임의로 넣어준 값을 나타낸 것이다. 임의로 추정하여 넣어준 값이므로 참이라고 추정되는 퍼텐셜이 정밀하게 수렴하지 못하고 감쇠를 과하게 보정해줌을 알 수 있다. (b)는 기준이 되는 커브인 First Period에 나머지 곡선들을 수렴하게 만드는 감쇠 계수를 비선형 회귀를 통해 구하고, 그 값을 이용하여 감쇠를 보정해준 그림이다. 처음보다는 더 정밀해진 것을 확인할 수 있다. (c)는

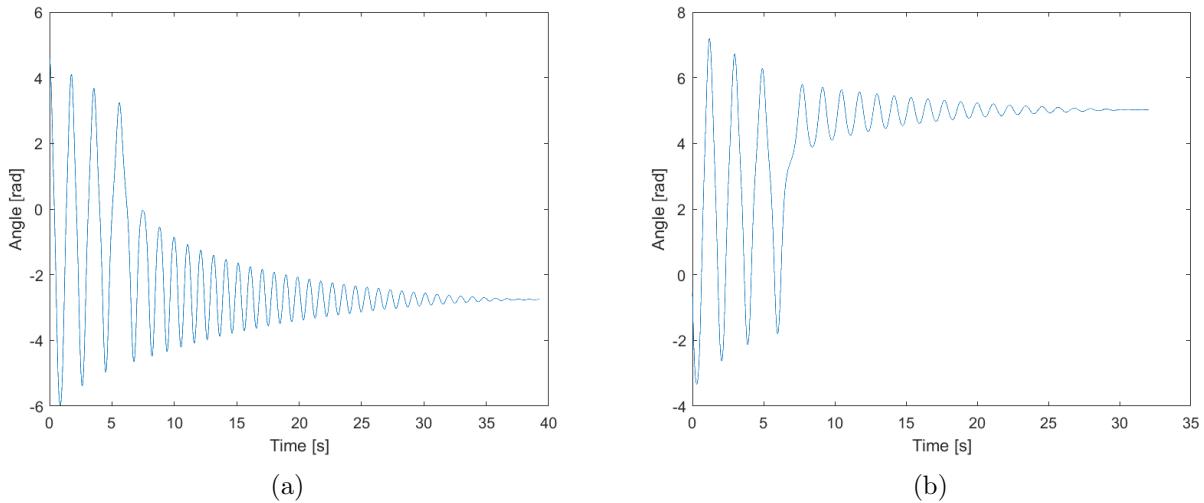


Figure 3: 원판 - 자석 사이의 거리가 8.09mm일 때 시간에 따른 각변위의 그래프. 진자는 에너지를 잃으며 안정 혹은 준안정 평형점에 빠진다. (a) 진자가 안정 평형점에 빠졌을 때 (b) 진자가 준안정 평형점에 빠졌을 때의 그래프를 도식하였다.

위 과정이 10번 반복된 것으로, 감쇠를 잘 제거하여 모든 곡선을 하나의 퍼텐셜로 수렴시켜 거의 곡선의 시간의존성이 거의 사라진 것을 확인할 수 있다. 즉 True Estimated Potential은 감쇠가 Eq. (7)꼴로 주어진다고 가정한 경우 에너지의 손실을 최대한 잘 설명하는 감쇠 계수를 찾은 것이다. (d)는 최종적으로 구해진 퍼텐셜의 모양으로, 안정 평형점과 준안정 평형점이 잘 보이는 것을 확인할 수 있다. 참일 것으로 추정되는 퍼텐셜을 Eq. (10)을 모델 함수로 하는 비선형 회귀를 통해 구하였다. Figure 5 (a)에서 에너지는 감쇠에 의해 시간이 지남에 따라 단조감소하는 것을 볼 수 있다. 처음에는 각속도가 빠르므로 감쇠되는 에너지의 속도도 빨랐지만 갈수록 각속도가 줄어들어 에너지 감쇠 속도가 줄어드는 것을 볼 수 있다. (b),(c)로부터 진자가 언제 어떤 상인지 알 수 있다. 입자의 궤적이 에너지가 더 낮은 안정상 쪽으로 향하므로 진자는 이중가둠 상에서 안정상으로 상전이를 한다고 할 수 있다. 에너지 곡면을 알고 있고, 안정 평형점과 준안정 평형점 사이 존재하는 퍼텐셜의 국소 최댓값을 알 수 있다. 즉 그림을 통해 입자의 상을 바로 알 수 있는데, 입자의 에너지, 즉 붉은 점의 높이가 퍼텐셜의 국소 최댓값보다 높으면 이중가둠 상태라 할 수 있다. 점이 에너지를 잃어 높이가 퍼텐셜의 국소 최댓값보다 낮아진다면 안정상(Stable) 또는 준안정상(Metastable) 중 하나를 가진다. 이때 퍼텐셜의 개형을 보면 국소점의 높이, 즉 에너지가 더 낮은 점이 안정 평형점이고 더 높은 쪽이 준안정 평형점이라는 것을 알기 쉽다. 만약 상태가 안정 평형점 근처에 갇힌다면 진자의 상은 안정상, 준안정 평형점 근처에 갇힌다면 준안정상이라는 거울 알 수 있다. 에너지 곡면의 모양을 보면 에너지가 국소 최댓값일 때 안정상 쪽의 둘레 길이가 준안정상보다 더 긴 것을 확인할 수 있다. 이것이 진자가 준안정상보다는 안정상을 더 쉽게 가질 수 있는 이유이다. 강제 진동자를 고정시킨 경우 강제 진동자와 실 훌더사이 실의 길이가 늘어나게 되면 퍼텐셜의 모양이 변형된다. 이때 퍼텐셜의 모양이 어떻게 변형되는지를 위와 동일한 방법으로 알 수 있다. 실의 길이가 증가함에 따라 퍼텐셜이 변하는 양상은 Figure 6와 같다. 실 훌더와 강제 진동자 사이 실의 길이가 길어질수록, 즉 강제 진동자가 아래 방향을 향할수록 준안정 평형점의 에너지가 점점 높아지는 것을 확인할 수 있다. 즉 준안정상태는 강제 진동자가 아래를 향할수록 점점 사라지는 것을 볼 수 있다.

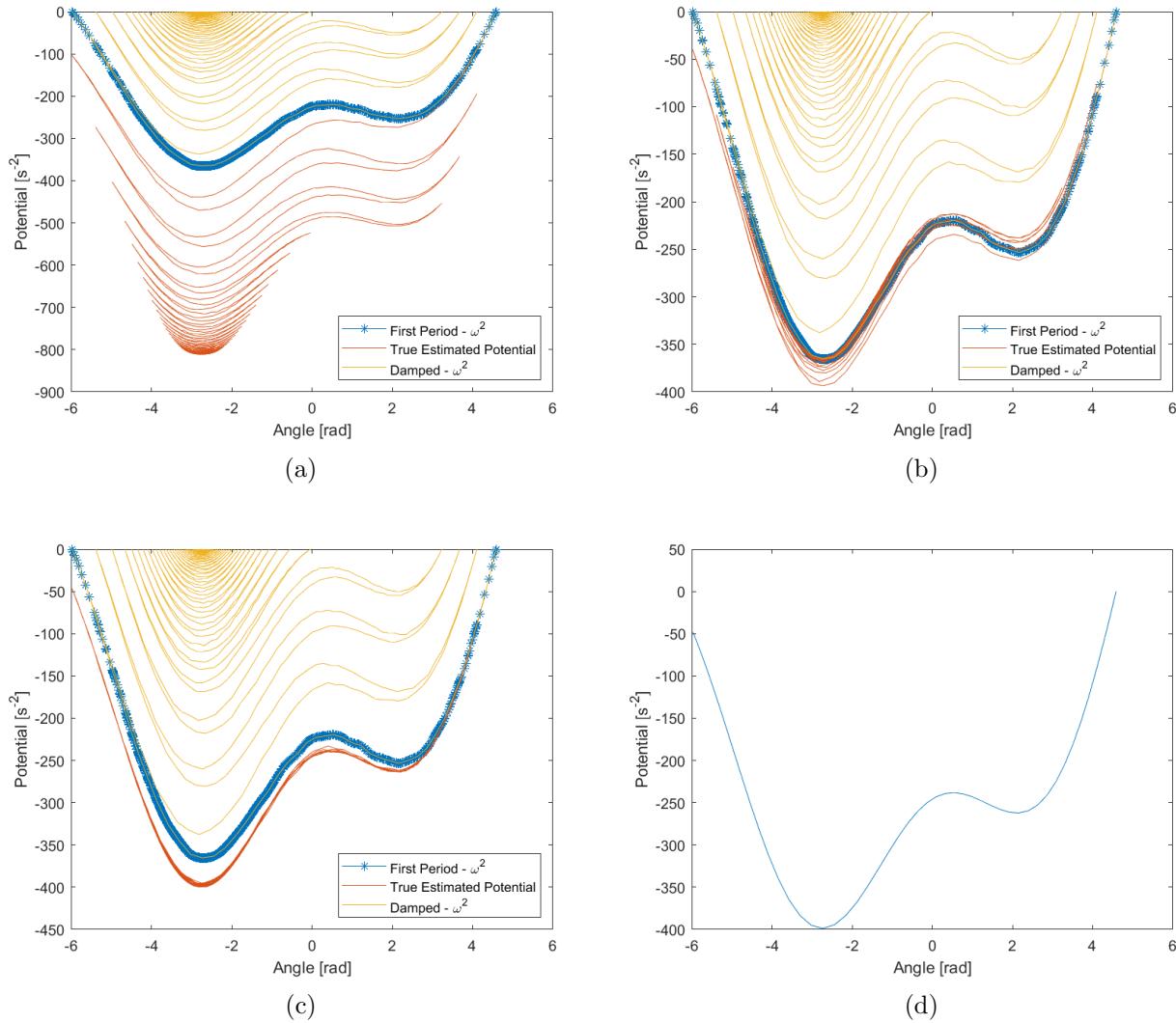


Figure 4: 퍼텐셜 에너지의 개형을 그리고 감쇠를 보정하기 위해 회귀를 이용하는 과정. (a) 회귀를 이용하기 위해 감쇠 계수의 임의적으로 초기값을 대입하여 그려낸 그래프. (b) 진자의 첫 주기를 이용한 퍼텐셜 그래프에 나머지 곡선을 수렴 시키는 과정. (c) 앞선 (b)의 과정을 10번 반복하여 최적값을 구한 과정. (d) 최종적으로 참값으로 추정한 그래프의 개형.

3.2. 감쇠계수 계산

자석과 원판 사이의 거리 d 를 변경해가며 이전 섹션과 같은 방식으로 감쇠의 계수들인 γ, n 을 구할 수 있다. 감쇠 상수들을 그래프로 표현하면 Figure 7와 같다. 예상했던 대로 감쇠의 지수인 n 은 자석이 원판에 가까이 갈 수록 1에 가까워짐을 알 수 있다. 자석이 멀리 있었을 때는 0.5 수준이었던 n 이 자석이 가까이 오니 1에 접근하는 것은 자석에 원판에 가까이 있으면 감쇠에 주는 영향이 매우 크다는 것을 나타내는 것이라고 할 수 있다. 여기서 자명하지 않은 것은 γ 값도 자석과 원판사이 거리 d 가 줄어듦에 따라 증가한다는 것인데, 이는 d 가 줄어듦에 따라 맴돌이 전류에 의한 감쇠가 매우 커지는 것으로 볼 수 있다.

3.3. 상 구분과 엔트로피

에너지에 해당하는 엔트로피를 구하기 위해서는 Figure 5에서 주어진 에너지 곡면을 각변위-각속도 평면에 평행한 방향, 즉 에너지가 일정한 평면을 기준으로 잘랐을 때의 넓이를 알아야

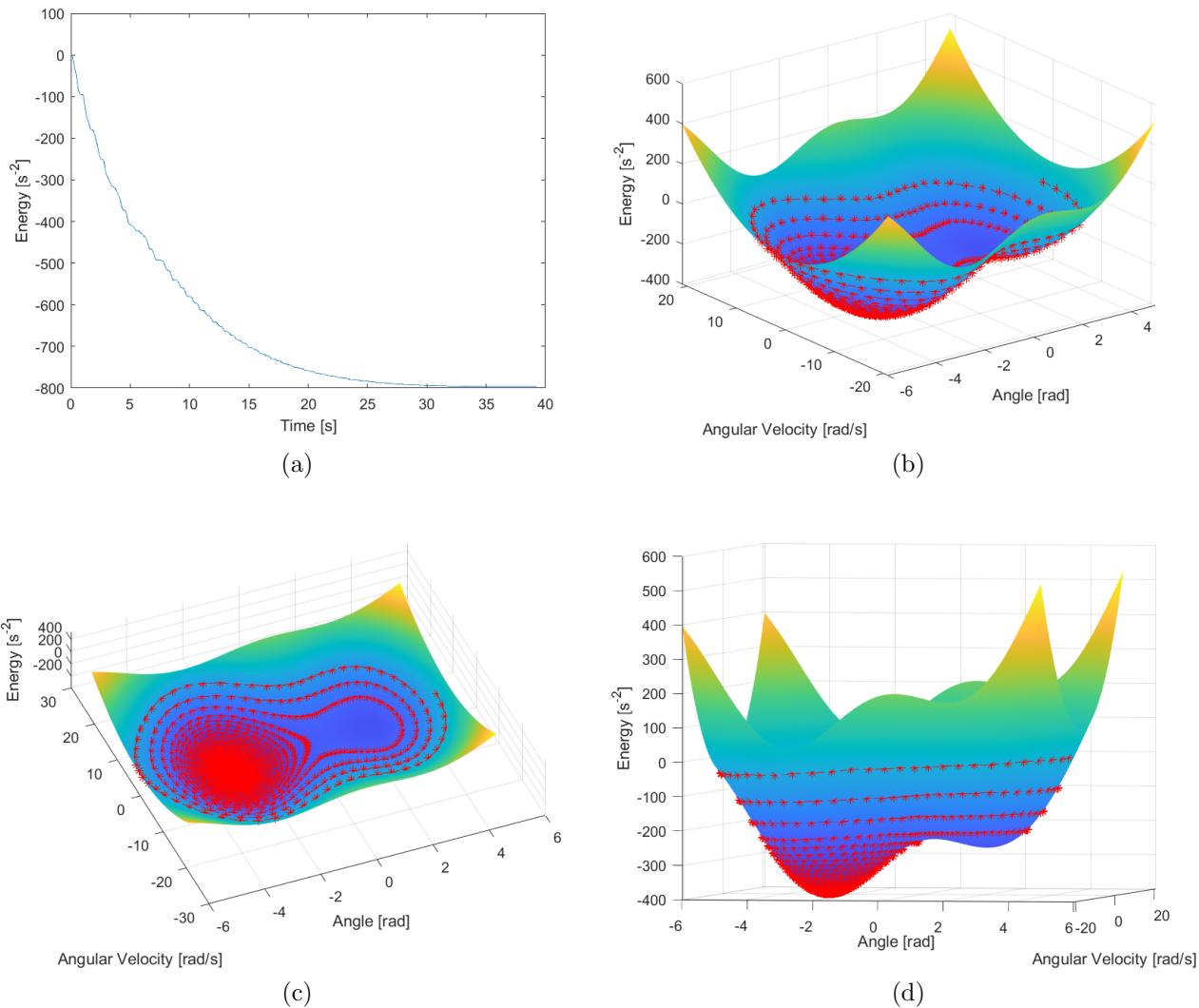


Figure 5: 진자의 에너지 감쇠를 고려한 위상공간 상 궤적과 퍼텐셜 개형을 대조한 그림. (a) 시간에 따라 에너지가 단조감소하는 양상을 그래프로 표현하였다. (b), (c), (d)는 각각 mesh로 표현된 퍼텐셜 에너지 개형과 회귀에 사용된 진자의 궤적을 겹친 것을 3가지 방향에서 관측한 모습이다. 궤적과 개형이 잘 맞아떨어지므로 추정한 퍼텐셜 에너지가 타당하다고 볼 수 있다.

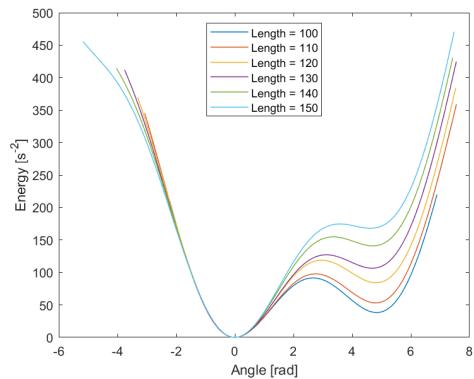


Figure 6: 강제 진동자 - 실 흘더 사이를 잇는 실의 길이에 따른 퍼텐셜 에너지 개형의 변화. 진동자가 아래를 향하며 실을 당겨 길이가 늘어날 수록, 퍼텐셜 개형이 바뀌며 준안정 평형점이 사라지고 있다.

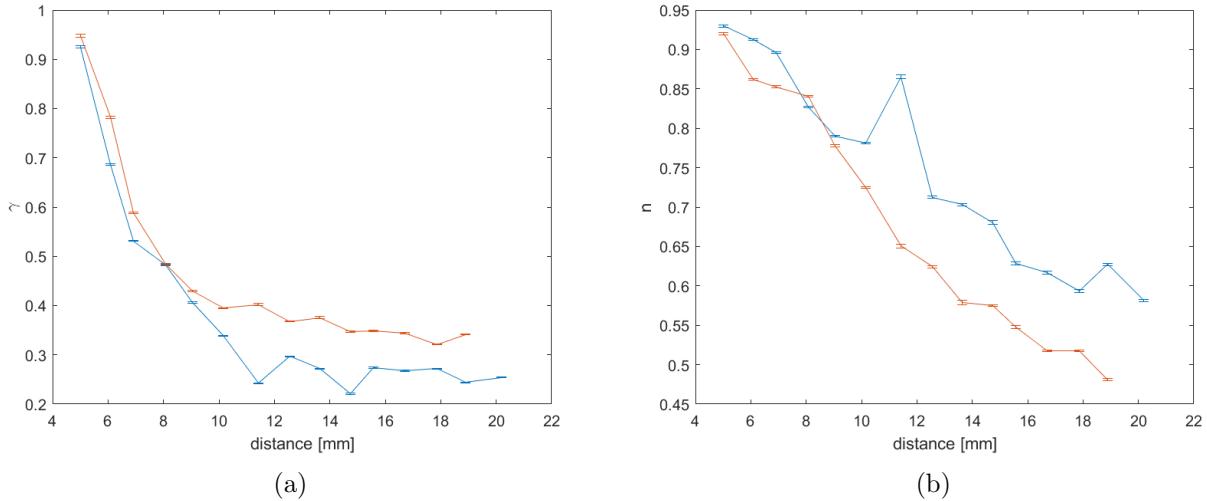


Figure 7: 원판 - 자석 사이의 거리에 따른 감쇠에 작용하는 계수 γ 와 n 의 그래프. (a) 자석이 원판에 다가갈수록 멤돌이 전류의 효과가 커져 감쇠의 계수 γ 가 증가한다. (b) 자석이 원판에 다가갈수록 감쇠를 강하게 일으켜 감쇠의 지수 n 이 증가한다.

한다. 에너지 곡면을 잘랐을 때의 모양은 Figure 8와 같다. 엔트로피를 구할 때 주의를 기울여야 하는 부분이 진자의 에너지가 안정점 에너지와 준안정점 에너지 사이에 있을 때이다. 만약 진자가 준안정상을 가진다면 엔트로피를 계산하는데 있어 취해야 하는 면적은 Figure 5 (b)의 오른쪽 부분만이고, 안정상을 가진다면 왼쪽 부분만이다. 안정상을 가지던 준안정상을 가지던 외부 에너지 없이 안장점 에너지를 넘을 수는 없다. 즉 안정상인 경우 준안정상의 위상공간을 점유할 수는 없다는 것이다. 그러므로 엔트로피를 계산하는데 있어 해당 상에 맞는 하나의 면적을 취하여 엔트로피를 계산해야 한다. 단면의 넓이에 로그를 취해주면 계에서 각 에너지에 해당하는 엔트로피를 알 수 있다. 시간에 대해 계의 에너지가 어떻게 변하는지 아므로, 시간에 대해 계의 엔트로피는 Figure 8 (d)와 같다. 진자의 에너지가 낮아지면 위상공간에서 점유할 수 있는 넓이가 줄어들므로, 엔트로피도 시간이 지남에 따라 줄어들 것으로 예측할 수 있는데, 시간이 지남에 따라 감소하는 경향을 잘 보여줄 수 있다. 35초 이상에서 엔트로피가 진동하는 경향이 생기는 것은 계산에 수반되는 수치적 오차에 의한 것으로 보인다.

3.4. 온도 및 계의 비열과 임계지수

진자의 시간에 대한 엔트로피와 에너지의 거동을 알고 있으니, 계의 열역학적 정의에 따른 온도를 구할 수 있다. 계의 온도가 처음에는 높다가 갈수록 식고, 그 결과 임계온도에 도달하면 상전이가 일어나는 것이라고 기대할 수 있다. 계의 시간과 에너지에 대한 온도는 Figure 9와 같다. 온도는 시간이 지남에 따라 감소하는 경향을 보이지만, 이중가둠 상에서 안정상으로 상전이를 할 때 온도의 증가가 있음을 확인할 수 있다. 상전이를 함으로써 온도가 증가하고, 그 이후 단조감소하는 모양을 보인다. 이는 계의 온도가 갈수록 식을 것이고, 이후 임계온도에 도달하여 상전이를 일으키고 그 결과 온도가 다시 증가한 후 다시 식어가는 것이라고 해석할 수 있다. 온도 T 와 에너지 E 사이의 관계를 알면 계의 비열을 구할 수 있다. 계의 비열(Specific Heat)은 Eq. (24)으로 주어진다.

$$c = \frac{\partial E}{\partial T} \quad (24)$$

계의 온도와 에너지에 따른 비열은 Figure 10와 같다. Figure 10에서 예상할 수 있듯이, 안정상의 경우 비열이 발산하는 지점, 즉 국소적으로 에너지가 변함에도 온도가 일정한 지점이 존재함을

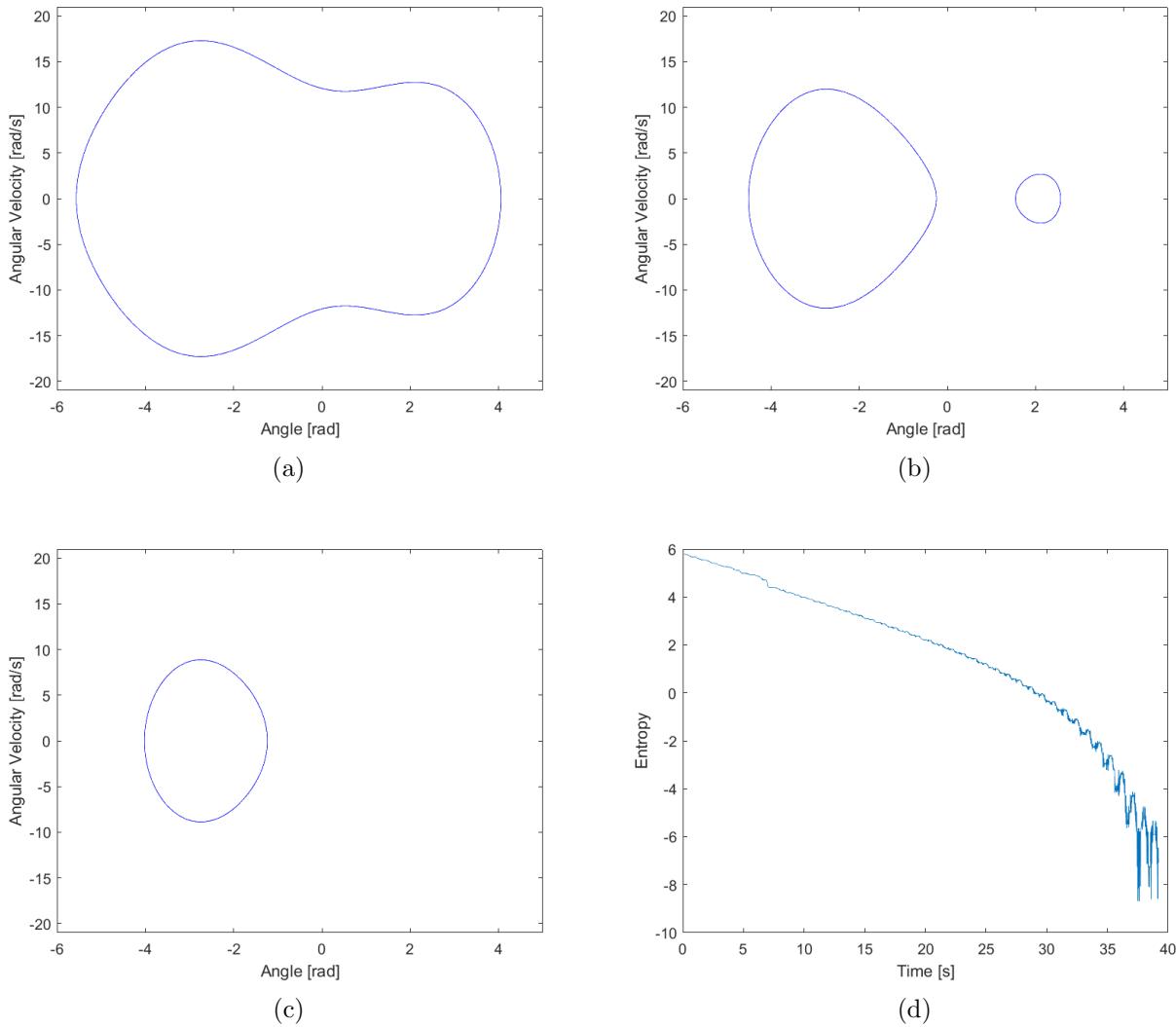


Figure 8: 에너지 곡면을 에너지가 일정한 평면으로 잘랐을 때 나타나는 단면을 (a) 충분히 높은 에너지 (b) 안정점과 준안정점 사이의 에너지 (c) 준안정점보다 낮은 에너지에 대해 표시한 그림. (b)에서 이미 진자는 하나의 상만을 차지하므로 엔트로피를 고려할 때 둘 중 하나만을 고려해야한다. (d) 시간에 따른 엔트로피 곡선. 엔트로피는 시간에 따라 감소한다.

확인할 수 있다. 그 지점보다 에너지가 높아지면 음의 비열을 가지게 된다. 에너지가 높아짐에도 불구하고 온도가 감소하는 영역이 나타나는 것이다. 이러한 특이한 거동을 보이는 영역을 제외하고는, 대체로 안정상일 때 에너지가 높아질수록 비열도 증가하는 경향을, 이중가둠 상일 때도 에너지가 높아질수록 비열도 증가하는 경향을 보이는 것을 알 수 있다. 온도의 경우 안정상은 하나의 온도에 대해 두 비열값을 가지는 지점이 존재한다. 이 지점이 Figure 9 (b)에 있는 안정상의 그래프 모양이 아래로 꺾이는 듯이 생긴 부분이다. 온도는 같아도 비열이 음수인 부분이 있고 양수인 부분이 있는 것이다. 이중가둠 상도 안정상과 같은 온드를 보이는 구간이 존재한다. 즉 이 구간의 경우 온도는 같아도 두개의 생이 존재할 수 있다고 생각할 수 있다.

3.5. 계의 자유에너지와 상도표

계의 자유에너지가 란다우 자유에너지 L 로 주어진다면 Eq. (20)를 이용해 란다우 자유에너지 (이하 자유에너지)를 구할 수 있겠지만, 이 계는 열역학계가 아닌 역학계이므로 자유에너지를

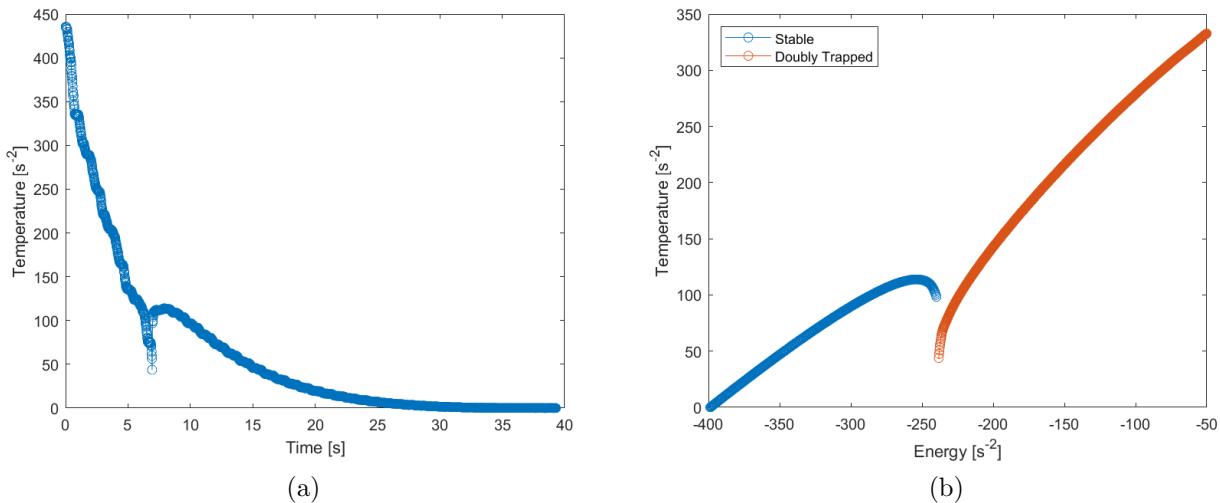


Figure 9: (a) 시간에 따른 온도의 곡선과 (b) 에너지에 따른 온도의 곡선. 양쪽 그림에서부터 상전이 지점에서 온도가 미분불가능한 변화를 거친다는 것을 알 수 있다.

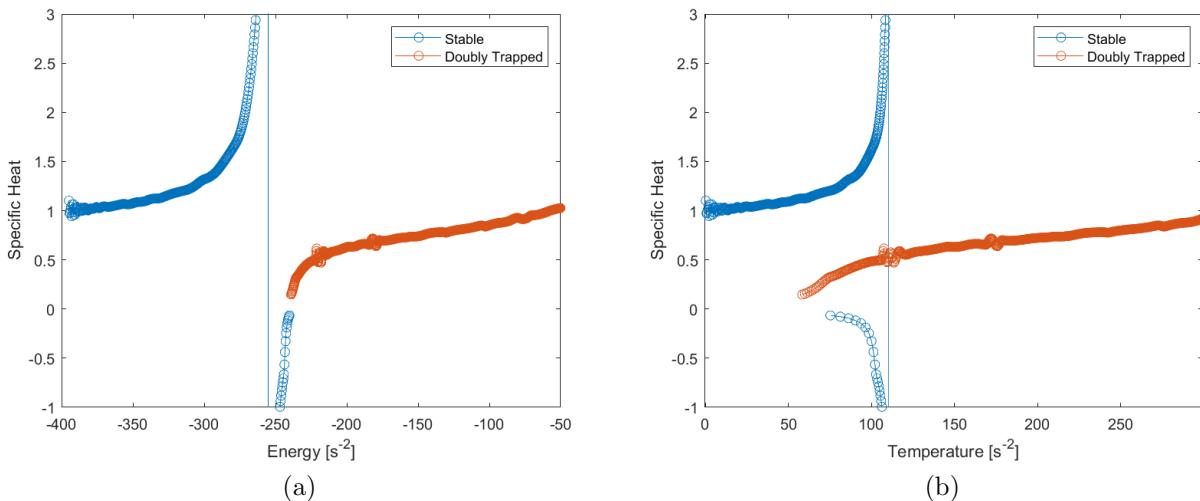


Figure 10: 비열을 (a) 에너지에 따라 (b) 온도에 따른 곡선으로 나타낸 그래프. 안정한 상을 파란색, 이 중가둠 상을 주황색으로 표시하였다. 안정 상의 곡선은 임계에서 불연속하며, 같은 온도를 가진 안정상도 2개의 비열을 가질 수 있다.

구하는데 있어 다른 접근방식이 필요하다. 이에 대하여 혼돈진자 메뉴얼에서 계의 자유에너지를 구하는 공식이 Eq. (25)로 주어진 바 있다.

$$F = E_{eff} - TS = V(\theta) + \frac{T}{T_c} K(\theta) - TS \quad (25)$$

시간에 따라 계의 온도, 운동에너지와 엔트로피와 각변위가 어떻게 거동하는지 알고 임계온도 또한 구했으므로 계의 자유에너지를 계산할 수 있다. 계는 자유에너지를 최소화하는 상을 가지므로, 계의 온도가 임계온도보다 큰 경우에는 이중가둠 상이 자유에너지의 극소점에 해당할 것이고 계의 온도가 임계온도 미만으로 떨어진 경우에는 안정상 또는 준안정상이 자유에너지의 극소점에 해당할 것이라고 예상할 수 있다. 몇몇 온도에 대한 자유에너지는 Figure 11으로 주어진다. Figure 11에 계산된 자유에너지 값은 실제 자유에너지 값이 아니라 한 그래프에 그리기 위해

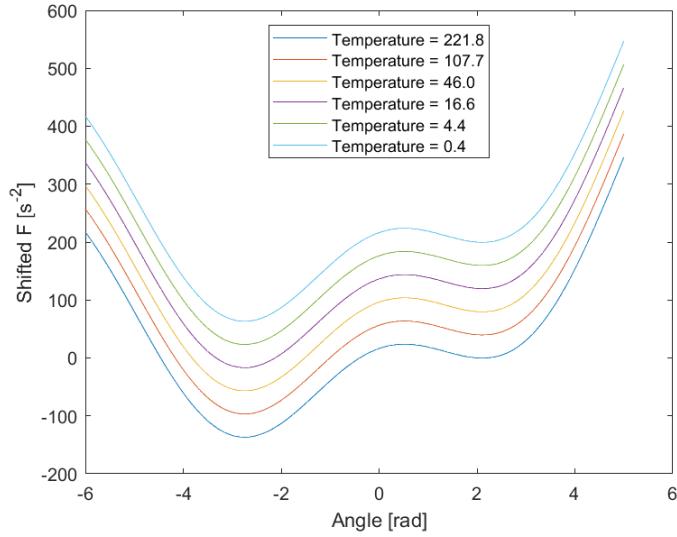


Figure 11: 란다우 자유에너지. x축을 각도로 하며 온도에 따른 여러 자유에너지들을 함께 표시하였다. 온도에 따라 자유에너지 값이 달라지지만, 그림의 편의상 자유에너지 곡선을 y축 평행이동하여 그려낸 것이다. 온도에 따라 자유에너지 개형이 바뀌지 않는다는 특징을 확인할 수 있다.

이동된(shifted) 자유에너지 값이다. 자유에너지는 절대적인 값보다는, 자유에너지가 최소화되는 방향으로 계가 행동한다는 것이 중요한 것이므로 서로 다른 온도를 가질 때 자유에너지 값의 비교를 위해 자유에너지 방향으로 이동한 것이다. 그 결과 예상과는 다르게 온도가 달라져도 자유에너지의 개형이 변하지 않는다는 것을 확인했다. 강제 진동자의 초기각도 ϕ 를 변경해주면 계의 퍼텐셜 모양이 변하게 되고, 이에 따라 상전이의 특성도 바뀌게 될 것으로 예측할 수 있다. Figure 13은 초기각도에 해당하는 진동자와 실 훌더까지의 직선거리에 따른 임계온도와 상두께를 나타낸 그림이다. 실의 길이가 길어질수록 임계온도와 상두께가 증가하는 경향을 보임을 알 수

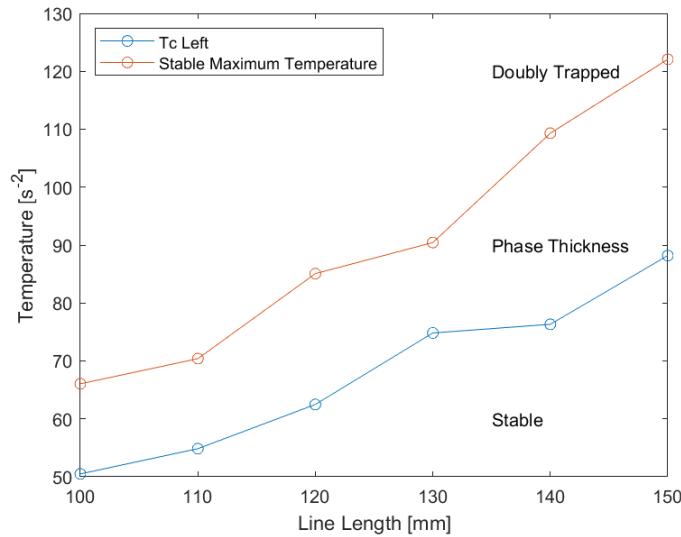


Figure 12: 강제 진동자 - 실 훌더 사이를 잇는 실의 길이와 온도에 대한 상도표. 안정 상과 이중가둠 상 사이의 상두께를 확인할 수 있다.

있다. 임계점 근처에서 상전이의 임계지수를 구할 수 있다. 이 역학계에서 볼 수 있는 임계지수는 비열에 관련된 α 이다. 질서 매개변수에 관련된 임계지수인 η 는 상전이가 일어날 때 변위각이 다

양할 수 있으므로 진자와 같은 역학계에서 일어나는 상전이에 적용하기 적합하지 않다. Eq. ()를 이용하여 이중가둠 상에서 다른 상으로 넘어갈 때 임계지수를 비선형 피팅을 통해 구할 수 있다.

$$E \propto \frac{1}{1-\alpha} |T - T_c|^{-\alpha} \quad (26)$$

위 방식으로 28가지 경우의 수에 대해 임계지수를 구한 결과 임계지수 $\alpha = -0.5920.106$ 임을 알 수 있었고 상당히 오차가 크다는 것도 알 수 있었다.

3.6. 외부 구동력이 가해진 경우 공명곡선

강제 구동력을 가하는 경우 모터의 전압과 진자의 진폭과의 관계를 나타낸 그림은 Figure ?? 이다. 제 진동자에 가해지는 전압이 약 3.5V 근처에서 진폭이 소폭 증가하는 특이점을 확인할

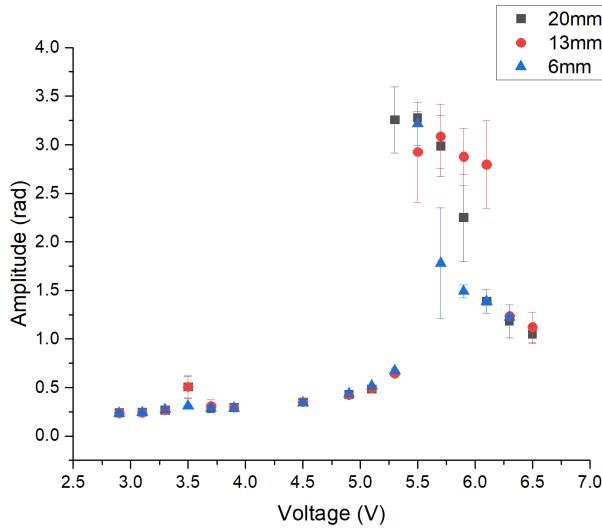


Figure 13: 원판 - 자석사이의 거리가 6, 13, 20mm일 때 모터의 전압과 진자의 진폭간의 관계를 나타낸 산점도. 3.5V에서 진폭이 소폭 증가하는 특이점이, 5V ~ 6V 구간에서는 진폭이 대폭 증가하는 공명점이 있다.

수 있으며, 5.0V부터 진폭이 매우 크게 증가하는 공명점을 확인할 수 있다. 자석과 원판 사이의 거리 d 가 20mm일 때 공명 영역은 약 5.3V에서 5.9V 정도이며, 13mm일 때는 5.5V에서 6.1V, 6mm일 때는 5.5V 거의 하나로 매우 좁은 공명 피크를 보여준다. 3.5V에서 진폭이 약간 증가하는 부분을 시간에 대한 각변위 그래프와 FFT 결과를 표현하면 Figure 14과 같다. Figure 14에서 볼 수 있듯이, 두개의 진동이 혼합된 것 같이 보이는 진동이 발생한다. 이에 FFT를 취하면 주파수 성분으로 분해할 수 있는데, 주파수 성분에서 두개의 피크가 보임을 알 수 있다. 두개의 피크가 보인다는 것은 서로 다른 두 진동수를 가진 파의 합성으로 볼 수 있으므로 두개의 서로 다른 주파수의 진동이 혼합되어 나타나는 것이고, 그 결과 진폭이 소폭 증가했음을 알 수 있다.

3.7. 카오스 분석

Figure 15 (a)는 강제 구동력이 가해진 진자가 카오스 현상을 보이는 것을 나타낸 것이다. 한정된 시간동안 위상공간위 점을 찍은 것을 생각해 보면 위상공간 위 일반적인 지점에 대해 충분히 가까우므로 조밀한 주기성 궤도 조건을 만족한다고 볼 수 있고, 혼돈진자가 카오스 현상을 보이는 것이라고 볼 수 있다. Figure 16은 강제 구동력 아래 카오스가 발생한 것으로 추정되는 계와

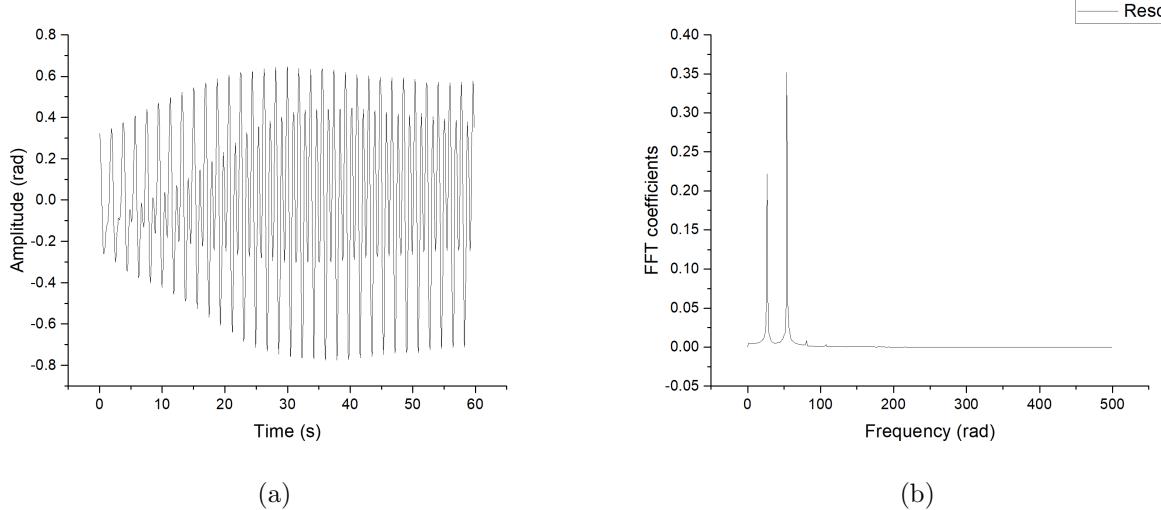


Figure 14: 3.5V의 특이점에서 (a) 시간에 따른 진자의 진폭의 그래프와 (b) 앞선 (a)의 그래프를 FFT를 통해 주파수 영역에서 관측한 그림. FFT로부터 특정 두 주파수에서 피크를 보이므로 진자의 진폭의 그래프는 서로 다른 두 진동의 혼합으로 생각할 수 있다.

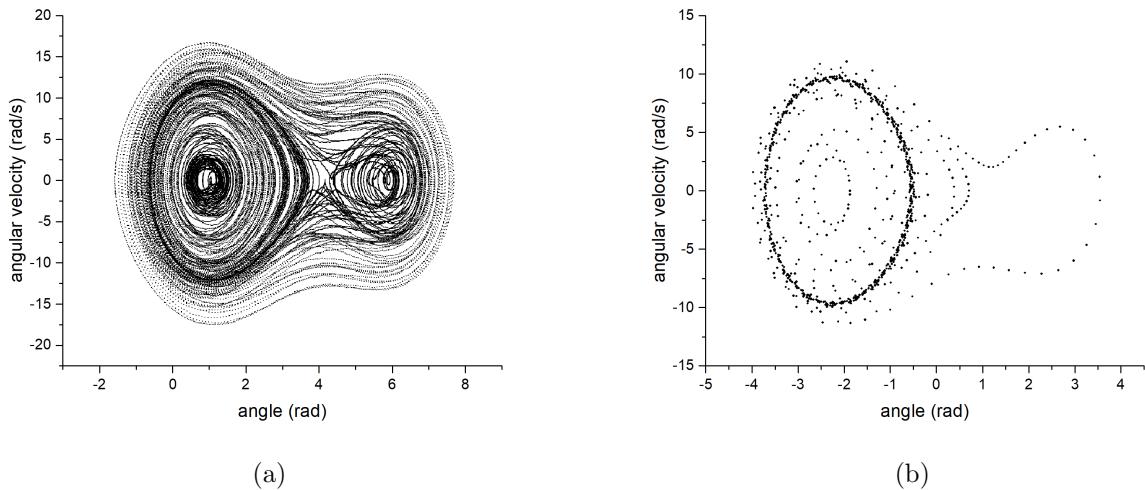


Figure 15: 진자에 강제 구동력을 가했을 때 (a) 카오스 현상을 보이는 진자의 궤적과 (b) 카오스하지 않은 진자의 궤적을 위상공간에 나타낸 그림. 카오스가 나타난 진자의 궤적은 닫힌 위상공간을 조밀하게 채우므로 카오스 현상을 보인다 볼 수 있다.

그렇지 않은 계의 푸앵카레 산포도를 나타낸 것이다. 카오스가 나타나게 되면 ' $y = x$ '로부터 멀어진 곳에 점이 찍히게 된다. 즉 (a)가 카오스 현상을 보인다는 사실을 지지한다. Figure 17는 리아푸노프 지수를 계산한 값이다. 리아푸노프 지수가 시간이 지남에 따라 0에 접근하기는 하나 현 시간대에서는 0보다 큰 값을 가진다. FFT 결과 다양한 주파수 대역에서 피크가 발생한 것을 볼 수 있다.

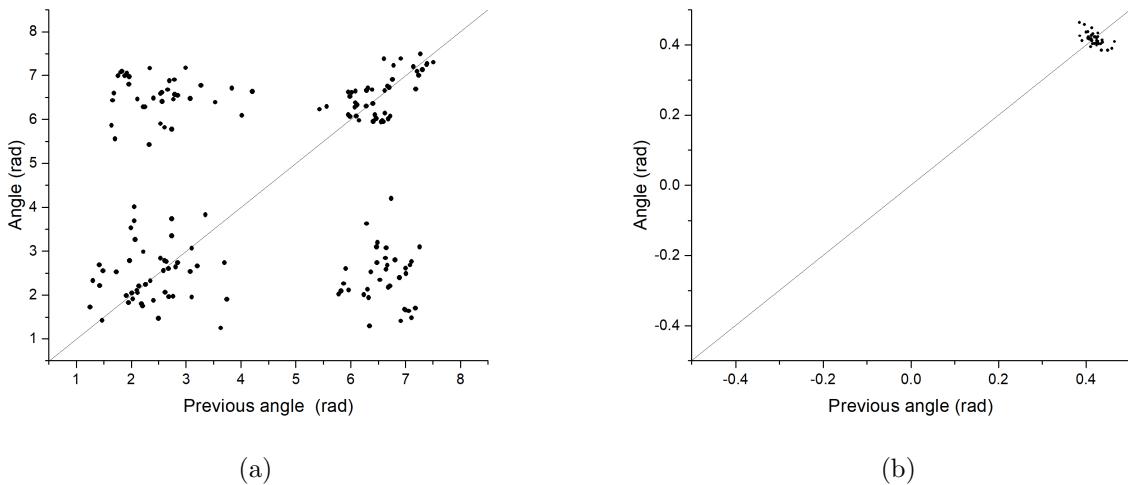


Figure 16: (a) 카오스가 발생한 것으로 추정되는 역학계의 푸앵카레 산포도 (b) 카오스가 발생하지 않은 역학계의 푸앵카레 산포도.

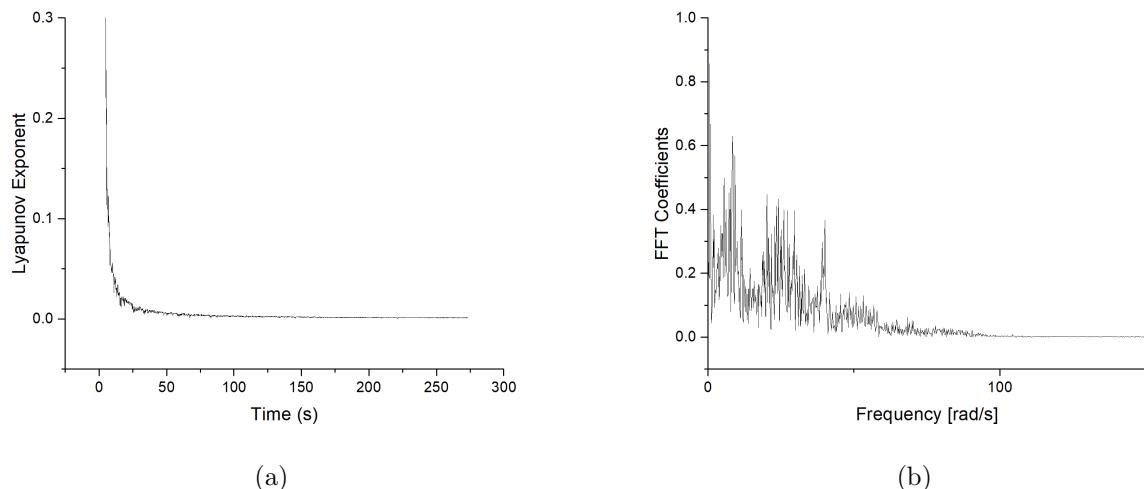


Figure 17: (a) 강제 구동력이 가해졌을 시 시간에 따른 리아푸노프 지수의 그래프이다. (b) 진자의 각변위에 대해 FFT를 수행한 그래프

4. Discussion

4.1. 퍼텐셜 특정과 감쇠계수 분석

Figure 4에서 볼 수 있듯이 Eq. (10)을 모델로 하는 퍼텐셜을 성공적으로 구하였고, 퍼텐셜 모델의 파라미터도 구하여 성공적으로 진자의 퍼텐셜을 구하고 나아가 위상공간 상에서 진자가 가지는 에너지 곡면까지 구할 수 있었다. 즉 퍼텐셜은 비선형 회귀와 반복을 통해 감쇠를 잘 제거하면 원래 해에 수렴하는 것을 확인했으며, 모델 함수는 성공적으로 원래 퍼텐셜을 기술할 수 있다는 것을 확인하였다. 안정 평형점과 준안정 평형점의 퍼텐셜 에너지를 구할 수 있었고 안장점의 퍼텐셜 또한 구함으로써 안장점보다 큰 에너지를 가지는 상태와 작은 에너지를 가지는 상태는 상이 구분됨을 보였다. 안정 평형점과 준안정 평형점의 퍼텐셜 에너지의 차이를 시각화 함으로써 진자가 안장점보다 에너지가 작아졌을 때 쉽게 안정상인지 준안정상인지 구별할 수 있는 방법

또한 제시하였다. 즉 시간에 대한 진자의 상태를 위상공간 위 에너지 곡면 위를 움직이는 점으로 표현함으로써 해당 점이 어떤 상을 가지는지 직관적으로 확인할 수 있었고, 해당 상태의 퍼텐셜 에너지, 운동에너지를 정량적으로 분석할 수 있었다. 동일한 방식을 이용하여 강제 진동자의 각도 (ϕ)가 달라져 퍼텐셜의 모양이 변형되었을 때도 성공적으로 퍼텐셜의 모양을 구하는데 성공하였고, 강제 진동자가 점점 아래를 볼수록, 즉 강제 진동자와 실 훌더 사이의 길이가 길어질수록 준안정 평형점의 에너지가 커지며 준안정 상태가 점점 사라짐을 확인하였다. 퍼텐셜을 잘 구할 수 있었던 이유는 감쇠를 잘 제거했기 때문이다. 즉 추정해낸 감쇠계수 $gamma, n$ 는 상당히 잘 추정되었음을 Figure 4 (c)에서 감쇠를 제거한 퍼텐셜의 정밀성을 통해 알 수 있고, 또한 비선형 회귀를 통해 유추된 표준오차를 Figure 7 (d)에 표기하였는데 원래 값에 비해 매우 작다는 사실을 통해 알 수 있다. 감쇠는 여러 힘이 복합적으로 작용해 하나의 항으로 감쇠를 나타내기 불가능할 것이라고 생각했는데 진자의 진동처럼 일정 속도 범위 내에서는 하나의 항으로도 감쇠를 충분히 잘 기술할 수 있다는 것을 볼 수 있었다. 이를 통해 감쇠가 있는 역학계의 감쇠계수를 구할 때는 에너지 접근방식으로 접근하는 것이 좋은 결과를 줄 수 있음을 알 수 있었다. 또한 감쇠의 지수 n 의 정밀한 추정값을 보임으로써 값이 1에서 벗어나 있다는 것을 보일 수 있었고, 그 결과 감쇠가 선형이 아님을 보이기 위해 Q인자를 분석할 필요는 없게 되었다고 할 수 있다.

4.2. 계의 온도와 비열 및 자유에너지와 임계지수

Figure 9에서 볼 수 있듯이, 외부 구동력이 없는 계의 온도는 시간이 지남에 따라 식어서 결국 0에 도달하게 됨을 알 수 있다. 그러나 중간에 상전이를 한번 하면서 온도가 증가하는 것을 볼 수 있다. 이는 일반적인 물질의 상전이와 보이는 차이점으로 물질은 상전이 도중 온도가 일정하게 유지된다. 계가 상전이를 시작하면 잠열(Latent Heat)을 내어 계의 온도가 증가한 것으로 생각해 볼 수 있지만 실제로 에너지 교환이 일어난 것은 아니므로 잠열로 상전이 도중 온도의 증가를 설명할 수는 없다. 그러나 이와는 별개로 유효 잠열(Effective Specific Heat)을 생각해 볼 수는 있다. 진자의 에너지가 에너지 곡면의 안장점보다 작아지면 에너지-온도 그래프에 그려진 두 부분 중 왼쪽 부분에 위치하게 된다. 이때 왼쪽 부분의 기울기가 반전되는 부분 중 제일 높은 온도와 제일 낮은 온도의 차이를 상 경계의 두께라고 한다. 이 상 경계의 두께만큼의 에너지 차이에 해당하는 에너지의 크기를 유효 잠열이라고 한다. 즉 계에 잠열이 존재한다고 볼 수는 있지만 잠열에 의해 상변화시 온도가 증가한 것이라고 볼 수는 없을 것이다. 임계지수 α 는 란다우 평균장 이론에 따르면 0이 나와야 하지만, 실제 계산해본 결과 0이 아닌 값을 얻을 수 있었다. 이는 혼돈진자 역학계가 열역학적인 접근방식을 이용하여 온도와 엔트로피 등 열역학적 변수를 정의하고 열역학계와와의 상사를 해볼 수는 있어도 실제로 열역학계는 아니기 때문이다. 또한 엔트로피도 주기 평균 엔트로피를 이용하였는데, 실제 엔트로피는 주기 평균이 아닌 위상공간을 차지하는 상태의 부피를 기준으로 계산하여야 한다. 주기 평균 엔트로피와 실제 엔트로피가 유사하게 거동할 것이라고 기대는 할 수 있지만 그러한 보장은 없다. 즉 란다우 평균장 이론과 임계지수가 다르게 나올 수 있다. 온도가 달라져도

4.3. 외부 구동력에 의한 진동과 카오스 분석

Figure 13에서 볼 수 있듯이 강제 진동자에 인가해준 전압과 실제 진자의 진동 진폭간의 관계를 대략적으로 볼 수 있었다. Q인자를 공명진동수와 반치폭(FWHM: Full Width at Half Maximum)과의 비율로 정의하고 계산하기에는 데이터의 점들이 너무 적다는 문제점이 있었다. 그러나 Q인자의 정의로 한 주기동안 진자가 가진 평균 에너지와 진자가 잃어버린 에너지의 비율을 사용한다면 각각의 케이스에 대해 Q인자를 구할 수 있을 것이다. Figure 15에서 한정된 시간동안 측정하는 것을 고려했을 때 진자의 상태의 궤적이 위상공간을 충분히 조밀하게 채운다는 것을 앞서 언급한 바 있다. 이 외에도 푸앵카레 산포도, FFT, 리아푸노프 지수 등 서로 다른 세가지

방법으로 계가 정말 카오스 현상을 보이는지 분석하였다. 카오스 현상을 보이는 것 같은 계의 푸앵카레 산포도는 ' $y = x$ '에서 벗어나 있고, 또한 FFT 결과 피크가 넓은 주파수 범위에서 고르게 관찰되는 것을 확인할 수 있었다. 또한 라아푸노프 지수는 0으로 접근하기는 하지만 현 측정 시간 내에서는 0보다 크므로 계가 측정 시간동안은 카오스 현상을 보인다고 할 수 있다.

5. Conclusion

혼돈진자 역학계를 분석하고 감쇠를 적절히 제거함으로써 혼돈진자의 퍼텐셜을 특정할 수 있는 방법을 제시하였다. 퍼텐셜과 에너지 관점의 접근방식을 이용하여 진자의 감쇠력을 기술하는 방정식의 파라미터들을 정밀하게 구할 수 있었고, 자석이 원판에 가까이 다가가면 감쇠력의 지수가 1로 근접할 것이라는 예상과 일치하는 결과를 얻었다. 또한 감쇠력의 지수는 대체로 1보다 작은 값을 가지며 자석의 영향이 커질수록 지수 n 과 계수 γ 가 증가함을 확인할 수 있었다. 각변위-각속도 위상공간에 진자의 에너지를 높이로 하여 에너지 곡면을 그렸으며 진자가 감쇠되며 운동하는 것은 위상공간 위 진자의 상태를 점으로 잡았을 때 점이 에너지 곡면 위를 운동하며 아래로 내려가는 모양이라는 것을 보였다. 또한 이 3차원 위상공간을 이용하여 진자가 가질 수 있는 안정상, 준안정상과 이중가둠상의 정량적인 구별방법을 제시하였다. 강제 진동자와 실 훌더 사이의 길이가 달라져 퍼텐셜의 모양이 바뀌는 경우에도 위와 동일한 방법으로 변경된 퍼텐셜을 구할 수 있었으며 강제 진동자가 아래를 향할수록 준안정상이 사라짐을 정량적으로 확인할 수 있었다. 또한 위상공간을 이용하여 진자가 가지는 에너지 별로 엔트로피를 구할 수 있었으며, 그 결과 시간에 따른 엔트로피와 온도의 변화를 확인할 수 있었다. 혼돈진자 역학계의 온도와 에너지를 대응시켜 계의 열용량을 구할 수 있었고, 그 값이 안정상 또는 준안정상일 경우 발산하는 지점과 음의 값을 가지는 지점이 있음을 확인하였다. 그러한 특이한 지점들을 제외하고 비열의 값은 에너지가 증가함에 따라 점차 증가하는 것도 확인할 수 있었다. 임계온도 근처에서 열용량과 온드를 비선형 회귀근사 함으로써 임계지수 α 를 구하였으며, 이 값이 기존 란다우 평균장 이론에서 예측했던 바와는 다르게 0이 아님을 확인하였다. 계가 가질 수 있는 자유에너지를 정량적으로 계산하여 서로 다른 온도일때 비교해 보았고, 그 결과 자유에너지의 개형은 온도가 달라져도 일정하다는 것을 알 수 있었다. 그러므로 이 방법으로 구한 자유에너지는 이중가둠 상, 즉 초임계 상을 설명할 수 없다는 것도 확인하였다. 계에 강제구동력이 가해졌을때 계의 진폭에 대해 분석하였으며, 대략 모터 전압 3.5V에서 특이점을 가지고 5.5V에서 공명점을 가지는 것을 확인하였다. 마지막으로, 카오스 현상을 보이는 듯한 계를 정량적, 정성적으로 분석함으로써 계가 관측 시간 동안에는 카오스 현상을 보인다는 것을 확인할 수 있었다.

References

- [1] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia mathematica to* 56*, volume 2. Cambridge University Press, 1997.
- [2] Catherine Weigel, Jeremy M Wachter, Paul Wagoner, and Timothy J Atherton. Predicting the influence of plate geometry on the eddy-current pendulum. *American Journal of Physics*, 84(9):653–663, 2016.
- [3] Werner Heisenberg. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. In *Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten*, pages 478–504. Springer, 1985.
- [4] Lev Davidovich Landau. On the theory of phase transitions. i. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 11:19, 1937.
- [5] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [6] J-P Eckmann and David Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *The theory of chaotic attractors*, pages 273–312, 1985.

Photoluminescence as a method of probing energy levels near the ground state

June Ho Yeo

Department of Materials Science and Engineering, Seoul National University

(with Ho Hyeon Kim, Junha Kang as part of 884.307A Intermediate Physics Laboratory I)

(Dated: April 28, 2021)

Light-matter interaction, at its basis, concerns the excitation and relaxation of electrons, with each process absorbing and emitting photons. Using this principle, the photoluminescence spectrum can be used to probe information about the energy levels near the ground state, notably the first excited state. In this report, two distinct but important systems are introduced and analyzed by examining the photoluminescence spectra when excited by a 532nm laser: Rhodamine 590, a fluorescent molecule, and Cr³⁺-doped α -corundum, or ruby, of which the relevant energy levels are those of a Cr³⁺ ion affected by a crystal field with C_3 symmetry. Rhodamine 590 is found to agree well with a Gaussian profile, and its scattering mechanisms are highlighted. The temperature and pressure dependence of peak parameters of the ruby spectrum's peaks are analyzed and compared with theoretically predicted parameters. We find that photoluminescence is a consistent method to probe the energy levels and optical properties of both systems.

I. INTRODUCTION

The interaction between matter and light can be most succinctly described by the absorption and emission of light that occurs whenever a system changes between two discrete states.[1] Figure 1 shows the classic two-level model for light-matter interaction. When light corresponding to the energy difference of the two states interacts with the system, the system is excited from the ground state, which is the state in which the system has lowest energy. Conversely, when an electron is in a state with higher energy than its ground state, it spontaneously returns to its ground state, emitting light. This emission of light is known as spontaneous emission. Without excitation, the emission that occurs aside from the spontaneous emission is blackbody radiation, which is the radiation term intrinsic to photon statistics.

While electrons in real matter usually occupy more than two levels, the succinct two-level model holds surprisingly well in real life systems. However, there are many physical intricacies hidden in the photoluminescence spectra that deviate from the simple two-level model, which encode much information about the system.

One universal deviation is the natural broadening that

is a direct quantum dynamical consequence of the excited state having a finite lifetime. There are also broadening mechanisms which appear from environmental and experimental factors. Various causes of broadening will be discussed throughout the report.

More importantly, deviation from the two-level model arise from material properties. In this report, we are concerned with two different systems: the molecule, Rhodamine 590 (R590), and the doped crystal, ruby, or Cr³⁺-doped corundum(α -Al₂O₃). If we define the bandgap ΔE_g as the minimum energy required to excite a system from its ground state, each system can be described as a two-level system where the energy difference between the ground and excited states is equal to ΔE_g . We now examine the details in the descriptions of each system.

A. Rhodamine 590: the molecule

Under the molecular orbital approximation, the molecular orbital for any molecule, or configuration of atoms, can be explicitly derived through perturbative methods with geometrical considerations. The molecular orbital is a set of discrete eigenbases ("orbitals") of the molecule, of which the electrons in the molecule can occupy. Of particular interest is the highest occupied molecular orbital (HOMO) and lowest unoccupied molecular orbital (LUMO), which are the highest occupied orbital with the highest energy in the ground state, and the orbital with its energy level directly above the HOMO's level, respectively. The bandgap for the molecule can be defined as the gap between the HOMO and LUMO levels, i.e.,

$$\Delta E_g = E_{\text{LUMO}} - E_{\text{HOMO}} \quad (1)$$

While energy levels lie above the LUMO level, as per Kasha's rule photon emission only occurs with appreciable yield for the LUMO level. This is because accord-

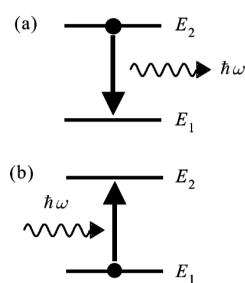


FIG. 1. Optical transitions in the classic two-level system; (a) spontaneous emission, and (b) absorption. Adapted from [1].

ing to the Franck-Cordon principle, a large overlap integral $\langle \Phi_{LUMO+1} | \Phi_{LUMO} \rangle$ allows for the quick relaxation of super-LUMO levels, with the excess energy being dispersed nonradiatively in the form of vibronic energy or intramolecular interactions. Figure 2 shows the calculated frontier molecular orbitals of R590, which are orbitals pertinent in the discussion of overlap with HOMO. While there are exceptions to Kasha's rule, most common fluorescent dyes are designed with a single emission in mind.

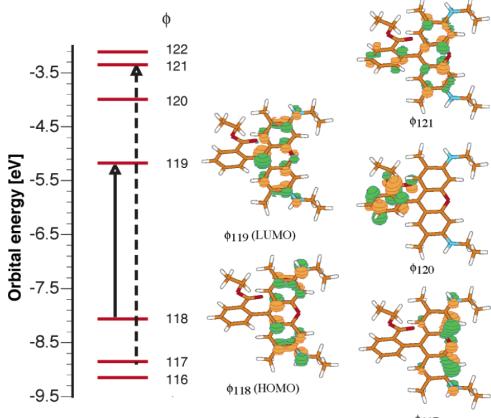


FIG. 2. Near-HOMO energy levels and calculated Kohn-Sham frontier molecular orbitals for each level. Adapted from [2].

In particular, dyes like R590 are known as chromophores since the relevant energy levels to their optical properties are given by π -conjugation in their molecular structure.

B. Ruby: the doped crystal

In crystals, the molecular orbital description no longer holds as the intensity of perturbation by nearby electrons become comparable to the energy difference between different orbital levels. Instead, electrons exist continuously in the energy axis and form bands. However, there exist forbidden regions in the energy range.

The defining feature of nonmetallic crystals are their nonzero bandgap, which is the energy difference between the conduction band and valence band edges. When this bandgap has an energy scale that corresponds to near-infrared to near-ultraviolet energies, the crystal is known as a semiconductor. When the crystal has a higher bandgap than near-ultraviolet energies, as in the case of corundum, the crystal is known as an insulator. Similarly to the definition of HOMO and LUMO in the molecule, the conduction band is defined as the highest occupied band, while the valence band is the band directly above the conduction band. For this reason, pure, undoped corundum is transparent.

However, doping a crystal with foreign atoms introduces impurity levels in the interband region. With rel-

atively low levels of doping, these impurity levels can be assumed to have little uncertainty, as impurities are spatially separated from each other. In fact, an more accurate depiction of the energy levels in ruby would be to consider them as the energy levels of the Cr^{3+} ion confined in a crystal field given by Al_2O_3 .

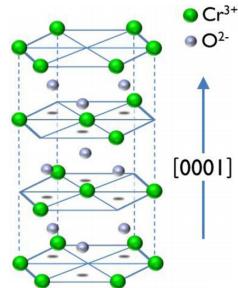


FIG. 3. Structure of ruby, adapted from [3].

The crystal structure of Al_2O_3 has the hexagonal space group $R\bar{3}c[3]$, as seen in Figure 3. With Cr^{3+} acting as a substitutional defect, replacing Al^{3+} in the crystal structure. Note that Cr^{3+} fills an octagonal (O_h) site. Under the cubic field approximation, Therefore, the crystal field near Cr^{3+} ideally has O_h symmetry. In reality, the substitutional defect breaks cubic symmetry as the lattice is stretched in the [0001] direction, and the local crystal field near the Cr^{3+} ion has C_{3v} symmetry. Furthermore, angular displacement of O^{2-} ions are spontaneous as per the Jahn-Teller effect, and all symmetry but C_3 is broken. As a result, the lowest excited state, which is the metastable state, 2E , is split into E and $2A$ states. For simplicity, and because the energy between E and $2A$ is small enough such that Kasha's rule does not hold for the $2A \rightarrow ^4A_2$ transition, here the metastable state shall be referred to as 2E .[4]

Note that while $^2E \rightarrow ^4A_2$ transition is forbidden, since for an arbitrary dipole operator $\hat{\mathbf{p}}$, $\langle ^2E | \hat{\mathbf{p}} | ^4A_2 \rangle = 0$, the transition is allowed for $E \rightarrow ^4A_2$ and $2A \rightarrow ^4A_2$.

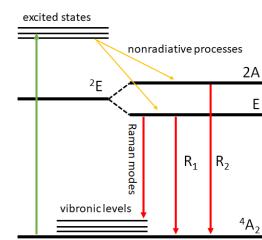


FIG. 4. Jablonski diagram of relevant energy levels and optical transitions for this lab.

II. METHODS

A. Experimental Setup

SLD-532-070T 532nm laser was used as the excitation source. The emitted light was collected via DM320i monochromator. The monochromator was connected to Andor DV-401A-FI CCD. In order to minimize signals by the laser, a notch filter was used. The monochromator and CCD was operated under -35°C. The CCD and monochromator was controlled via Andor Solis software on PC. For each experiment, data was acquired for 0.1s every 1s, for a total of 20 acquisitions.

B. Rhodamine 590

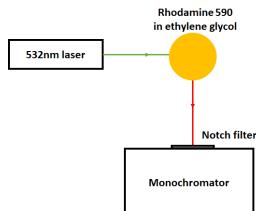


FIG. 5. Experimental setup for the photoluminescence measurement of R590.

The experimental setup was set up as shown in Figure 5, with the position of the R590 sample being adjusted to maximize the intensity of light entering the monochromator. An unknown amount of R590 was dissolved in ethylene glycol (EG) in a glass vial. An unknown amount of R590 was also observed to have stained the glass vial.

C. Ruby

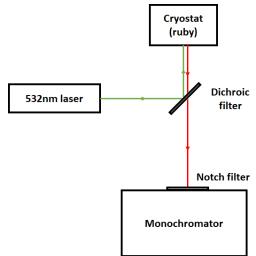


FIG. 6. Experimental setup for the photoluminescence measurement of ruby.

The experimental setup was set up as shown in Figure 6. The dichroic filter was used to selectively reflect the 532nm laser and transmit the ruby fluorescence signal. Measurements were conducted for $p = 1\text{ atm}$, room temperature (300K) conditions. Data for measurements

with $p = 10\text{ mTorr}$, and temperatures ranging from 10K to 290K were provided in lieu of conducting the measurements, due to technical difficulties with the cryostat.

III. RESULTS AND DISCUSSION

A. Rhodamine 590

Prior to the experiment, in order to verify that the light that enters the monochromator is indeed fluorescence, a cursory experiment was conducted using red ($\lambda \simeq 630\text{nm}$), green ($\lambda \simeq 540\text{nm}$), and blue ($\lambda \simeq 460\text{nm}$) light emitting diodes as a light source. Light emission with a much higher intensity than that of scattering was only observed for the green and blue LEDs, indicating that there exists a minimum energy for the light emission to occur. This is consistent with the description for fluorescence, or at least some sort of photoluminescence, in which photons require an excitation energy greater than or equal to the "bandgap".

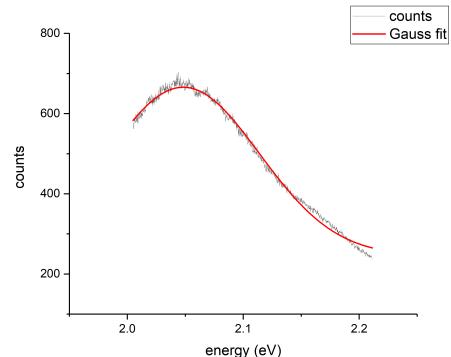


FIG. 7. Photoluminescence spectrum acquired at room temperature for R590 in EG, shown over the entire acquisition range. Fit to a Gaussian function, $y = y_0 + (A/(w\sqrt{\pi/2}) * \exp(-2(\frac{x-x_c}{w})^2)$; $y_0 = 246.0 \pm 2.5$ ($p = 0$), $x_c = 2.04836 \pm 0.00031$ ($p = 0$), $w = 0.1312 \pm 0.00012$ ($p = 0$), $A = 68.99 \pm 0.91$ ($p = 0$), $R^2 = 0.98692$.

A wide Gaussian peak with full width half maximum of 0.1544 ± 0.0013 [eV] is observed. The single peak of the photoluminescence spectrum of R590 suggests that only a single emission mode is present for the R590/EG system. As the initial absorption maximum is 2.331 ± 0.003 [eV], and the emission maximum is 2.04836 the Stokes shift is computed to be 0.282 ± 0.003 [eV].

The broadening of the emission can be attributed to the spectral diffusion of R590. For chromophores, the linewidth-scale broadening can generally be attributed to spectral diffusion, as single molecule luminescence studies have uncovered that single molecules yield narrow (width $\sim 0.5\text{nm}$) Lorentzian zero-phonon peaks with auxiliary vibronic modes[5]. This spectral diffusion can be

attributed to intermolecular interactions, and inhomogeneity leads to its Gaussian form.

B. Ruby

All spectra were fit to Voigt profiles, which are a convolution between Gaussian and Lorentzian functions with variable widths, using the Levenberg Marquardt iteration algorithm in Origin's NLFit module. The specific function used for fitting and fitting details are contained in `DoubleVoigt.fdf` in the supplementary material. Since inhomogeneous broadening yields Gaussian distributions and homogenous broadening yields Lorentzian distributions, the Voigt profile best represents the broadening effects. Fitting details and fitting functions are detailed in the appendix and supplementary information. Figure 8 shows the photoluminescence spectrum acquired at 40K, 10mTorr, and depicts the features that will be discussed below.

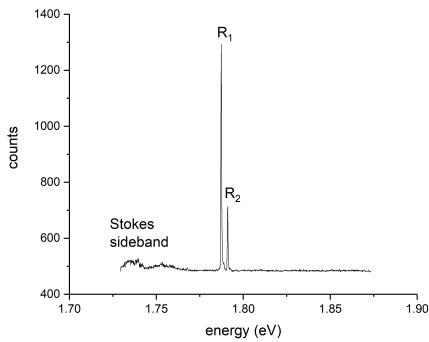


FIG. 8. Photoluminescence spectrum acquired at 40K, 10mTorr for ruby, shown over the entire acquisition range.

The most notable feature of the photoluminescence spectrum is the pair of peaks labeled R_1 and R_2 , near 1.79eV, which correspond to the optical transitions of $E \rightarrow {}^4A_2$ and $2A \rightarrow {}^4A_2$ respectively. Also note the Stokes (lower frequency) sidebands in the 1.73eV~1.80eV region, which correspond to vibronic modes of 4A_2 .

1. R_1 , R_2 peaks

First, the positions of the peaks should be discussed. The peak positions for a system modeled as a four-level system with $\epsilon_0 \ll \epsilon_1 < \epsilon_2 \ll \epsilon_3$; $\epsilon_1 - \epsilon_0, \epsilon_3 - \epsilon_2 \gg \hbar\omega_D > \epsilon_2 - \epsilon_1$ has been calculated theoretically. The peak positions for R_n ($n=1,2$) $x_{c,n}$ is given as in equation 2, where T_D is the Debye temperature, i.e. the temperature of the Debye acoustic phonon (=760K for this system). The experimental data is in good agreement with this model (Figure 9).

$$x_{c,n}(T) = \epsilon_n + \alpha_n \left(\frac{T}{T_D}\right)^4 \int_0^{T/T_D} dx \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (2)$$

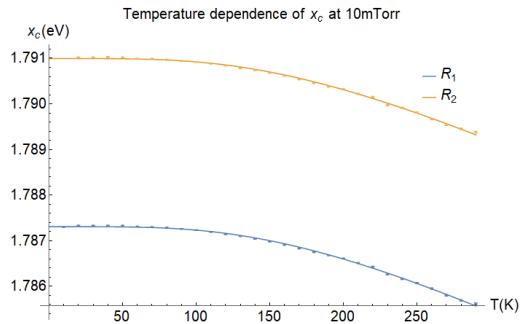


FIG. 9. Peak position x_c over temperature. Fit to equation 2. $\epsilon_1 = 1.78731 \pm 0.000006$ ($p = 7.19 \times 10^{-131}$), $\alpha_1 = -0.04072 \pm 0.00030$ ($p = 7.49 \times 10^{-40}$), $R^2 = 1$; $\epsilon_2 = 1.79099 \pm 0.000006$ ($p = 1.00 \times 10^{-124}$), $\alpha_2 = -0.03917 \pm 0.00034$ ($p = 8.13 \times 10^{-37}$), $R^2 = 1$.

Qualitatively, this decrease in energy over temperature can be explained as the decrease in orbital overlap between 4A_2 and 2E as the crystal expands thermally in the [0001] direction, as is typical for a hexagonal structure. The splitting between the two R -lines increases by a nearly undetectable amount, indicating the increase of the Jahn-Teller effect, albeit minuscule.

For zero-phonon modes, the main contributions to peak broadening are inhomogeneous spectral broadening due to crystal strain, which yield a Lorentzian distribution, and the natural broadening, as well as experimental factors such as the aperture size. Only the natural broadening, which is temperature dependent, can be quantified. For the same four-level system model discussed above, the FWHM can be computed. The FWHM Γ_n of R_n peaks $n = 1, 2$, is given as equation 3, where T_D is the Debye temperature. ($\bar{\alpha}_n$ is distinct from α_n in equation 2.)[6] As it can be seen in Figure 10, the experimental ruby FWHM is consistent with this model. The temperature-independent terms are represented as the constant term Γ_n .

$$\Gamma_n(T) = \Gamma_n + \bar{\alpha}_n \left(\frac{T}{T_D}\right)^7 \int_0^{T/T_D} dx \frac{x^6 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (3)$$

We now examine the relationship between the two peaks. Under the steady-state assumption, the two-level model can be applied again to the E and $2A$ levels to compare their relative intensities. The ratio of peak intensities corresponds to the ratio of occupancies of each state at the steady-state, and thus is proportional to $\exp(E/k_B T)$.[4] This relationship is shown in Figure 11. The fitted value for E_{12} is consistent with the results shown in Figure 9.

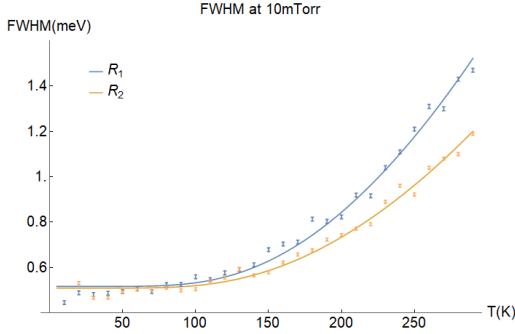


FIG. 10. FWHM of each peak over temperature. Fit to equation 3. $\Gamma_1 = 4.163 \pm 0.067$ ($p = 1.09 \times 10^{-30}$), $\bar{\alpha}_1 = 409.6 \pm 8.4$ ($p = 6.74 \times 10^{-28}$), $R^2 = 0.998452$; $\Gamma_2 = 4.103 \pm 0.050$ ($p = 6.94 \times 10^{-33}$), $\bar{\alpha}_1 = 281.6 \pm 6.2$ ($p = 2.36 \times 10^{-26}$), $R^2 = 0.998917$.

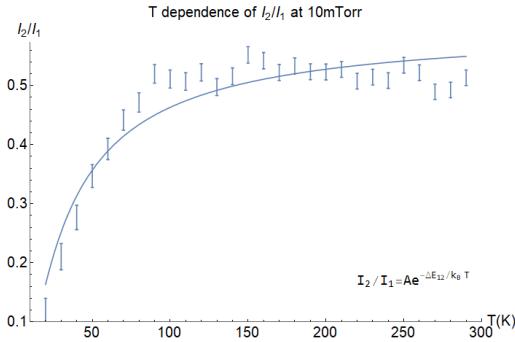


FIG. 11. I_2/I_1 over temperature. Fit to $(I_2/I_1) = A \exp(-E_{12}/k_B T)$. $A = 0.601 \pm 0.013$ ($p = 0$), $E_{12} = 0.0022 \pm 0.0002$ ($p = 0$), $R^2 = 0.995186$.

Overall, the energy level model is consistent with the experimental peak positions, FWHMs, and relative intensities.

2. Stokes sideband

While the experimental methods utilized in this lab provide too high of a signal-to-noise ratio to quantitatively analyze these peaks, their energy range and general shape are in good agreement with previous reports on the photoluminescence spectrum of ruby.[7],[8] The shift of the Stokes sidebands correspond to vibronic modes, i.e., phonon-coupled modes of Cr^{3+} , which introduce energy levels above 4A_2 . The area of the peaks showed a qualitatively decreasing trend over temperature (Figure 12, Figure 16), which is consistent with the temperature-dependent change of distribution for the general boson gas.

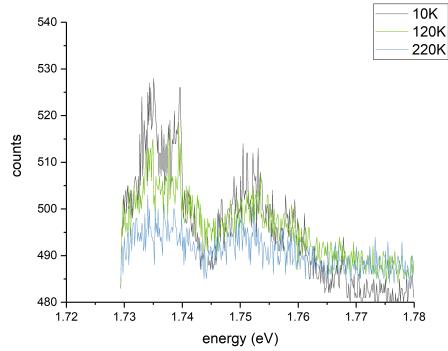


FIG. 12. Some representative spectra in the 1.73eV 1.78eV Stokes sideband range. $P = 10\text{mTorr}$, temperature given in figure.

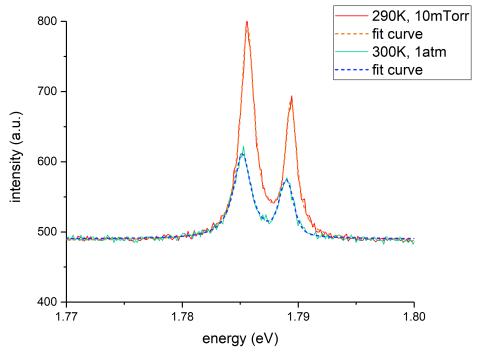


FIG. 13. Acquired R peaks for the 290K, 10mTorr and 300K, 1atm cases, and their best fit Voigt profiles. Intensity normalized arbitrarily for clarity.

3. Environmental effects

We now compare the data acquired at room temperature at vacuum (10mTorr) and 1atm (Figure 13). Previous investigations on the pressure dependence of the peak positions [9] model the pressure and temperature dependence linearly, for reasonable pressures and temperatures.

$$x_{c,k} = \alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}p + \alpha_{k,3}(T - T_{ref}) \quad (4)$$

Equation 4 shows the linear model. From previous data, $\alpha_{1,1} = 14402.5 \pm 0.4$ [cm^{-1}], $\alpha_{1,2} = -7.59 \pm 0.04$ [$\text{cm}^{-1} \cdot \text{GPa}^{-1}$], $\alpha_{1,3} = -0.130 \pm 0.006$ [$\text{cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]; $\alpha_{2,1} = 14402.5 \pm 0.4$ [cm^{-1}], $\alpha_{2,2} = -7.615 \pm 0.004$ [$\text{cm}^{-1} \cdot \text{GPa}^{-1}$], $\alpha_{2,3} = -0.122 \pm 0.006$ [$\text{cm}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$]. For the 290K, 10mTorr case, $x_{c,1}$ and $x_{c,2}$ can be predicted to be 1.78605 ± 0.00005 [eV] and 1.78971 ± 0.00005 [eV], while for the 300K, 1atm case, $x_{c,1}$ and $x_{c,2}$ can be predicted to be 1.78589 ± 0.00005 [eV] and 1.78956 ± 0.00005 [eV]. Comparison of the predicted values and observed

values is shown in Figure 14.

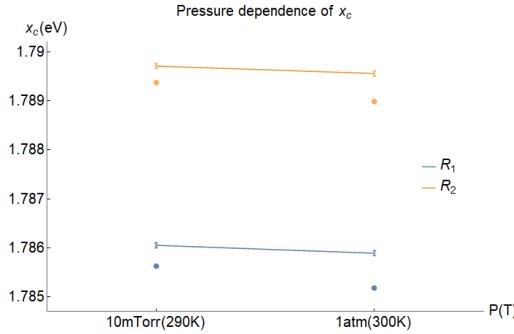


FIG. 14. Comparison of predicted and observed values. Error bars: 2σ .

While the general trend is as predicted, the model deviates somewhat, especially for the high pressure case.

4. Comparison of additional experimental data

Another set of experimental data, labeled AE in the eTL post by the TA, was also given for verification. By comparing the peak positions and relative intensities of R_1 and R_2 peaks, it can be confirmed that the AE data is erroneous. Discussions on the FWHM were omitted because FWHM also depends on experimental factors such as the aperture size of the monochromator, and may largely vary over separate experimental trials.

As the model used in section III B has been verified, the fact that the AE data does not fall within the error range of the fit data is sufficient to claim that the experimental data is erroneous.

While the claim cannot be made with absolute certainty, based on the arguments laid out in section III B 3, it is probable that a sufficient vacuum was not maintained during the acquisition of AE data. Another possible experimental error is the temperature difference between the temperature sensor and sample, which is a common issue in low temperature measurements. A remedy to this error would be to at least allow the system to come to its steady state equilibrium, so that the measurement error could be given as a function of temperature.

IV. CONCLUSION AND OUTLOOK

Photoluminescence was utilized as a method of probing the energy levels for two model systems, rhodamine 590 in ethylene glycol and ruby. In either case, photoluminescence provided a consistent method of measuring the energy difference between the ground state and pertinent excited states, and broadening followed the Voigt profile.

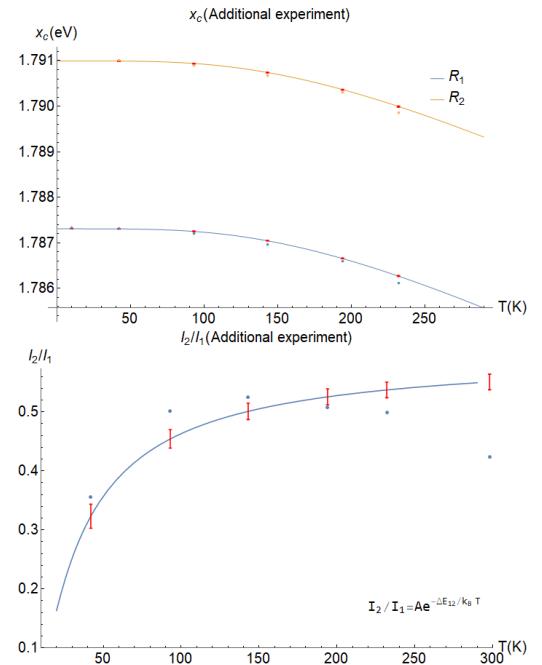


FIG. 15. Peak positions x_c (top) and relative peak intensity I_2/I_1 (bottom) experimental data plotted together, with fit lines from Figures 9 and 11. Error bars (red) show range of possible measurement uncertainty at the claimed temperature values of the AE data given the model in Section III B holds; 2σ .

In rhodamine 590, the photoemission was first verified to be fluorescence, with a Stokes shift of 0.282 ± 0.003 [eV]. The photoluminescence spectrum was observed to have a Gaussian profile, which is consistent with the effect of inhomogeneous spectral diffusion described by previous studies.

In ruby, R_1 and R_2 optical transitions expected from symmetry considerations were observed as two distinct peaks with a well defined peak separation. Using a 4-level system model, the full width half maximum and peak positions were shown to agree well with theory, and the temperature dependence of the relative intensity of the two peaks were discussed. In addition, a Stokes sub-band of single phonon coupled vibronic modes were also observed. While pressure dependence did not strictly adhere to theoretical predictions, it was seen that a larger deviation could be seen for 1atm rather than vacuum pressures.

This topic could be further explored by introducing new factors, e.g., introducing new broadening mechanisms or changing the energy levels. One interesting effect that could be explored further is the solvent effect of rhodamine 590, and the doping level's influence on the spectrum of ruby.

ACKNOWLEDGMENTS

Many helpful comments on the experimental procedure and data processing were provided by the TAs.

- [1] M. Fox, *Quantum optics : an introduction* (Oxford University Press, Oxford New York, 2006).
- [2] H. Watanabe, N. Hayazawa, Y. Inouye, and S. Kawata, DFT Vibrational Calculations of Rhodamine 6G Adsorbed on Silver: Analysis of Tip-Enhanced Raman Spectroscopy, *The Journal of Physical Chemistry B* **109**, 5012 (2005).
- [3] L. Fallarino, C. Binek, and A. Berger, Boundary magnetization properties of epitaxial Cr_{2-x}Al_xO₃ thin films, *Physical Review B* **91**, 10.1103/physrevb.91.214403 (2015).
- [4] R. C. Powell, *The interaction of chromium ions in ruby crystals*, Tech. Rep. AD-651914 (Air Force Cambridge Research Laboratories, Bedford, MA, 1966).
- [5] F. Schindler, J. M. Lupton, J. Feldmann, and U. Scherf, enA universal picture of chromophores in π -conjugated polymers derived from single-molecule spectroscopy, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **101**, 14695 (2004).
- [6] D. E. McCumber and M. D. Sturge, Linewidth and temperature shift of the r lines in ruby, *Journal of Applied Physics* **34**, 1682 (1963).
- [7] U. Rothamel, J. Heber, and W. Grill, Vibronic sidebands in ruby, *Zeitschrift fr Physik B Condensed Matter* **50**, 297 (1983).
- [8] S. Raghavan, P. K. Imbrie, and W. A. Crossley, Spectral analysis of r-lines and vibronic sidebands in the emission spectrum of ruby using genetic algorithms, *Applied Spectroscopy* **62**, 759 (2008).
- [9] R. G. Munro, G. J. Piermarini, S. Block, and W. B. Holzapfel, Model line-shape analysis for the ruby r lines used for pressure measurement, *Journal of Applied Physics* **57**, 165 (1985).

1. Appendix

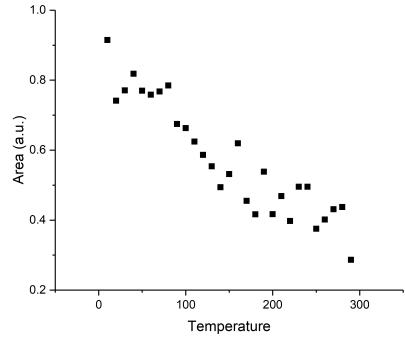


FIG. 16. Integrated area of Stokes sideband over temperature.

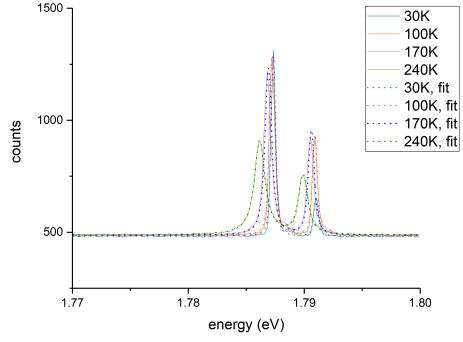


FIG. 17. A sampling of ruby peaks fit to Voigt profiles. Other fitted curves are contained within the supplementary material.

Experimental conditions not mentioned in the report are contained within the supplementary material.