

## 8.1 데이터 처리

모든 실험 데이터는 여러 가지 원인에서 기인한 오차로 오염되어 있습니다. 이들 속에서 원하는 물리 현상을 집어내기 위해서는, 오차를 걷어내고 참값을 추정해 내는 방법을 배워야 합니다. 이 장에서는 중급물리실험 1 강좌에서 사용되어야 하는 오차 처리 기법들에 대해 간략히 소개합니다. 자세한 내용은 별도로 제공되는 오차 처리 교본을 참고하세요.

### 오차와 불확실도

오차의 개념은 측정치가 참값으로부터, 혹은 실험값이 이론치로부터 (보통 이 경우에는 오차보다 편차-deviation의 용어를 쓰기는 합니다.) 얼마나 벗어나 있는지를 정의하는 값입니다. 하지만 참값이 없는 경우, 혹은 이론과 별개로 실험 자체가 얼마나 정밀한지를 논하기 위해서는 불확실도의 정의가 필요합니다. 불확실도는 신뢰구간의 폭을 의미합니다. 최학치에서 불확실도를 뺀 값에서부터, 더한 값 사이에 참값이 있을 확률이 어느 정도 수준 이상이라고 할 때, 우리는 참값이 어느 범위 안에 있다고 주장할 수 있습니다. 이를 찾기 위해 실험/통계적 근거를 얻게 되는데, 그 결과로 최학치 - 참값에 가장 가까울 것이라고 추정되는 평균 혹은 가중 평균 - 및 불확실도를 제시하게 됩니다. 이때 참값이 신뢰구간에 포함될 확률이 얼마나

8.1 데이터 처리 . . . . .	219
오차와 불확실도 . . . . .	219
회귀 분석 . . . . .	221
8.2 좋은 그래프와 나쁜 그래프 :	
Plotting Guide . . . . .	225
Bad example . . . . .	226
Better example . . . . .	227
matplotlib example . . .	228
평가 . . . . .	230
8.3 TeX과 조판 . . . . .	231
8.4 아티클과 레터, Supplemental Material . . . . .	233
8.5 영문 보고서 작성 시 참고 사항 . . . . .	235
8.6 마무리하며 . . . . .	237

되는지에 따라 신뢰구간의 폭이 달라지게 됩니다. 보다 정확히는, 원하는 수준의 분석 수준에 따라 신뢰구간의 폭이 달라집니다. 이를 결정하는 것은 유의수준입니다. 유의 확률은 참값이 신뢰구간 밖에 있을 확률입니다. 유의 확률을 작게 잡을수록 신뢰구간은 넓게 잡아야 합니다. 실수를 하지 않으려면 제안을 넓게 해야 하는 셈인데, 신뢰구간이 너무 넓으면 실험의 주장이 충분히 강력하지 못할 수 있습니다. 적정선의 유의수준을 지키기 위해  $\sigma$  레벨 표기법을 이용해 유의수준을 통일시켜 줄 필요가 있습니다.  $n\sigma$  유의수준이라 함은, 데이터 분포에서 신뢰구간이 표준편차의  $n$ 배가 되는 반폭을 가지는 경우를 의미합니다. 즉  $1\sigma$  유의수준은 약 37%의 유의확률,  $2\sigma$  유의수준은 약 5%의 유의확률을 가지게 됩니다. 중급물리실험에서는  $1\sigma$  유의수준을 잡는 것으로 통일하는 것이 편합니다. 다만, 눈대중으로 신뢰구간이 이 정도 될 것 같다고 제시해 주는 경우 좀 넓게 잡혀서 약  $2\sigma$ 로 간주하십시오. 눈대중으로 신뢰구간을 재는 것이 허접해 보이지만, 실험자의 최선에 따른 우연오차의 하한을 제시하는 것이므로 항상 안 적어주는 것보다 데이터를 흐리게 읽으면 읽었지, 있는 오차를 안 읽는 것보다 보수적인 방법입니다. 정당한 통계적 절차로 불확도를 얻는 것이 어렵거나 불가능하거나 매우 귀찮은 경우에는 눈대중으로라도 측정장비의 눈금, 데이터의 흔들림 (fluctuation) 등을 고려해서 신뢰구간 범위를 정해주세요. 이후 여러 가지 요인의 불확도를 합칠 때에는 오차의 전파를 사용하여야 하고, 반드시 유의수준이 같은 오차끼리 더해 주어야 합니다.

이러한 오차 분석은 실험 검정에 사용될 수 있습니다. 허용되는 불확도 범위보다, 이론 및 알려진 값으로부터 실험값이 가지는 편차가 더 큰 경우 이론에 문제가 없다는 귀무가설을 기각하기 충분한 통계적 유의성을 가지게 됩니다. 즉, 이러한 분석은 이론이 맞다는 근거는 없지만 이 이론이 맞음에도 불구하고 실험값이 이렇게 잘못 나올 확률이 얼마나 낮을지는 알 수 있습니다. 이것은 주로 이론이 잘못되었거나 부족할 수 있다는 유의성의 근거가 되지만, 이론이 틀릴 확률이 몇 퍼센트이다 등의 의미는 아닙니다. 자세한 내용은 SPI

매뉴얼 및 별도로 제공되는 오차 처리 교재를 참고하세요.

## 회귀 분석

실험 데이터를 이론과 비교하기 위해서는 회귀 분석이 필요합니다. 회귀 분석은 이론에 따라 조작 변인과 종속 변인 (바꾸어준 값과, 그에 따라 바뀌어 측정되는 값) 간의 관계를 수학적 함수로 정의해 나타낸 회귀 모형을 기술하는 여러 파라미터들의 최적치를 실험 자료와의 비교를 통해 얻어내는 것을 의미합니다. 예를 들어, 이론에 따라 종속변인이 조작변인에 선형으로 의존한다는 것을 알고 있는 경우에는 기울기와 절편, 2개의 파라미터를 조절해 실험 결과를 잘 반영하는 회귀선/추세선을 찾아낼 수 있습니다. 이러한 과정을 회귀 분석이라고 하며, 회귀 분석의 목적은 회귀 파라미터 / 회귀 계수들의 값, 즉 여기에서는 기울기 및 절편의 최적값을 알아내어 그로부터 유의미한 물리량들을 뽑아내는 것입니다. 회귀를 할 때에는 같은 선형회귀이더라도, 만약 이론이 0의 조작변인에서 반드시 0의 종속변인이 나올 것을 보장한다면 절편을 주지 않고 1자 유도 회귀를 할 수도 있습니다. 이처럼 이론에 맞게 회귀에 사용되는 회귀 모형을 바꾸어 볼 수 있습니다. 여러 개의 회귀 변수 자유도를 넣으면 실험치와의 비교를 통해 더 많은 물리현상을 볼 수 있지만, 또 너무 많은 자유도를 넣어 겹치는 경우에는 회귀에 문제가 생길 수도 있습니다. 원치 않는 오차가 계통오차의 형태로 한 방향으로 실험값을 오염시킨 경우, 재고자 하는 물리량과 다른 방향의 회귀 자유도를 주어 이를 제거할 수 있습니다. 가령 시간 측정에서,  $1/t$  꼴 회귀를 해야 하는데 초기 시작 시간이 부정확하여 오차가 생기는 경우  $1/(t + t_0)$  꼴의 회귀를 하면 시작 시간의 계통오차를 제거할 수 있습니다. 이처럼 회귀 모델을 잘 설계하는 것은 이론과 실험의 비교를 통해 이론을 기각하거나 받아들이고, 물리량의 값을 정량적으로 얻고 그 불확도를 얻기 위해 꼭 세심하게 필요한 과정입니다. 물론 회귀가 잘 맞는다고 그 이론이 참이라는 것은 아니지만, 회귀가 잘 안

맞으면 그 이론이 틀릴 확률에 유의해야 함을 의미합니다. 회귀선들 중에서는 아예 다른 정의를 따르지만 개형이 비슷한 경우가 있습니다. 특히 감쇠하는 과정은 식이 다르더라도 모양이 엇비슷한 경우가 많을 때, 이 경우 로그를 취하거나 하면 감쇠지수에 따른 개형변화를 더 극적으로 관찰할 수 있습니다. 좋은 회귀는 원하는 물리량을 뽑아내기 좋은 것을 파라미터로 잡는 것입니다. 또한 이것은 잘 맞고 저 모델은 잘 안 맞는다는 것을 가려낼 수 있는 강력한 검정력을 가지면 좋습니다. 이에 따라 비슷한 개형이 여러 개 나올 수 있는 식을 회귀 모델로 잡으면 별로 좋지 않습니다.

한편 회귀가 잘 되었는지 평가하기 위한 지표로는 상관계수  $R^2$  값이 사용되곤 합니다. 선형회귀에서는 이 값을 처리한  $\sqrt{1/R^2 - 1}$ 이 불확실도에 비례하므로 유용하게 쓰일 수 있으나, 비선형회귀에서는 정비례 관계가 아닙니다. 그럼에도 불구하고 1에 가까울수록 회귀가 잘 맞고, 0에 가까울수록 회귀가 잘 안 맞는다는 것을 의미합니다. 이 때 제곱오차들은 다음과 같이 정의됩니다. 실험치가  $y_i$ , 회귀함수가  $f(x_i)$ , 실험치의 평균이  $\bar{y}$ 라고 할 때 다음이 정의됩니다.

$SSE = \sum_i (y_i - f(x_i))^2$  : 데이터가 회귀선으로부터 떨어진 정도. 작을수록 회귀가 잘 맞습니다.

$SST = \sum_i (y_i - \bar{y})^2$  : 데이터가 가지는 총 분산.

$SSR = \sum_i (f(x_i) - \bar{y})^2$  : 회귀선이 데이터의 평균으로부터 떨어진 정도; 즉 회귀선에 의해 데이터에 생기는 분산.

$$R^2 = 1 - SSE/SST = SSR/SST : 상관계수의 정의.$$

$SST = SSR + SST$  : 데이터가 가지는 분산의 전체 값은 회귀선에 의한 분산과 회귀선으로부터 데이터의 편차에 의해 발생하는 분산의 합과 같습니다.

최소제곱법 (least square method)을 이용하면 회귀 계수들을 찾아낼 수 있습니다. 최소제곱법은 회귀선과 데이터 사이의 편차제곱합, 즉 SSE를 최소화하는 파라미터들을 찾는 것입니다. 회귀 또는 최적화 프로세스에서 최소화시킬 목적이 되는 대상을 loss function 이라 합니다. 이 경우에는 SSE를 loss function으로 합니다. 이를 최소화하기 위해 SSE를 각각의 회귀 파라미터로 편미분한 것이 다 0이 나오면 회귀가 최적점에 수렴하였다고 할 수 있습니다. (제곱오차가 최소) 이를 최소자승법이라고 합니다. 간단한 경우 야코비안 행렬을 풀어 손으로도 계산할 수 있으나, 계산량이 많아 통계 패키지를 사용하는 것이 일반입니다. Python의 `scipy.optimize.curve_fit` 기능, MATLAB의 `fit`, Origin, R 등의 여러 통계 패키지가 회귀분석을 지원합니다. 한편 복잡한 회귀 모델을 이용해 분석해야 하는 경우에는 경사강하법 등을 사용해 직접 회귀를 구현하는 방법도 있습니다.

예를 들어 감쇠 진동의 진폭, 감쇠상수( $\gamma = b/2m$ ), 진동수 등의 매개변수를 실험치와 이론식에 의한 예측치의 비교, 즉 제곱오차합 (SSE)이 최소가 되게 만드는 변수일 때가 최화 (best estimation) 일 것임을 간주하여 물리량을 얻는 기법으로 사용될 수 있습니다. 이때 단순히 진동수, 진폭 등의 최화치만 제시하는 것이 아닌, 물리량의 불확도를 얻기 위해서는 회귀계수의 공분산을 얻을 필요가 있는데, 이는 데이터 포인트들이 가지는 회귀선으로부터의 편차제곱합에 의해 얻어진 불확실도가 추세 곡선의 파라미터에 전파되는 오차의

전파 관계식으로부터 유도되며, 선형 회귀의 경우 회귀계수의 불확실도를 해석적으로 얻을 수 있으나 비선형 회귀를 사용할 경우 통계 패키지에서 제공하는 공분산을 사용해 얻을 수 있습니다. python의 경우, 다음과 같은 방법으로 회귀계수의 최적치 및 불확도를 얻을 수 있습니다.

```
from scipy.optimize import curve_fit

popt, pcov = curve_fit(회귀 모형(함수), 조작 변인 자료, 종속
변인 자료, (필요시) p0 = [초기값])
```

이때 popt 배열에는 각 회귀계수의 최적치가 순서대로 얻어지며, pcov 배열은  $n \times n$  2차원 배열으로 그 대각 성분이 각 회귀 계수의 공분산을 의미합니다. 이에 제곱근을 취하면 회귀계수의 1-시그마 유의수준 하 불확실도를 얻습니다. 다른 통계 패키지를 이용해서도 비슷한 일을 할 수 있습니다.

너무 어려운 경우에는, 회귀 모형에 적절한 값을 대입하여 얻은 개형을 실험치와 비교하여 눈대중으로 회귀 파라미터들을 찾아주어도 좋습니다. 이는 수치 회귀를 할 때 수렴성을 높이기 위해서 초기 추정을 최대한 눈대중으로 실제 최적 위치에 가깝게 맞춰 주는 것이 도움이 되기 때문에, 어떤 파라미터가 어느 정도의 값을 가져야 회귀가 잘 되는지 감을 잡고 있으면 좋습니다.

수치 회귀는 제곱오차를 수치 반복 연산을 이용해 최소화시키기 때문에, 초기 추정치가 좋지 않으면 수렴성을 기대하기 힘듭니다. 진동하는 함수나 가우시안 함수 등의 회귀모형을 사용하는 경우 육안으로 피크의 크기/위치/폭, 흔들림의 진폭/중심(평균)/주기 등을 추정하여 비슷한 order로 맞춘 초기값을 선정하여 수렴성을 높일 수

있습니다.

또한, 회귀에 감쇠 등의 부가적인 보정항이 들어가는 경우, 이 초기값은 최초에는 보정이 없는 경우의 값을 대입하는 것이 수렴성에 좋습니다. secondary effect들이 포함된 경우에는 이를 무시한 초기값을 넣어 주면 회귀 과정에서 data와의 fit을 높이기 위해 얼마만큼의 감쇠가 필요한지 통계 패키지가 수렴하며 찾아 주게 됩니다.

자세한 사항은 PL 매뉴얼에 기입된 내용을 참고하거나, 별도로 제공되는 오차 처리 교본인 Error Analysis for Experimental Physicists를 참고하세요.

## 8.2 좋은 그래프와 나쁜 그래프 : Plotting Guide

\* 이 부분의 본문은 2022년도 김명현 조교의 eTL에 공지한 내용을 바탕으로 하고 있습니다.

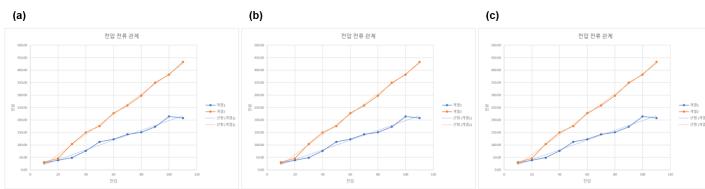
실험 보고서를 작성하면서 그래프를 그릴 일이 많이 있는데, 어떤 부분들을 신경 써야 하는지 알려드리기 위해서 공지를 올립니다.

그래프는 읽기 쉽고, 전달하고자 하는 정보가 잘 담겨있어야 합니다. 이 원칙을 염두에 두면서 글자 크기, 글자 색, 선의 굵기, 축 제목, 단위, 오차막대 등 그래프의 많은 parameter들을 신경 써야 합니다. 첨부파일에 올린 "Preparing figures for publication and presentations"를 보면 자세히 나와 있습니다.

## Bad example

수강생들이 범하기 쉬운 실수를 모아 놓은 예시를 들면 아래와 같습니다. (아래 그림에 같은 그래프 3개가 나열되어 있는데 여러 panel을 이용한 그래프의 예시를 만들기 위해서 한 것일 뿐입니다.)

NATURE PHYSICS LETTERS



**Fig. 4 | Emergence of local magnetic moments in monolayer WSe<sub>2</sub>.** **a.** Out-of-plane magnetic-field dependence of MCD at  $\nu=1$  and  $\nu_x=\nu_z\approx 0.3$  (at which the heterostructure is an excitonic insulator) for varying temperatures. The spectral dependence of the MCD is determined as the difference between the left- and right-handed reflected light intensity divided by the total reflected light intensity. It is integrated over a narrow spectral range near the repulsive polaron resonance (1.73 eV; Methods). **b.** Temperature dependence of the inverse MCD slope around zero magnetic field (which is proportional to the inverse magnetic susceptibility) as a function of temperature at  $\nu_x\approx 0.30$  and 0.45. The error bars are estimated from the linear fit to the low-field data in **a.** The magnetic susceptibility follows the Curie-Weiss dependence (solid lines) at high temperatures with small negative Weiss constants ( $x$  intercepts). The magnitude of the Weiss constant is compatible with weak antiferromagnetic exchange interactions between the distant local moments.

from optical studies (Fig. 3a and Extended Data Fig. 7) (the larger electric field values here compared with Fig. 3a,b are due to a thinner hBN spacer in the capacitance device). The state persists up to around 120 K. Details of the capacitance measurements and results at other temperatures are included in Methods and Extended Data Figs. 4 and 5.

We evaluate the charge gap of the excitonic insulator by integrating

(\*논문은 Gu, J., Ma, L., Liu, S. et al. Dipolar excitonic insulator in a moiré lattice. Nat. Phys. (2022)을 편집한 것입니다. 논문 내용과 그림은 아무 연관 없습니다.)

이 그래프에서의 실수를 나열해보면,

1. 그래프 축의 단위 없음
2. 오차 막대 없음
3. 본문의 글자 크기에 비해서 그래프의 크기가 작아서 읽기가 어려움
4. 글자 색과 축의 색깔이 회색. 보통 검은색을 사용합니다.
5. 그래프의 윤곽선. 보통 윤곽선은 사용하지 않습니다.
6. Grid. 정보 전달에 있어서 꼭 필요한 경우가 아니면 grid는

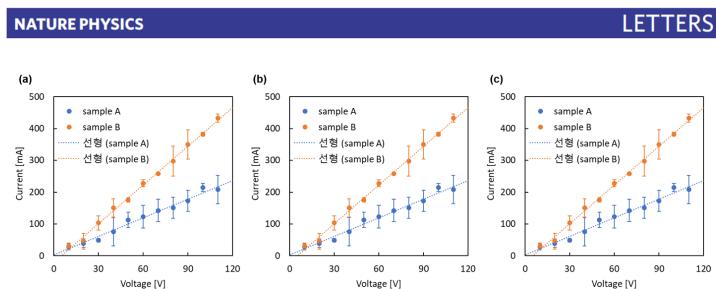
사용하지 않습니다.

- 그래프 title. 그래프의 title은 보통 사용하지 않고 필요하다면 caption을 이용합니다.

Excel로 그린 default 설정의 그래프를 그대로 가져다가 사용하면 이런 실수를 하기 쉽습니다.

### Better example

그래프가 들어갈 위치의 공간을 고려하여 그래프 크기와 글자 크기를 결정하고, 거기에 맞춰서 선 굵기, 마커 크기, 눈금 간격 등을 조절해야 합니다. 그리고 오차 막대, 단위도 삽입하고 중요한 의미가 없는 선은 가독성을 위해서 삭제할 수도 있습니다. 그러면 다음과 같이 수정할 수 있습니다.



**Fig. 4 | Emergence of local magnetic moments in monolayer WSe<sub>2</sub>.** **a**, Out-of-plane magnetic-field dependence of MCD at  $\nu = 1$  and  $\nu_1 = \nu_2 \approx 0.3$  (at which the heterostructure is an excitonic insulator) for varying temperatures. The spectral dependence of the MCD is determined as the difference between the left- and right-handed reflected light intensity divided by the total reflected light intensity. It is integrated over a narrow spectral range near the repulsive polaron resonance (1.73 eV; Methods). **b**, Temperature dependence of the inverse MCD slope around zero magnetic field (which is proportional to the inverse magnetic susceptibility) as a function of temperature at  $\nu_1 \approx 0.30$  and 0.45. The error bars are estimated from the linear fit to the low-field data in **a**. The magnetic susceptibility follows the Curie-Weiss dependence (solid lines) at high temperatures with small negative Weiss constants ( $x$  intercepts). The magnitude of the Weiss constant is compatible with weak antiferromagnetic exchange interactions between the distant local moments.

from optical studies (Fig. 3a and Extended Data Fig. 7) (the larger electric field values here compared with Fig. 3a,b are due to a thinner hBN spacer in the capacitance device). The state persists up to around 120 K. Details of the capacitance measurements and results at other temperatures are included in Methods and Extended Data Figs. 4 and 5.

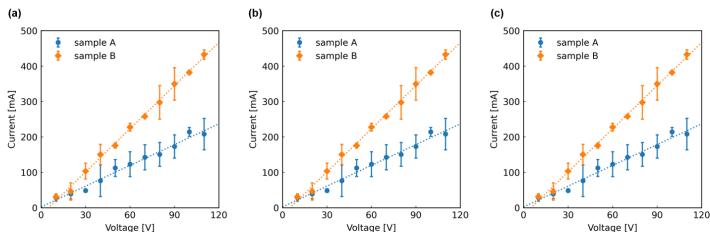
We evaluate the charge gap of the excitonic insulator by integrat-

$\theta$  denote the sample temperature and Weiss constant, respectively. Such a behaviour is in contrast to that of an isolated monolayer at comparable hole-doping densities<sup>27</sup> but compatible with that of local magnetic moments<sup>28</sup> induced by exciton formation. The Weiss constant obtained from the fits (solid lines) changes from approximately 0 to  $-2$  K when the exciton density changes from  $\nu_2 \approx 0.30$  to 0.45. It suggests a weak antiferromagnetic exchange interaction

## matplotlib example

script-based 프로그램을 이용하여 그래프를 그리면 위의 과정들을 한 번에 그리고 repeatable하게 할 수 있습니다. matplotlib를 이용한 그래프 예시는 다음과 같습니다.

NATURE PHYSICS LETTERS



**Fig. 4 | Emergence of local magnetic moments in monolayer WSe<sub>2</sub>.** **a**, Out-of-plane magnetic-field dependence of MCD at  $v = 1$  and  $v_x = v_z \approx 0.3$  (at which the heterostructure is an excitonic insulator) for varying temperatures. The spectral dependence of the MCD is determined as the difference between the left- and right-handed reflected light intensity divided by the total reflected light intensity. It is integrated over a narrow spectral range near the repulsive polaron resonance (1.73 eV; Methods). **b**, Temperature dependence of the inverse MCD slope around zero magnetic field (which is proportional to the inverse magnetic susceptibility) as a function of temperature at  $v_x \approx 0.30$  and  $0.45$ . The error bars are estimated from the linear fit to the low-field data in **a**. The magnetic susceptibility follows the Curie-Weiss dependence (solid lines) at high temperatures with small negative Weiss constants ( $x$  intercepts). The magnitude of the Weiss constant is compatible with weak antiferromagnetic exchange interactions between the distant local moments.

from optical studies (Fig. 3a and Extended Data Fig. 7) (the larger electric field values here compared with Fig. 3a,b are due to a thinner hBN spacer in the capacitance device). The state persists up to around 120 K. Details of the capacitance measurements and results at other temperatures are included in Methods and Extended Data Figs. 4 and 5.

We evaluate the charge gap of the excitonic insulator by integrating

$\theta$  denote the sample temperature and Weiss constant, respectively. Such a behaviour is in contrast to that of an isolated monolayer at comparable hole-doping densities<sup>30</sup> but compatible with that of local magnetic moments induced by exciton formation. The Weiss constant obtained from the fits (solid lines) changes from approximately 0 to  $-2$  K when the exciton density changes from  $v_x \approx 0.30$  to 0.45. It suggests a weak antiferromagnetic exchange interaction

그래프를 그릴 때 사용했던 데이터와 코드는 아래에 있습니다. 이 예시 외에도 구글에 검색해보면 많은 자료를 찾을 수 있습니다. 이 예시 코드의 설정 값이 가장 좋다고 말씀드리는 것이 아니며, 상황에 맞게 설정 값을 수정해야 하고 저널의 성격이나 개인의 취향에 맞춰서 더 보기 좋게 그리는 방법이 있을 수 있습니다. 그리고 꼭 script를 이용하여 그래프를 그려야 하는 것은 아니고 이런 방법도 있음을 소개하는 것이므로 각자 제일 능숙하게 사용할 수 있는 방식으로 그래프를 그리시면 됩니다.

DATA :

voltage[V]	current1_mean[mA]	current1_error	current2_mean[mA]	current2_error
10	28.52	10.12	30.86	8.56
20	38.92	13.25	45.84	24.41
30	48.60	4.98	103.46	22.47
40	76.22	44.55	150.36	28.60
50	112.31	23.97	175.55	6.88
60	122.96	35.23	227.60	10.94
70	142.54	35.55	258.02	3.87
80	150.70	33.36	297.31	47.34
90	172.92	32.88	349.80	45.89
100	214.12	12.76	382.16	6.07
110	208.09	44.53	432.65	13.31

**SCRIPT :**

```

1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  import matplotlib as mpl
4  import matplotlib.ticker as ticker
5  from scipy.optimize import curve_fit
6  mpl.rcParams.update({
7      'font.size': 9,
8      'font.family': 'sans-serif',
9      'font.sans-serif':'DejaVu Sans',
10     'xtick.major.size': 2,
11     'xtick.minor.size': 1.5,
12     'xtick.major.width': 0.5,
13     'xtick.minor.width': 0.4,
14     'xtick.labelsize': 9,
15     'xtick.direction':'in',
16     'xtick.top': False,
17     'ytick.major.size': 2,
18     'ytick.minor.size': 1.5,
19     'ytick.major.width': 0.5,
20     'ytick.minor.width': 0.4,
21     'ytick.labelsize': 9,
22     'ytick.direction':'in',
23     'ytick.right': False,
24     'savefig.dpi': 600,
25     'axes.linewidth': 0.75,
26     'legend.frameon': 'False',
27 })
28
29 V,I1,I1err,I2,I2err = np.loadtxt('data_example.txt',skiprows=1,unpack=True)
30
31 figure_width = 3.2 # inch
32 figure_hight = figure_width
33
34 def f_lin(x, A, B):
35     return A + x*B
36
37 fig, ax = plt.subplots(figsize=(figure_width,figure_hight))
38
39 ax.errorbar(V, I1, yerr=I1err,
40             marker='o',
41             markersize=4,
42             linestyle='None',
43             elinewidth=1.2,
44             capsize=1.5,
45             capthick=1.2,
46             color='C0',
47             label='sample A')
48

```

```

49 ax.errorbar(V, I2, yerr=I2err,
50             marker='D',
51             markersize=4,
52             linestyle='None',
53             elinewidth=1.2,
54             capsizes=1.5,
55             capthick=1.2,
56             color='C1',
57             label='sample B')
58
59
60 popt,pcov = curve_fit(f_lin, V, I1)
61 ax.plot(np.array([0,500]), f_lin(np.array([0,500]),*popt),
62         marker='None',
63         linestyle=':',
64         linewidth=1.2,
65         color='C0')
66
67 popt,pcov = curve_fit(f_lin, V, I2)
68 ax.plot(np.array([0,500]), f_lin(np.array([0,500]),*popt),
69         marker='None',
70         linestyle=':',
71         linewidth=1.2,
72         color='C1')
73
74 ax.set_xlabel('Voltage [V]', fontsize=9)
75 ax.set_ylabel('Current [mA]', fontsize=9)
76 ax.set_xlim(0,120)
77 ax.set_ylim(0,500)
78
79 ax.xaxis.set_major_locator(ticker.MultipleLocator(30))
80 ax.yaxis.set_major_locator(ticker.MultipleLocator(100))
81
82 ax.legend(loc='upper left', fontsize=9)
83 fig.savefig('./figure_example.png', bbox_inches='tight')
84 plt.close()
85

```

<https://www.mrl.ucsb.edu/~seshadri/PreparingFigures.pdf>

## 평가

\* 2022년 기준이나, 크게 변하지 않을 것입니다.

그래프의 aesthetic을 평가하는 것은 주관적이기 때문에 정확히 어떤 기준으로 평가할 것은 아니고, 중급물리실험에서 publication quality를 요구하는 것도 아닙니다.

그러나 그래프의 quality를 아예 신경 쓰지 않았거나 꼭 들어가야 하는 요소들(오차막대, 축 제목, 단위 등)이 없으면 감점입니다. 특히 그래프의 필수 요소들은 불확도 분석, fitting과 함께 중요하게 평가되는 부분이므로 신경 써서 그래프를 그려주시길 바랍니다.

### 8.3 TeX과 조판

물리학 뿐만 아니라, 여러 학문 분야에서 발견과 성과를 자연 없이 보고하고 공유하는 것은 매우 중요합니다. 따라서 여러 연구자가 작성한 논문을 같은 양식으로 묶어 한 학술지 내에 병합하는 조판 과정이 중요도를 띠게 되고, 학술지의 방향이나 논조와 맞지 않거나 근거가 부족한 논문들은 게재가 거부됩니다. 그러므로 신속하게 저널 에디터 및 referee의 의견을 반영하여 조판된 내용을 수정하면서도 문서의 양식이 일관되게 유지할 수 있도록 하는 것이 매우 중요합니다. 특히 어떤 연구 분야의 Originality가 중요시되는 경우에는, 이러한 조판 작업을 외부에 위임하지 않고 연구자 및 논문의 주 저자가 직접 수행하는 것이 일반입니다. 이러한 용도로 사실상 표준화된 도구로서 TeX이 사용되고 있습니다. 물리학 분야에서는 이론, 실험을 불문하고 명망 있는 여러 저널에 좋은 아이디어나 성과, 실험 결과를 보고하기 위해서는 충분한 TeX 실력 연습이 필요합니다. 이러한 목적으로, TeX을 이용한 조판 연습이 권장되는데, 화면에 표시되는 문서를 보고 마우스로 드래그하거나 조작하여 문서를 작성하는 modern-days word processor들의 방식과는 다르게, 문서의 어떠한 부분이 어느 위치에 어느 형식으로, 어떤 Figure와 함께 어떤 참고 문헌을 인용해서 작성될 것인지를 스크립트로 작성하여 코딩하는 형태의 문서 작성이 요구됩니다. 이러한 방식에 익숙해지면 수식 입력, 다이어그램 작성, Figure 삽입 및 깔끔한 표 기입, 참고 문헌 관리 및 문서의 양식 조절이 아주 유리해집니다. 따라서 한번 작성해 놓은 내용이 특정 저널에서 기각되면, 다른 저널을 타게팅하여 각

저널에서 제공하는 포맷을 받아 문서를 쉽게 재정비할 수 있는데요. 이러한 이유로 TeX과 친숙해지는 것은 진입 장벽이 높지만, 물리학을 연구하는 데 있어 강력하게 권장되고 있습니다.

최근에는 TeX 사용을 편리하게 하기 위한 여러가지 도구들이 제공되고 있습니다. 유료 텍 프로그램을 설치하는 경우에는 스크립트를 편집하는 즉시 변경내용이 옆에 preview 문서로 표시되기도 하고, 편집한 줄의 내용이 어느 부분에 해당하는지 문서에서 보여주기도 합니다. 또한 자동 완성 기능으로 복잡한 스크립트를 모두 외울 필요 없이 어느 정도 각을 잡아주는 기능들이 존재하여 사용이 비교적 편리해지게 되었습니다. 이러한 분위기 속, 직접 설치하지 않고 다른 저자들과 협업하여 텍스트를 다듬고 내용을 미려하고 풍성하게 만드는데 유리하게끔 지원되는 웹 기반의 툴로서 Overleaf가 널리 사용되기 시작하였습니다. 무료 플랜을 이용하면 TeX을 언제 어디서나 인터넷에 접속하여 문서를 편집해 볼 수 있는데, 이를 통해 본 강좌의 보고서 작성은 연습해 보면 좋을 것 같습니다.

TeX 설치 가이드. <http://www.ktug.org/xe/?mid=Install>

Overleaf 홈페이지. <https://ko.overleaf.com>

Overleaf TeX Guide : 어려운 텍 문법을 어떻게 사용하는지 예시와 함께 친절한 가이드가 되어 있어, 몇 분 ~ 몇 시간 읽어보면 쉽게 파악할 수 있습니다.

TeX은 몇 번 써 보면 나중에 필요할 때 얼마든지 몇 번 찾아보고 손쉽게 사용할 수 있지만, 아예 경험이 없다면 진입 장벽이 매우 높습니다. 사람에 따라 다르지만 통상 일주일이면 낙낙하게 간단한 문서에 원하는 내용을 정리하고, 필요한 양식을 다운받아 사용할 수

있는 정도를 익혀 볼 수 있습니다. 마스터하지 않더라도 모르는 기능들은 그때그때 찾아 쓸 수 있을 정도로 친숙해지면 유리한데요. 이후 네댓 번의 보고서 및 출판물을 TeX 작업을 해 본다면, 무리 없이 텍에 적응할 수 있을 것이라고 생각합니다.

## 8.4 아티클과 레터, Supplemental Material

논문을 저널에 Publish할 때에는 몇몇 형식을 따라야 합니다. 중급물리실험에서 흥내낼 만한 포맷으로는, Article 포맷과 Letter 포맷이 있습니다. Article 포맷은 1-column으로 넓직하고 읽기 편한 장점을 가지지만, 분량이 길어진다는 단점이 있습니다. plot을 시원 시원하게 넣을 수 있다는 장점도 있습니다. 이러한 양식의 논문을 작성할 때 참고할 것들은 이러한 형식을 사용하는 저널의 웹 사이트에서 가이드라인 등을 얻을 수 있습니다. 1-column 포맷을 따르는 저널의 예시로는 New Journal of Physics가 있습니다.

<https://iopscience.iop.org/journal/1367-2630>

다음으로는, 물리학에서 가장 널리 쓰이는 포맷 중 하나인 Letter 형식은 2-column의 잘 정리된 구조의 글을 쓰도록 유도합니다. APS (미국물리학회)에서 제시하는 RevTex 양식을 Overleaf 또는 APS 웹 페이지에서 확인할 수 있습니다. 양식에는 Section을 나누어 서술하고 있고, 학부 수업에서 낼 보고서도 이런 식으로 쓰는 것이 바람직하지만 최근 다수의 논문들은 논리전개의 자연스러움을 위해 섹션을 나누는 것을 생략하는 경우가 꽤 있습니다. 대부분의 PRL 페이퍼들은 섹션 구분을 생략합니다. 주의해야 할 것은 3500자 분량 제한이 있어 짧게 읽을 수 있도록 작성하는 것이 권장된다는 점입니다. 연구에는 재현성 확보가 매우 중요한데, 이에 따라 본문에서

유도하기에는 좀 긴 내용들이나 실험에 관한 디테일한 셋업 및 처리 방법 등은 SM으로 분리하여 제출하는 것이 일반입니다. 원래는 SM 도메인 아티클/레터의 형식을 어느정도 따르고, 본문에 붙여 쓰거나 별도의 파일로 제출하는데, 중급물리실험에서 보고서의 길이를 줄이기 위해 내는 경우에는 양식을 안 지켜도 감점이 없습니다. 한번 써 보는 것에 의의를 두고, 원본 데이터를 잘 첨부해서 실험을 상세히 설명해 보세요. 장황할 수도 있고, 간결하게 정리될 수도 있습니다. 좋은 SM을 쓰기 위해서는 남의 논문을 많이 읽어보아야 어떤 점들이 궁금할지, 어떤 점들을 알려주면 도움이 될지 감을 잡을 수 있습니다. 관련한 내용은 아래 링크에서 가이드를 확인할 수 있습니다.

<https://journals.aps.org/prl/authors/supplemental-materials-jou>

한편, 레터 양식을 따르는 대표적인 저널들은 APS의 Physical Review 저널들입니다. 대표적으로 PRL (Phys. Rev. Lett.) 가 있으며 다수의 노벨 물리학상이 담겨 있는 저명한 저널입니다. 이외에도 분야별 Phys. Rev. A, Phys. Rev. B., 등등 여러 가지 저널이 나뉘어져 있습니다. 모두 APS의 RevTeX 양식을 사용하니 참고해 보고, 유명한 논문 몇 편을 읽어보기를 권장합니다. 자연스러운 글 솜씨 및 논리 전개, 양식과 친해지는 연습 등을 해 볼 수 있습니다.

<https://journals.aps.org/prl/>

한편 PRL 기준으로 분량 구분은 약 다음과 같은 전개가 좋습니다.

1. Introduction, about 2 paragraphs. One providing a coarse viewpoints on the current works and related field. One for detailed approaches used in this work.

2. Key essence features - experimental observation or important results, or important assumptions, 1 paragraph.
3. Experiment overview, sample preparation / apparatus / method. About 2 paragraph.
4. Main texts, 7 to 10 paragraphs are adequate. explains about the result and interpretations.
5. Summary, 1 paragraph.
6. Acknowledgement, 1 paragraph.

참고하세요.

한편, Nature 등 3-column 형식을 요구하는 저널도 있습니다.

<https://www.nature.com/subjects/physics/nature>

## 8.5 영문 보고서 작성 시 참고 사항

\* 이 부분의 본문은 2022년 홍승주 조교의 eTL에 공지한 내용을 바탕으로 하고 있습니다.

보고서를 영어로 작성하는 것이 필수는 아니지만, 영어로 작성하신 분들이 많아 홍승주 조교가 영어 논문 작성법 강좌에서 들은 몇 가지 코멘트를 공유합니다. 영문법이나 영어의 fluency가 채점 대상은 아니지만, 읽기 좋고 내용을 깔끔하게 전달할 수 있는 미려한 텍스트를 쓰는 것은 매우 중요한 능력입니다. 혹시 놓치고 있는 부분들이 있다면 참고해서 자연스러운 텍스트를 만드는데 도움이 되기 바랍니다. 우리말이면 다시 읽어보면서 이상한 것들이 좀씩 느

껴지는데, 모국어가 아닌 언어로 보고하는 경우 표현이 이상하거나 어색한 것을 눈치채지 못하고 놓치는 경우가 많습니다. 일상에서 자주 쓰는 용어더라도 격식을 갖추는 보고서에서 가급적 쓰지 말아야 할 표현들도 많지요.

Formal writing에서 you는 사실상 안 쓴다고 보면 됩니다. You 가 들어갈 자리에는 one을 쓰는 걸 고려해보시길 바랍니다. 예전에는 논문에 I/We가 그렇게 자주 등장하지 않았습니다. 그러나 요즘에는 꽤 등장하는 추세이긴 합니다. 그럼에도 불구하고 논문에 I/We가 너무 자주 등장하는 것은 그리 권장되지 않습니다. 따라서 적절히 수동태를 섞어서 쓰시길 바랍니다. 부사는 보통 문장 중간으로 들어갑니다. (ex. Actually, this method concentrates on ... → This method actually concentrates on ...) Then을 많이 쓰시게 되는데 Then, we ... 보단 We then ... 이 formal 합니다.

단위는 숫자와 한 칸 띄어서 씁니다. Introduction의 경우, 큰 그림에서 작을 그림으로 가는 순서로 작성합니다. 관사의 경우, 저도 많이 헷갈리는 부분이라 어쩔 수 없네요... 시제의 경우에도 분야 by 분야가 좀 심한 편이라 함부로 comment를 드리기 애매합니다. 근데 논문 읽어보면 생각보다 현재 시제가 많이 쓰일 겁니다. 과거 시제로 뒤덮으신 분이 보여서 얘기드립니다. 단어가 너무 repeat 되는 걸 조심하십시오.

Parallelism이라는 것이 있습니다. 뭔가 나열된 구조에서는 서로 문장 구조가 비슷하게 쓰는 것이 좋습니다. This + summary word라는 구문이 있습니다. 앞에서 무언가를 설명한 다음에 뒤의 문장을 "This + 앞을 summary하는 단어"로 시작하는 건데, 글의 flow를 좋게 해주는 구문입니다. show, demonstrate, illustrate, provide, describe 등 논문에서 자주 쓰이는 단어들이 있습니다. 이를 reporting verb라고 하는데, 이런 단어를 적절히 사용하는 것도 좋습니다.

논문에서 명령문은 별로 등장하지 않습니다. Abstract의 경우, 전체 내용을 요약한다는 느낌으로 전체 내용의 순서(IMRD)에 맞게 쓰시면 됩니다.

## 8.6 마무리하며

중물실은 서울대학교 물리천문학부의 물리학 전공필수 과목 중 가장 귀찮은 태스크가 많은 과목입니다. 시대에 따라 중물실의 흐름은 많이 달라져 왔는데, 근본 있게 정립된 기준이 있지 않았어서 맡으시는 교수님마다 약간씩 다른 스타일을 가지기는 했지만 항상 많은 로드의 실험을 해야 했고, 장비 고장에 시달리다가 실험을 못 끝내는 경우도 많았습니다. 2019년까지 존속했었던 홀 효과 컨택 실험의 경우에는 10시간 넘게 contact을 시도해도 의미 있는 결과를 얻지 못하는 경우도 허다했습니다. 그럼에도 고체 실험에서 필수적으로 해 보아야 하는 좋은 경험이었는데, 물리학 전반에서 사용되는 이런저런 실험 스킬을 익히다 보면 매우 힘든 부담을 갖게 됩니다. 그러다 보니 보고서를 대충 쓰고 넘어가는 경우가 항상 많았는데, 2021, 2022년도에는 아주 우수한 퀄리티의 보고서를 특히 많은 학생들이 써 주어서 고마웠습니다. 사실상 전자학과 같은 중급물리 실험 2를 제외하면, 물리학과에서 나름 각 잡고 물리 실험에 대한 보고서를, 스스로 뽑은 데이터, 스스로 그린 플롯, 스스로 전개한 논리 설명으로 레터나 아티클 양식을 갖추어 완성해 볼 수 있는 거의 유일한 전공필수과목이 중급물리실험 1입니다. 선배들이 써 놓은 우수보고서도 엄청나지만, 힘든 실험과 바쁜 학기 속에서도 나름대로 최선의 공을 들여서 한 번쯤 학위 과정 동안 자부할 수 있을 만한 퀄리티의 보고서를 만들어 보기로 강력히 권장합니다. 서울대학교 물리천문학부의 교과 과정 커리큘럼에는 제대로 된 데이터 처리나 통계 분석 및 보고서 작성법을 배우는 과정이 잡혀 있지는 않습니다. 중급물리실험 1을 통해 그러한 경험을 충분히 쌓아 갈 수 있기를 바

라며, 힘들게 실험만 하다가 끝난 과목으로 기억에 남기보다는, 내 인생에서 처음으로 완성도 있게 만들어 본 보고서를 쓴 과목으로 기억에 남기를 바랍니다. 중물실에서 겪은 이런저런 형태의 데이터들과 실험 스킬들을 잘 마음에 담고 있다면, 앞으로 살아가면서 어떤 종류의 데이터를 마주하더라도 처리하기 겁나서 이론과 비교해보지 못하는 경우는 없을 것입니다. 실험 설계, 오차 처리, 회귀 분석, Plotting 및 알아낸 것들을 report하는 방법 전반에 걸쳐, 중급물리실험에서 연습했던 내용들이 앞으로 무슨 일을 하면서 살아가더라도 마음속으로는 학자의 자세로, 주변을 연구하며 살아갈 수 있는 계기가 되었으면 좋겠습니다. 중급물리실험의 강좌 제공 머터리얼들을 규격화하고 정규화하는 과정에서, 어려워지고 까다로워진 부분들 및 잊은 장비 고장으로 고생하고 끝내 포기했었던 몇 명의 수강생분들, 어려운 실험들도 포기하지 않고 해내서 조교들도 많은 걸 배우게 해 준 수강생분들, 매뉴얼 정리 및 실험환경 개선에 힘써 준 모든 조교님들 및 코로나로 어려운 시기에 대면 실험 수업을 잘 유지할 수 있도록 운영해 주신 교수님께 감사드립니다.

# 9

## 우수 보고서 예시

한정된 Material을 보고 처음 실험을 하다 보면 막막한 점이 너무 많습니다. 또한 퀄리티 있는 보고서를 만들어내는 데도 부담이 클 수 있지만, 한번 학부 과정에서 가장 공을 들인 보고서를 만들어 볼 기회이니 참고할 자료가 많으면 도움이 크게 될 것입니다. 이에 배울 점이 많은 보고서들을 아래에 첨부합니다. 그 목록은 다음과 같습니다.

1. Single Photon Interference, 최이선, 2022
2. Lock In + Hall, 김수진, 2022
3. Optical Tweezers, 권민성, 2022
4. Chaotic Pendulum, 최영환, 2022
5. Photoluminescence, 여준호, 2021

힘든 학기 과정 중에도 매뉴얼에서 제공해 준 가이드를 뛰어넘는 우수한 보고서를 작성해 준 수강생분들께 감사드립니다.

# Single Photon Interference

**Ysun Choi**

Department of Physics and Astronomy, Seoul National University, Seoul 08826, Korea  
E-mail: ysunnchoi@snu.ac.kr

**Abstract.** In this experiment, the diffraction of light in various aperture such as single slit and double slit was experimented in the two cases of multiple-photon limit and single-photon limit to demonstrate the wave nature of light.

(Dated: 2 June 2022)

## 1. Introduction

In this experiment, diffraction in the case of (asymmetric) double slits and single slits was experimented on multiphoton limit using laser and single-photon limit using bulk and pmt. The diffraction theory is described by assuming the far-field Fraunhofer limit below.

### 1.1. Diffraction at an arbitrary aperture

Based on Huygen's principle, each point of an aperture can be assumed as a independent point source. Therefore, when complex amplitude of field at each point  $(x', y')$  is given as  $f(x', y')$ , the resulted complex field at point  $(x, y, z)$  can be obtained as :

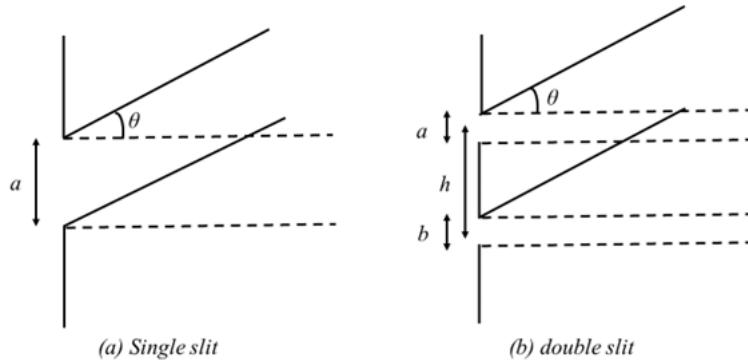
$$u(x, y) \propto \int f(x', y') e^{i\frac{2\pi}{\lambda}(z^2 + (x-x')^2 + (y-y')^2)^{1/2}} dx' dy' \quad (1)$$

The intensity  $I$  is proportional to  $|u(x, y)|^2$ . Additionally, in the case of non-monochromatic wave, the total intensity is obtained considering the total sum of weighted contribution of each  $\lambda$ . The case of 1D & Lorenzian distribution is shown below :

$$I(x) = \int I(x, \lambda) g(\lambda) d\lambda, \text{ where } g(\lambda) \propto \frac{\sigma^2}{(\lambda - \lambda_0)^2 + \sigma^2} \quad (2)$$

### 1.2. Fraunhofer diffraction theory at single & double slit

Using far-field approximation and defining  $\theta$  as the angle between the line connecting the point on the screen to the center point of the slit and the central optical axis, the diffraction pattern of single slit can be obtained as below :



**Figure 1.** aperture of single(left) double(right) slit interference

$$I = A^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \beta = \frac{1}{2} k a \sin \theta \quad (3)$$

Also in the case of (asymmetric) double slit, where  $\beta_1 = \frac{1}{2} k a \sin \theta$ ,  $\beta_2 = \frac{1}{2} k b \sin \theta$ ,  $\alpha = \frac{1}{2} k h \sin \theta$ ,

$$I = A^2 \left( \frac{\sin \beta_1}{\beta_1} \right)^2 + B^2 \left( \frac{\sin \beta_2}{\beta_2} \right)^2 + 2AB \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\beta_1 \beta_2} \cos(\alpha + \phi) \quad (4)$$

### 1.3. Wave-particle-duality of light

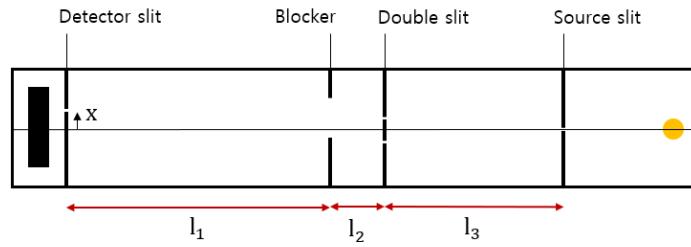
From Thomas Young's double-slit experiment and Maxwell's electromagnetism, light has been argued as a wave for a long time. Then Einstein explained the photoelectric effect with the photon theory, and wave-particle duality of light emerged. De-Broglie subsequently argued for the theory of material waves, and the results of the electron diffraction experiments by Thompson and Davisson-Germer demonstrated the wave-particle duality of general matter. This experiment aims to confirm the wave-particle duality of light, by confirming that an interference pattern such as a general laser appears in a system in a single-photon limit using pm tube and pcit, which are capable of detecting each single photon.

## 2. Methods

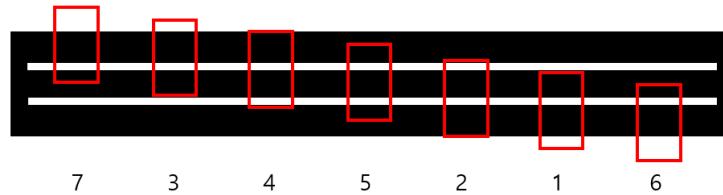
The experiments are exceeded with PM tube kit of Hamamatsu's, and Teachspin's oscilloscope, etc. The aligning process and interference experiments with single & double slit are described below.

### 2.1. Aligning

After aligning source slit, double slit and laser (or source bulb) by checking tilting and intensity ratio from each slit, finding adequate position of a blocker slit is proceeded.



**Figure 2.** Configuration of source, slits, detector inside the U-channel



**Figure 3.** Each location numbering of blocker. From the center (5), (2) and (4) shows the boundary limit of double-slit interference case. (3) and (1) shows the position firstly reaching the single-slit case, (7) and (6) shows total single-slit limit case.

The each position is indicated above Figure 3, and each are found by observing intensity change. There are three types of double slits used in the experiment, indicated as number 14, 15, and 16, which all the width are 0.085mm and the distances between the two slits are 0.356, 0.406 and 0.457mm, respectively. The blocker slit width is 1.778mm, and the distances are  $l_1 = 48.9\text{cm}$ ,  $l_2 = 0.9815\text{cm}$ ,  $l_3 = 38.9\text{cm}$ . Wavelength of the diode laser is  $670 \pm 20\text{nm}$ , and in the case of bulb (after a filter) is  $546 \pm 10\text{nm}$ .

### 2.2. Laser interference - multiple photon limit

After aligning, double slit interference was firstly done for 14, 15, 16 number slit respectively. Also for each slit, the single slit interference experiments (by locating the blocker at location 6&7) were also proceeded. Additionally, an asymmetric double-slit diffraction experiment was also conducted, by dividing the distance between the blocker positions 3 and 4 into 4 equal parts and recording diffraction results at each of the five positions.

### 2.3. Bulb interference - single photon limit

Similarly in the case of diode laser, interference experiment using bulb at single photon limit was proceeded. After confirming the adequate voltage for photomultiplier tube, the threshold voltage for PCIT was found - by cross-checking the oscilloscope signal of PMT and PCIT. The threshold voltage was decided so that the PMT and PCIT photon signal has the same number. Also, the detector blocker and the intensity for each step

of bulb is calibrated. The remaining interference experiments are again similarly done as in the case of laser.

### 3. Results and Discussion

#### 3.1. Laser interference - multiple photon limit

##### 3.1.1. Align information

The left, right peak intensity data when aligning the double slit, and the each blocker position is shown below. Blocker position is in the order of Figure 3.

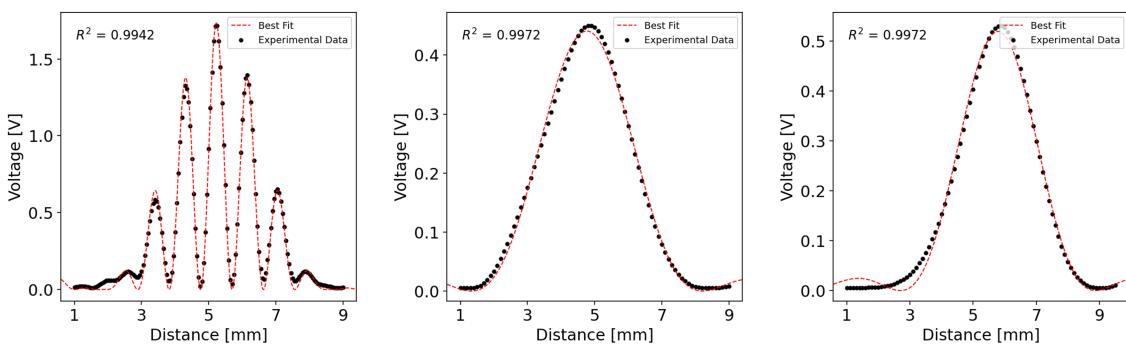
slit	peak difference(%)	visibility(-)	blocker location(mm)						
14	5.60±0.07	78.00±0.56	5.800	5.600	5.460	4.820	4.140	3.980	3.815
15	5.05±0.08	77.21±0.41	5.735	5.560	5.440	4.795	4.140	3.980	3.780
16	1.02±0.07	45.86±0.76	5.400	5.220	5.050	4.460	3.930	3.690	3.535

##### 3.1.2. Double/single slit interference, monochromatic case

The double and single slit interference result was fitted assuming the monochromatic wave, by fitting function indicated below :

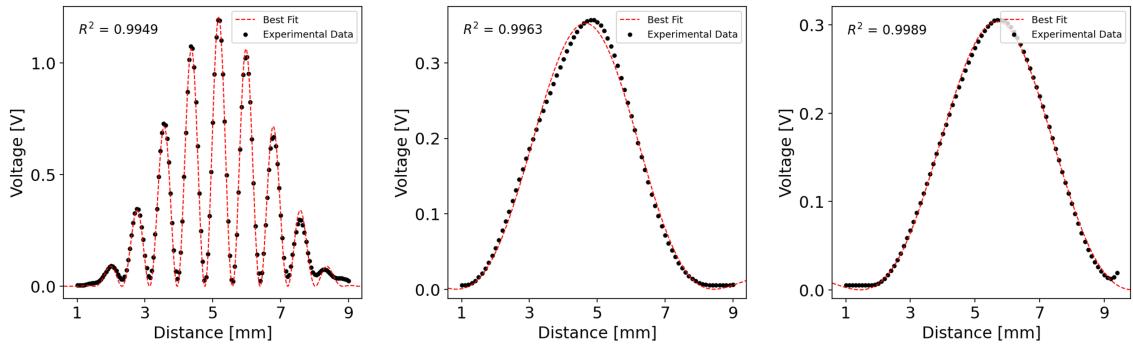
$$I(x)_{single} = A^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2, \beta = \frac{1}{2} k a \sin \theta \quad (5)$$

$$I(x)_{double} = A^2 \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 (\cos \gamma)^2, \beta = \frac{1}{2} k a \sin \theta, \gamma = \frac{1}{2} k h \sin \theta \quad (6)$$

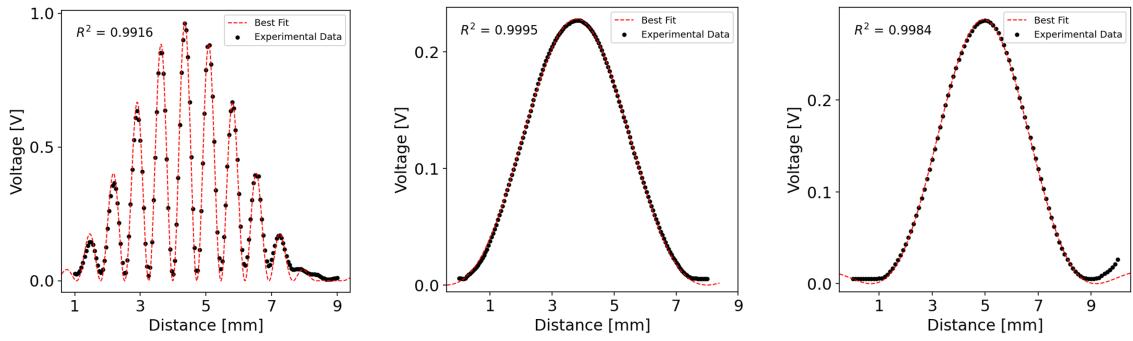


**Figure 4.** Interference data and best fits plotted in the case of slit 14.

The left and right slit width obtained from the single-slit interference fit is shown in the table below. Using the null hypothesis that the two slit widths are the same, the result of performing the t-test on each type of slit is shown below. It is concluded that the obtained p-value is 0.05 or less, and the null hypothesis cannot be rejected within the 5% significance level, and the width of the two slits is not significantly different.



**Figure 5.** Interference data and best fits plotted in the case of slit 15.



**Figure 6.** Interference data and best fits plotted in the case of slit 16.

slit	left width [m]	$1\sigma$	right width [m]	$1\sigma$	p-value
14	0.100E-3	0.18E-4	0.111E-3	0.25E-4	0.6637
15	0.089E-3	0.19E-4	0.080E-3	0.10E-4	0.6134
16	0.081E-3	0.05E-4	0.079E-3	0.09E-4	0.8093

### 3.1.3. asymmetric double slit interference

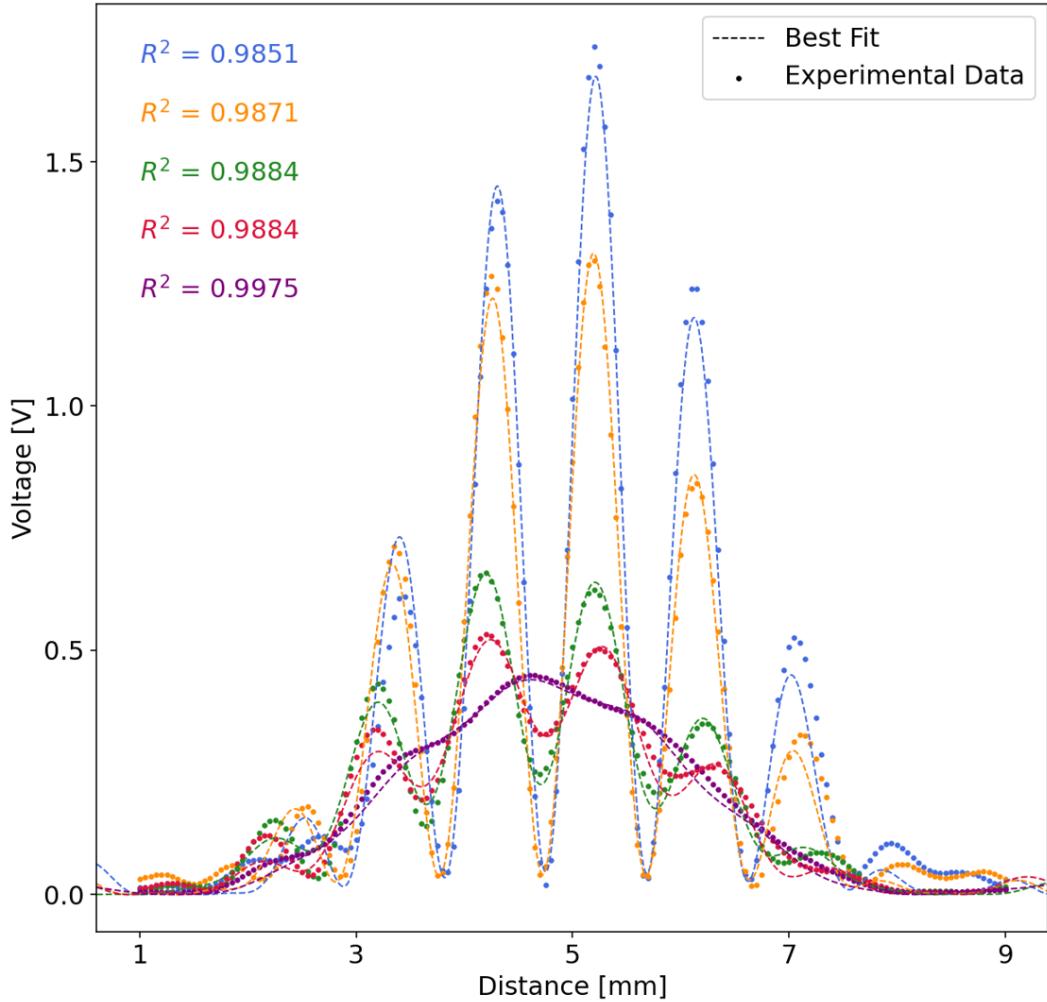
For the interference data obtained by placing the blocker between the single slit region and double slit region (five points : 3, 4, and the quartering points between), regression was performed by assuming an asymmetric double slit. The fitting function and the result is shown below Figure 7.

$$I = A^2 \left( \frac{\sin \beta_1}{\beta_1} \right)^2 + B^2 \left( \frac{\sin \beta_2}{\beta_2} \right)^2 + 2AB \frac{\sin \beta_1 \sin \beta_2}{\beta_1 \beta_2} \cos(\alpha + \phi) \quad (7)$$

It can be seen that the more the fitting result deviates from the center, the more incorrect the result is. In addition, the difference between the positions of the blockers recorded on the actual alignment is about twice as large as the slit width known as the true value, even though both of the results of the above asymmetry are double-slit and single-slit boundaries using blockers. This is further discussed later.

### 3.1.4. Double/single slit interference, with considering bandwidth

Above all fitting was done again assuming the laser has bandwidth and lorentzian



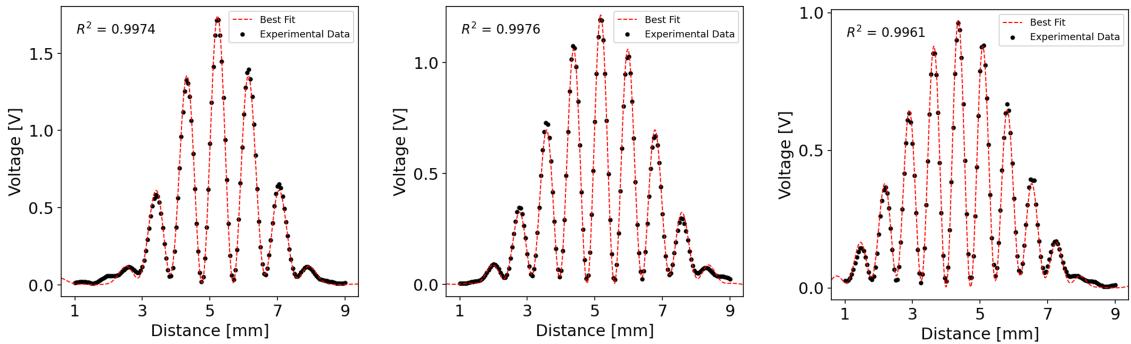
**Figure 7.** Interference result and best fits for asymmetry case

spectral strength. The fitting function now has an integrated form, shown below :

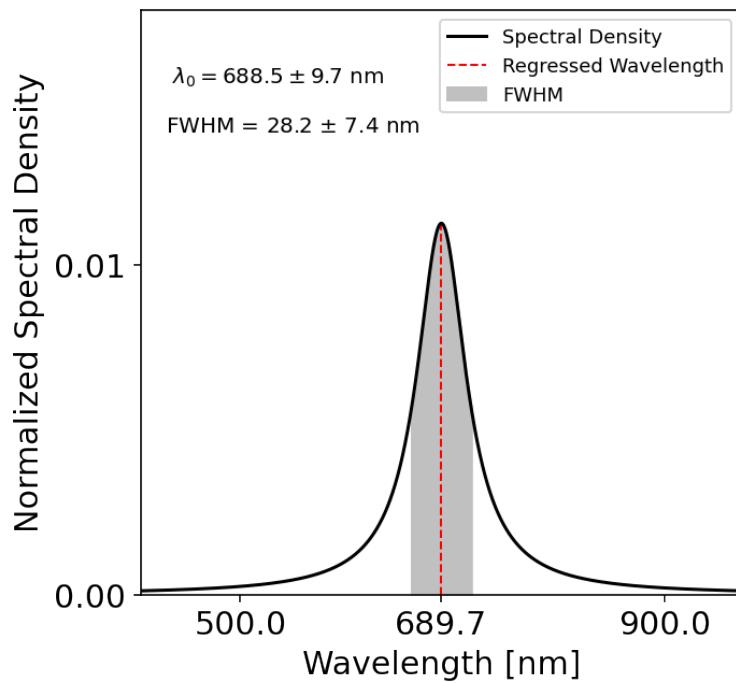
$$I(x)_{single} = \int A^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 g(\lambda) d\lambda \quad (8)$$

$$I(x)_{double} = \int A^2 \left(\frac{\sin\beta}{\beta}\right)^2 (\cos\gamma)^2 g(\lambda) d\lambda \quad (9)$$

In the newly obtained double slit result, it can be seen that the problem - in which the minimum point intensity was not zero - can be solved by introducing the bandwidth. This bandwidth fitting was performed not only in the shown double slit but also in both single slit regions. When adding the information on  $\lambda_0$  and bandwidth obtained for all three slits of 14, 15, and 16, weights proportional to the reciprocal of the deviation of each case are used. The spectral strength is obtained as shown in the following figure.



**Figure 8.** The double slit interference result and best fit considering bandwidth for 14 (left), 15 (center), 16 (right).



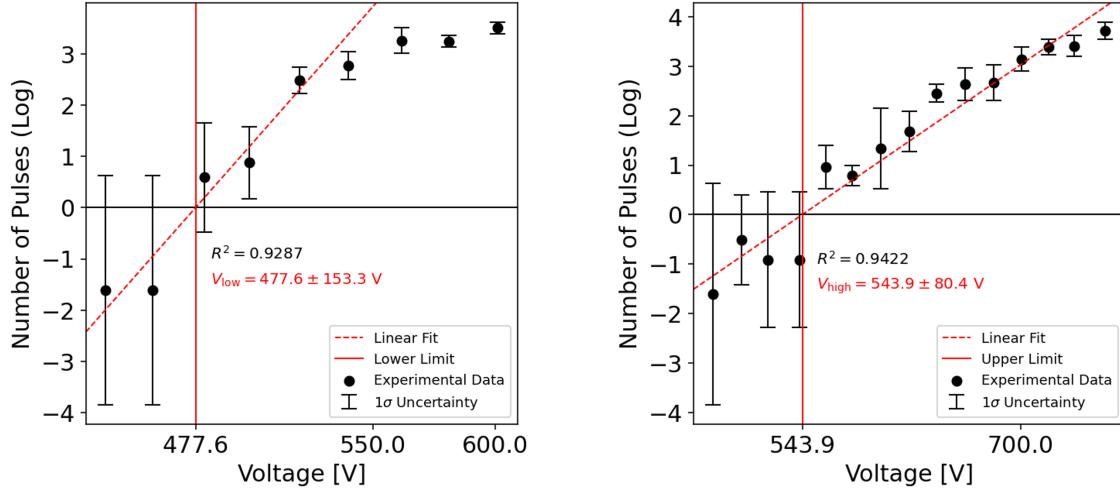
**Figure 9.** The final wavelength characteristic of laser from the integrated information from the total case.

### 3.2. Bulb interference - single photon limit

#### 3.2.1. PMT preparation

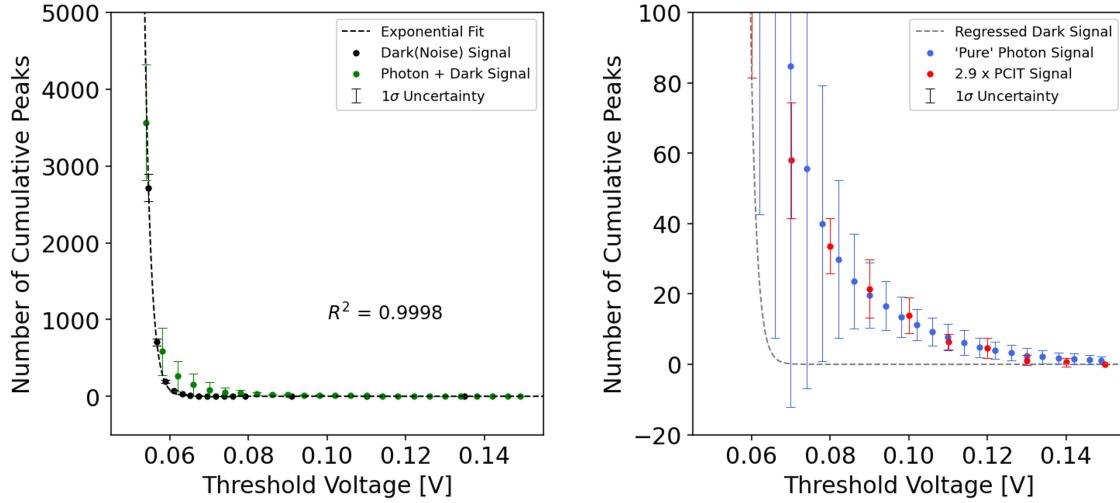
First, the result of obtaining the pmt upper/lower threshold voltage - that does not detect noise in the dark signal - is as follows. The below experiments were proceeded at approximately half point voltage 500[V].

Left figure of 11 shows the number of pure photon signals of pmt with a magnitude greater than threshold voltages after correcting the dark signal . Next, the (scaled) signal numbers of pcit and pmt, respectively, by the function of the threshold voltage is also plotted. It can be seen that the photon counting results of pcit and pmt were exactly the same within the error range (after adequate scaling) after 0.07 – 0.08 V.



**Figure 10.** The lower voltage limit (left), higher voltage limit (right). The y-axis is regressed with log scale, and the x-intercept through which the regression line passes  $y=0$  is set as a limit point.

Therefore, for convenience in resolution, 0.08 V was adopted as the threshold voltage of pcit. Additionally, the pmt signal number is counted within 0.2s and pmt gain efficiency is known as 4% around threshold voltage 0.08, so the calibration constant for real photon number per second from pcit signal count is 362.5.



**Figure 11.** The pmt signals regulating threshold voltage (left), scaled signal numbers of pmt and pcit as a function of threshold voltage.

### 3.2.2. Bulb-detector calibration

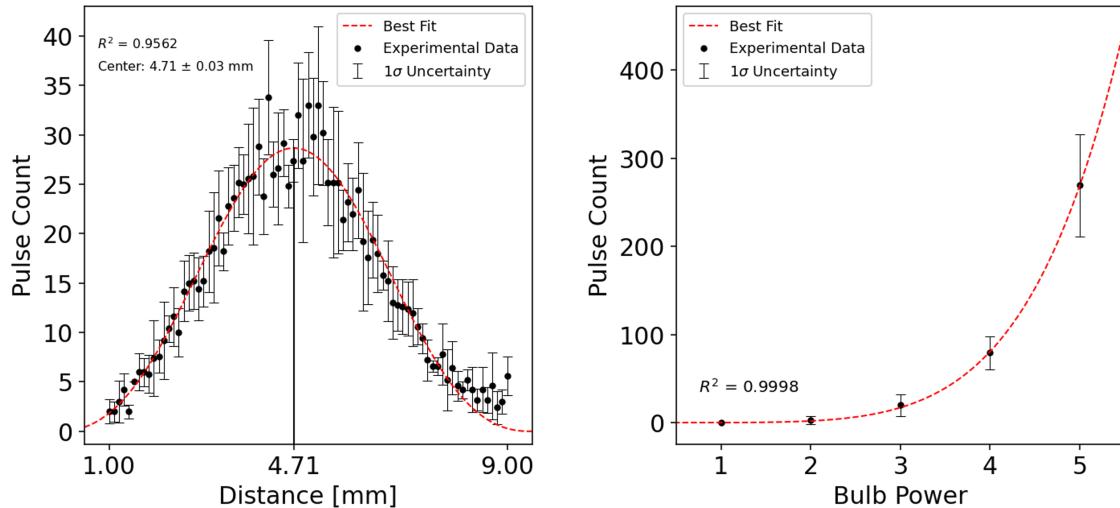
The detector transfer function was obtained by measuring the intensity by moving the detector to various locations. Basically, the shape of single-slit diffraction from the source slit was obtained, and Gaussian fitting was performed to simply obtain the center

position. The center location is indicated in Figure 12. Also, the fitting function for pcount pulse count in the case of different bulb powers is shown below.

$$y = ax^n, a = 0.058 \pm 0.007, n = 5.233 \pm 0.096. \quad (10)$$

When using the scaling factor 362.5, and scaling the reciprocal of the ratio of photons passing the detector slit (which can be obtained comparing the integrated single slit interference result and the detector slit width) 0.0177, the number of photon entering the source slit per second is  $(5.5 \pm 0.6) \times 10^6$  (case of bulb power 5). Additionally, considering the ratio of photon passing the source slit (which can be assumed as the slit relative to total area) 0.0085, the number of photons which bulb emits per second is  $(6.5 \pm 0.7) \times 10^8$ . Therefore, the bulb power can be obtained as :

$$P = (2.37 \pm 0.25) \times 10^{-10} [W] \quad (11)$$

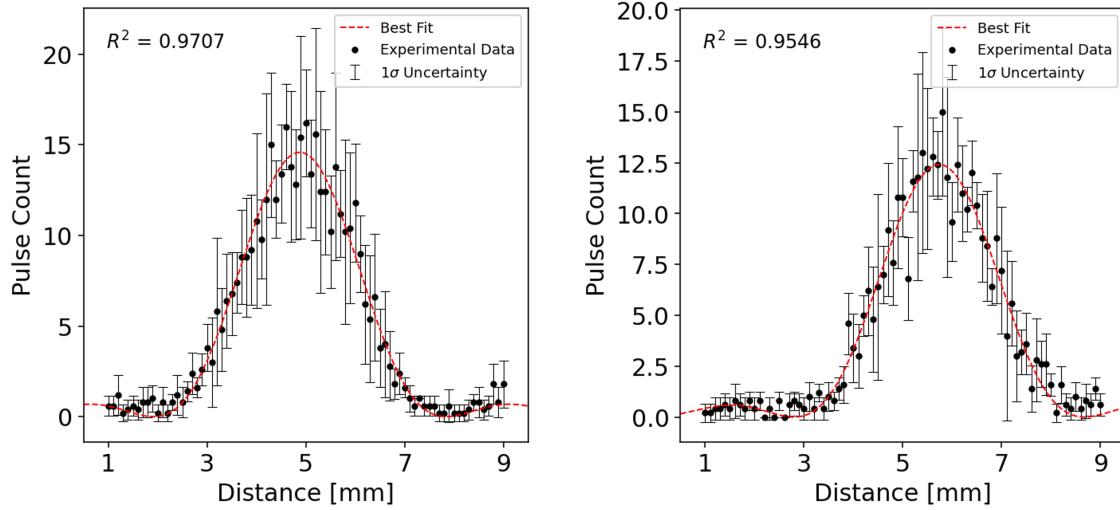


**Figure 12.** The detector (left) and bulb calibration (right)

### 3.2.3. single slit interference, monochromatic case

The single slit interference of each slit is obtained below, and the p-values again are obtained. All is over 0.05, and the width of the two slits is not significantly different.

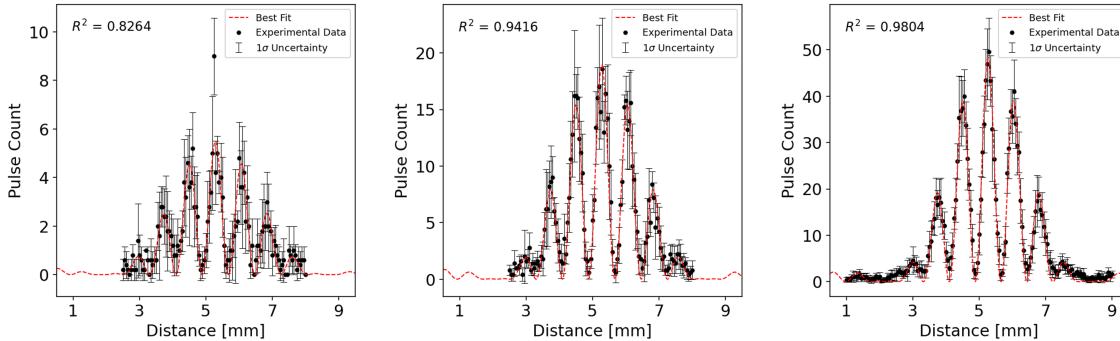
slit	left width [m]	$1\sigma$	right width [m]	$1\sigma$	p-value
14	0.092E-3	0.43E-4	0.090E-3	0.47E-4	0.9686
15	0.081E-3	0.31E-4	0.073E-3	0.40E-4	0.8438
16	0.080E-3	0.62E-4	0.075E-3	0.45E-4	0.9348



**Figure 13.** Left/right single slit result of 14 slit. The remaining ones for 15 & 16 are attached in the supplemental material.

### 3.2.4. double slit interference, monochromatic case

The double slit interference experiments are proceeded varying the bulb power as 3, 4, 5, and also for all three different slits. Results are shown below, and the non-plotted figures are all attached in supplementary.

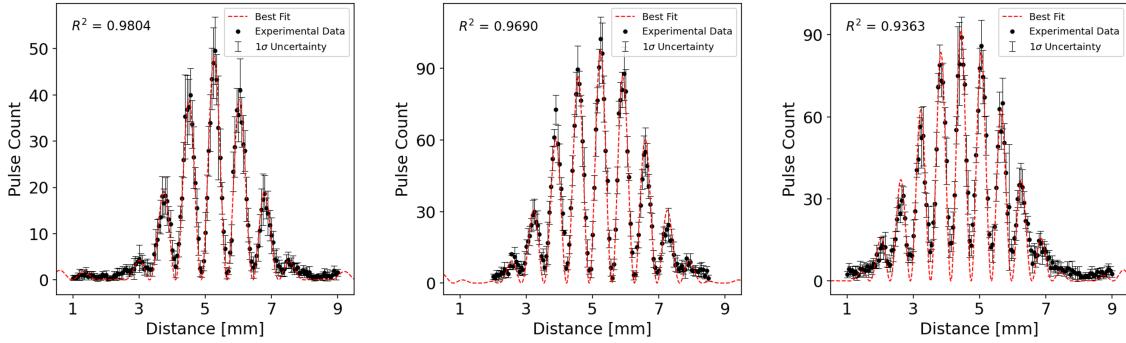


**Figure 14.** The result varying the bulb power, in the case of 14 slit. Bulb power is 3 (left), 4 (center), 5 (right).

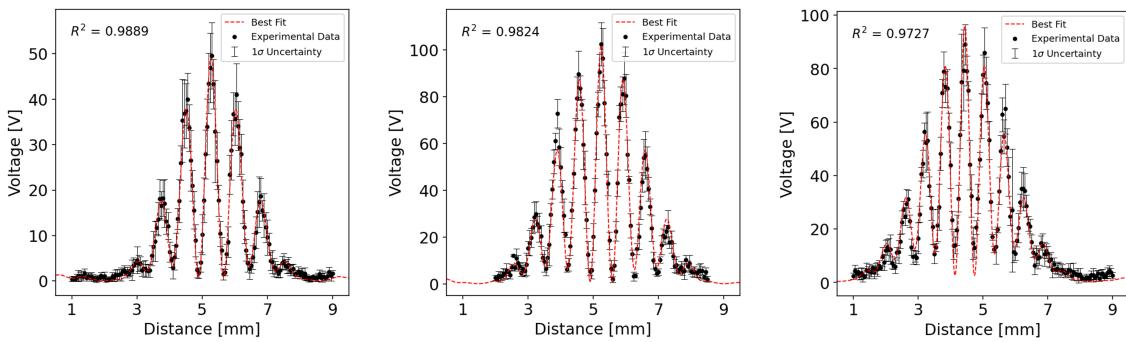
### 3.2.5. considering bandwidth

As in the laser experiment, the regressions were entirely done again considering the spectral bandwidth of the source. The plotted figure below shows the better fitted version of Figure 15.

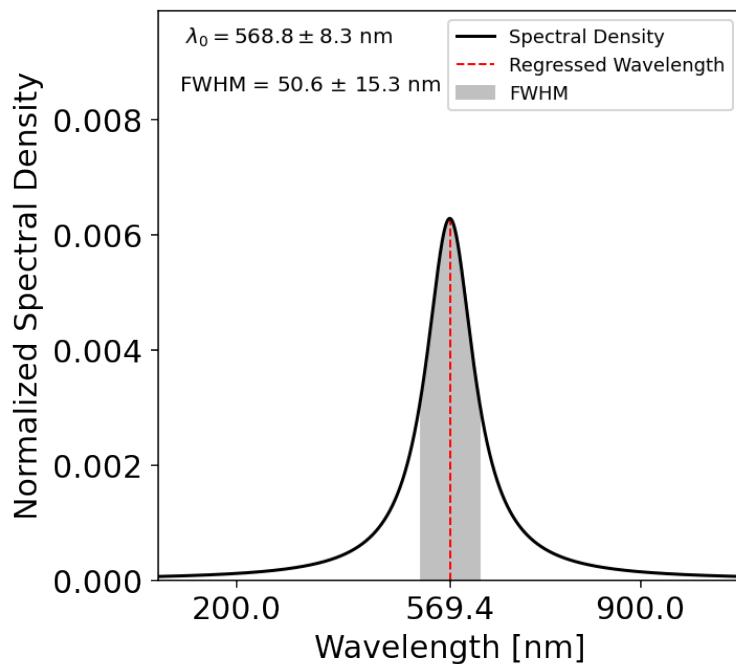
Also, total spectral strength integrating all  $(\lambda_0, \sigma_{lambda})$  information from each regression cases are plotted below Figure 17.



**Figure 15.** The result for slit 14 (left), 15 (center), 16 (right), in the case of bulb power 5.



**Figure 16.** Bandwidth-considered fitted result for Figure 15.



**Figure 17.** The final wavelength characteristic of bulb source.

### 3.3. Further discussion

#### 3.3.1. Single and multi photon limit

Using the obtained bandwidth of the source,  $\Delta p = \frac{h}{\lambda_0^2} \Delta\lambda$ . And also from uncertainty principle  $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$ ,  $\Delta x$  can be obtained, which can be interpreted as the 'size' of the wave-packet and also a single photon. For each case of laser and bulb :

$$\Delta x \sim \frac{\lambda_0^2}{4\pi \Delta\lambda} \sim 1.34 \pm 0.35 \mu m (\text{laser}), 0.51 \pm 0.16 \mu m (\text{bulb}) \quad (12)$$

First, in the case of laser,  $3.37 \times 10^{15}$  photons per second (1mW power data was used) are emitted from the source. Also utilizing 0.0085 - the ratio of photon passing the source slit, and the fact that photons pass through the u-channel in 3 ns, the  $8.6 \times 10^5$  photons are in the U-channel at each moment. Now suppose that these photons are roughly in a row, the distance between them is approximately  $0.35 \mu m$ . This is smaller than  $\Delta x$ , so therefore it can be thought of as a multi-photon region where multiple photons can interfere.

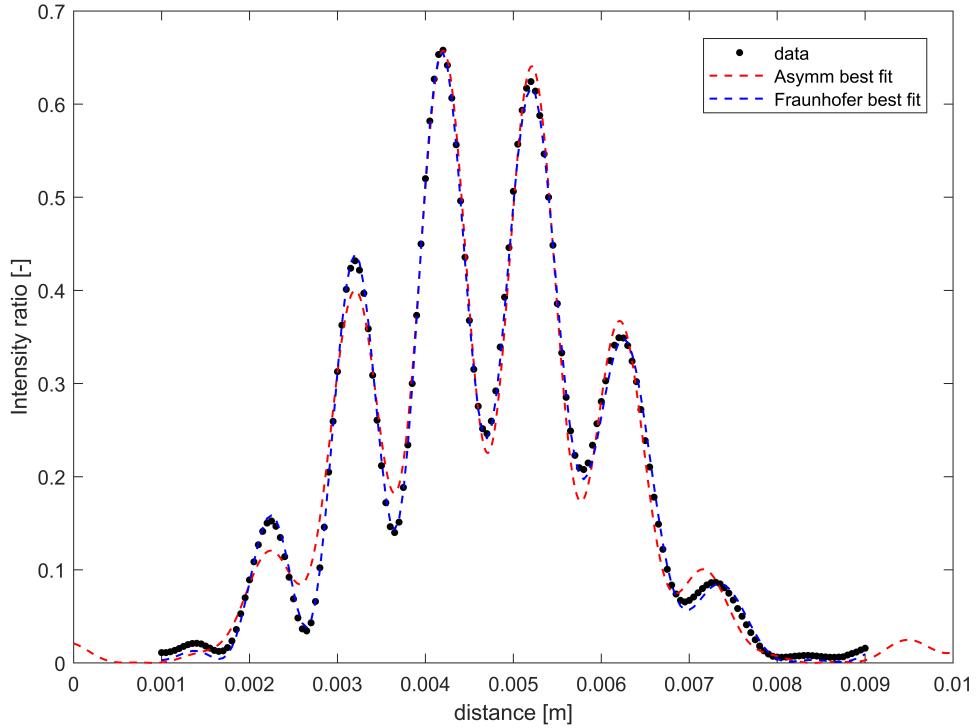
Next, for the case of bulb,  $(1.7) \times 10^{-2}$  photons are in the U-channel each moment. Therefore, at each moment, at most one photon exists in the u-channel, which is of course much larger than the delta obtained above and the case can be concluded to be a single-photon limit.

#### 3.3.2. Considering misalignment and blocker diffraction

In the case of laser experiment, assuming that the blocker completely obscures the front of the double slit, the gap between the blocker positions 3 and 4 should be equal to the slit width of 0.085 mm. However, the gap between the two positions was actually measured to be nearly twice as much, and also in the case of the asymmetric interference, the regression result was poor.

As a cause of this phenomenon, it is possible to suggest that diffraction occurs because there is basically a distance of about 1 cm between the double slit and the blocker. The width of the blocker slit is about 2 mm, and it does not affect the diffraction result when positioned in the middle, but when the boundary directly affects as the asymmetric case, this effect should be considered. The second cause - the misalignment of the double slit compared to the source slit can be suggested, too. Basic alignment was confirmed by the difference in intensity of peak from two slits, but since light from source slits to double slits is influenced by single slit diffraction, it is difficult to confirm the (phase difference) effect of misalignment only by the difference in intensity. Considering these effects, we decided to retry the fit using the Fraunhofer formula, considering the triple diffraction of source slit-double slit, double slit-blocker, blocker-detector slit and wavelength bandwidth at the same time, for one case of asymmetric case which showed the poor fit result. The figure below shows the result of fitting when fixing all dimensions

of the aperture and the wavelength line width of the source as true values, and changing only the misalignment and blocker positions of the double slit.



**Figure 18.** The newly fitted data using 3-order Fraunhofer diffraction.

While the fitting model in the main text uses too many fitting variables compared to the resolution of the data, and consequently couldn't get enough accuracy with the true value, it can be seen that the fitting model describes both asymmetry and functional shapes very well only by the operations that can be performed in the experiment.

#### 4. Summary

In this experiment, diffraction of double slits, single slits, asymmetric double slits, etc. was tested in both the laser case of multi-photon region and the single-photon region. Fitting was performed with various regression equations. In both cases, the wave nature of light could be confirmed. In addition, more detailed calibration of pmt and pcit was conducted, and we also showed that the new fitting considering several-time-Fraunhofer diffraction obtained better results than the existing traditional fitting function.

# Lock-in Detection and Hall Effect 실험 보고서

Sujin Kim, 김수진

Department of Physics and Astronomy, Seoul National University, Seoul 08826, Korea

E-mail: pesa11@snu.ac.kr

**Abstract.** 이번 실험은 잡음이 섞인 전기 신호에서 원하는 주파수의 신호를 걸러내는 Lock-in detection을 주제로 하였다. Lock-in detection의 원리를 이해하고 kit를 활용해 직접 이용해보고, 이를 바탕으로 hall effect를 정밀하게 측정하는 것을 목적으로 한다. 먼저 lock-in detection의 구성 요소 4가지에 대한 calibration 실험을 진행했다. 주파수에 따라 preamp의 gain, 위상차, low-pass filter의 gain 등이 변화함을 관찰하였고 그에 따른 output 신호의 변화를 관찰하였다. 그리고 이 실험 결과를 통해 lock-in detection의 최적 조건을 찾았다. 그 이후 적절한 실험 조건 하에서 다양한 signal to noise 값에 대한 lock-in detection을 직접 수행해 보았고, 입력 신호의 DC offset에 따라 변화함을 관찰하였다. 마지막으로 lock-in detection을 hall effect에도 적용하여 최종적으로 자석의 자기 쌍극자 모멘트 값을 계산하였다.

(Dated: 15 June 2022)

## 1 Introduction

일상생활에서 활용되는 다양한 전기 신호들은 오차와 noise를 포함하고 있다. 이렇게 noise가 섞인 신호에서 원하는 미세한 신호를 검출해내기 위해서는 원하는 신호를 걸러 증폭해야 한다. Lock-In Detection은 복잡한 신호 속에서 원하는 주파수의 신호만 골라낼 수 있다. 이번 실험에서는 Lock-In Detection의 원리를 이해하고 직접 활용해본다. 그리고 이를 바탕으로 주변 잡음에 민감하게 반응하는 Hall effect를 정밀하게 측정하여, 자석의 자기 쌍극자 모멘트를 측정하는 것을 목적으로 한다.

### 1.1 배경 이론

#### 1.1.1 Lock-In Detection [2]

Lock-In Detection은 여러 주파수가 섞인 신호에서 원하는 주파수의 신호를 걸러내는 역할을 한다. 그 원리는 다음과 같다. Lock-In amplifier는 noise의 임의의 시간에 대한 시간 적분의 평균값이 0이 된다는 사실을 이용한다. 이는 이 noise가 아무런 유의미한 정보를 담고 있지 않을 때 성립하는 가정이다. 우리가 원하는 유의미한 신호를 담고 있는 경우, 동일한 주파수를 가진 reference signal과 mixing하면 시간적분 평균값이 0이 아니다. Lock-In amplifier는 적절한 reference signal을 주어 원하는 주파수의 신호를 DC 성분으로 변환한 뒤, 이를 low pass filter를 통해 걸러내는 방식으로 작동한다. 얼마나 정확하게 원하는 주파수의 신호를 걸러낼 수 있는지는 low pass filter의 roll-off에 크게 의존한다. roll off란 filter의 critical frequency에서 벗어날 때 gain이 얼마나 빠르게 감소하는지 기울기를 의미한다. 이를 수식으로 설명하면 다음과 같다. Input signal의 위상을  $\phi$ , 진동수를  $\omega_{in}$ , 진폭을  $\sqrt{2}V_0$ 라 하면 식 (1)과 같이 쓸 수 있다.

$$V_{input}(t) = \sqrt{2}V_0 \cos(\omega_{in}t + \phi) = \frac{V_0}{\sqrt{2}} (e^{i(\omega_{in}t + \phi)} + e^{-i(\omega_{in}t + \phi)}) \quad (1)$$

이에 대해 부여하는 reference signal의 진동수  $\omega_r$ 로 나타내면 식 (2)와 같이 쓸 수 있다.

$$V_R(t) = \sqrt{2}e^{-i\omega_r t} = \sqrt{2}\cos(\omega_r t) - i\sqrt{2}\sin(\omega_r t) \quad (2)$$

두 신호를 mixing한 signal은 식 (3)과 같다.

$$V_{mix}(t) = V_{input}(t)V_R(t) = V_0 \left[ e^{i(\omega_{in}-\omega_r)t + \phi} + e^{(-i(\omega_{in}+\omega_r)t + \phi)} \right] \quad (3)$$

이 때  $\langle e^{-i((\omega_{in}+\omega_r)t + \phi)} \rangle = 0$ 이 된다. 그리고  $\omega_{in} = \omega_r$ 이 성립할 경우 mixed signal은 식 (4)와 같은 DC 신호가 된다.

$$V_{mix}(t) = V_0 e^{(i(\omega_{in}-\omega_r)t + \phi)} = V_0 e^{i\phi} \quad (4)$$

이제 이렇게 변환된 DC 성분을 low pass filter로 걸러내어 원하는 신호만 걸러내는 것이다. 그리고 Lock-In Detection은 위상 의존성을 가진다. 앞선 식에서 볼 수 있듯이 input 신호와 reference 신호 사이의 위상차  $\phi$ 에 따라 출력 전압이 달라진다. 즉, Lock-In Detection은 주파수, 위상차에 민감하게 반응하는 장치이다.

Lock-In Detection을 실제로 구현하기 위해 DBM(Double Balanced Mixer)를 활용한다. 이 Mixer는 Figure 1.과 같은 회로를 가지고 있으며, input 신호에 reference 신호의 부호를 곱한 것이 output으로 나가는 구조를 가지고 있다. DBM에 low pass filter를 연결하여 Figure 2.와 같이 신호를 걸러낼 수 있다.

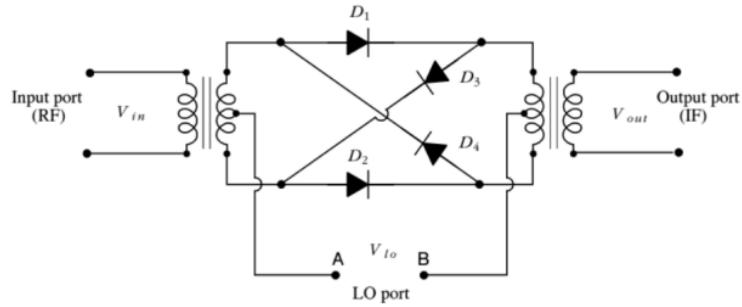


Figure 1. DBM의 회로 개요도.  $V_{out} = V_{in} \operatorname{sgn}(V_{lo})$ 의 구조이다.

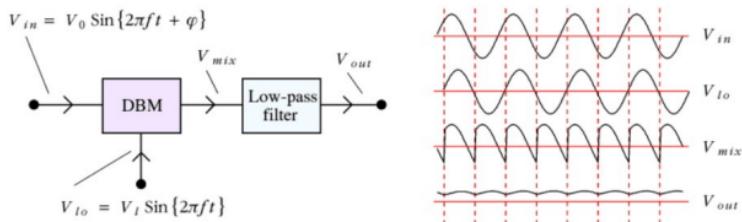


Figure 2. Lock-In Detection의 회로 개요도 및 신호의 예시. DBM을 지난 파형은 Figure 1.의 식을 따르고, low pass filter에서 DC 성분으로 신호가 걸러진다.

### 1.1.2 Hall Effect [1]

Hall effect는 어떤 시료에 전류가 흐르고 그 전류의 방향에 수직인 방향의 자기장이 걸리면, 시료 내에 전류, 자기장의 방향에 모두 수직인 방향으로 전위차가 생기는 현상이다.

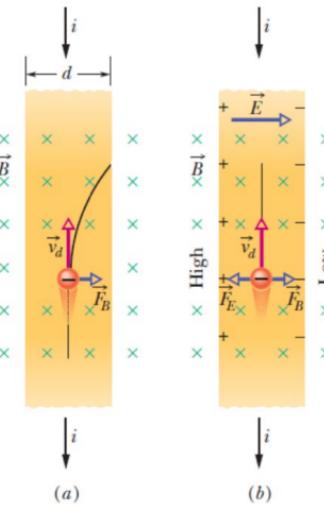


Figure 3. Hall effect의 발생 원리. 시료에 전류가 흐르고, 내부의 전자가 유동속도로 움직일 때 수직방향의 자기장이 걸린다.

Figure 3.와 같이 시료에 전류  $i$ 를 흘려주고 이에 수직한 방향으로 자기장  $B$ 를 걸면, 전류와 반대방향으로 움직이는 전자들은 로렌츠 힘을 받아 진행 방향이 오른쪽으로 휘게 된다. 이렇게 여러 전자들이 시료의 오른쪽에 쌓이게 되면, 상대적으로 왼쪽에는 양전하의 밀도가 증가하여 시료 내에 전기장이 새기게 된다. 즉, 전위차가 형성되어 전기장에 의한 힘이 전자에 가해진다. 전기력과 로렌츠 힘의 방향은 반대이고, 이 두 힘이 평형을 이루기 전까지 전기장이 강해진다. 평형 상태에서의 전위차는 식 (5)와 같다.

$$V_H = Ed \quad (5)$$

전기력과 로렌츠 힘이 평형을 이루므로 전자의 유동속도  $v$ 에 대해 식 (6)과 같이 쓸수 있다. 즉, 홀 전압은 전자의 유동속도와 자기장의 곱에 비례한다.

$$eE = evB \quad (6)$$

전자의 유동속도와 전류 사이의 관계가 식 (7)과 같이 써진다.  $n$ 은 전하 밀도,  $e$ 는 전자의 전하량,  $A$ 는 시료의 단면적이다. 즉, 전자의 유동속도는 전류에 비례하고, 입력 전압에 비례하게 된다.

$$i = -nevA \quad (7)$$

결론적으로 홀 센서의 출력전압이 되는 홀 전압은 입력 전압과 자기장의 직교 성분의 곱에 비례하여 얻어진다. 이 관계를 활용하여 홀 센서의 출력전압으로 자기장을 측정하고, 자석의 쌍극자 모멘트를 측정할 수 있다.

이번 실험에서는 NdFeB 자석과 막대자석을 활용하여 자기장을 생성한다. 홀 전압을 바탕으로 자석의 쌍극자 모멘트를 측정하기 위해서는 자석이 생성하는 자기장 식을 얻어야 한다. 두 자석 모두 직육면체 형태의 자석이며, 이 자석에 의해 가해지는 수직방향의 자기장 성분을 Biot-Savart law를 바탕으로 계산할 수 있다. 막대자석의 경우 직사각형 형태의 코일에 일정한 전류가 흐르는 형태로 생각할 수 있다. 자석의 한 면을 이루는 가로길이를  $a$ , 세로 길이를  $b$ 라고 하고 그 면에 수직 방향인 성분을  $z$  방향으로 설정하자.  $z$ 방향 길이  $h$ 를 가지는 자석의  $z$ 방향 자기장은 다음과 같다.

$$B(z) = \frac{\mu_0 m}{ab\pi} \left[ \arctan \frac{ab}{2z\sqrt{4z^2 + a^2 + b^2}} - \arctan \frac{ab}{2(z+h)\sqrt{4(z+h)^2 + a^2 + b^2}} \right] \quad (8)$$

입력 전압에 대한 홀 전압의 비를 바탕으로 자기장을 계산하고, 위 식으로부터 자석의 쌍극자 모멘트를 측정할 수 있다.

## 2 Experiment

이번 실험에서는 Teachspin Lock-In Amp. Kit를 활용하여 실험을 진행하였다. Function generator, oscilloscope 를 활용하여 신호를 만들고 분석하였다. Lock-in kit에서 preamp, detector, low-pass filter, phase shifter, noise generator를 이용하여 실험을 진행하였다. Lock-In detection을 위해서는 function generator로 생성한 신호를 preamp를 활용해 증폭하고, noise generator를 거쳐 적절한 noise를 포함시킨다. 그리고 주파수를 알고있는 reference signal의 phase를 phase shifter를 활용해 적절히 조절한 뒤, DBM을 활용해 두 신호를 mixing한다. 이는 장치의 Lock-in detector가 담당한다. 그리고 low-pass filter를 거쳐 DC 성분 진폭을 검출한다. 키트에 내장된 reference oscillator의 성능이 좋지 않으므로 function generator를 활용해 생성하였다. 그리고 모든 검출 과정은 오실로스코프를 활용하였다. Hall effect 실험의 경우 MG910 GaAs 홀 소자를 활용해 실험을 진행하였다. 이 소자는 4-probe contact가 이미 형성되어 온 완성형 소자로, 내부 증폭 없이 편리하게 홀 효과를 측정할 수 있었다. 홀 소자는 역전압, 가열, 과전압, 과전류 등에 민감하므로 이에 주의하여 실험을 진행하였다. 모든 실험에 대한 구체적인 실험 조건은 SM에 기재되어 있다.

### 2.1 Lock-in amplifier 구성 요소 실습

Lock-in amp를 구성하는 요소들은 완벽하지 않아, 사전의 calibration 실험을 거쳐야 한다. 이를 바탕으로 최적의 lock-in detection 조건을 찾아 추후의 lock-in 실험에서 활용하도록 한다.

#### 2.1.1 주파수에 따른 Preamp gain의 변화 확인 실험

Preamp의 gain은 입력 신호를 몇 배로 증폭할 것인지를 결정한다. Gain 값은 사용자가 설정해줄 수 있지만, 특정 주파수 영역을 벗어나면 gain이 감소하기 시작한다. Figure 4와 같은 실험 구성을 만들고, preamp의 gain이 3dB 줄어들기 시작하는 3dB frequency를 측정한다. 여러 주파수에서 gain값을 기록하고, 이 데이터를 선형회귀하여 3dB frequency를 계산한다. 높은 gain에서는 입력 전압을 충분히 낮추어 장비의 손상을 방지하였고, function generator

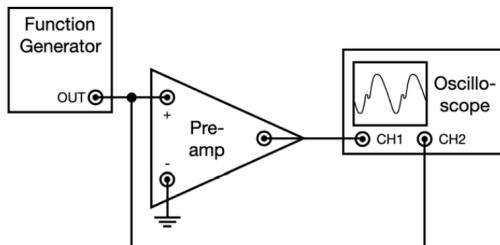


Figure 4. 주파수에 따른 preamp gain의 변화 확인 실험의 회로도.

의 입력 신호도 오실로스코프에 함께 나타내어 2채널 진폭 비교의 방식으로 gain을 계산하였다. 실험은 preamp gain 2, 10인 조건으로 진행하였다.

### 2.1.2 Phase shifter의 거동

Phase shifter도 마찬가지로 주파수에 따라 틀어지는 현상이 발생한다. Figure 5와 같은 실험 구성으로 Phase shifter의 phase를 0으로 고정해 놓은 상태에서, 주파수를 변경해가며 실제 신호의 위상차를 측정한다. 선형 회귀를 통해 phase와 주파수 간의 slope를 계산한다.

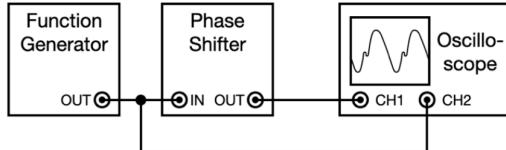


Figure 5. 주파수에 따른 phase shifter 거동 확인 실험의 회로도.

### 2.1.3 DBM 활용 실험

Lock-in amplifier는 입력 신호와 reference signal의 위상차에도 크게 영향을 받는다. Figure 6과 같은 실험 구성에서 두 신호의 위상차를 변경시켜가며 출력되는 mixed 신호를 직접 확인하였다.

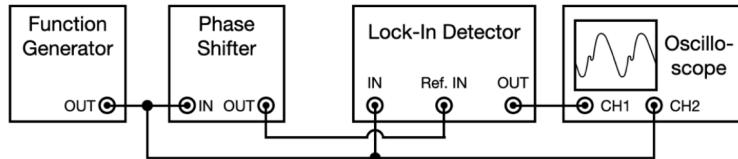


Figure 6. 위상차에 따른 DBM mixed 신호 확인 실험의 회로도.

### 2.1.4 Low-pass amplifier 실험

Low-pass amplifier는 시상수, roll off를 조절할 수 있다. Figure 7과 같은 실험 구성을 만들고, 실험에서 사용 가능한 roll off, 시상수의 조합을 바꾸어 가며 주파수에 따른 gain을 측정한다. 실험에서 사용한 roll off 값은 12dB/oct, 6dB/oct이고 시상수 값은 0.3, 0.1, 0.03으로 총 6가지의 실험 조건에서 실험을 진행하였다.

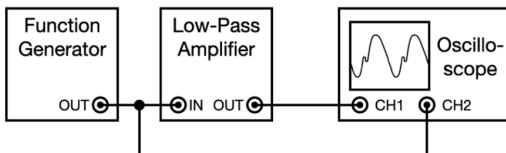


Figure 7. Low-pass amplifier 실험의 회로도.

## 2.2 Lock-in amplifier 활용 실험

### 2.2.1 Noise가 포함된 signal의 FFT 관찰

입력 신호를 noise generator에 통과시켜 noise를 섞을 수 있다. Figure 8과 같은 실험 구성에서 오실로스코프를 활용해 noise를 섞기 전과 후의 FFT 스펙트럼을 관찰한다.

### 2.2.2 Lock-In detection 수행

앞서 진행했던 실험들의 결과를 바탕으로, lock-in detection을 진행할 수 있는 최적의 조건에서 Figure 9의 회로를 구성한다. 그리고 다양한 S/N(signal to noise ratio)값에 대해 signal을 잡음으로부터 걸러낸다. 신호가 최대가 되는 phase를 찾기위해, phase에 따른 low-pass amplifier의 출력을 측정하여 phase에 따른 gain의 2차 함수 fitting을 진행한다.

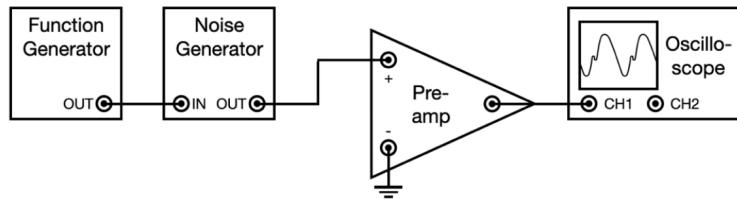


Figure 8. Noise가 포함된 signal의 FFT 관찰 실험의 회로도.

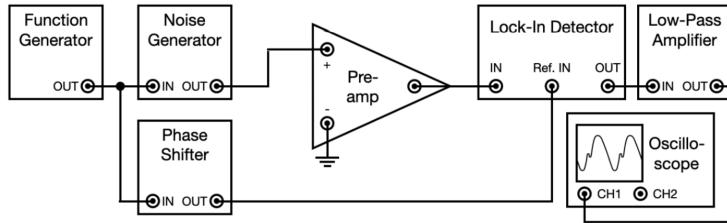


Figure 9. Lock-in detection 실험의 회로도.

### 2.2.3 Lock-In detection의 DC-offset 영향 측정

이상적인 lock-in detection에서는 입력 신호에 DC offset을 더해도 결과가 달라지지 않아야 한다. 그러나 실제 실험계에서는 이를 따르지 않을 수 있어, function generator의 DC offset에 따른 gain의 변화를 측정해 이를 확인해보았다. 그리고 DC offset에 따른 gain을 선형 회귀하여 기울기를 구하였다.

### 2.3 Hall effect 실험

자석을 홀 소자의 면에 수직한 자기장이 걸리도록 위치하면 홀 소자에서 홀 효과가 발생한다. 이 신호를 lock-in detection을 이용해 검출해내는 실험이다. Figure 10과 같은 실험 구성에서, 자석과 홀 소자 간의 거리를 변경시키며 gain을 측정한다. Lock-in detection이 최대로 일어날 수 있는 위상을 찾고, 거리에 대한 gain 그래프를 바탕으로 식(8)로 회귀하여 자석의 쌍극자 모멘트를 계산한다.

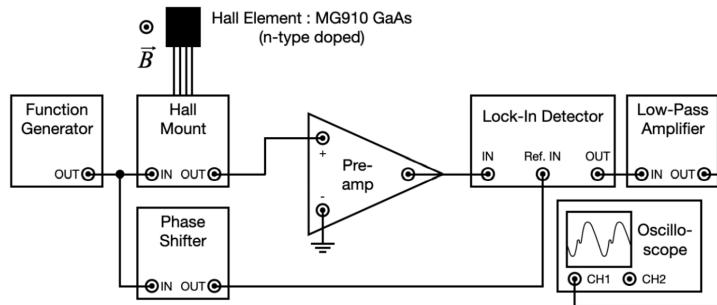


Figure 10. Hall effect 실험의 회로도.

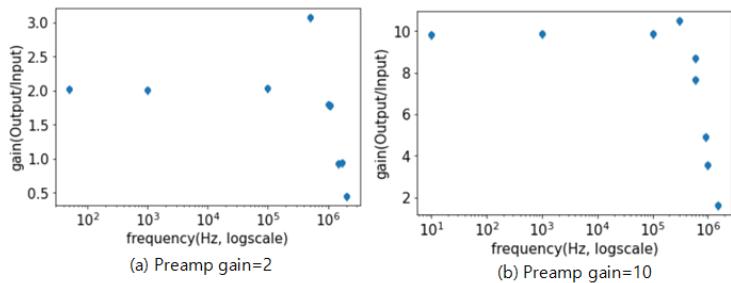
## 3 Result

### 3.1 Lock-in amplifier 구성 요소 실험

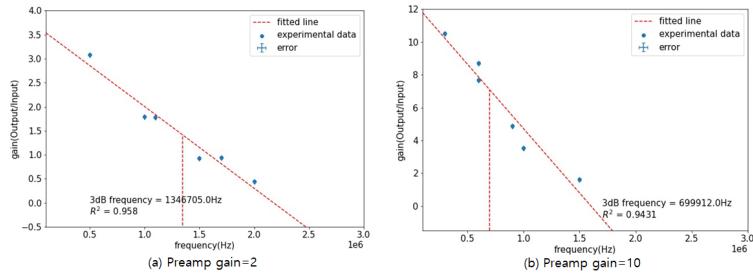
#### 3.1.1 주파수에 따른 Preamp gain의 변화 확인 실험

주파수에 따른 preamp의 gain 변화는 Figure 11과 같다. 낮은 주파수에서는 gain이 preamp의 gain값과 일치하지만, 특정 주파수 이상의 경우 gain이 살짝 증가했다가 선형적으로 감소하는 경향을 보인다. 각각의 데이터에서 감소하는 경향을 가진 부분을 잘라 선형 회귀를 하면, Figure 12의 그래프를 얻을 수 있다.  $R^2$  값에 의해 선형 회귀가 적절함을 알 수 있다. 또한 회귀를 통해 3dB frequency를 구하는 방법은 다음과 같다. 식 (9)에 의해, 3dB 만큼 감소하는 것은 약 0.707배의 gain 감소를 의미한다는 것을 알 수 있다. 이를 바탕으로 구한 gain에 따른 3dB frequency와 불확실도는 Table 1과 같다.

$$-3dB = 20\log(Gain), \quad Gain = 0.707 \quad (9)$$



**Figure 11.** 주파수에 따른 gain의 변화를 나타낸 그래프. 주파수는 logscale로 나타나 있다. (a) Preamp gain=2, (b) Preamp gain=10인 경우.



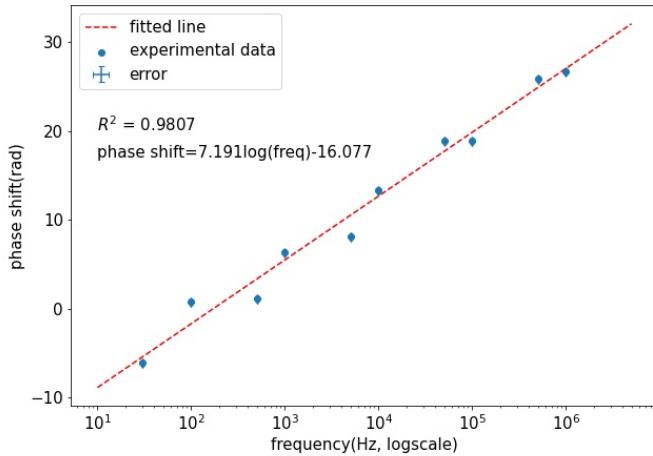
**Figure 12.** 주파수에 따른 gain의 변화를 나타낸 그래프. 주파수는 3dB frequency 근처에서만 나타냈다. (a) Preamp gain=2, (b) Preamp gain=10인 경우. 각각  $R^2 = 0.958, 0.9431$ 이다.

Preamp gain	3dB frequency(Hz)
2	$1347605.0 \pm 36222.5$
10	$699912.0 \pm 69688.0$

**Table 1.** Preamp gain에 따른 3dB frequency와  $1\sigma$  불확실도.

### 3.1.2 Phase shifter의 거동

주파수에 따른 위상차는 Figure 13.과 같이 나타났다. 이 그래프에서 phase shifter의 값이 0으로 고정되었음에도



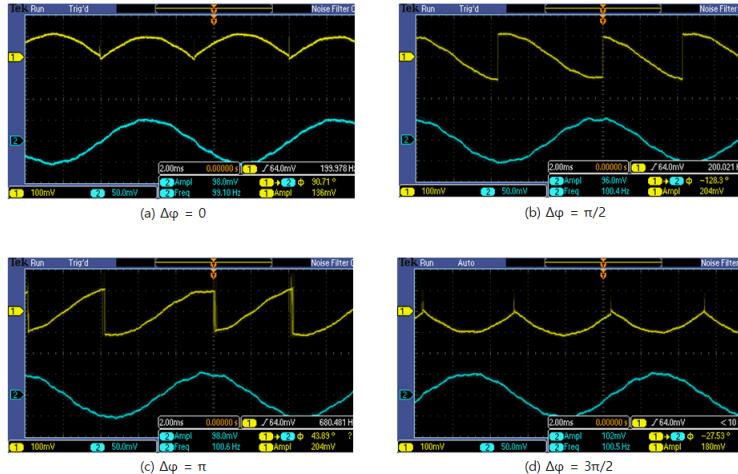
**Figure 13.** 주파수에 따른 위상차를 나타낸 그래프.  $R^2 = 0.9807$ 로 선형 회귀가 적절함을 알 수 있다. 선형 회귀 함수는 phase shift=7.191log(frequency)-16.077.

불구하고 주파수의 logscale에 선형적으로 위상차가 변화한다는 것을 알 수 있다. 그래프에서 y축의 위상차 값은 0

부터 360도 사이의 측정 값을 적절한 정수  $n$ 에 대해  $360n$ 의 값을 더하거나 빼어 계산하였다. 그래프의 기울기는  $7.191 \pm 0.356$ 으로 나타났다.

### 3.1.3 DBM 활용 실험

Phase shifter의 값을 조정하여 input과 reference signal의 위상차가  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ 가 되는 위치에서 mixed signal을 얻었다. Input signal과 mixed signal을 함께 나타낸 그림은 Figure 14와 같다. 이 때 preamp의 gain은 2로 두었다. 위상차가 0일 때 모든 output signal이 양수가 되어 나타나고, 반대로  $\pi$ 일 때는 모두 음수로 나타남을 알 수



**Figure 14.** 위상차에 따른 input signal(2)과 output signal(1). 동일한 input signal임에도 output signal의 개형이 위상차에 따라 변화한다.

있다. 또한 위상차가  $\pi/2$ 일 때와  $3\pi/2$ 일 때는 대칭적으로 나타나며, reference signal이 0이 되는 지점에서 output signal의 값이 0이 되는 것을 확인할 수 있다. 앞서 언급한 DBM의 작동 방식을 직접 확인해 볼 수 있었다.

### 3.1.4 Low-pass amplifier 실험

Low pass amplifier의 시상수, roll off 값을 변경해가며 주파수에 따른 gain 값을 plot하면 Figure 15와 같다. 시상수가 클 수록 cut off frequency가 작아지고, roll off가 클 수록 cut off frequency 이후에 gain의 감소가 급격하게 나타난다는 것을 알 수 있다. Fitting 함수는 식 (10)을 이용하였다. 모든 그림에서  $R^2$ 값이 적절하므로, low pass filter가 이론과 잘 맞게 거동한다는 것을 알 수 있다. 그림에서 시상수, roll off에 따른 경향과 fitting 함수에 관해서는 discussion에서 다루도록 하겠다.

## 3.2 Lock-in amplifier 활용 실험

### 3.2.1 Noise가 포함된 signal의 FFT 관찰

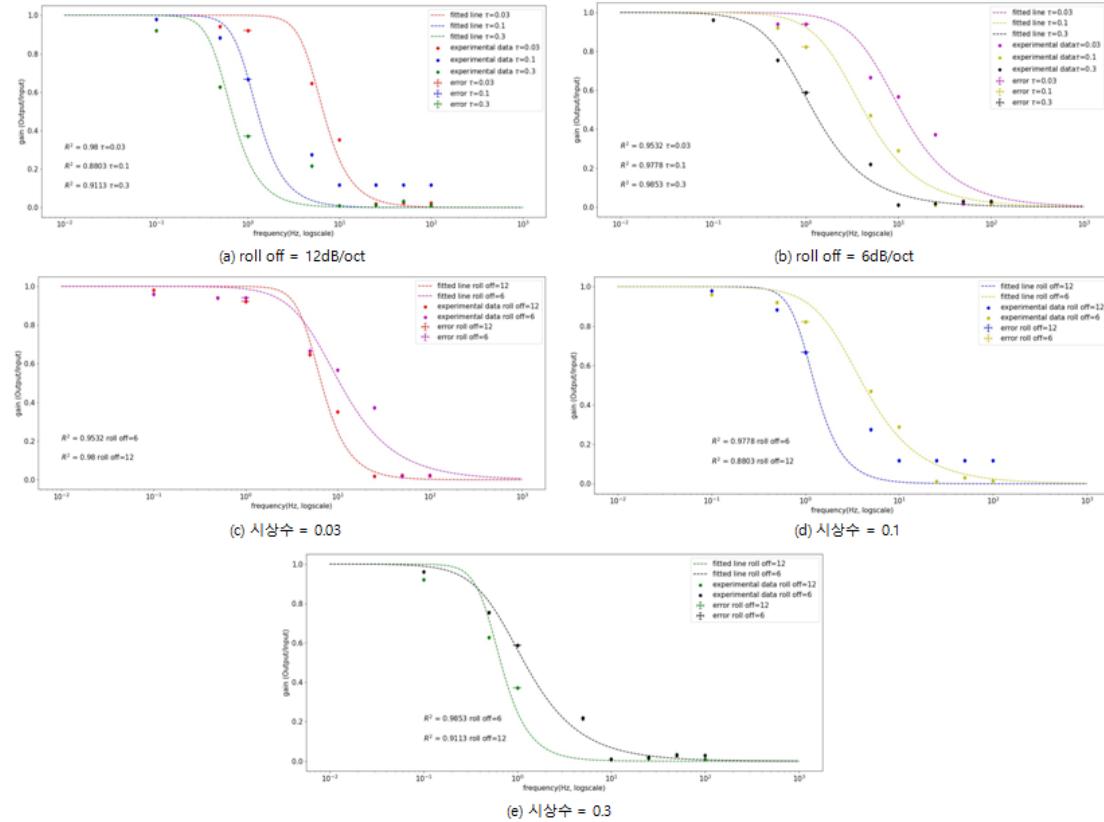
Noise generator를 통해 noise amplitude를 변화시켜가며 signal에 포함시켰다. 그 결과 output signal과 FFT spectrum을 관찰하면 Figure 16과 같았다. Noise amplitude가 증가할수록 복잡한 FFT 스펙트럼을 보인다는 것을 알 수 있다. 즉, noise는 여러 주파수 성분이 섞인 신호를 더하여 signal을 복잡하게 만든다는 것을 알 수 있다.

### 3.2.2 Lock-In detection 수행

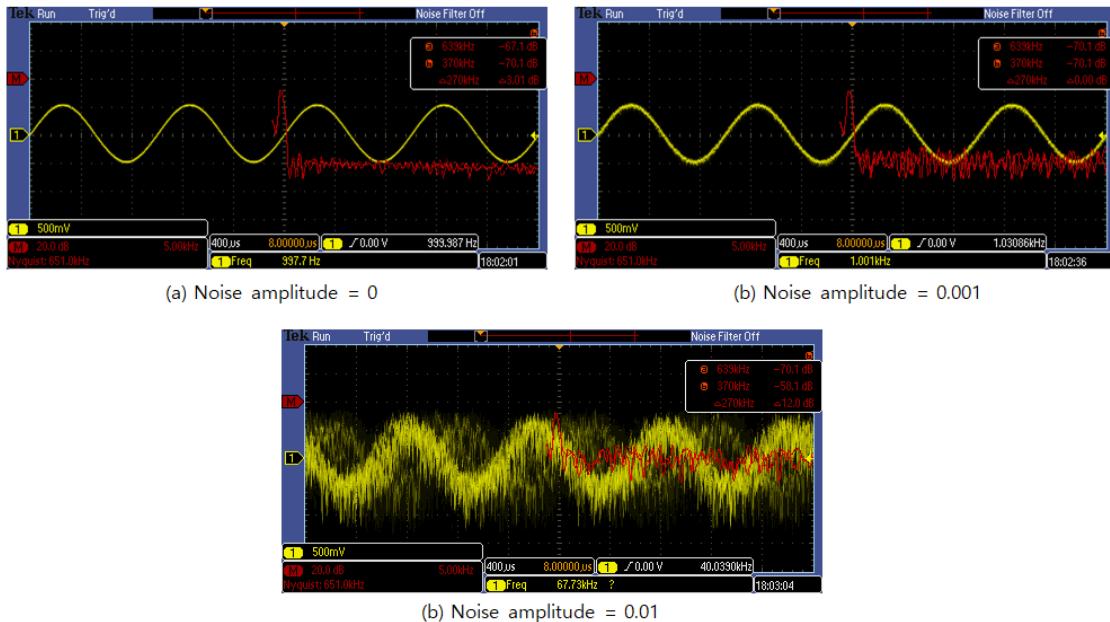
다양한 S/N 값에 대해 lock-in detection 실험을 진행하였다. Gain이 최대가 되는 phase를 찾기 위해 Figure 17과 같이 각 S/N 값에 대해 gain-phase 그래프를 그려 2차함수 회귀를 진행하였다.  $R^2$ 값을 통해 회귀가 적절함을 알 수 있다. 그 결과 center phase는 다음 표와 같이 나타났다.

Noise amplitude	center phase(degree)
$10^{-4}$	$186.25 \pm 0.94$
$10^{-2}$	$187.64 \pm 1.42$
$10^{-1}$	$180.34 \pm 0.44$

**Table 2.** S/N 값에 따른 center phase의 값. 불확실도를  $1\sigma$ 로 함께 기재했다.



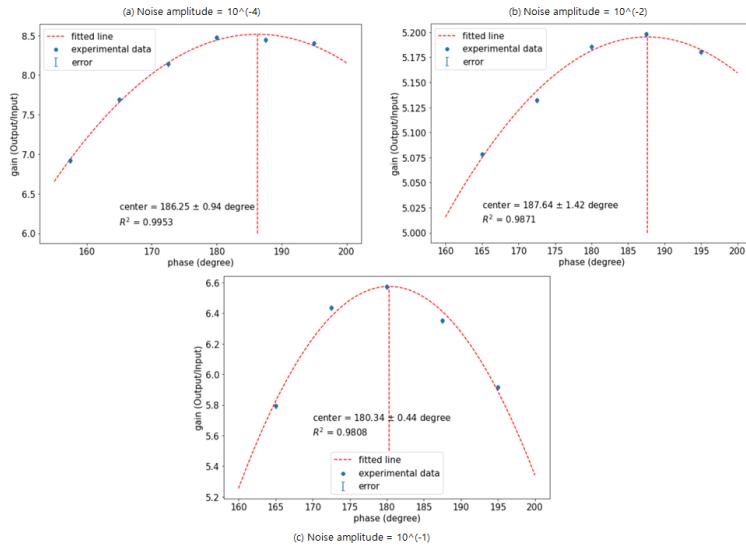
**Figure 15.** 시상수, roll off에 따른 주파수-gain 그래프. (a) roll off를 12dB/oct, (b) 6dB/oct로 고정하고 3가지 시상수에 대한 그래프. (c), (d) 시상수를 0.03, 0.1, (e) 0.3으로 고정하고 2가지 roll off 값에 대한 그래프.  $R^2$ 값을 그레프에 함께 나타나였다.



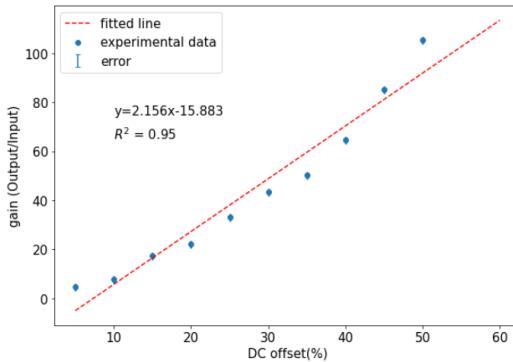
**Figure 16.** Noise amplitude에 따른 output signal(노랑)과 FFT spectrum(빨강)의 형태. Noise amplitude의 값이 (a) 0, (b) 0.001, (c) 0.01로 점점 증가함에 따라 FFT와 output signal이 복잡하게 나타난다.

### 3.2.3 Lock-In detection의 DC-offset 영향 측정

Function generator를 활용해 DC offset을 입력 신호에 부여함에 따라 gain은 선형으로 변화하였다. Figure 18.을 보면  $R^2 = 0.95$ 이므로 선형 회귀가 잘 맞으며, 따라서 gain-DC offset의 관계가 선형적임을 알 수 있다. 그레프의



**Figure 17.** Noise amplitude를 (a)  $10^{-4}$ , (b)  $10^{-2}$ , (c)  $10^{-1}$ 로 변화시켜 관찰한 phase에 따른 gain의 그래프. 각각  $R^2$  값은 0.9953, 0.9871, 0.9808이다.



**Figure 18.** DC offset에 따른 gain의 그래프.  $R^2 = 0.95$ 로 선형 회귀가 잘 맞으며,  $y = 2.156x - 15.883$ 의 선형 그래프를 따른다.

기울기는  $2.156 \pm 0.175$ 로 도출되었다.

### 3.3 Hall effect 실험

Hall effect 실험에서는 홀 소자와 자석 사이의 거리를 조절해가며 gain값을 측정할 수 있었다. 이번 실험에서 사용한 홀 소자는 50mT의 자기장에 45mV의 홀 전압을 출력한다. 홀 센서는 linear sensor이므로, 측정한 output 전압값으로부터 가해진 자기장을 계산할 수 있다. 이 때 output 전압값에서 아무런 자기장이 가해지지 않았을 때의 offset 전압값을 빼주어야 한다. 이렇게 구한 자기장을 바탕으로 자석 사이의 거리-자기장 그래프를 그리면 Figure 19과 같다. 이를 식 (8)을 바탕으로 fitting하면 점선의 그래프를 얻을 수 있다.  $R^2 = 0.9894$ 이므로 실험이 이론과 잘 부합함을 알 수 있으며, 계산된 자석의 자기 쌍극자 모멘트는  $47.42 \pm 23378 J/T$ 이다.[3] 또한 자석과 홀 센서 사이의 거리에 따라 출력이 최대가 되는 phase와 출력 전압은 다음과 같다.

자석까지의 거리(mm)	phase(degree)	output voltage(mV)
30	212.5	$5832 \pm 32.44$
20	210	$5843 \pm 29.48$
10	210	$5895 \pm 37.91$
5	210	$6003 \pm 46.82$
3	210	$6049 \pm 46.47$
2	210	$6129 \pm 41.85$
1	210	$6363 \pm 45.16$

**Table 3.** 자석까지의 거리에 따른 출력 최대 phase와 출력 전압. 출력 전압은 불확실도를 함께 기재하였다.

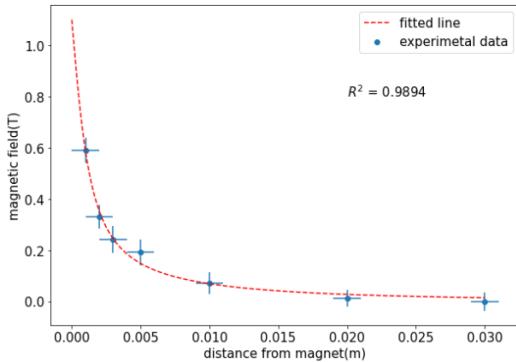


Figure 19. 자석까지의 거리에 따른 자기장 그래프.  $R^2 = 0.9894$ 이므로 이론과 실제가 잘 부합함을 알 수 있다.

## 4 Discussion

### 4.1 Low-pass amplifier의 gain-frequency 곡선

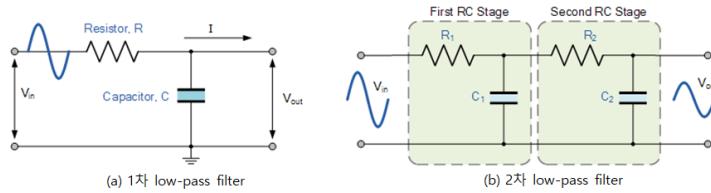


Figure 20. (a) 1차, (b) 2차 low pass filter의 회로도.

Low-pass amplifier의 실험 결과, 시상수가 증가할수록 cut off frequency가 감소하고 roll off가 증가할수록 cut off frequency 이상에서 gain이 급격하게 감소했다. 이러한 결과가 나타나는 이유는 다음과 같이 해석할 수 있다. 단순한 low-pass filter의 경우 Figure 20.(a)와 같은 회로도를 가진다. 전체 임피던스는  $\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}$ 이며, output 단자의 임피던스는  $1/\omega C$ 이다. 따라서 gain을 계산해보면 식 (10)을 따를 것이다.

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega RC)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f\tau)^2 + 1}}, \quad \tau = RC \quad (10)$$

이 식에 의해 gain이 급격하게 감소하는 cut off frequency는 근사적으로  $1/\tau$ 라고 할 수 있다. 일반적으로 이  $\tau$  값을 시상수라 하며, 따라서 시상수가 증가할수록 cut off frequency가 감소하는 것을 설명할 수 있다. 또한 roll off의 경우, 6dB/oct는 1차 low-pass filter의 roll off 값이다. 12dB/oct는 2차 low-pass filter의 roll off 값이다. 2차 low-pass filter는 RC 회로를 2번 연속해서 연결한 것으로 Figure 20.(b)와 같이 나타난다. 이렇게 회로를 연결하면 1차 low-pass filter의 gain 함수를 제곱하는 효과를 준다. 따라서 logscale로 표현되는 dB 차원에서는 2배가 된 값으로 나타나게 된다. 이러한 원리로 2배 더 강한 roll off를 형성하였으며, 실험 데이터 상으로도 기울기의 변화를 관찰할 수 있었던 것이다.

### 4.2 오차 분석

먼저 lock-in detection 실험의 경우, gain을 측정하는 과정에서 오차가 존재했을 것이다. 오실로스코프 상에서 나타나는 output 전압값이 크게 변동하여 정확한 값을 읽기 어려웠다. Hall effect 실험의 경우 phase 조절 과정에서 최대의 진폭을 가지는 지점을 찾기 어려웠다. 따라서 최대 출력이 나오는 phase 값에 오차가 발생하였을 것이다. 또한 자석과 훌센서를 위치시킬 때 그 상태를 유지하기 어려웠다. 따라서 자석과 훌센서 사이의 거리 측정에 오류가 있었을 것이다. 자기 쌍극자 모멘트 측정 시, 자석의 정확한 크기 값을 알아야 했다. 그러나 자석이 깨져있어 정확한 치수를 재기 어려웠고, 따라서 자기 쌍극자 모멘트 값을 정확히 측정할 수 없었다. 이번 실험에서는 선형 회귀 혹은 2차 함수를 취하여 적절한 값을 구하는 경우가 많았는데, 이러한 회귀가 적합한지 알 수 없다.  $R^2$  값을 보면 나름 타당하다고 할 수 있지만, 실제 함수의 형태를 정확히 알 수 없기 때문에 오류가 발생하였을 수 있다.

## 5 Conclusion

이번 실험에서는 Lock-in detection을 수행하였으며, 이를 바탕으로 hall effect를 관찰하고 자석의 쌍극자 모멘트를 측정했다. 먼저 Lock-in kit를 구성하는 여러 요소들을 calibration하는 실험을 진행하였다. 그 결과, 주파수가 증가함에 따라 preamp의 gain이 감소하는 현상을 보았고, 3dB frequency를 측정할 수 있었다. 그리고 주파수의 logscale에 선형 비례하여 위상차가 생긴다는 것을 확인하였다. Input 신호와 reference signal의 위상차에 따른 mixed signal을 관찰하였다. 마지막으로 low-pass filter의 시상수, roll off 값을 변경해가며 low-pass filter가 어떻게 높은 주파수를 cut off 하는지 관찰하였다. 이를 바탕으로 직접 잡음이 섞인 신호에서 원하는 주파수의 신호를 걸러내어 보았다. FFT를 활용해 신호에 섞인 noise를 확인하였고, 이를 lock-in detection의 방식으로 걸러내었다. 걸러낸 신호가 입력 신호의 DC offset에 대해 선형적으로 변화함을 확인하였다. 그리고 이 회로에 훨 소자를 연결하여, 자석을 활용해 훌 효과를 만들고 lock-in detection의 방식으로 훌 전압을 출력였다. 그리고 이를 바탕으로 자석의 쌍극자 모멘트를 측정해 보았다. Low-pass filter의 시상수와 roll off에 대해 탐구하였으며, 실험에서 있었던 오차를 분석했다. 결론적으로 이 실험을 통해 lock-in detection이 잡음이 섞인 신호를 어떻게 걸러내는지 이해하고, 직접 활용해 볼 수 있었다.

## References

- [1] Walker, Halliday, Resnick. R, 『일반물리학』 10판, 범한서적주식회사(2017).
- [2] K. Sol, 실험 매뉴얼 Lock-in Detection and Hall Effect (2021).
- [3] Jonathan F. Reichert, Geroge S. Herold, Signal Processor Lock-In Amplifier Instructor's Manual, TeachSpin, Inc(2002).

# Intermediate Physics Lab Report : Optical tweezers

Author, 권민성

Department of Physics and Astronomy, Seoul National University, Seoul 08826, Korea  
E-mail: mhee7173@snu.ac.kr

**Abstract.** 본 실험에서는 Optical tweezers module을 사용하여 micron-sized particle을 trapping하고 움직여보았다. 원유 지방 입자가 초점에 trapping 되는 것을 통해 Optical tweezers의 z 방향 trapping force를 확인하였다. 또한 silica bead의 브라운 운동을 통해 용액의 유효 점성 최획치를 구하고 이를 기반으로 maximum trapping force를 계산하였으며, 그 값은 유효 점성의 경우  $\sim mPa\ s$ , trapping force의 경우  $\sim pN$ 정도로 작용함을 확인하였다. 이를 통해 Optical tweezers의 사용법을 익히고 trapping force가 어느 정도 크기로 작용하는지 확인하였다.

(Dated: 19 May 2022)

## 1. Introduction

빛은 운동량을 지니며 물체에 의해 빛의 운동량이 변하면 물체는 빛의 운동량 변화와 크기는 같고 방향은 반대인 운동량을 얻게 된다. 이러한 원리로 초점이 맷힌 빛을 이용하면 Optical tweezers를 만들 수 있으며 이는 미소 입자를 조작하거나 세포 혹은 분자를 다루는 데 사용된다. 본 실험에서는 Optical tweezers의 작동 원리를 이해하고 사용법을 익혀 Optical tweezers의 trapping force를 측정하였다.

### A. Optical tweezers

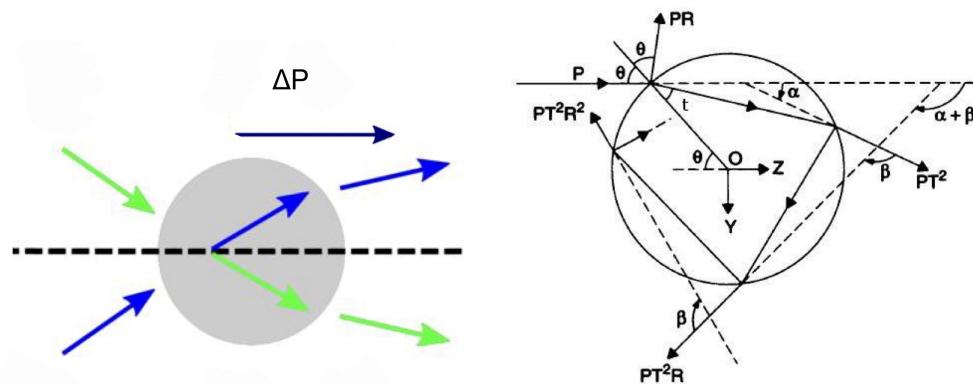


Figure 1: left) 구형 물체에 빛이 입사하는 경우, right) Ray Optics regime ( $\lambda \ll R$ )[1]

Fig. 1의 왼쪽 그림과 같이 초점이 맷한 Gaussian intensity profile(TEM00 mode)의 빛이 dielectric, linear, isotropic, nondispersive, spatially nondispersive 물체에 가해진다고 생각하자. 물체를 통과하며 그림과 같이 빛의 운동량이 바뀌고, 물체는 바뀐 운동량과 크기는 같고 방향은 반대인 힘을 받으며 이 경우 복원력은 초점 방향을 향한다. 즉 빛의 초점에 optical trap이 형성된다.

물체의 크기가 빛의 파장보다 큰 경우 Ray optical approach가 가능하다. Fig. 1의 오른쪽 그림과 같이 물체에  $\theta$ 의 각도로 단위 시간당 에너지  $P_{beam}$ 인 빛이 입사하는 경우 물체가 받는 힘은 다음과 같다. 이때  $R_r$ 은 reflectance,  $T$ 는 transmittance이다.

$$F_z = n_m \frac{P_{beam}}{c} Q_s, \quad Q_s = 1 + R_r \cos(2\theta) - \frac{T^2 (\cos(2\theta - 2t) + R_r \cos(2\theta))}{1 + R_r^2 + 2R_r \cos(2t)} \quad (1)$$

$$F_y = n_m \frac{P_{beam}}{c} Q_g, \quad Q_g = R_r \sin(2\theta) - \frac{T^2 (\sin(2\theta - 2t) + R_r \cos(2\theta))}{1 + R_r^2 + 2R_r \cos(2t)} \quad (2)$$

위 식을 초점이 맷한 Gaussian intensity profile(TEM00 mode) 빛에 대해 구면의  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 에서 적분하면 구형 물체에 가해지는 힘을 알 수 있다.

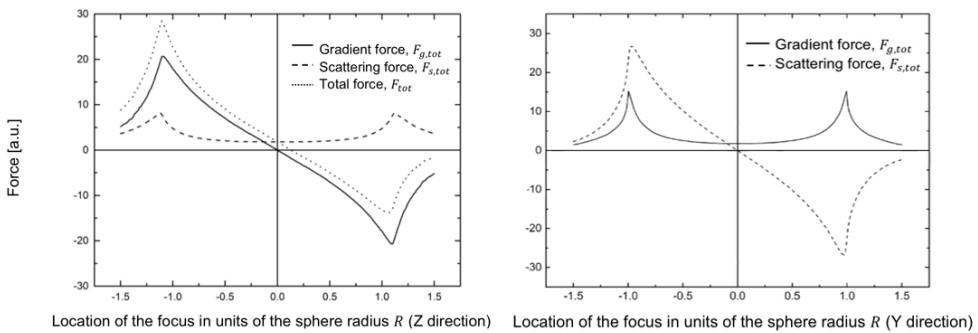


Figure 2: Ray Optics regime ( $\lambda \ll R$ )에서 focus로부터 구형 물체의 거리에 따른 복원력[1]

Fig. 2에서 Optical trap이 형성된 모습을 확인할 수 있다. 본 실험에서 사용하는 bead의 크기는  $\sim \mu\text{m}$  정도의 크기이고 Laser는 658nm의 파장을 가진다. 일반적인 scattering을 고려하여 나타낸 빛의 세기와 복원력의 크기는 다음과 같다.

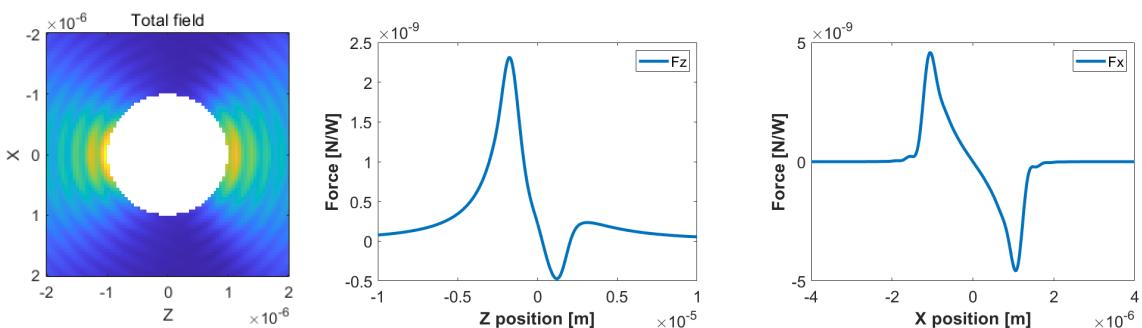


Figure 3: 구형 물체에 의해 scattering 된 빛의 세기와 focus까지의 거리에 따른 복원력의 크기,  $R = 1\mu\text{m}$ ,  $NA = 1$ ,  $n_{bead} = 1.59$

### B. Brownian motion

유체에 떠 있는 micron-sized particle은 열운동 하는 유체 분자의 충돌에 의해 무작위적인 운동을 보인다. 이를 브라운 운동이라 하며 브라운 운동은 Langevin equation을 통해 기술할 수 있다.

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} = F_{ext} \quad (3)$$

$\langle x \frac{dx}{dt} \rangle = g$ 라 하자. Eq. 3에 x를 곱하고 시간평균 한 후  $\langle x F_{ext} \rangle = 0$ 과 Equipartition theorem ( $\langle mv^2 \rangle = k_B T$ )을 이용하면 다음의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\langle mx \frac{d^2x}{dt^2} \rangle + \langle \mu x \frac{dx}{dt} \rangle = \langle x F_{ext} \rangle \rightarrow m \frac{dg}{dt} - \langle mv^2 \rangle + \mu g = 0 \quad (4)$$

$$\langle x \frac{dx}{dt} \rangle = \frac{1}{2} \frac{d \langle x^2 \rangle}{dt} = \frac{k_B T}{\mu} \left( 1 - e^{-\frac{\mu}{m} t} \right) \rightarrow \langle x^2 \rangle \approx \begin{cases} \frac{k_B T}{m} t^2, & t \ll \frac{m}{\mu} \\ \frac{2k_B T}{\mu} t, & t \gg \frac{m}{\mu} \end{cases} \quad (5)$$

### C. Stoke's formula

Navier-Stokes 방정식에서 nonlinear term의 영향을 무시하고, 유체가 incompressible이라 고 가정하면 일반적으로 구형 물체에 속도  $v$ 의 steady flow가 흐르는 경우 물체에 가해지는 힘을 계산할 수 있다.[3]

$$F = \int (-p \cos \theta - \sigma'_{r\theta} \sin \theta) dS = 6\pi R \eta v \quad (6)$$

이 때 stress tensor  $\sigma_{ik} n_k = -pn_i + \sigma'_{ik} n_k$ 이며  $p = -\frac{3\eta v}{2R} \cos \theta$ ,  $\sigma'_{r\theta} = -\frac{3\eta v}{2R} \sin \theta$ 이다. Stoke's formula는  $Re \lesssim 0.5$ 인 경우 성립하며 본 실험의 경우 flow 속도는  $\sim 0.1 mm/s$ , 물체의 크기는  $\sim 1 \mu m$ , dynamic viscosity는  $\sim 1 mPa \cdot s$  이므로 Stoke's formula를 충분히 사용할 수 있다. 이제 Stoke's formula와 Brownian motion에서 얻은 방정식을 합치면 실험에서 사용할 식을 얻을 수 있다. Eq. 6에서  $\mu = 6\pi\eta R$ 이고 위의 조건에서  $t \gg \frac{m}{\mu}$ 이므로 브라운 운동의 2차원 mean-squared distance의 ensemble average는 다음과 같다.

$$\frac{d \langle r^2 \rangle}{dt} = \frac{2k_B T}{3\pi\eta R} \quad (7)$$

## 2. Method

본 실험에서는 서울대학교 중급물리실험실에 장비된 Optical tweezers module을 사용하여 실험을 진행하였다.

### A. 샘플 제작

샘플로는 silica beads(지름 1, 2, 3  $\mu m$ )와 원유를 희석하여 사용하였다. 구체적인 샘플 제작법은 아래와 같다.

- (i) silica beads 용액을 잘 흔들어 준 후 비커에 silica beads 용액을 1 방울 넣고 증류수로 약 100배 희석한다.

- (ii) 슬라이드 구멍에 용액을 2~3방울 떨어뜨리고 커버글라스를 기울인 상태로 천천히 덮는다. 이때 흐름과 공기 방울이 생기지 않도록 유의한다.

슬라이드 구멍에 용액을 적게 떨어뜨리는 경우 공기 방울이 생겨 흐름이 생기기 쉬우며, 와이퍼를 사용하여 커버글라스를 눌러줄 경우 공기 방울이 생겨 흐름이 생김에 주의한다. 또한 샘플을 제작한 후 오랜 시간 방치하면 희석한 용액이 증발, silica beads가 침전하여 실험에 지장이 있을 수 있다.

### B. 소프트웨어 세팅

- (i) 실험은 ThorCam program의 카메라 기능을 이용하여 실시간 영상을 활용하며 녹화는 avi형식으로 진행한다. 이때 image quality와 pixel clock, FPS를 최대로 설정하게 되면, dropped pct가  $50\pm5\%$ 를 유지하여 FPS가 시간에 따라 변하기 때문에 time interval을 알 수 없게 된다. 따라서 설정은 dropped pct를 최소화하면서 입자를 분간하는 데 어려움이 없을 정도로 설정해야 하며 본 실험의 경우 image quality 75, pixel clock 21MHz, FPS 10으로 사용하였다. 이 경우 dropped pct는  $\sim 1\%$ 이다.
- (ii) Sample positioning stage controller는 setting-advanced 탭에서 각각의 모터에 대해 max velocity  $0.03mm/s$ , Acceleration  $1mm/s^2$ 로 설정하고 Drive Array Velocities 를 0.005, 0.01, 0.02, 0.03  $mm/s$ 로 설정한다. trapping force를 측정하는 실험에서는 상황에 따라 Drive Array Velocity를 수정하여 사용하였다.

### C. 레이저 초점잡기

positioning stage를 충분히 밑으로 내리고 샘플을 로딩한다. 이후 샘플을 천천히 올리며 초점 평면이 샘플에 위치하도록 조정한다. 이때 레이저 포인트가 3번 나타났다 사라지는 데, 3번째 레이저 포인트가 생겼을 때가 올바르게 초점이 형성된 상태이다. 샘플을 로딩할 때와 3번째 레이저 포인트가 생겼을 때 대물렌즈와 샘플 간의 충돌을 유의한다.

위 과정을 모두 마쳤다면 이제 Optical tweezers를 사용한 실험을 진행할 수 있다.

### D. Manipulating a Dairy Cream Particle in a Cream/Water Emulsion

증류수에 원유를 혼합시킨 용액을 Optical tweezers로 조작해본다. 특히 레이저를 켜고 끌 때, 크림 입자를 포획한 상태에서 샘플을 위아래로 움직일 때 우유 콜로이드가 어떻게 되는지 확인해본다.

### E. Measuring the holding force of the optical tweezers

본 실험에 앞서 브라운 운동하는 입자의 Mean squared displacement를 계산하여 유효 점성( $\eta$ )을 다음과 같이 구하여야 한다.

- (i) Silica beads를 trapping 하는 실험과 같은 상황에서 Metric scaling을 진행한다. draw 기능을 이용하여 원을 화면 양단에 그려 놓은 후 고정된 bead를 positioning stage 를 움직여가며 그려 놓은 원 한 쪽에서 다른 쪽으로 이동시킨다. 후에 전후 좌표를 기록하여 그 거리를 계산한다.

- (ii) 슬라이드에 온도 센서를 부착한 후 온도를 측정한다.(측정값 : 294K) 분석 시 슬라이드가 샘플과 열평형을 이루고 있다고 가정한다.
- (iii) 흐름이 없는 샘플을 만든 후 여러 입자에 대해 브라운 운동을 ThorCam 기능을 이용하여 녹화한다. 이후 트래커 프로그램을 사용하여 변위 데이터를 수집한다.
- (iv) 데이터를 회귀분석하여 유효 점성( $\eta$ )을 구한다.

이후 Laser의 전류를 30~80mA 사이 8개 값에 대해 stage를 움직여가며 입자를 trapping 할 수 있는 최대 속력을 구하고 위에서 구한 유효 점성 값과 Eq. 6를 사용하여 maximum trapping force를 구한다.

### 3. Results

#### A. Manipulating a Dairy Cream Particle in a Cream/Water Emulsion

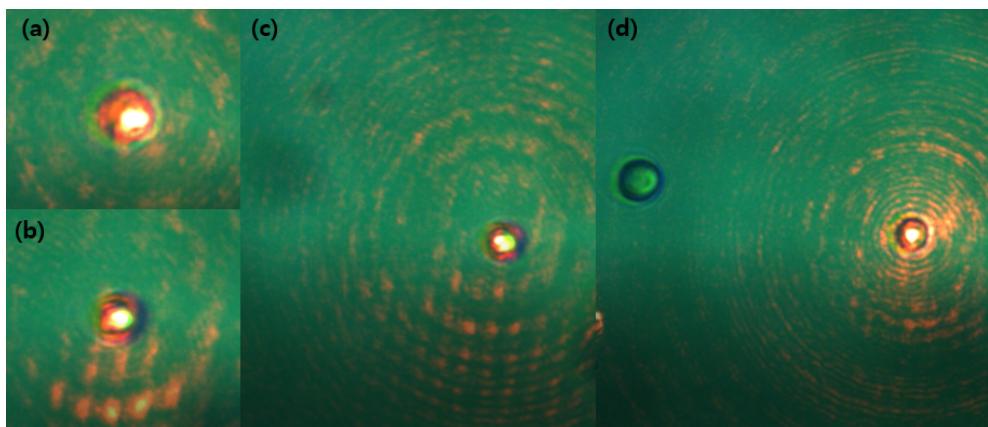


Figure 4: (a)레이저를 칸 직후, (b)레이저에 Cream particle이 포획된 상태 (c),(d)Cream particle을 포획한 후 스테이지를 위아래로 움직인 상태

Fig. 4의 (a), (b)에서 Cream particle이 Optical tweezers에 의해 z 방향 힘을 받아 focal plane 상으로 끌려 내려오며 크기가 작아지는 모습을 확인할 수 있으며 (c), (d)에서 스테이지를 z 방향으로 움직였음에도 Cream particle은 focal plane에 고정되어있어 크기가 변하지 않고 focal plane의 위치가 변함에 따라 보이지 않던 particle이 (d)의 왼쪽에 보이는 상황이다. 이를 통해 Optical tweezers의 z 방향 trapping force가 존재함을 확인할 수 있다.

### B. Measuring the holding force of the optical tweezers

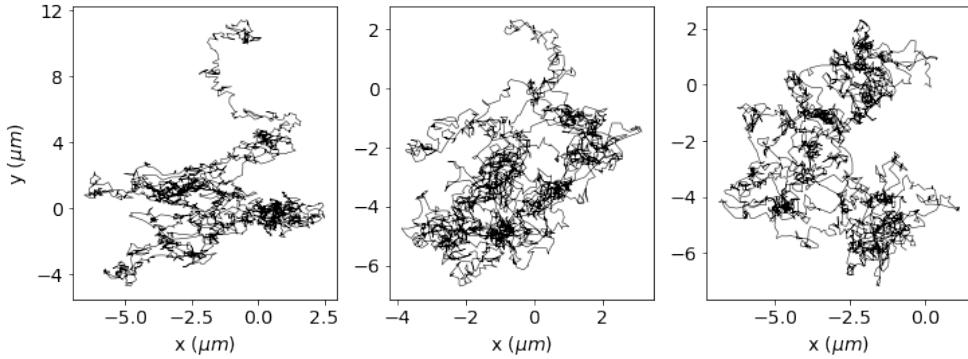


Figure 5:  $d_{beads}=3 \mu m$ 인 bead 3개의 브라운 운동 궤적

실제 데이터에서 Eq. 5를 활용하면 선형 경향성을 보기기에 쉽지 않다. 따라서 이를 다시 시간과 입자에 대해 평균 내어 아래의 식을 사용한다. 이때, M은 평균한 입자의 수이며 식의 기울기는 Eq. 5 기울기의 절반임을 유의한다.

$$\langle r^2 \rangle(t_n) = \frac{1}{nM} \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^n r_j^2(t_i) \approx \frac{k_B T}{3\pi\eta R} t_n \quad (8)$$

실험을 통해 구한 Eq. 8의  $\langle r^2 \rangle$ 의 불확실도는 실험 과정에서 얻은 불확실도에 더불어 Jackknife resampling method를 사용하여 추정하였다. 회귀직선의 기울기의 불확실도는 이론적으로  $\sigma_{A_i} = \sqrt{\sum_j \left( \frac{\partial A_i}{\partial Y_j} \right)^2 \sigma_{Y_j}^2}$ 을 따르며 브라운 운동의 경우 데이터의 불확실도가 회귀 불확실도에 비해 크므로 이 또한 고려하여  $\sigma_{Y_j}$ 를 계산하였다.[2] 다음은 각각의 silica beads에 대한 브라운 운동 Mean squared displacement와 레이저 전류에 따른 trapping 이 가능한 최대 유속(스테이지의 속도) 데이터이다.

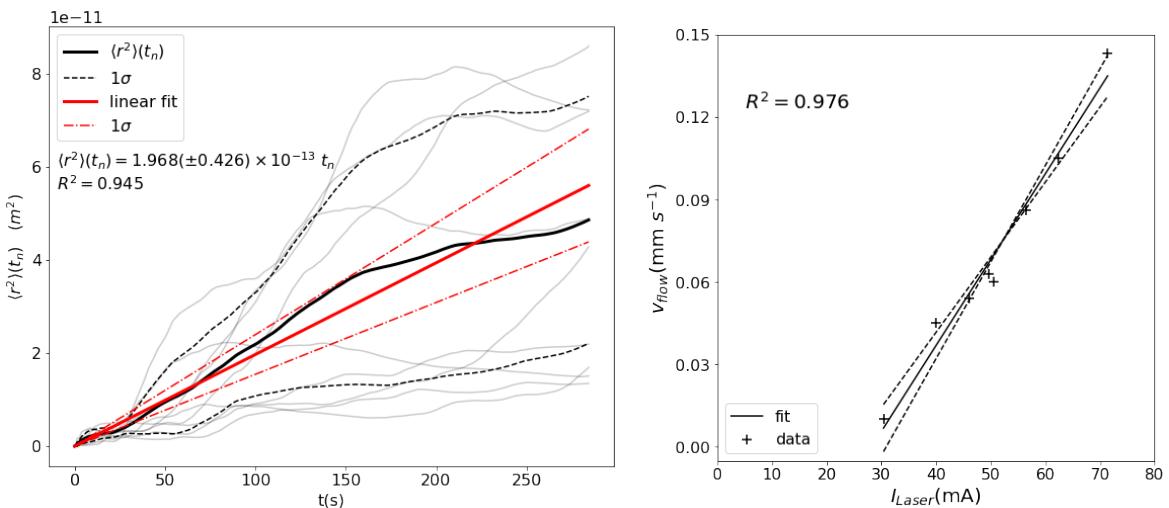


Figure 6:  $d_{bead}=3 \mu m$ ,  $v_{flow} = -8.811(\pm 1.023) \times 10^{-2} + 3.123 (\pm 0.196) \times 10^{-3} I_{Laser}$

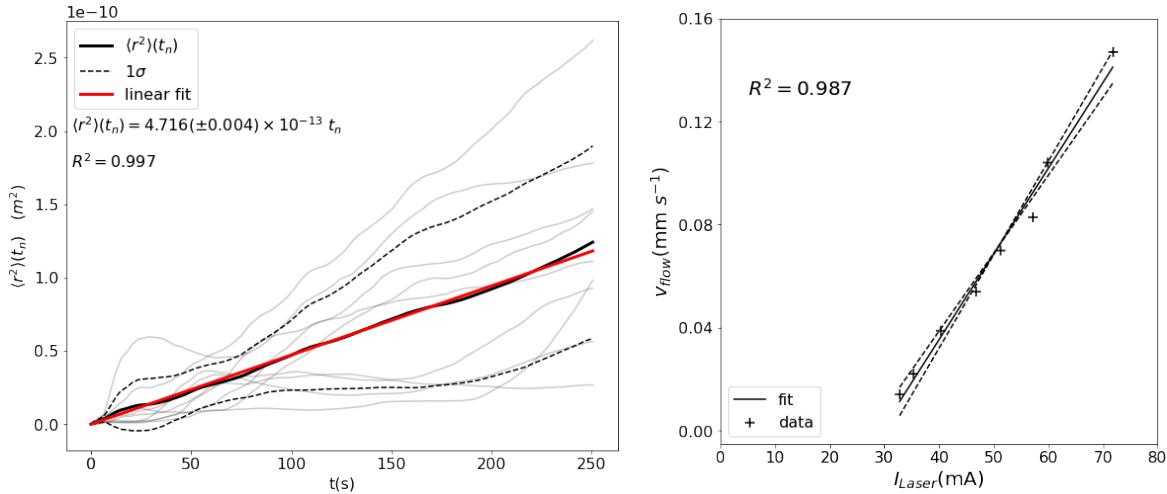


Figure 7:  $d_{bead}=2 \mu m$ ,  $v_{flow} = -9.772(\pm 0.077) \times 10^{-2} + 3.326 (\pm 0.151) \times 10^{-3} I_{Laser}$

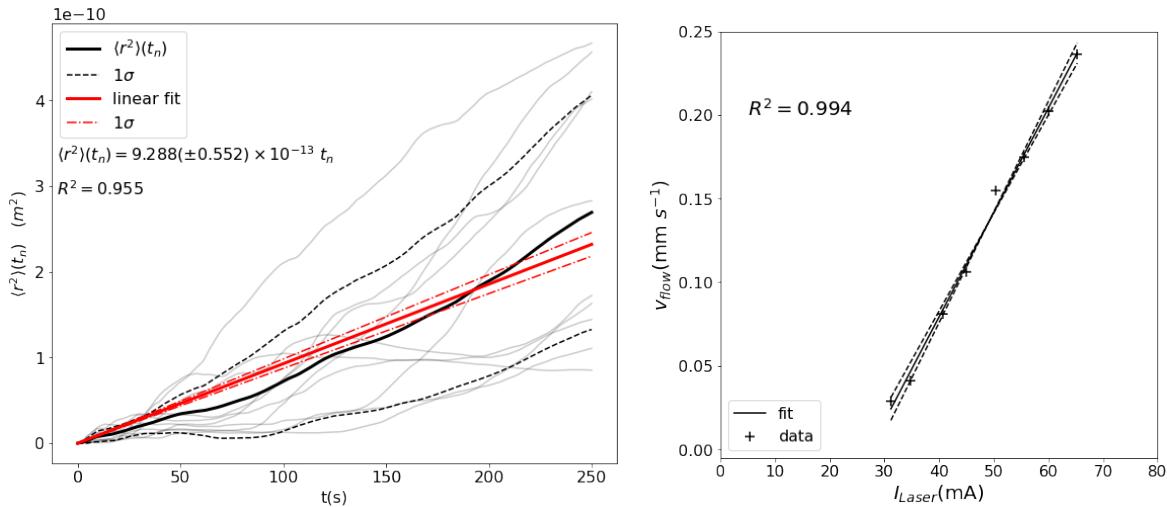


Figure 8:  $d_{bead}=1 \mu m$ ,  $v_{flow} = -1.707(\pm 0.093) \times 10^{-1} + 6.245 (\pm 0.189) \times 10^{-3} I_{Laser}$

위 그림의 브라운 운동 데이터에서 배경의 불투명한 데이터는 각 입자에 대해 시간 평균한 mean squared displacement이다. Fig. 7의 왼쪽 그림의 경우 linear fit 회귀선의 불확실도가 매우 작아 상한과 하한을 표기하지 않았다. 회귀식의 경우  $v_{flow}$ 의 단위는  $mm/s$ ,  $I_{Laser}$ 의 단위는  $mA$ 이다.

#### 4. Discussion

##### A. drift velocity

Results 절에서 사용한 모든 브라운 운동 결과 데이터는 drift velocity를 0으로 두고 산정하였다. 일반적으로 drift velocity는 0이 아니지만, 통계적으로 drift velocity가 존재한다고 할 수 없음을 검증한 후 사용한 결과이다. 일반적으로 브라운 운동의  $\Delta x$ 는 어떤 분포를 따르는지 알 수 없지만, 본 실험에서 사용한 FPS 10, 즉 0.1초 동안 입자의 좌표 변화 ( $x$

혹은  $\Delta y$ )는 Central Limit Theorem을 사용하여 정규분포로 근사할 수 있다. 실제로 이 값들이 정규분포를 따르는지 알기 위해서 정규성 검정인 Shapiro-Wilk normality test를 진행하였고 각 bead 지름에 대한  $\Delta x$ 와  $\Delta y$ 의 결과를 아래 표에 나타내었다. 또한 변위가 정규성을 따름을 일정 신뢰수준에서 검정하고 난 후 귀무가설  $< \Delta x, \Delta y$ 의 평균이 0이다>에 대하여 양측검정을 시행하였다.

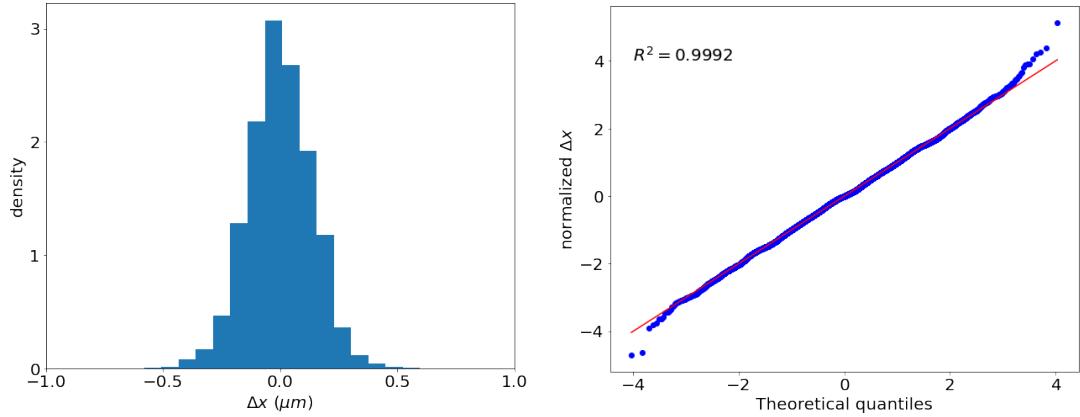


Figure 9:  $d_{bead}=3 \mu m$  인 bead의 브라운 운동  $\Delta x$ 에 대한 히스토그램과 QQplot

Diameter ( $\mu m$ )	coord.	mean ( $\mu m$ )	$\sigma$ ( $\mu m$ )	S.W. test p-value	Sample mean t-test
3	$\Delta x$	$4.975 \times 10^{-3}$	0.1301	0.2770	0.9999
3	$\Delta y$	$-1.099 \times 10^{-2}$	0.1371	0.1019	0.9936
2	$\Delta x$	$8.485 \times 10^{-4}$	0.3085	0.1161	0.9978
2	$\Delta y$	$7.608 \times 10^{-4}$	0.2486	0.6072	0.9975
1	$\Delta x$	$1.186 \times 10^{-3}$	0.3758	0.0994	0.9975
1	$\Delta y$	$6.070 \times 10^{-4}$	0.4277	0.1385	0.9989

Table 1: bead의 diameter와 coord.에 따른 평균과 표준편차, Shapiro-Wilk test p-value, Sample mean test p-value

Tab. 1에 따라 유의수준 0.05에서 0.1초당 각 좌표의 변화를 가우스 분포로 근사할 수 있으며, drift velocity가 0이라는 귀무가설을 기각할 수 없다. 따라서 본 실험 분석에서는 drift velocity를 0으로 두었다.

### B. viscosity and trapping force

Result 절의 그래프에서 약 30mA 보다 큰 구간의 경우 Laser current와  $v_{flow}$ 가 선형인 구간이 존재하며, 이때  $v_{flow}$ 는 식 Eq. 6에서 drag force에 비례하고, 식 Eq. 2에서 maximum trapping force가 beam power에 비례하므로 본 실험에 사용한 장비는 Laser current와 beam power가 선형인 시스템이다. 또한 Laser current가 존재하지만, 입자가 trapping이 안되는 구간이 존재한다. 회귀 결과와 식 Eq. 6, Eq. 8를 사용하여 각 bead에 대해 유효 점성과  $I_{Laser} = 60mA$ 일 때 trapping force를 측정한 값은 다음과 같다.

Diameter ( $\mu m$ )	$I_{threshold}(mA)$	$\eta(mPa \cdot s)$	maximum trapping force(pN)
3	$28.213 \pm 3.724$	$1.459 \pm 0.316$	$4.095 \pm 1.095$
2	$29.381 \pm 1.354$	$0.913 \pm 0.001$	$1.753 \pm 0.157$
1	$27.334 \pm 1.704$	$0.927 \pm 0.055$	$1.783 \pm 0.166$

Table 2: bead의 diameter에 따른 trapping  $I_{threshold}$ , 유효 점성, maximum trapping force

Tab. 2에 계산한 유효 점성은 유의수준 0.05에서 모두 같다. 위 결과를 matlab의 Optical Tweezers Toolbox[5]를 사용하여 분석해보자.  $R = 1.5\mu m$ 이고 polystyrene의 경우  $n_{bead} = 1.59$ ,  $\lambda = 658nm$  임을 사용하였을 때, 레이저가 gaussian TEM00 mode의 경우  $NA = \frac{\lambda}{\pi w_0} = 0.095 \pm 0.005$ 이다. 하지만 이 경우 z방향 trap이 존재하지 않는다.(SM에 첨부함) 실험을 통해 z방향 trap이 존재함을 확인하였는데, 이는 Laser의 출력과 전류의 비를 1이라고 가정하였기 때문에 생긴 모순이며, 이를 통해 Laser의 출력과 전류의 비가 정확히 1은 아니며 trapping 가능한 전류에 하한값이 존재하는 이유도 브라운 운동에 더불어 Laser 출력과 전류 사이에 일정 threshold가 존재하는 데 기인한 것으로 추측할 수 있다.

### C. viscosity estimation

위의 과정을 통해 유효 점성을 구할 때, 각 데이터가 대칭적인 분포를 가질 것이라 가정한 후 가중평균화하였다. 앞에서 각  $\Delta x$ 가 근사적으로 정규분포를 따름을 확인하였으므로  $(\Delta x)^2$ 이 카이제곱 분포를 따름을 통해 더 낮은 불확실도로 유효 점성을 추정할 수 있다.[4]

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle = \frac{k_B T}{3\pi\eta R} \Delta t \quad (9)$$

$$\frac{(n-1)\widehat{(\Delta x)^2}}{\langle (\Delta x)^2 \rangle} \sim \chi(n-1) \approx N(n-1, 2n-2) \quad (10)$$

이를 이용하여 추정한 지름  $3\mu m$  실험에서의 유효 점성은  $\eta = 1.607 \pm 0.010 \text{ mPa s}$  이다.

### D. error analysis

본 실험의 오차 요인으로 motor의 backlash오차, scaling 중 생긴 오차, dropped pct이 0이 아니어서 생긴 time interval 오차, focal plane과 스테이지가 완전히 평행하지 않아 스테이지를 움직였을 때 scaling이 변하여 생기는 오차 등이 있으며 이는 모두 추정치의 불확실도 계산에 고려하였다. 추가적으로 Fig. 9의 원쪽 히스토그램을 bins를 많이 늘렸을 때 히스토그램에 fringe pattern이 나타나는데, 이를 통해 digitization error가 추가되었을 것이라 추측할 수 있다.(SM에 첨부) 이외에도 외부 진동에 의해 입자가 흔들리는 경우 등이 있으나 무시가능한 정도의 오차라 판단하여 분석에 추가적으로 고려하지는 않았다.

## References

- [1] S. H. Shin, Department of Physics and Astronomy, *Intermediate physics experiment, Optical tweezers manual*, 2021
- [2] S. Kim, Department of Physics and Astronomy, *Error Analysis for Experimental Physicists*, 1st ed., 2021.
- [3] G. Falkovich, CAMBRIDGE, *Fluid Mechanics*, 2011.
- [4] 서울대학교 자연과학대학 통계학과, 영지문화사, «일반통계학», 개정판, 2019(1996).
- [5] I. Lenton, *Optical Tweezers Toolbox(version 1)*, github, <<https://github.com/ilent2/ott>>, 2022.  
5. 19.

# 중급물리실험 1 : 혼돈 진자

## 최영환

물리학과, 원자핵공학과, 서울대학교, 서울 08826, 대한민국

E-mail: cyhwan98@snu.ac.kr

**Abstract.** 혼돈진자는 카오스 현상을 보일 것으로 예측되는 동역학 계이다. 이 보고서에서는 감쇠가 있는 혼돈진자 계의 동역학을 분석하고 감쇠를 적절히 제거함으로써 주어지지 않은 값인 혼돈진자의 퍼텐셜, 즉 복원력을 특정할 수 있는 방법이 제시되었다. 비선형 회귀를 통하여 진자의 감쇠 계수들을 구하였고, 자석과 원판 사이의 거리를 조절해가며 감쇠 계수와 어떤 관계가 있는지를 탐구하였다. 또한 진자는 안정상(Stable), 준안정상(Metastable), 이중가둠상(Doubly Trapped)을 가지는데, 진자가 가지는 에너지를 이용하여 이를 상을 정량적으로 구별할 수 있는 방법과, 각변위-각속도 위상공간 상에 표시되는 진자의 에너지가 얼마인지 특정할 수 있는 방법이 제시되었다. 강제 진동자와 실 훌더 사이의 길이가 변하여 퍼텐셜의 모양이 바뀌는 경우에도 동일한 방법으로 변경된 퍼텐셜을 구하는 방법이 제시되었다. 위상공간을 이용하여 진자가 가지는 에너지와 엔트로피를 대응할 수 있었으며, 그 결과 시간에 따른 엔트로피와 온도의 변화를 확인할 수 있었다. 나아가 혼돈진자 역학계에서 온도와 에너지를 정의하여 계의 열용량을 구할 수 있었고, 그 값이 안정상 또는 준안정상일 경우 발산하는 지점과 음의 값을 가지는 지점이 있음을 확인하였다. 임계온도 근처에서 열용량과 온도를 비선형 회귀근사 함으로써 임계지수  $\alpha$ 를 구하였으며, 이 값이 기존 란다우 평균장 이론과 비교하였다. 서로 다른 온도에 대해 계가 가질 수 있는 자유에너지와 정량적으로 비교해 보았다. 계에 강제구동력이 가해졌을 때 계의 진폭에 대해 분석하였으며, 대략 모터 전압 3.5V에서 특이점을 가지고 5.5V에서 공명점을 가지는 것을 확인하였다. 마지막으로, 카오스 현상을 보이는 듯한 계를 정량적, 정성적으로 분석함으로써 계가 관측 시간 동안에는 카오스 현상을 보인다는 것을 확인할 수 있었다.

(Dated: 5 May 2022)

## 1. Introduction

### 1.1. 혼돈 진자의 동역학

이상적인 진자는 조화 진동자로 근사될 수 있다. 조화 진동자는 평형점으로부터 질량  $m$ 을 가지는 점이 평형점으로부터 변위  $x$ 만큼 이동하였을 때, 변위의 반대 방향으로 변위에 비례하는 복원력을 받는 계를 말한다. 시간에 대한 외력  $F(t)$ 가 가해질 때 일반적으로 조화 진동자의 운동 방정식은 식 Eq. (1)으로 주어진다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2x = \frac{F(t)}{m} \quad (1)$$

이상적인 경우와는 달리 현실에서는 물체의 운동방향의 반대 방향으로 항력이 작용하게 된다. 항력은 일반적으로 물체의 속도가 증가함에 따라 증가하며, 그 관계는 경험적인 수식으로 얻어질 수 있다. 항력은 물체의 속도가 작을 때 일반적으로 Eq. (2)로 주어지고, 힘의 크기가 속도에 비례함을 알 수 있다 [1].

$$F_D = \frac{1}{2}\rho v^2 C_D A = \gamma \frac{dx}{dt} \quad (2)$$

즉 진자에 항력을 고려하게 되면 진자의 운동방향의 반대 방향으로 비복원력인 항력을 받게 되므로 시간이 지남에 따라 에너지를 잃게 된다. 이러한 계를 감쇠 진동자라고 하며, 운동방정식은 Eq. (3)으로 주어진다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad (3)$$

만약 계수  $k, \gamma$ 와 진동자의 질량  $m$ , 시간에 따른 외력  $F(t)$ 와 입자의 초기 위치와 속도  $x_0, v_0$ 를 알고 있고, 외력  $F(t)$ 에 대한 특수해를 알고 있다면 방정식의 해, 즉 입자의 운동을 해석적으로 구할 수 있다. 그러나 만약 항력이 속도에 비례하지 않고 속도의  $n$ 승에 비례하는 경우 일반적인 해석해가 존재하지 않는다. 이때 입자의 운동방정식은 Eq. (4)으로 주어지며 수치적인 방법을 이용해 해를 구하여야 한다.

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\gamma}{m} |\dot{x}|^{n-1} \dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F(t)}{m} \quad (4)$$

실험에 사용되는 진자는 병진운동을 하지 않고 회전운동을 한다. 이 경우 입자의 질량  $m$ 은 관성모멘트  $I$ , 변위  $x$ 는 각변위  $\theta$ , 외력  $F(t)$ 는 토크  $\tau(t)$ 로 쓸 수 있고, 복원력에 해당하는  $-kx$ 는 복원 토크  $-k\theta$ 로, 항력에 해당하는  $-\gamma(\frac{dx}{dt})^n$ 은 감쇠 항  $-\gamma\dot{\theta}^n$ 으로 쓸 수 있으므로 운동방정식은 Eq. (5)으로 쓸 수 있다.

$$\ddot{\theta} + \frac{\gamma}{I} |\dot{\theta}|^{n-1} \dot{\theta} + \frac{k}{I} \theta = \frac{\tau(t)}{I} \quad (5)$$

본 실험에서 사용되는 진자의 모식도는 Figure 1과 같다. 외부 구동력이  $x_1$ 의 사인형 진동으로

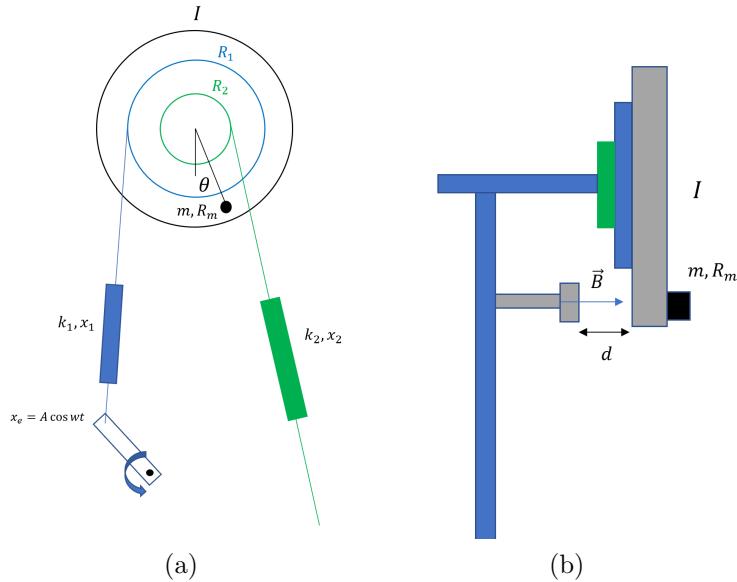


Figure 1: 실험 장치의 모식도. (a) 실험 장치의 정면도에 따르면 원판형 진자에 2개의 용수철  $k_1, k_2$ 와  $A \cos \omega t$ 의 변위를 주는 모터가 실로 연결되어 있다. 질량  $m$ 의 추는 원판에 고정되어 같이 회전한다. (b) 장치의 측면도. 원판형 진자의 뒤에서 거리  $d$ 만큼 떨어진 자석이 자기장  $\vec{B}$ 를 가하여 진자를 감쇠시킨다.

주어지는 경우 복원 토크는 Eq. (6)와 같고, 감쇠 항은 Eq. (7)와 같다 할 수 있다.

$$\tau = -mgR_m \sin(\theta) - k_2(x_{2,0} + R_2\theta) + k_1(x_{1,0} + A \cos(\omega t) - R_1\theta) \quad (6)$$

$$\tau_D = -\gamma |\dot{\theta}|^{n-1} \dot{\theta} \quad (7)$$

그러므로 운동 방정식은 Eq. (8)으로 주어진다.

$$(I + mR_m^2)\ddot{\theta} = \tau + \tau_D = -mgR_m \sin \theta - \gamma|\dot{\theta}^{n-1}|\dot{\theta} - k_2(x_{2,0} + R_2\theta) + k_1(x_{1,0} - R_1\theta + A \cos wt) \quad (8)$$

이때 복원력에 의한 복원 토크는 변위각  $\theta$ 에만 의존하는 퍼텐셜  $V(\theta)$ 을 이용하여 Eq. (9)와 같이 축약하여 쓸 수 있다.

$$(I + mR_m^2)\ddot{\theta} = -\frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta} - \gamma|\dot{\theta}^{n-1}|\dot{\theta} \quad (9)$$

$V$ 의  $\theta$ 에 대한 미분이  $\theta$ 에 대한 일차식과 삼각함수의 덧셈꼴로 나타나므로, 실제 감쇠를 분석할 때 퍼텐셜  $V(\theta)$ 로 추정될 함수와 파라미터들은 Eq. (10)와 같이 쓸 수 있다.

$$V(\theta) = a_1\theta^2 + a_2\theta + a_3 + a_4 \cos(\theta + b_5) = b_1 + b_2(\theta - b_3)^2 + b_4 \cos(\theta) + b_5 \sin(\theta) \quad (10)$$

실제 실험에서는 감쇠를 조절하기 위해 Figure 1 (b)처럼 자석을 금속 원판 근처에 거리  $d$ 만큼 떨어뜨려 놓는다. 자석 주변 불균일한 자기장 근처에서 금속 물체가 운동하면 금속 물체의 입장에서는 통과하는 자속이 변하는 것처럼 느껴지고, 유도 기전력이 발생하여 금속 내 유도 전류가 흐르게 된다. 이때 발생하는 유도 기전력의 크기는 자속 변화의 속도에 비례하고, 유도 전류는 유도 기전력에 비례한다. 즉 원판의 회전속도와 원판에 유도되는 전류의 세기는 비례할 것이다. 전류가 자기장 속에서 받는 힘은 로렌츠 힘인데, 로렌츠 힘의 크기는 자기장의 세기와 전류의 곱에 비례하므로, 원판의 회전속도와 원판이 유도전류에 의해 받는 힘은 비례할 것으로 예측할 수 있다. 즉, 감쇠력이 온전히 자석에 의해서만 일어난다면  $n$ 은 1에 가까울 것으로 예측할 수 있다. [2] 그러나 실제 실험에서는 감쇠가 온전히 자석에 의해서만 일어나는 것은 아니다. 공기와의 마찰 또는 원판과 베어링 사이의 마찰 등 여러가지 다양한 감쇠 현상들이 나타날 수 있고 그러한 경우에는 감쇠력의 크기가 각속도에 정비례한다는 보장이 없으므로  $n$ 이 1에서 벗어날 수 있을 것으로 예측된다. 자석과 원판 사이의 거리  $d$ 를 조절함으로써 로렌츠 힘에 의한 감쇠의 세기를 조절할 수 있으므로, 로렌츠 힘이 감쇠의 지배적인 성분이 된다면  $n$ 은 1에 근접할 것으로 예상할 수 있다. 실제 운동에서 나타나는 감쇠를 기술하는 수식 Eq. (4)의 계수(감쇠계수)를 파악하기 위해서는 실제 운동을 측정하고 운동 방정식 Eq. (8)에 대입하여  $\gamma$ 와  $n$ 을 추정하는 방법이 있다. 그러나 이 방법은 올바른 해에 수렴시키기 매우 어렵기 때문에 실제 감쇠를 분석하는데 무리가 있다. 운동 방정식 대신 에너지를 사용하면 비교적 쉽게 감쇠를 추정할 수 있다. 감쇠는 비복원력이므로 외부에서 에너지 공급이 없다면 감쇠를 통해 감소한 역학적 에너지는 다시 계의 역학적 에너지로 변환되지 않는다. 즉 오직 감쇠를 통해 계의 역학적 에너지가 감소하고 있는 상황이라면 감쇠된 에너지와 남은 역학적 에너지의 합은 일정하다고 볼 수 있고, 이는 Eq. (11)로 표현될 수 있다.

$$U_0 = U + \int_0^t \tau_D d\theta = K + V - \int_0^t \tau_D \dot{\theta} dt = \frac{1}{2}(I + mR_m^2)\dot{\theta}^2 + V(\theta) + \gamma \int_0^t |\dot{\theta}|^{n+1} dt \quad (11)$$

만약 감쇠가 없다면, 즉  $\gamma = 0$  이면  $-\dot{\theta}^2$ 을  $\theta$ 에 대해 그리는 것만으로도 퍼텐셜의 개형을 알 수 있다. 그러나 감쇠항 때문에 실제 측정 데이터로  $-\dot{\theta}^2$ 를 그려보면 진동이 진행됨에 따라 점차 퍼텐셜이 증가하는 것 같은 모양을 보여준다. 이 증가하는 모양의 퍼텐셜에서 적절한  $\gamma$ 와  $n$  값을 선택하여 감쇠를 보정해준다면, 감쇠항이 Eq. (7)로 주어진다는 가정이 맞는 한 모든 퍼텐셜 커브가 하나의 곡선으로 수렴할 것이고, 그 곡선이 감쇠를 제거한 계의 퍼텐셜  $V(\theta)$ 라 할 수 있다. 감쇠를 제거하여 퍼텐셜  $V(\theta)$ 를 구하는 데에는 비선형 회귀가 사용되었다. (물론 이렇게 해도 수렴하지 않을 수 있다. 애초에 감쇠가 하나의 term으로 나타나지 않을 것임) - 이거는 discussion에 이 실험에서는 관성 모멘트  $I$ 와 추의 질량  $m$ , 용수철 상수  $k_1, k_2$ 의 값을 모르기 때문에 에너지의 단위가 변형될 것이다. 운동에너지  $K$ 는  $I + mR_m^2$ 와  $\dot{\theta}^2$ 의 곱에 비례하는데,  $I + mR_m^2$ 의

값을 모르므로 운동에너지는  $\dot{\theta}^2$ 으로 쓸 것이다. 이 경우 에너지의 단위는  $[J]$ 이 아닌  $[rad^2/s^2]$ , 즉  $[s^{-2}]$ 으로 변형되며 이를 수식으로 나타내면 Eq. (12)으로 쓸 수 있다.

$$U'_0 = K' + V' - \int_0^t \tau'_D \dot{\theta} dt = \dot{\theta}^2 + \frac{2}{1 + mR_m^2} V(\theta) + \frac{2\gamma}{1 + mR_m^2} \int_0^t |\dot{\theta}|^{n+1} dt = \dot{\theta}^2 + V'(\theta) + \gamma' \int_0^t |\dot{\theta}|^{n+1} dt \quad (12)$$

추후 이 보고서에서 논의될 퍼텐셜  $V$ 와 감쇠 상수  $\gamma$ 는 Eq. (12)에 쓰인  $V'$ 과  $\gamma'$ 를 말하는 것으로, 실제 물리적 단위가 아닌 변형된 단위를 사용할 것이다. 실의 길이에 따라 - 외부 구동력

## 1.2. 역학계의 열역학적 기술

1927년 Heisenberg의 불확정성 원리가 발표되었다. 불확정성 원리란 입자의 운동량과 위치를 동시에 측정한 경우 두 정확도의 곱에는 상한이 있다는 것이다. [3]

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (13)$$

입자가 운동하고 있는 경우 입자를 위치 - 운동량 위상공간에 있는 점으로 나타낼 수 있는데, 그 점은 위상공간 상 크기가 0인 점이 아니라 불확정성 원리에 의하여 크기를 가지는 미시상태 (Microstate)라는 것이다. 불확정성 원리에 의해 이 미시상태의 크기는 대략  $\hbar$ 로 고려된다. 어떠한 계가 입자수와 에너지가 보존될 경우, 즉 평형에 도달한 고립계일 경우 통계역학의 기본 가정에 의하여 모든 접근 가능한 미시상태는 동일한 확률로 관찰된다. 이 계가 도달 가능한 미시상태의 총 갯수를  $\Omega$ 라고 한다면, 이 계의 엔트로피는 볼츠만 엔트로피 공식 (Boltzmann's Entropy Formula) Eq. (14)에 의해 주어지고 이를 미세 정준 엔트로피 (Microcanonical Entropy)라 한다.

$$S = k_B \ln(\Omega) \quad (14)$$

진자의 움직임을 변위-운동량 위상공간 상에 표현한 그림은 Figure 2와 같다. 진자가 감쇠 없

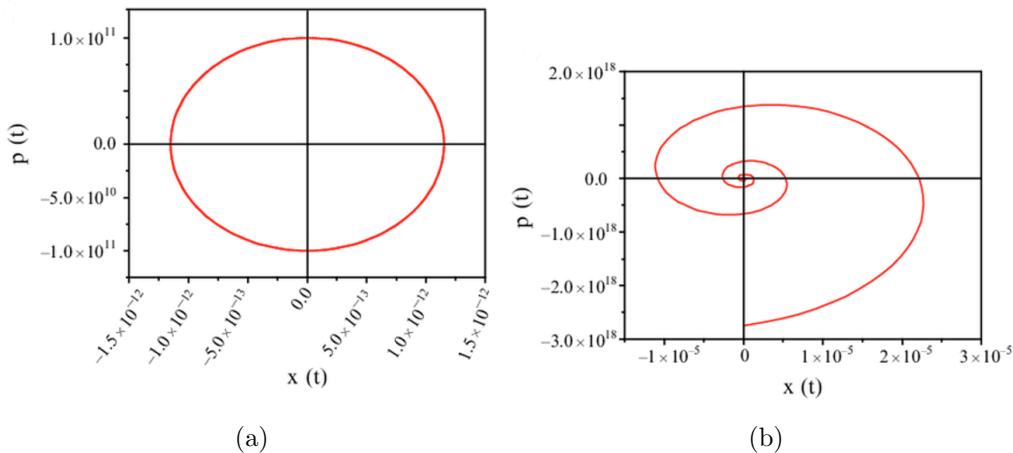


Figure 2: 위상공간 상의 진자의 궤적.  $x$ 축은 변위,  $y$ 축은 운동량을 나타낸다. (a) 진자에 감쇠가 없는 경우 에너지 보존 법칙에 의해 운동량과 변위가 타원의 방정식을 만족하게 되어 타원형 자취를 그리게 된다. (b) 진자에 감쇠가 작용한 경우 에너지를 잃으면서 변위와 운동량이 점유할 수 있는 범위가 줄어든다. 충분한 시간이 흐르면 궤적은 원점으로 수렴한다.

이 운동한다고 가정하자. 이때 위상공간 상 진자의 궤적은 Figure 2와 같이 주어진다. 진자가 위상공간 상에 점유하는 미시 상태의 갯수는, 진자가 위상공간의 한 영역을 점유하므로 해당 영역의 면적을 미시상태의 크기로 나눠준 것과 같다. 그러나 본 실험에서는 진자가 위상공간의

영역을 얼마나 점유하는지 측정할 방법이 없으므로 엄밀한 의미의 미세 정준 엔트로피를 계산할 수 없다. 그러나 진자가 위상공간 상 점유하는 영역과 진자가 한 주기동안 그리는 위상공간을 감싸는 궤적의 영역이 동일한 방식으로 거동한다는, 즉 비례할 것이라는 가정을 통해 역학계의 주기 평균 미세 정준 엔트로피를 구할 수 있다. 한 주기동안 그리는 궤적의 넓이를  $A$ 라 한다면 현 실험에서 쓰이는 변형된 주기평균 엔트로피는 Eq. (15)와 같이 쓸 수 있다.

$$S' = \ln(A) \quad (15)$$

엔트로피는 볼츠만 상수와 동일한 차원인  $[J/K]$ 를 가지지만 본 보고서에서 사용되는 변형된 엔트로피는 무차원량이다. 엔트로피를 통해 역학계의 온도를 정의할 수 있다. 온도의 열역학적 정의는 Eq. (16)로 주어진다.

$$T = \frac{\partial E}{\partial S} \quad (16)$$

감쇠가 일어나지 않는 단순 조화 진동자와 같은 역학계는 에너지 보존이 성립하므로 에너지  $E$ 가 변하지 않고, 온도를 정의할 수 없다. 그러한 계는 에너지와 같은 보존량이 존재하고, 초기 정보를 잃어버리지 않기 때문에 적분가능계 (Integrable System)라 불린다. 이 경우 열역학이나 통계역학적 접근 방식을 취할 수 없다. 그러나 Figure 2 (b)와 같이 감쇠가 일어나는 경우 에너지 보존이 성립하지 않고, 에너지와 엔트로피가 시간에 대해 변하게 된다. 따라서 Eq. (16)에 의해 역학계의 온도를 정의할 수 있다. 일반적으로 감쇠가 있는 진자의 온도는 시간이 지날수록 감소하며, 변형된 엔트로피를 사용하는 경우 평형점에 도달하게 되면 온도는 0에 수렴한다.

### 1.3. 란다우 상전이 이론

본 실험에 사용되는 진자는 외부 구동력이 없는 경우 계속해서 에너지를 잃는다. 진자의 에너지가 안정 평형점과 준안정 평형점 사이에 존재하는 퍼텐셜의 국소 최댓값보다 큰 경우 진자는 초기조건에 따라 안정 평형점으로 갈 수도 있고 준안정 평형점으로 갈 수도 있다. 이 상태를 이중 가둠(Doubly Trapped) 상태라 한다. 그러나 진자의 에너지가 퍼텐셜의 국소 최댓값보다 작아진 경우 진자는 안정 평형점 근처의 퍼텐셜이나 준안정 평형점 근처의 퍼텐셜을 점유하게 된다. 안정 평형점 근처의 퍼텐셜에 갇히는 상태를 안정(Stable) 상태라 하고 준안정 평형점 근처의 퍼텐셜에 갇히는 상태를 준안정(Metastable) 상태라 한다. 계가 계속 에너지를 잃기 때문에 외부에서 에너지 공급 없이 두 상태는 서로 전이할 수 없다. 역학계의 온도가 감소하므로, 이중가둠 상에서 안정 또는 준안정 상으로 전이하는 것을 상전이 이론을 통해 설명할 수 있다. 질서 매개변수 (Order Parameter)는 상전이의 시작을 표시하는 척도이다. 무질서 상에서 질서 상으로 전이할 경우 질서 매개변수는 0에서 0이 아닌 값으로 변화한다. 시스템이 임계온도  $T_c$  이상에서 사라지는 질서 매개변수  $\eta$ 로 특징지어지는 두개의 상을 가진다고 가정하자. 이때 임계온도 근처에서 비열과 질서 매개변수는 Eq. (17), Eq. (18)와 같이 표현된다.

$$c \propto |T - T_c|^{-\alpha} \quad (17)$$

$$\eta \propto |T - T_c|^{\beta} \quad (18)$$

위  $\alpha$ ,  $\beta$ 와 같은 값을 임계지수(Critical Exponent)라 한다. 소련의 물리학자 레프 란다우 (Lev Landau)는 란다우 자유 에너지 (Landau Free Energy)의 도입을 통해 상전이를 설명하였다. 란다우 자유 에너지는 계의 제어변수(온도, 압력 등)를  $K$ 라 했을 때 Eq. (19)와 같이 멱급수 형태로 주어진다.

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n([K]) \phi^n \quad (19)$$

란다우 에너지는 상전이점에 최소값을 가진다. 계가 질서 매개변수의 부호가 바뀌는 것에 대해 대칭성을 가지고 있고 질서 매개변수와 결합한(Conjugate) 외부장이 존재한다고 가정하자. 질서 매개변수가 상전이점 근처에서 매우 작다는 것을 이용하면 Eq. (20)와 같이 쓸 수 있다. [4]

$$F = -h\phi + a_2\tau\phi^2 + a_4\phi^4 \quad (20)$$

이 란다우 자유 에너지  $F$ 의 형태가 동일한 계의 경우 동일한 임계지수를 공유하게 되고, 이들은 Universality Class를 형성한다고 한다. 즉 계의 모든 열역학적 세부사항을 알 필요 없이 임계 현상에 대해 란다우 자유 에너지만을 이용하여 현상학적으로 분석할 수 있다.

#### 1.4. 카오스 이론

1961년 기상학자 Lorenz가 날씨 시뮬레이션을 위해 미분방정식을 수치적인 방법으로 풀던 중 방정식의 결과가 초기조건에 극히 민감하다는 사실을 발견했다. 이를 설명하기 위해 초기 조건이 아주 조금만 다를지라도 그 차이가 연쇄적으로 다른 차이를 발생시켜 결괏값의 큰 차이로 이어진다는 가설이 제기되었고 카오스 이론에 대한 연구가 시작되었다. 현재 카오스 이론에서 카오스로 정의되기 위해서는 Devaney가 제시한 세가지 기준을 만족해야 한다. [5] (1) 초기 조건에 민감할 것, (2) 위상적으로 전이할 것 (Topologically Transitive), (3) 조밀한 주기성 궤도 (Dense Periodic Orbit)을 가질 것. 초기 조건에 민감하다는 것은 극미한 초기조건의 차이가 시간이 지남에 따라 큰 결과로 벌어질 수 있다는 의미이고, 위상적으로 전이해야 한다는 것은 입자가 운동하는 위상공간 상 두 지점을 잡았을 때, 한 지점에서 출발한 입자가 시간이 지나면 다른 지점이 아무리 작더라도 결국 지나친다는 의미이다. 조밀한 주기성 궤도를 가져야 한다는 것은 충분한 시간이 지난 후 위상공간 상 아무리 작은 영역을 잡더라도 그 영역 내 입자의 궤적이 존재한다는 것이다. 닫힌 위상공간에서 (2), (3)번 기준을 만족하면 (1)번은 자동으로 만족하고 혼돈 진자의 위상공간은 진자가 가질 수 있는 각변위와 각속도에 한계가 있으므로 닫힌 위상공간으로 볼 수 있으므로 혼돈 진자가 카오스임을 입증하기 위해서는 기준 (2), (3)을 만족함을 보이면 된다. 그러나 현실적으로 무한한 시간동안 진자의 운동을 측정해 위상공간에 그릴 수 없으므로 충분히 긴 시간동안 진자의 위상공간을 찍고 진자가 위상공간을 충분히 조밀하게 메우면 카오스인 것으로 판단할 수 있다. 위상 공간 외에도 카오스를 보여줄 수 있는 방법으로는 푸앵카레 산포도 (Poincare Plot)이 있다. 시간에 따라 변하는 데이터  $x$ 가 있다고 했을 때 한 축의 인덱스는 기준 시간  $x(t)$ 으로 하고 다른 축은 지연된 시간  $x(t+1)$ 로 정하여 산포도를 그리는 방법이다. 카오틱 거동을 보일 때  $i$  번째 평형점을 지나는 시점을  $T_i$ 라 하자. 이때의 각변위를  $\theta(T_i)$ 라 할 때 그려야 하는 푸앵카레 산포도는  $(\theta(T_i + T_p), \theta(T_{i+1} + T_p))$ 를 찍은 점들이다. 여기서  $T_p$ 는 지연된 시간으로 일반적으로  $\Delta T_i$ 에 비해 매우 작은 값을 이용한다. 만약 카오스 현상을 보이지 않는다면 푸앵카레 산포도는  $y = x$  꼴로 나올 것이나 카오스 현상을 보이는 경우  $y = x$ 에서 벗어나는 모습을 보일 것으로 예상된다.

계에 카오스가 나타났는지 확인할 수 있는 방법은 신호를 고속 푸리에 변환(FFT, Fast Fourier Transform)하여 주파수 성분들의 비율이 어떤지 보는 것이다. 만약 카오스가 나타나지 않는다면 주기를 가진 몇개의 사인파의 합 형태일 것이므로 FFT를 하여도 주파수 공간에서 여러 피크가 나타나지 않을 것이다. 그러므로 FFT 결과 주파수 공간에서 여러 피크들이 보인다면 카오스가 나타난 것으로 생각할 수 있다. 앞서 언급한 방법들 외에 계가 얼마나 카오스에 가까운지 판단하는데 리아푸노프 특성 지수 (Lyapunov characteristic exponent)를 이용할 수 있다. [6] 리아푸노프 지수는 계의 혼돈 거동에 대한 초기 조건의 의존도를 정량적으로 표기해 주므로, 혼돈 진자의 거동이 얼마나 카오스에 가까운지 정량적으로 판단할 수 있다. 약간의 차이가 있는 두개의 초기 상태를 가진 계를 생각하고, 초기 상태를  $x_0, x_0 + \epsilon$ 이라 하자. 이 두개의 초기값으로부터 시작해  $n$ 번 되풀이하여 얻어지는 2개의 결과값  $x_n$  사이의 차이가  $d_n$ 이라 할 때, 리아푸노프 지수  $\lambda$ 는

근사적으로 Eq. (21)으로 표기된다.

$$d_n = \epsilon e^{n\lambda} \quad (21)$$

위 수식에서 출발하여 최종적으로  $n$ 이 무한히 커질 때 리아푸노프 지수는 Eq. (22)로 주어짐이 알려져 있다.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx} \right| \quad (22)$$

리아푸노프 지수  $\lambda$ 가 0보다 크다면 계가 카오스인 것으로 간주할 수 있다.

$$\lambda|_{x_n} = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{f^{(n)}(x + \epsilon) - f^{(n)}}{\epsilon} \right) \quad (23)$$

실제 실험 데이터를 분석할 때는 Eq. (22) 대신 이산 형태의 데이터를 가지고 있으므로 Eq. (23)을 이용하여 분석한다.

## 2. Method

### 2.1. 실험 기본 구성

실험을 위해 PASCO 사의 EX-5523A 장치가 사용되었다. 실험의 기본 설정은 기본적으로 주어진 장치의 구성과 달라지지 않았으며, 장치에 연결된 CAPSTONE 소프트웨어를 통해 EX-5523A 장치의 데이터를 얻고 강제 진동자에 전압을 인가해 사인 형태의 외부 구동력을 걸어줄 수 있다.

### 2.2. 외부 구동력이 없는 경우 진자의 운동

감쇠를 분석하기 위해 강제 진동자의 각도( $\phi$ )를 맨 위로 고정한 후, 진자의 평형점으로부터 시계방향으로  $2\pi$ 보다 조금 덜 회전시킨 후 놓는다. 진자의 평형점으로는 안정 평형점(Stable)과 준안정 평형점(Metastable)이 있는데, 실험은 안정 평형점을 기준으로 진행하였다. 안정 평형점에서 반시계 방향으로  $2\pi$ 만큼 회전시킨다면 퍼텐셜이 너무 커져 회전의 각변위 진폭이  $2\pi$ 를 넘기게 되고 실험 장치의 왼쪽 용수철이 자연길이 이하로 압축되며 실이 느슨해지는 결과를 낳는다. 자연길이 이하로 압축된 스프링은 더이상 흑의 법칙을 만족하지 않고, 또한 장력은 음수가 될 수 없으므로 이 경우 퍼텐셜  $V$ 의 개형이 원래 모양과는 달라지는 결과를 낳는다. 그러므로 왼쪽 용수철의 길이가 항상 자연길이 이상으로 유지될 수 있도록 왼쪽 실의 장력이 항상 존재하는 범위 내에서 모든 실험을 진행하였다. 자석과 원판 사이 거리  $d$ 는 14종류, 각각 안정 평형점에 빠질 때와 준안정 평형점에 빠질 때를 기준으로 28개의 데이터를 얻었다. 상전이 분석을 위하여 자석과 원판 사이 거리  $d$ 를 최대로 설정해 감쇠를 최소화시키고 강제 진동자의 각도 ( $\phi$ )를 변경해 가며 데이터를 얻는다. 진동의 초기 조건은 동일하게 진자의 평형점으로부터 시계방향으로  $2\pi$ 보다 조금 덜 회전시킨 후 놔주었다. 강제 진동자의 각도를 조절하는 것은 장치의 실을 고정시켜주는 부분과 강제 진동자에 실이 연결된 부분 사이의 거리를 기준으로 변경해 주었다. 실의 길이는 100mm부터 155mm까지 5mm씩 변경해가며 12가지 종류에 대해 실험을 진행하였다.

### 2.3. 외부 구동력이 있는 경우 진자의 운동

강제 진동자에 직류 전압을 인가하면 강제 진동자가 해당 전압에 비례하는 각속도로 회전한다. 이는 진자에 사인파 모양의 강제 구동력을 주는 것으로 볼 수 있다. 진자를 안정 평형점에 맞춘 후, 모터에 인가되는 전압을 올려가며 강제 구동력의 진동수를 높여간다. 강제 구동력의 주파수와 진자의 고유 진동수가 가까워지면 진자의 진폭이 매우 커지는데, 이를 공명 현상이라 한다.

즉 강제 구동력의 진동수를 높여가며 공명 진동수를 찾고, 해당 공명 진동수 근처에서 조밀하게 모터 전압을 조절하며 공명 진동수 근처에서 진폭 데이터를 얻었다. 모터의 전압은 2.9 V 부터 3.9 V까지, 그리고 4.9 V부터 6.5 V까지 0.2 V 간격으로 찍었다. 중간 지점인 4.5 V에 대해서도 진폭을 측정하였다. 진자의 움직임을 지배하는 운동방정식의 일반해의 영향을 줄이기 위해 해당 전압으로 맞춘 뒤 10초 이후 일반해가 충분히 감쇠되었다고 판단한 후 측정을 진행하였다. 진폭을 측정하기 위해 각변위가 평형점에 도달하는 지점을 기준으로 주기로 설정한 후 파형을 잘라서 분석하였다. 각 잘린 파형들은 사인파 모양이 아니므로 제일 높은 지점이 진폭이라고 말하기 어려운 부분이 있다. 만약 진동이 사인파 형태인 경우 각변위를 제곱하고 주기 평균을 내주면 진폭의 제곱의 절반임을 확인할 수 있다. 즉 변위의 제곱평균에 2를 곱한 후 그 제곱근을 유효 진폭이라 가정하면, 이는 사인파 형태가 아닌 파동의 파형에도 적용되므로 같은 원리로 주기에 해당하는 각변위를 제곱하고 해당 구간의 주기에 대해 평균을 내준 후 2를 곱한 후 제곱근을 취하면 해당 주기에 대해 유효 진폭을 계산할 수 있다. 이를 이용하면 각 주기별로 유효 진폭을 구할 수 있으므로 유효 진폭의 평균값과 표준편차 값도 구할 수 있다. 혼돈 진자가 카오스 현상을 보이는 것을 확인하기 위하여 강제 진동자에 4.9V의 전압을 걸어주고 약 5분간 위상공간에서 어떻게 진자가 움직이는지 측정한다. 이때 진자가 카오스를 보인다면 위상 공간을 충분히 조밀하게 채울 것으로 기대된다. 즉 위상공간 위 임의의 점에 대하여 진자가 움직였던 궤적이 충분히 가까운 것이다. 리아푸노프 지수를 계산하기 위해서는 진자의 시작 시점 및 강제 진동자의 초기 위치를 동일하게 유지하여 초기조건을 거의 동일하게 일치시킨 후 실험을 진행한다. 초기조건을 거의 동일하게 일치시키더라도 오차가 반드시 존재하기 때문에 그 오차가 초기조건의 미세한 차이인  $\epsilon$  역할을 하게 된다. 마지막으로 카오스 현상을 보일 것으로 예상되는 데이터들로 FFT와 푸앵카레 산포도를 그려 예상대로 나오는지 확인한다.

### 3. Results

#### 3.1. 퍼텐셜 특정

강제 구동력이 없는 경우 감쇠에 대해 분석할 수 있었다. 자석과 원판 사이의 거리를 총 5.00mm 부터 20.20mm까지 14개의 단계로 조정하였고 각 거리별로 감쇠력의 계수를 구할 수 있었다. Figure 3은 원판과 자석 사이의 거리가 8.09mm일 때 시간에 따른 각변위의 값이다. 안정 평형점으로 빠질 때 안정 평형점의 퍼텐셜의 너비가 더 넓으므로 준안정 평형점으로 빠질 때에 비해 더 진폭이 큰 것을 알 수 있다.

Figure 4의 (a),(b),(c)는 어떻게 감쇠를 제거해줬는지 나타낸다. 감쇠가 일어나므로 진폭이 갈 수록 줄어드는 것을 확인할 수 있는데, 첫번째, 즉 제일 넓은 범위를 가지는 반주기를 기준으로 설정한다. 그리고 기준이 되는 곡선을 제외한 나머지 곡선들을 기준 곡선으로 수렴시키는 감쇠 계수를 비선형 회귀를 이용하여 구한다. 여기서 나온 감쇠 계수를 이용하여 기준이 되는 곡선에 보정시킨다. 즉 처음 기준이 되는 곡선도 엄밀히 말하면 감쇠가 일어나는 중이므로 원래 퍼텐셜의 모양과 같다고 할 수 없다. 그러므로 기준이 되는 곡선에 나머지 곡선들을 수렴시키는 감쇠 계수를 구한 후 기준이 되는 곡선을 보정해 주면 보정 전에 비해 원래 퍼텐셜의 모양에 가까워지게 된다. 다시 보정된 퍼텐셜에 나머지 곡선들을 수렴시키는 감쇠 계수를 구한 후, 그 감쇠 계수를 이용하여 다시 기준 퍼텐셜을 보정해준다. 실험을 분석한 코드에서는 이 과정을 10번 반복하였고, 어떤 예외도 없이 잘 수렴하는 것을 확인할 수 있었다. Figure 4의 (a)는 보정 전 감쇠 계수에 임의로 넣어준 값을 나타낸 것이다. 임의로 추정하여 넣어준 값이므로 참이라고 추정되는 퍼텐셜이 정밀하게 수렴하지 못하고 감쇠를 과하게 보정해줌을 알 수 있다. (b)는 기준이 되는 커브인 First Period에 나머지 곡선들을 수렴하게 만드는 감쇠 계수를 비선형 회귀를 통해 구하고, 그 값을 이용하여 감쇠를 보정해준 그림이다. 처음보다는 더 정밀해진 것을 확인할 수 있다. (c)는

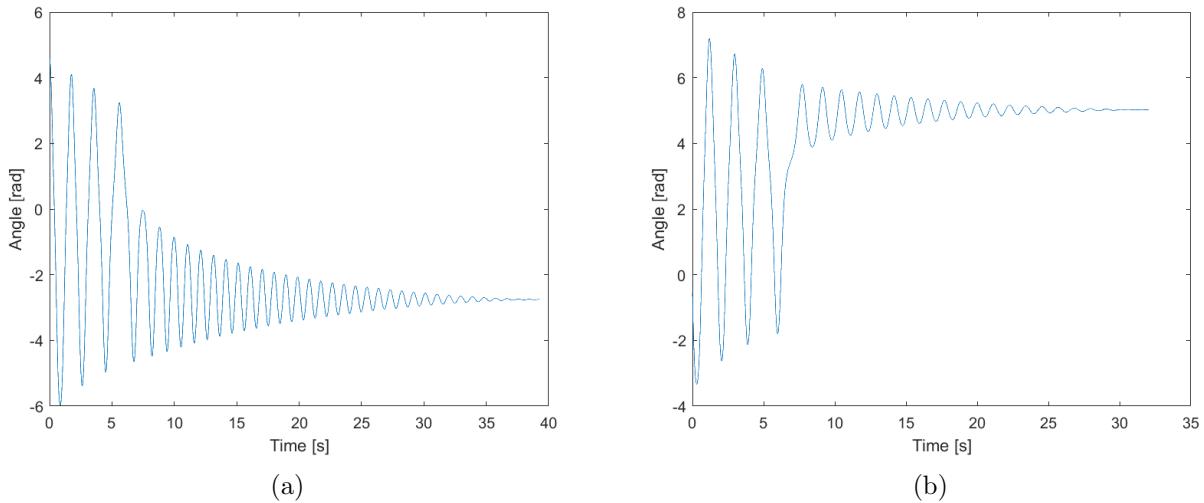


Figure 3: 원판 - 자석 사이의 거리가 8.09mm일 때 시간에 따른 각변위의 그래프. 진자는 에너지를 잃으며 안정 혹은 준안정 평형점에 빠진다. (a) 진자가 안정 평형점에 빠졌을 때 (b) 진자가 준안정 평형점에 빠졌을 때의 그래프를 도식하였다.

위 과정이 10번 반복된 것으로, 감쇠를 잘 제거하여 모든 곡선을 하나의 페텐셜로 수렴시켜 거의 곡선의 시간의존성이 거의 사라진 것을 확인할 수 있다. 즉 True Estimated Potential은 감쇠가 Eq. (7)꼴로 주어진다고 가정한 경우 에너지의 손실을 최대한 잘 설명하는 감쇠 계수를 찾은 것이다. (d)는 최종적으로 구해진 페텐셜의 모양으로, 안정 평형점과 준안정 평형점이 잘 보이는 것을 확인할 수 있다. 참일 것으로 추정되는 페텐셜을 Eq. (10)을 모델 함수로 하는 비선형 회귀를 통해 구하였다. Figure 5 (a)에서 에너지는 감쇠에 의해 시간이 지남에 따라 단조감소하는 것을 볼 수 있다. 처음에는 각속도가 빠르므로 감쇠되는 에너지의 속도도 빨랐지만 갈수록 각속도가 줄어들어 에너지 감쇠 속도가 줄어드는 것을 볼 수 있다. (b), (c)로부터 진자가 언제 어떤 상인지 알 수 있다. 입자의 궤적이 에너지가 더 낮은 안정상 쪽으로 향하므로 진자는 이중가둠 상에서 안정상으로 상전이를 한다고 할 수 있다. 에너지 곡면을 알고 있고, 안정 평형점과 준안정 평형 점 사이 존재하는 페텐셜의 국소 최댓값을 알 수 있다. 즉 그림을 통해 입자의 상을 바로 알 수 있는데, 입자의 에너지, 즉 붉은 점의 높이가 페텐셜의 국소 최댓값보다 높으면 이중가둠 상태라 할 수 있다. 점이 에너지를 잃어 높이가 페텐셜의 국소 최댓값보다 낮아진다면 안정상(Stable) 또는 준안정상(Metastable) 중 하나를 가진다. 이때 페텐셜의 개형을 보면 국소점의 높이, 즉 에너지가 더 낮은 점이 안정 평형점이고 더 높은 쪽이 준안정 평형점이라는 것을 알기 쉽다. 만약 상태가 안정 평형점 근처에 갇힌다면 진자의 상은 안정상, 준안정 평형점 근처에 갇힌다면 준안정상이라는 거울 알 수 있다. 에너지 곡면의 모양을 보면 에너지가 국소 최댓값일 때 안정상 쪽의 둘레 길이가 준안정상보다 더 긴 것을 확인할 수 있다. 이것이 진자가 준안정상보다는 안정상을 더 쉽게 가질 수 있는 이유이다. 강제 진동자를 고정시킨 경우 강제 진동자와 실 홀더사이 실의 길이가 늘어나게 되면 페텐셜의 모양이 변형된다. 이때 페텐셜의 모양이 어떻게 변형되는지를 위와 동일한 방법으로 알 수 있다. 실의 길이가 증가함에 따라 페텐셜이 변하는 양상은 Figure 6와 같다. 실 홀더와 강제 진동자 사이 실의 길이가 길어질수록, 즉 강제 진동자가 아래 방향을 향할수록 준안정 평형점의 에너지가 점점 높아지는 것을 확인할 수 있다. 즉 준안정상태는 강제 진동자가 아래를 향할수록 점점 사라지는 것을 볼 수 있다.

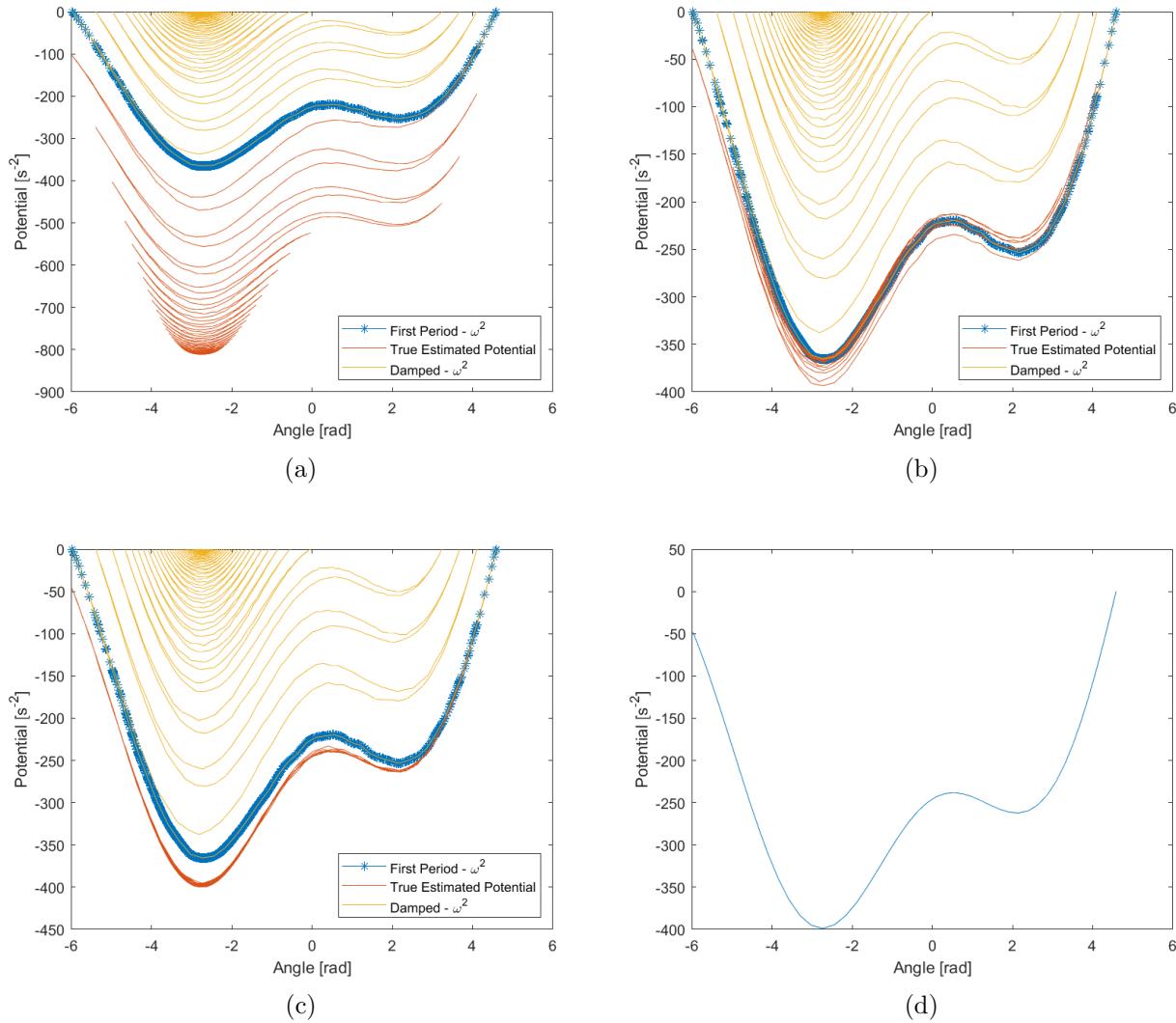


Figure 4: 퍼텐셜 에너지의 개형을 그리고 감쇠를 보정하기 위해 회귀를 이용하는 과정. (a) 회귀를 이용하기 위해 감쇠 계수의 임의적으로 초기값을 대입하여 그려낸 그래프. (b) 진자의 첫 주기를 이용한 퍼텐셜 그래프에 나머지 곡선을 수렴 시키는 과정. (c) 앞선 (b)의 과정을 10번 반복하여 최적값을 구한 과정. (d) 최종적으로 참값으로 추정한 그래프의 개형.

### 3.2. 감쇠계수 계산

자석과 원판 사이의 거리  $d$ 를 변경해가며 이전 섹션과 같은 방식으로 감쇠의 계수들인  $\gamma, n$ 을 구할 수 있다. 감쇠 상수들을 그래프로 표현하면 Figure 7와 같다. 예상했던 대로 감쇠의 지수인  $n$ 은 자석이 원판에 가까이 갈 수록 1에 가까워짐을 알 수 있다. 자석이 멀리 있었을 때는 0.5 수준이었던  $n$ 이 자석이 가까이 오니 1에 접근하는 것은 자석에 원판에 가까이 있으면 감쇠에 주는 영향이 매우 크다는 것을 나타내는 것이라고 할 수 있다. 여기서 자명하지 않은 것은  $\gamma$ 값도 자석과 원판사이 거리  $d$ 가 줄어듦에 따라 증가한다는 것인데, 이는  $d$ 가 줄어듦에 따라 맴돌이 전류에 의한 감쇠가 매우 커지는 것으로 볼 수 있다.

### 3.3. 상 구분과 엔트로피

에너지에 해당하는 엔트로피를 구하기 위해서는 Figure 5에서 주어진 에너지 곡면을 각변위-각속도 평면에 평행한 방향, 즉 에너지가 일정한 평면을 기준으로 잘랐을 때의 넓이를 알아야

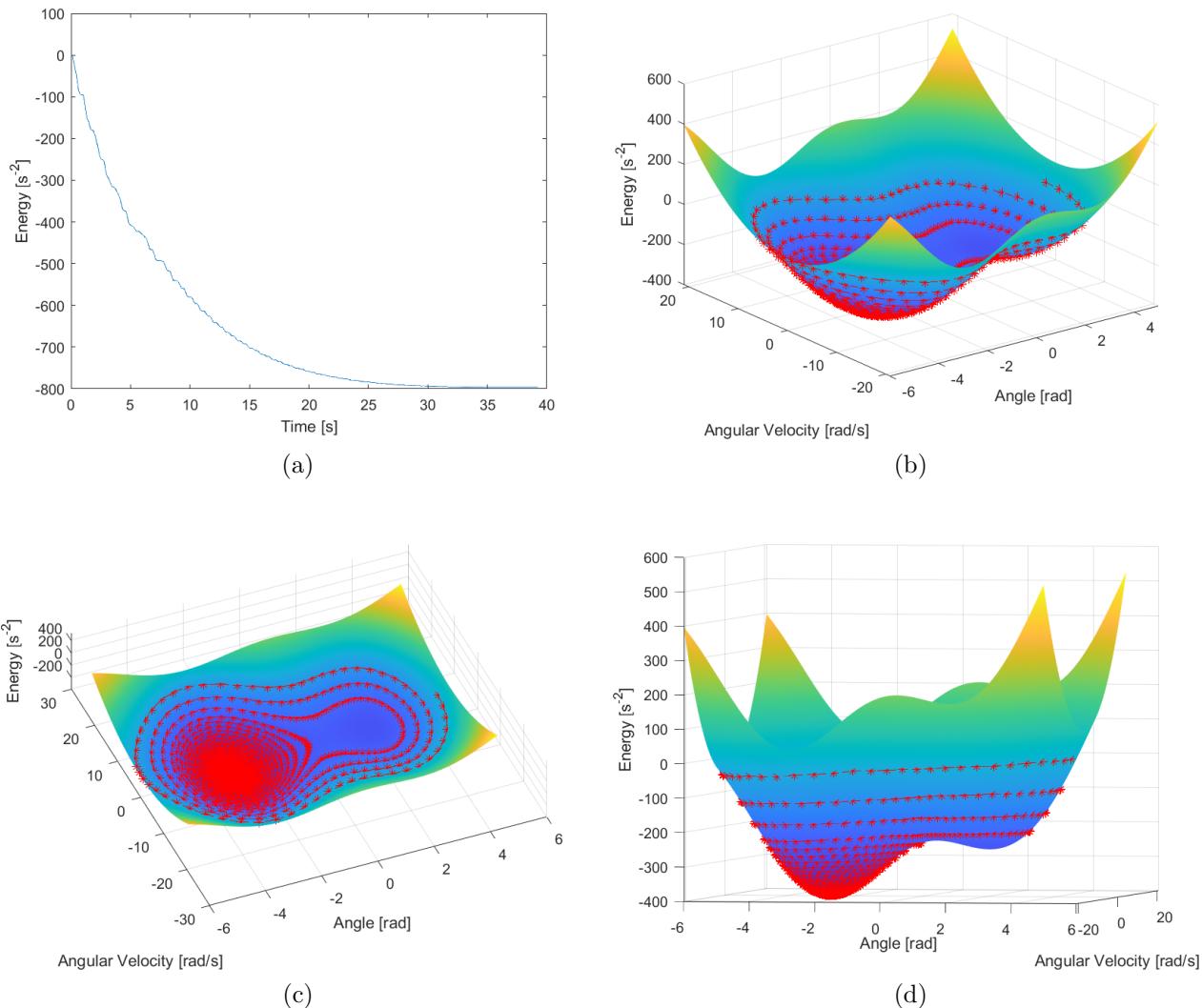


Figure 5: 진자의 에너지 감쇠를 고려한 위상공간 상 궤적과 퍼텐셜 개형을 대조한 그림. (a) 시간에 따라 에너지가 단조감소하는 양상을 그래프로 표현하였다. (b), (c), (d)는 각각 mesh로 표현된 퍼텐셜 에너지 개형과 회귀에 사용된 진자의 궤적을 겹친 것을 3가지 방향에서 관측한 모습이다. 궤적과 개형이 잘 맞아떨어지므로 추정한 퍼텐셜 에너지가 타당하다고 볼 수 있다.

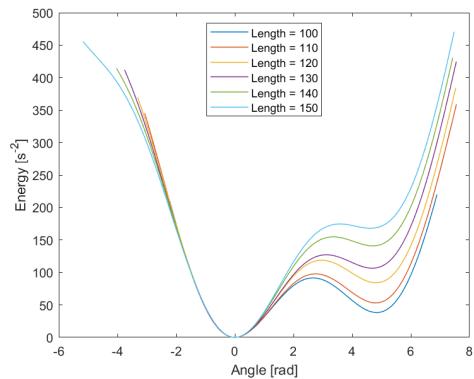


Figure 6: 강제 진동자 - 실 흘더 사이를 잇는 실의 길이에 따른 퍼텐셜 에너지 개형의 변화. 진동자가 아래를 향하며 실을 당겨 길이가 늘어날 수록, 퍼텐셜 개형이 바뀌며 준안정 평형점이 사라지고 있다.

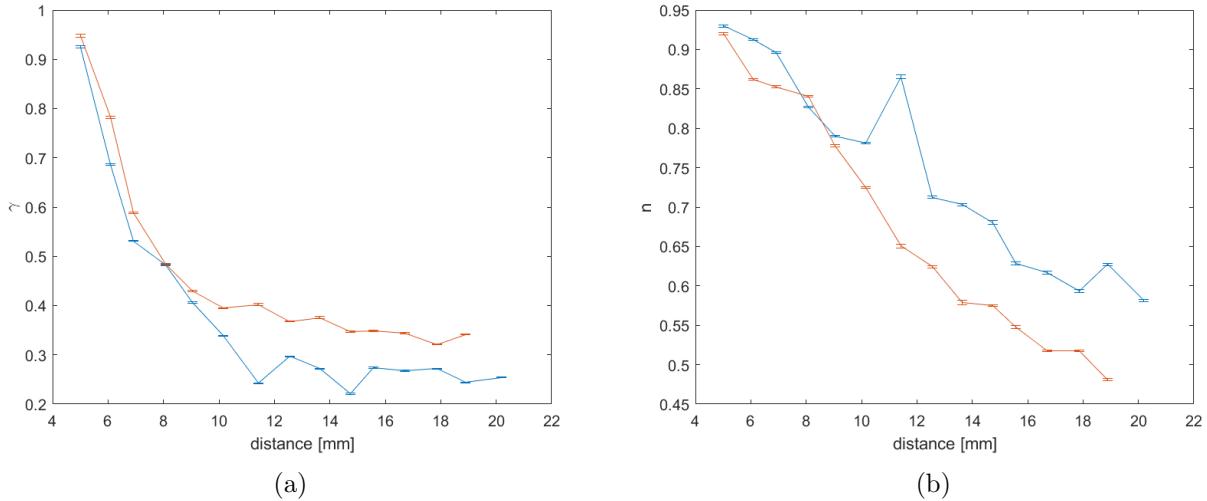


Figure 7: 원판 - 자석 사이의 거리에 따른 감쇠에 작용하는 계수  $\gamma$ 와  $n$ 의 그래프. (a) 자석이 원판에 다가갈수록 멤돌이 전류의 효과가 커져 감쇠의 계수  $\gamma$ 가 증가한다. (b) 자석이 원판에 다가갈수록 감쇠를 강하게 일으켜 감쇠의 지수  $n$ 이 증가한다.

한다. 에너지 곡면을 잘랐을 때의 모양은 Figure 8와 같다. 엔트로피를 구할 때 주의를 기울여야 하는 부분이 진자의 에너지가 안정점 에너지와 준안정점 에너지 사이에 있을 때이다. 만약 진자가 준안정상을 가진다면 엔트로피를 계산하는데 있어 취해야 하는 면적은 Figure 5 (b)의 오른쪽 부분만이고, 안정상을 가진다면 왼쪽 부분만이다. 안정상을 가지던 준안정상을 가지던 외부 에너지 없이 안장점 에너지를 넘을 수는 없다. 즉 안정상인 경우 준안정상의 위상공간을 점유할 수는 없다는 것이다. 그러므로 엔트로피를 계산하는데 있어 해당 상에 맞는 하나의 면적을 취하여 엔트로피를 계산해야 한다. 단면의 넓이에 로그를 취해주면 계에서 각 에너지에 해당하는 엔트로피를 알 수 있다. 시간에 대해 계의 에너지가 어떻게 변하는지 아므로, 시간에 대해 계의 엔트로피는 Figure 8 (d)와 같다. 진자의 에너지가 낮아지면 위상공간에서 점유할 수 있는 넓이가 줄어들므로, 엔트로피도 시간이 지남에 따라 줄어들 것으로 예측할 수 있는데, 시간이 지남에 따라 감소하는 경향을 잘 보여줄 수 있다. 35초 이상에서 엔트로피가 진동하는 경향이 생기는 것은 계산에 수반되는 수치적 오차에 의한 것으로 보인다.

### 3.4. 온도 및 계의 비열과 임계지수

진자의 시간에 대한 엔트로피와 에너지의 거동을 알고 있으니, 계의 열역학적 정의에 따른 온도를 구할 수 있다. 계의 온도가 처음에는 높다가 갈수록 식고, 그 결과 임계온도에 도달하면 상전이가 일어나는 것이라고 기대할 수 있다. 계의 시간과 에너지에 대한 온도는 Figure 9와 같다. 온도는 시간이 지남에 따라 감소하는 경향을 보이지만, 이중가둠 상에서 안정상으로 상전이를 할 때 온도의 증가가 있음을 확인할 수 있다. 상전이를 함으로써 온도가 증가하고, 그 이후 단조감소하는 모양을 보인다. 이는 계의 온도가 갈수록 식을 것이고, 이후 임계온도에 도달하여 상전이를 일으키고 그 결과 온도가 다시 증가한 후 다시 식어가는 것이라고 해석할 수 있다. 온도  $T$ 와 에너지  $E$  사이의 관계를 알면 계의 비열을 구할 수 있다. 계의 비열(Specific Heat)은 Eq. (24)으로 주어진다.

$$c = \frac{\partial E}{\partial T} \quad (24)$$

계의 온도와 에너지에 따른 비열은 Figure 10와 같다. Figure 10에서 예상할 수 있듯이, 안정상의 경우 비열이 발산하는 지점, 즉 국소적으로 에너지가 변함에도 온도가 일정한 지점이 존재함을

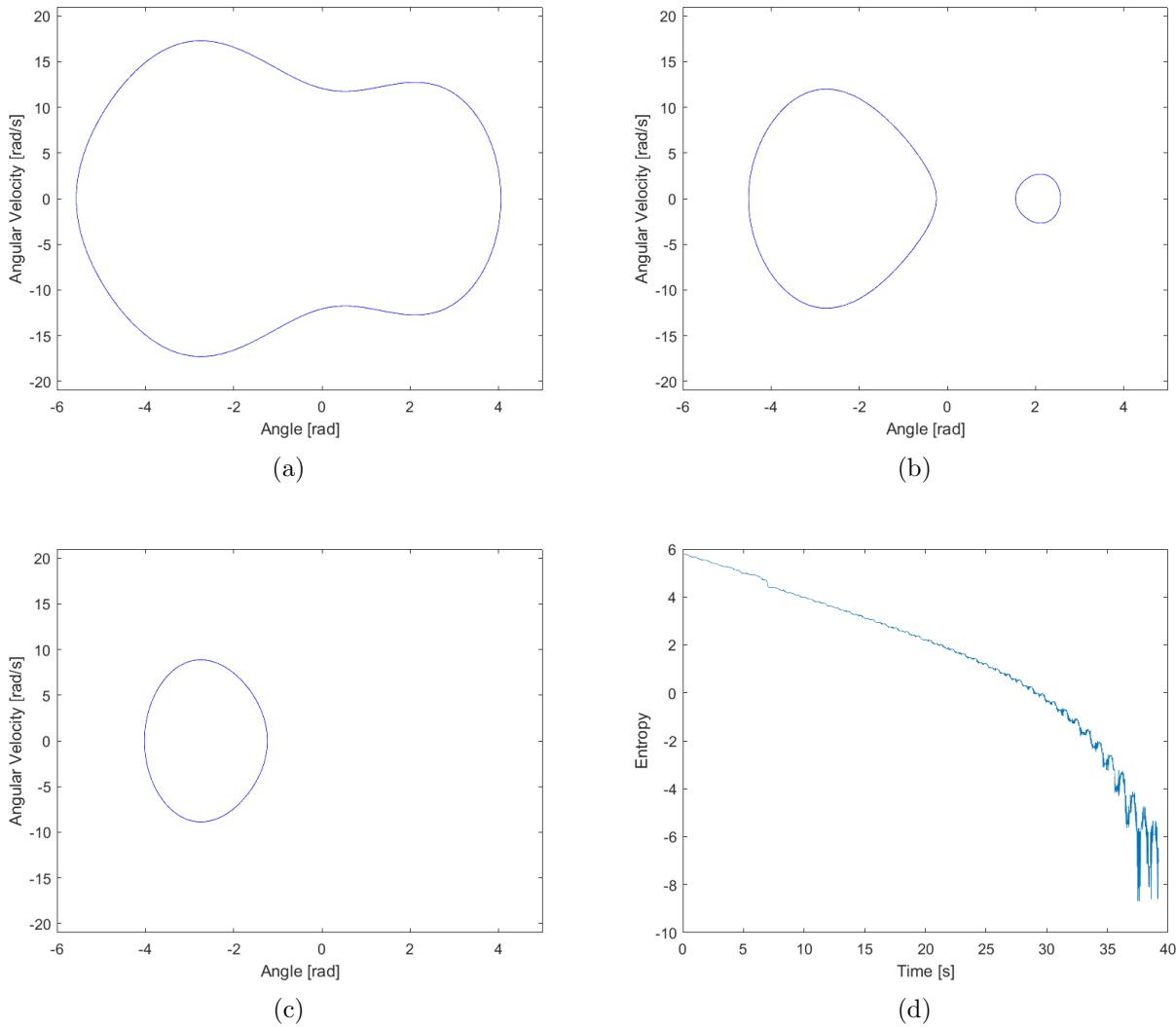


Figure 8: 에너지 곡면을 에너지가 일정한 평면으로 잘랐을 때 나타나는 단면을 (a) 충분히 높은 에너지 (b) 안정점과 준안정점 사이의 에너지 (c) 준안정점보다 낮은 에너지에 대해 표시한 그림. (b)에서 이미 진자는 하나의 상만을 차지하므로 엔트로피를 고려할 때 둘 중 하나만을 고려해야한다. (d) 시간에 따른 엔트로피 곡선. 엔트로피는 시간에 따라 감소한다.

확인할 수 있다. 그 지점보다 에너지가 높아지면 음의 비열을 가지게 된다. 에너지가 높아짐에도 불구하고 온도가 감소하는 영역이 나타나는 것이다. 이러한 특이한 거동을 보이는 영역을 제외하고는, 대체로 안정상일 때 에너지가 높아질수록 비열도 증가하는 경향을, 이중가둠 상일 때도 에너지가 높아질수록 비열도 증가하는 경향을 보이는 것을 알 수 있다. 온도의 경우 안정상은 하나의 온도에 대해 두 비열값을 가지는 지점이 존재한다. 이 지점이 Figure 9 (b)에 있는 안정상의 그래프 모양이 아래로 꺾이는 듯이 생긴 부분이다. 온도는 같아도 비열이 음수인 부분이 있고 양수인 부분이 있는 것이다. 이중가둠 상도 안정상과 같은 온드를 보이는 구간이 존재한다. 즉 이 구간의 경우 온도는 같아도 두개의 생이 존재할 수 있다고 생각할 수 있다.

### 3.5. 계의 자유에너지와 상도표

계의 자유에너지가 란다우 자유에너지  $L$ 로 주어진다면 Eq. (20)를 이용해 란다우 자유에너지 (이하 자유에너지)를 구할 수 있겠지만, 이 계는 열역학계가 아닌 역학계이므로 자유에너지를

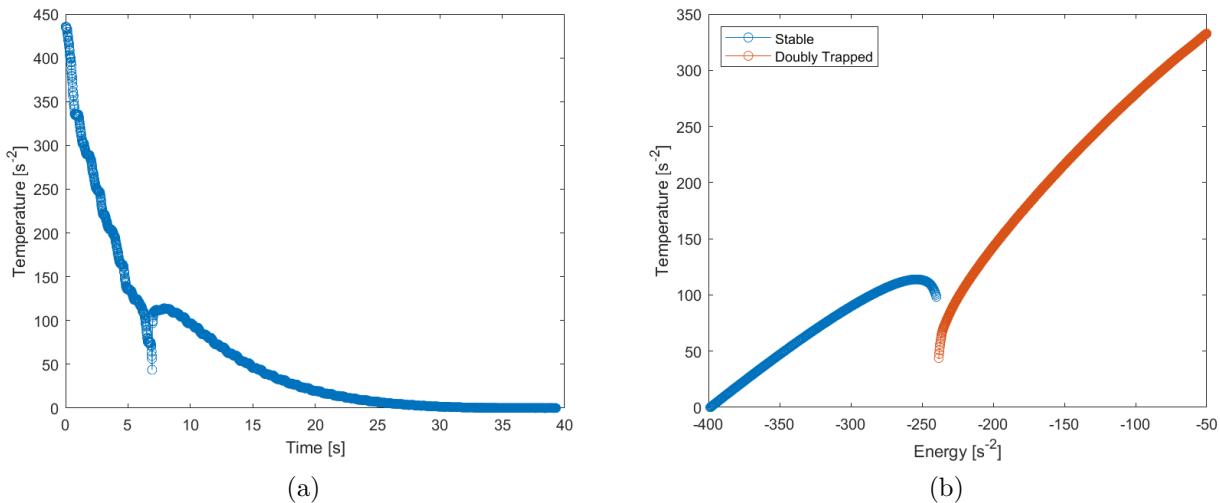


Figure 9: (a) 시간에 따른 온도의 곡선과 (b) 에너지에 따른 온도의 곡선. 양쪽 그림에서부터 상전이 지점에서 온도가 미분불가능한 변화를 거친다는 것을 알 수 있다.

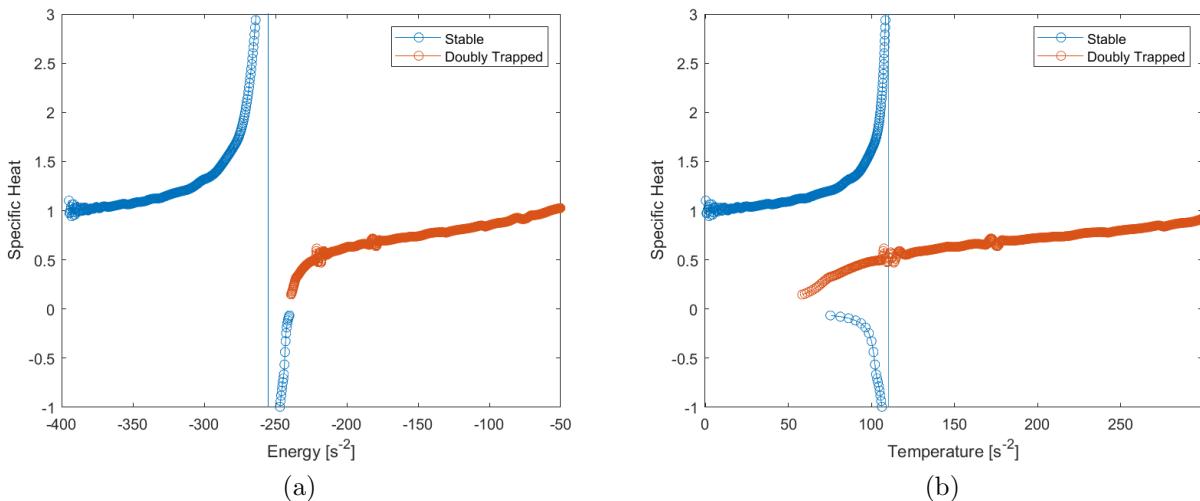


Figure 10: 비열을 (a) 에너지에 따라 (b) 온도에 따른 곡선으로 나타낸 그래프. 안정한 상을 파란색, 이 중가둠 상을 주황색으로 표시하였다. 안정 상의 곡선은 임계에서 불연속하며, 같은 온도를 가진 안정상도 2개의 비열을 가질 수 있다.

구하는데 있어 다른 접근방식이 필요하다. 이에 대하여 혼돈진자 메뉴얼에서 계의 자유에너지를 구하는 공식이 Eq. (25)로 주어진 바 있다.

$$F = E_{eff} - TS = V(\theta) + \frac{T}{T_c} K(\theta) - TS \quad (25)$$

시간에 따라 계의 온도, 운동에너지와 엔트로피와 각변위가 어떻게 거동하는지 알고 임계온도 또한 구했으므로 계의 자유에너지를 계산할 수 있다. 계는 자유에너지를 최소화하는 상을 가지므로, 계의 온도가 임계온도보다 큰 경우에는 이중가둠 상이 자유에너지의 극소점에 해당할 것이고 계의 온도가 임계온도 미만으로 떨어진 경우에는 안정상 또는 준안정상이 자유에너지의 극소점에 해당할 것이라고 예상할 수 있다. 몇몇 온도에 대한 자유에너지는 Figure 11으로 주어진다. Figure 11에 계산된 자유에너지 값은 실제 자유에너지 값이 아니라 한 그래프에 그리기 위해

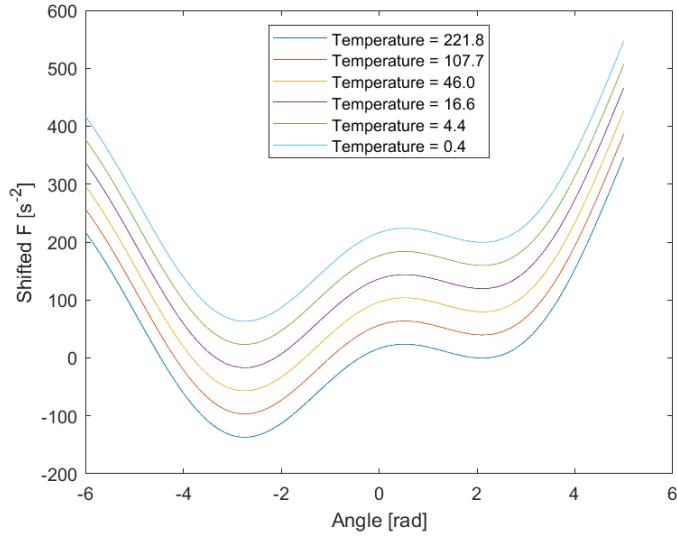


Figure 11: 란다우 자유에너지. x축을 각도로 하며 온도에 따른 여러 자유에너지들을 함께 표시하였다. 온도에 따라 자유에너지 값이 달라지지만, 그림의 편의상 자유에너지 곡선을 y축 평행이동하여 그려낸 것이다. 온도에 따라 자유에너지 개형이 바뀌지 않는다는 특징을 확인할 수 있다.

이동된(shifted) 자유에너지 값이다. 자유에너지는 절대적인 값보다는, 자유에너지가 최소화되는 방향으로 계가 행동한다는 것이 중요한 것이므로 서로 다른 온도를 가질 때 자유에너지 값의 비교를 위해 자유에너지 방향으로 이동한 것이다. 그 결과 예상과는 다르게 온도가 달라져도 자유에너지의 개형이 변하지 않는다는 것을 확인했다. 강제 진동자의 초기각도  $\phi$ 를 변경해주면 계의 퍼텐셜 모양이 변하게 되고, 이에 따라 상전이의 특성도 바뀌게 될 것으로 예측할 수 있다. Figure 13은 초기각도에 해당하는 진동자와 실 훌더까지의 직선거리에 따른 임계온도와 상두께를 나타낸 그림이다. 실의 길이가 길어질수록 임계온도와 상두께가 증가하는 경향을 보임을 알 수

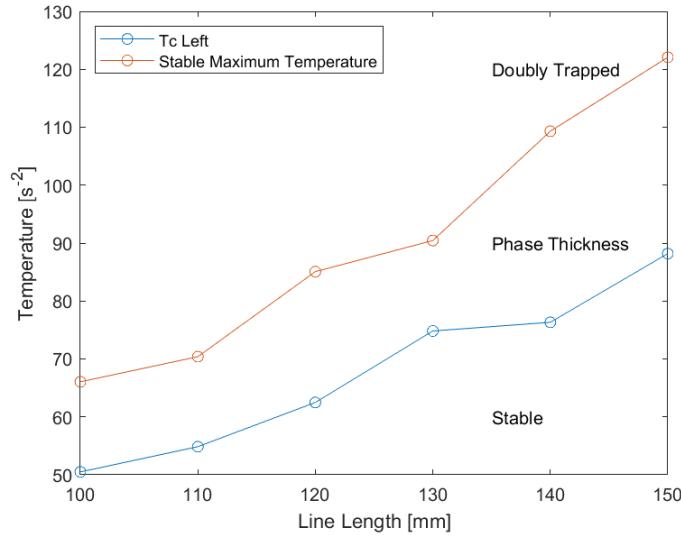


Figure 12: 강제 진동자 - 실 훌더 사이를 잇는 실의 길이와 온도에 대한 상도표. 안정 상과 이중가둠 상 사이의 상두께를 확인할 수 있다.

있다. 임계점 근처에서 상전이의 임계지수를 구할 수 있다. 이 역학계에서 볼 수 있는 임계지수는 비열에 관련된  $\alpha$ 이다. 질서 매개변수에 관련된 임계지수인  $\eta$ 는 상전이가 일어날 때 변위각이 다

양할 수 있으므로 진자와 같은 역학계에서 일어나는 상전이에 적용하기 적합하지 않다. Eq. ()를 이용하여 이중가둠 상에서 다른 상으로 넘어갈 때 임계지수를 비선형 피팅을 통해 구할 수 있다.

$$E \propto \frac{1}{1-\alpha} |T - T_c|^{-\alpha} \quad (26)$$

위 방식으로 28가지 경우의 수에 대해 임계지수를 구한 결과 임계지수  $\alpha = -0.5920.106$ 임을 알 수 있었고 상당히 오차가 크다는 것도 알 수 있었다.

### 3.6. 외부 구동력이 가해진 경우 공명곡선

강제 구동력을 가하는 경우 모터의 전압과 진자의 진폭과의 관계를 나타낸 그림은 Figure ?? 이다. 제 진동자에 가해지는 전압이 약 3.5V 근처에서 진폭이 소폭 증가하는 특이점을 확인할

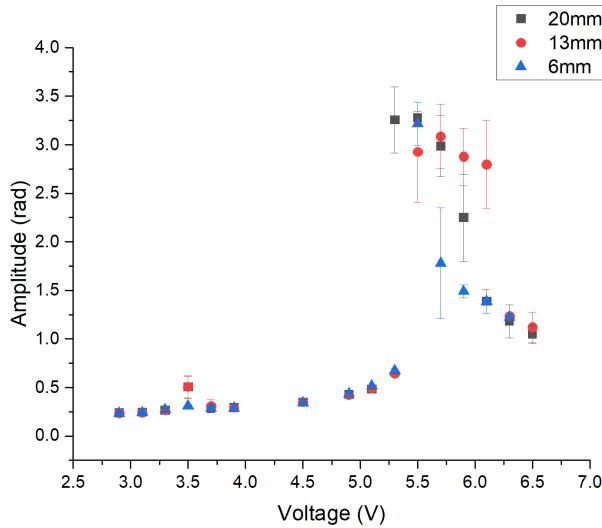


Figure 13: 원판 - 자석사이의 거리가 6, 13, 20mm일 때 모터의 전압과 진자의 진폭간의 관계를 나타낸 산점도. 3.5V에서 진폭이 소폭 증가하는 특이점이, 5V ~ 6V 구간에서는 진폭이 대폭 증가하는 공명점이 있다.

수 있으며, 5.0V부터 진폭이 매우 크게 증가하는 공명점을 확인할 수 있다. 자석과 원판 사이의 거리  $d$ 가 20mm일 때 공명 영역은 약 5.3V에서 5.9V 정도이며, 13mm일 때는 5.5V에서 6.1V, 6mm일 때는 5.5V 거의 하나로 매우 좁은 공명 피크를 보여준다. 3.5V에서 진폭이 약간 증가하는 부분을 시간에 대한 각변위 그래프와 FFT 결과를 표현하면 Figure 14과 같다. Figure 14에서 볼 수 있듯이, 두개의 진동이 혼합된 것 같이 보이는 진동이 발생한다. 이에 FFT를 취하면 주파수 성분으로 분해할 수 있는데, 주파수 성분에서 두개의 피크가 보임을 알 수 있다. 두개의 피크가 보인다는 것은 서로 다른 두 진동수를 가진 파의 합성으로 볼 수 있으므로 두개의 서로 다른 주파수의 진동이 혼합되어 나타나는 것이고, 그 결과 진폭이 소폭 증가했음을 알 수 있다.

### 3.7. 카오스 분석

Figure 15 (a)는 강제 구동력이 가해진 진자가 카오스 현상을 보이는 것을 나타낸 것이다. 한정된 시간동안 위상공간위 점을 찍은 것을 생각해 보면 위상공간 위 일반적인 지점에 대해 충분히 가까우므로 조밀한 주기성 궤도 조건을 만족한다고 볼 수 있고, 혼돈진자가 카오스 현상을 보이는 것이라고 볼 수 있다. Figure 16은 강제 구동력 아래 카오스가 발생한 것으로 추정되는 계와

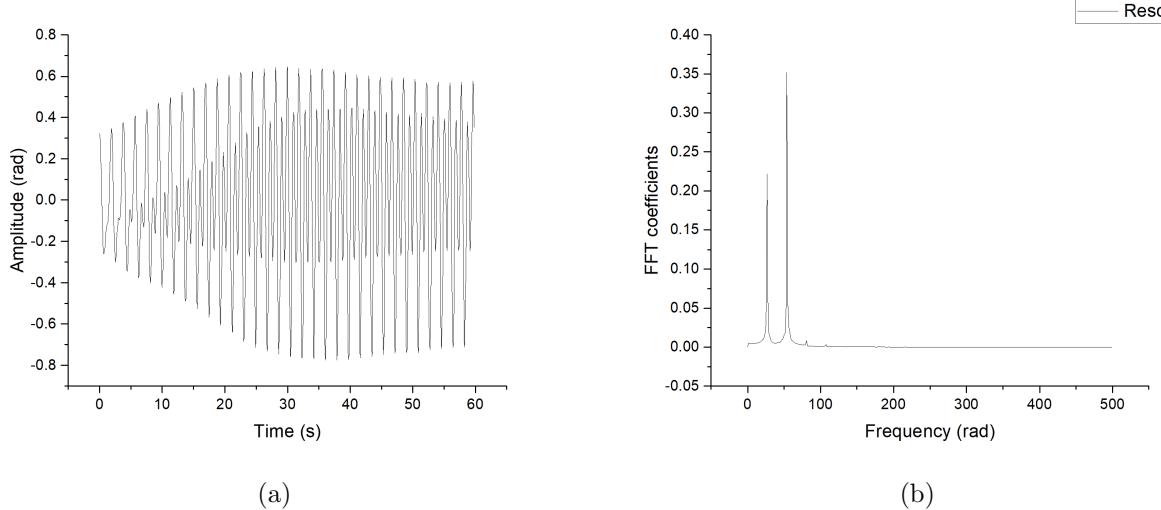


Figure 14: 3.5V의 특이점에서 (a) 시간에 따른 진자의 진폭의 그래프와 (b) 앞선 (a)의 그래프를 FFT를 통해 주파수 영역에서 관측한 그림. FFT로부터 특정 두 주파수에서 피크를 보이므로 진자의 진폭의 그래프는 서로 다른 두 진동의 혼합으로 생각할 수 있다.

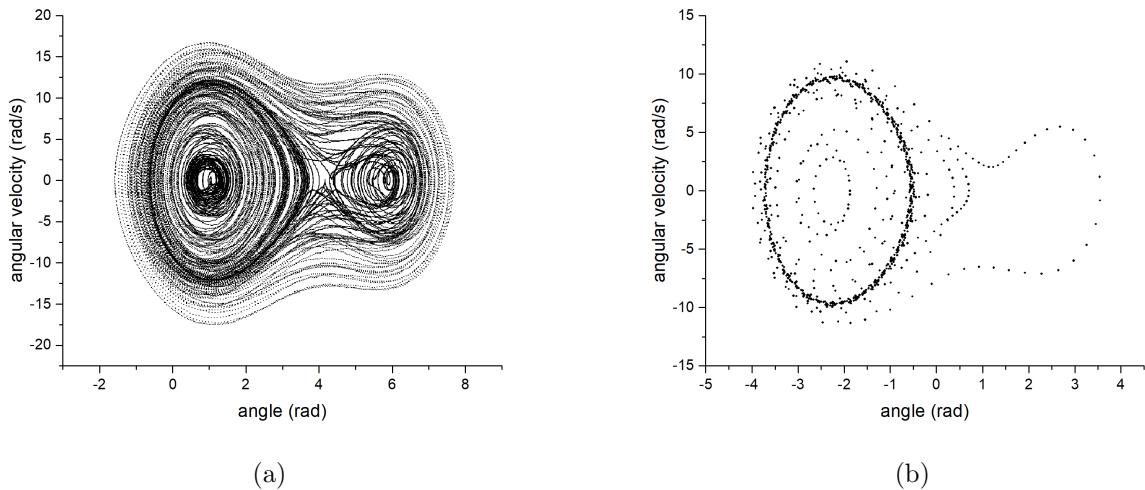


Figure 15: 진자에 강제 구동력을 가했을 때 (a) 카오스 현상을 보이는 진자의 궤적과 (b) 카오스하지 않은 진자의 궤적을 위상공간에 나타낸 그림. 카오스가 나타난 진자의 궤적은 닫힌 위상공간을 조밀하게 채우므로 카오스 현상을 보인다 볼 수 있다.

그렇지 않은 계의 푸앵카레 산포도를 나타낸 것이다. 카오스가 나타나게 되면 ' $y = x$ '로부터 멀어진 곳에 점이 찍히게 된다. 즉 (a)가 카오스 현상을 보인다는 사실을 지지한다. Figure 17는 리아푸노프 지수를 계산한 값이다. 리아푸노프 지수가 시간이 지남에 따라 0에 접근하기는 하나 현 시간대에서는 0보다 큰 값을 가진다. FFT 결과 다양한 주파수 대역에서 피크가 발생한 것을 볼 수 있다.

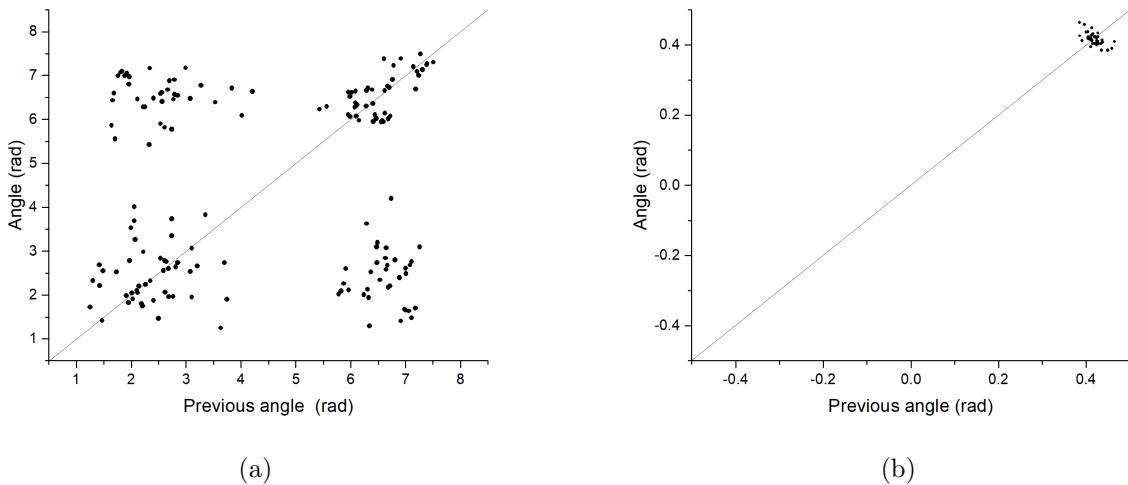


Figure 16: (a) 카오스가 발생한 것으로 추정되는 역학계의 푸앵카레 산포도 (b) 카오스가 발생하지 않은 역학계의 푸앵카레 산포도.

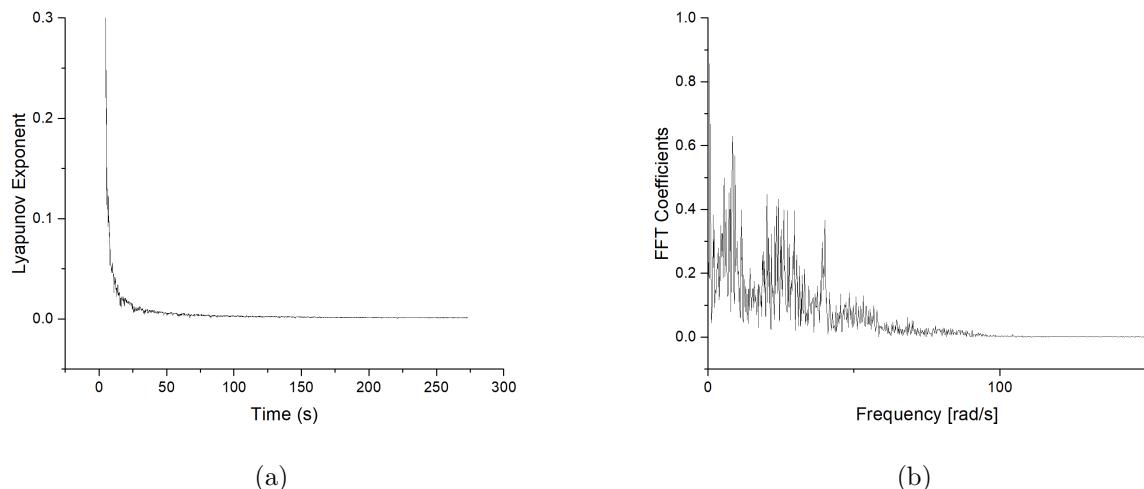


Figure 17: (a) 강제 구동력이 가해졌을 시 시간에 따른 리아푸노프 지수의 그래프이다. (b) 진자의 각변위에 대해 FFT를 수행한 그래프

## 4. Discussion

### 4.1. 퍼텐셜 특정과 감쇠계수 분석

Figure 4에서 볼 수 있듯이 Eq. (10)을 모델로 하는 퍼텐셜을 성공적으로 구하였고, 퍼텐셜 모델의 파라미터도 구하여 성공적으로 진자의 퍼텐셜을 구하고 나아가 위상공간 상에서 진자가 가지는 에너지 곡면까지 구할 수 있었다. 즉 퍼텐셜은 비선형 회귀와 반복을 통해 감쇠를 잘 제거하면 원래 해에 수렴하는 것을 확인했으며, 모델 함수는 성공적으로 원래 퍼텐셜을 기술할 수 있다는 것을 확인하였다. 안정 평형점과 준안정 평형점의 퍼텐셜 에너지를 구할 수 있었고 안장점의 퍼텐셜 또한 구함으로써 안장점보다 큰 에너지를 가지는 상태과 작은 에너지를 가지는 상태는 상이 구분됨을 보였다. 안정 평형점과 준안정 평형점의 퍼텐셜 에너지의 차이를 시각화 함으로써 진자가 안장점보다 에너지가 작아졌을 때 쉽게 안정상인지 준안정상인지 구별할 수 있는 방법

또한 제시하였다. 즉 시간에 대한 진자의 상태를 위상공간 위 에너지 곡면 위를 움직이는 점으로 표현함으로써 해당 점이 어떤 상을 가지는지 직관적으로 확인할 수 있었고, 해당 상태의 퍼텐셜 에너지, 운동에너지를 정량적으로 분석할 수 있었다. 동일한 방식을 이용하여 강제 진동자의 각도 ( $\phi$ )가 달라져 퍼텐셜의 모양이 변형되었을 때도 성공적으로 퍼텐셜의 모양을 구하는데 성공하였고, 강제 진동자가 점점 아래를 볼수록, 즉 강제 진동자와 실 훌더 사이의 길이가 길어질수록 준안정 평형점의 에너지가 커지며 준안정 상태가 점점 사라짐을 확인하였다. 퍼텐셜을 잘 구할 수 있었던 이유는 감쇠를 잘 제거했기 때문이다. 즉 추정해낸 감쇠계수  $gamma, n$ 는 상당히 잘 추정되었음을 Figure 4 (c)에서 감쇠를 제거한 퍼텐셜의 정밀성을 통해 알 수 있고, 또한 비선형 회귀를 통해 유추된 표준오차를 Figure 7 (d)에 표기하였는데 원래 값에 비해 매우 작다는 사실을 통해 알 수 있다. 감쇠는 여러 힘이 복합적으로 작용해 하나의 항으로 감쇠를 나타내기 불가능할 것이라고 생각했는데 진자의 진동처럼 일정 속도 범위 내에서는 하나의 항으로도 감쇠를 충분히 잘 기술할 수 있다는 것을 볼 수 있었다. 이를 통해 감쇠가 있는 역학계의 감쇠계수를 구할 때는 에너지 접근방식으로 접근하는 것이 좋은 결과를 줄 수 있음을 알 수 있었다. 또한 감쇠의 지수  $n$ 의 정밀한 추정값을 보임으로써 값이 1에서 벗어나 있다는 것을 보일 수 있었고, 그 결과 감쇠가 선형이 아님을 보이기 위해 Q인자를 분석할 필요는 없게 되었다고 할 수 있다.

#### 4.2. 계의 온도와 비열 및 자유에너지와 임계지수

Figure 9에서 볼 수 있듯이, 외부 구동력이 없는 계의 온도는 시간이 지남에 따라 식어서 결국 0에 도달하게 됨을 알 수 있다. 그러나 중간에 상전이를 한번 하면서 온도가 증가하는 것을 볼 수 있다. 이는 일반적인 물질의 상전이와 보이는 차이점으로 물질은 상전이 도중 온도가 일정하게 유지된다. 계가 상전이를 시작하면 잠열(Latent Heat)을 내어 계의 온도가 증가한 것으로 생각해 볼 수 있지만 실제로 에너지 교환이 일어난 것은 아니므로 잠열로 상전이 도중 온도의 증가를 설명할 수는 없다. 그러나 이와는 별개로 유효 잠열(Effective Specific Heat)을 생각해 볼 수는 있다. 진자의 에너지가 에너지 곡면의 안장점보다 작아지면 에너지-온도 그래프에 그려진 두 부분 중 왼쪽 부분에 위치하게 된다. 이때 왼쪽 부분의 기울기가 반전되는 부분 중 제일 높은 온도와 제일 낮은 온도의 차이를 상 경계의 두께라고 한다. 이 상 경계의 두께만큼의 에너지 차이에 해당하는 에너지의 크기를 유효 잠열이라고 한다. 즉 계에 잠열이 존재한다고 볼 수는 있지만 잠열에 의해 상변화시 온도가 증가한 것이라고 볼 수는 없을 것이다. 임계지수  $\alpha$ 는 란다우 평균장 이론에 따르면 0이 나와야 하지만, 실제 계산해본 결과 0이 아닌 값을 얻을 수 있었다. 이는 혼돈진자 역학계가 열역학적인 접근방식을 이용하여 온도와 엔트로피 등 열역학적 변수를 정의하고 열역학계와와의 상사를 해볼 수는 있어도 실제로 열역학계는 아니기 때문이다. 또한 엔트로피도 주기 평균 엔트로피를 이용하였는데, 실제 엔트로피는 주기 평균이 아닌 위상공간을 차지하는 상태의 부피를 기준으로 계산하여야 한다. 주기 평균 엔트로피와 실제 엔트로피가 유사하게 거동할 것이라고 기대는 할 수 있지만 그러한 보장은 없다. 즉 란다우 평균장 이론과 임계지수가 다르게 나올 수 있다. 온도가 달라져도

#### 4.3. 외부 구동력에 의한 진동과 카오스 분석

Figure 13에서 볼 수 있듯이 강제 진동자에 인가해준 전압과 실제 진자의 진동 진폭간의 관계를 대략적으로 볼 수 있었다. Q인자를 공명진동수와 반치폭(FWHM: Full Width at Half Maximum)과의 비율로 정의하고 계산하기에는 데이터의 점들이 너무 적다는 문제점이 있었다. 그러나 Q인자의 정의로 한 주기동안 진자가 가진 평균 에너지와 진자가 잃어버린 에너지의 비율을 사용한다면 각각의 케이스에 대해 Q인자를 구할 수 있을 것이다. Figure 15에서 한정된 시간동안 측정하는 것을 고려했을 때 진자의 상태의 궤적이 위상공간을 충분히 조밀하게 채운다는 것을 앞서 언급한 바 있다. 이 외에도 푸앵카레 산포도, FFT, 리아푸노프 지수 등 서로 다른 세가지

방법으로 계가 정말 카오스 현상을 보이는지 분석하였다. 카오스 현상을 보이는 것 같은 계의 푸앵카레 산포도는 ' $y = x$ '에서 벗어나 있고, 또한 FFT 결과 피크가 넓은 주파수 범위에서 고르게 관찰되는 것을 확인할 수 있었다. 또한 라아푸노프 지수는 0으로 접근하기는 하지만 현 측정 시간 내에서는 0보다 크므로 계가 측정 시간동안은 카오스 현상을 보인다고 할 수 있다.

## 5. Conclusion

혼돈진자 역학계를 분석하고 감쇠를 적절히 제거함으로써 혼돈진자의 퍼텐셜을 특정할 수 있는 방법을 제시하였다. 퍼텐셜과 에너지 관점의 접근방식을 이용하여 진자의 감쇠력을 기술하는 방정식의 파라미터들을 정밀하게 구할 수 있었고, 자석이 원판에 가까이 다가가면 감쇠력의 지수가 1로 근접할 것이라는 예상과 일치하는 결과를 얻었다. 또한 감쇠력의 지수는 대체로 1보다 작은 값을 가지며 자석의 영향이 커질수록 지수  $n$ 과 계수  $\gamma$ 가 증가함을 확인할 수 있었다. 각변위-각속도 위상공간에 진자의 에너지를 높이로 하여 에너지 곡면을 그렸으며 진자가 감쇠되며 운동하는 것은 위상공간 위 진자의 상태를 점으로 잡았을 때 점이 에너지 곡면 위를 운동하며 아래로 내려가는 모양이라는 것을 보였다. 또한 이 3차원 위상공간을 이용하여 진자가 가질 수 있는 안정상, 준안정상과 이중가둠상의 정량적인 구별방법을 제시하였다. 강제 진동자와 실 훌더 사이의 길이가 달라져 퍼텐셜의 모양이 바뀌는 경우에도 위와 동일한 방법으로 변경된 퍼텐셜을 구할 수 있었으며 강제 진동자가 아래를 향할수록 준안정상이 사라짐을 정량적으로 확인할 수 있었다. 또한 위상공간을 이용하여 진자가 가지는 에너지 별로 엔트로피를 구할 수 있었으며, 그 결과 시간에 따른 엔트로피와 온도의 변화를 확인할 수 있었다. 혼돈진자 역학계의 온도와 에너지를 대응시켜 계의 열용량을 구할 수 있었고, 그 값이 안정상 또는 준안정상일 경우 발산하는 지점과 음의 값을 가지는 지점이 있음을 확인하였다. 그러한 특이한 지점들을 제외하고 비열의 값은 에너지가 증가함에 따라 점차 증가하는 것도 확인할 수 있었다. 임계온도 근처에서 열용량과 온드를 비선형 회귀근사 함으로써 임계지수  $\alpha$ 를 구하였으며, 이 값이 기존 란다우 평균장 이론에서 예측했던 바와는 다르게 0이 아님을 확인하였다. 계가 가질 수 있는 자유에너지를 정량적으로 계산하여 서로 다른 온도일때 비교해 보았고, 그 결과 자유에너지의 개형은 온도가 달라져도 일정하다는 것을 알 수 있었다. 그러므로 이 방법으로 구한 자유에너지는 이중가둠 상, 즉 초임계 상을 설명할 수 없다는 것도 확인하였다. 계에 강제구동력이 가해졌을때 계의 진폭에 대해 분석하였으며, 대략 모터 전압 3.5V에서 특이점을 가지고 5.5V에서 공명점을 가지는 것을 확인하였다. 마지막으로, 카오스 현상을 보이는 듯한 계를 정량적, 정성적으로 분석함으로써 계가 관측 시간 동안에는 카오스 현상을 보인다는 것을 확인할 수 있었다.

## References

- [1] Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia mathematica to\* 56*, volume 2. Cambridge University Press, 1997.
- [2] Catherine Weigel, Jeremy M Wachter, Paul Wagoner, and Timothy J Atherton. Predicting the influence of plate geometry on the eddy-current pendulum. *American Journal of Physics*, 84(9):653–663, 2016.
- [3] Werner Heisenberg. Über den anschaulichen inhalt der quantentheoretischen kinematik und mechanik. In *Original Scientific Papers Wissenschaftliche Originalarbeiten*, pages 478–504. Springer, 1985.
- [4] Lev Davidovich Landau. On the theory of phase transitions. i. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 11:19, 1937.
- [5] Morris W Hirsch, Stephen Smale, and Robert L Devaney. *Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos*. Academic press, 2012.
- [6] J-P Eckmann and David Ruelle. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *The theory of chaotic attractors*, pages 273–312, 1985.

# Photoluminescence as a method of probing energy levels near the ground state

June Ho Yeo

*Department of Materials Science and Engineering, Seoul National University*

(with Ho Hyeon Kim, Junha Kang as part of 884.307A Intermediate Physics Laboratory I)

(Dated: April 28, 2021)

Light-matter interaction, at its basis, concerns the excitation and relaxation of electrons, with each process absorbing and emitting photons. Using this principle, the photoluminescence spectrum can be used to probe information about the energy levels near the ground state, notably the first excited state. In this report, two distinct but important systems are introduced and analyzed by examining the photoluminescence spectra when excited by a 532nm laser: Rhodamine 590, a fluorescent molecule, and Cr<sup>3+</sup>-doped  $\alpha$ -corundum, or ruby, of which the relevant energy levels are those of a Cr<sup>3+</sup> ion affected by a crystal field with  $C_3$  symmetry. Rhodamine 590 is found to agree well with a Gaussian profile, and its scattering mechanisms are highlighted. The temperature and pressure dependence of peak parameters of the ruby spectrum's peaks are analyzed and compared with theoretically predicted parameters. We find that photoluminescence is a consistent method to probe the energy levels and optical properties of both systems.

## I. INTRODUCTION

The interaction between matter and light can be most succinctly described by the absorption and emission of light that occurs whenever a system changes between two discrete states.[1] Figure 1 shows the classic two-level model for light-matter interaction. When light corresponding to the energy difference of the two states interacts with the system, the system is excited from the ground state, which is the state in which the system has lowest energy. Conversely, when an electron is in a state with higher energy than its ground state, it spontaneously returns to its ground state, emitting light. This emission of light is known as spontaneous emission. Without excitation, the emission that occurs aside from the spontaneous emission is blackbody radiation, which is the radiation term intrinsic to photon statistics.

While electrons in real matter usually occupy more than two levels, the succinct two-level model holds surprisingly well in real life systems. However, there are many physical intricacies hidden in the photoluminescence spectra that deviate from the simple two-level model, which encode much information about the system.

One universal deviation is the natural broadening that

is a direct quantum dynamical consequence of the excited state having a finite lifetime. There are also broadening mechanisms which appear from environmental and experimental factors. Various causes of broadening will be discussed throughout the report.

More importantly, deviation from the two-level model arise from material properties. In this report, we are concerned with two different systems: the molecule, Rhodamine 590 (R590), and the doped crystal, ruby, or Cr<sup>3+</sup>-doped corundum( $\alpha$ -Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>). If we define the bandgap  $\Delta E_g$  as the minimum energy required to excite a system from its ground state, each system can be described as a two-level system where the energy difference between the ground and excited states is equal to  $\Delta E_g$ . We now examine the details in the descriptions of each system.

### A. Rhodamine 590: the molecule

Under the molecular orbital approximation, the molecular orbital for any molecule, or configuration of atoms, can be explicitly derived through perturbative methods with geometrical considerations. The molecular orbital is a set of discrete eigenbases ("orbitals") of the molecule, of which the electrons in the molecule can occupy. Of particular interest is the highest occupied molecular orbital (HOMO) and lowest unoccupied molecular orbital (LUMO), which are the highest occupied orbital with the highest energy in the ground state, and the orbital with its energy level directly above the HOMO's level, respectively. The bandgap for the molecule can be defined as the gap between the HOMO and LUMO levels, i.e.,

$$\Delta E_g = E_{\text{LUMO}} - E_{\text{HOMO}} \quad (1)$$

While energy levels lie above the LUMO level, as per Kasha's rule photon emission only occurs with appreciable yield for the LUMO level. This is because accord-

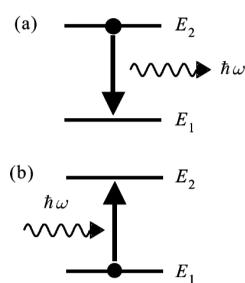


FIG. 1. Optical transitions in the classic two-level system; (a) spontaneous emission, and (b) absorption. Adapted from [1].

ing to the Franck-Cordon principle, a large overlap integral  $\langle \Phi_{LUMO+1} | \Phi_{LUMO} \rangle$  allows for the quick relaxation of super-LUMO levels, with the excess energy being dispersed nonradiatively in the form of vibronic energy or intramolecular interactions. Figure 2 shows the calculated frontier molecular orbitals of R590, which are orbitals pertinent in the discussion of overlap with HOMO. While there are exceptions to Kasha's rule, most common fluorescent dyes are designed with a single emission in mind.

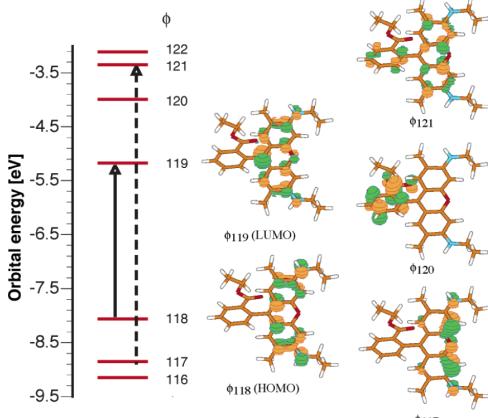


FIG. 2. Near-HOMO energy levels and calculated Kohn-Sham frontier molecular orbitals for each level. Adapted from [2].

In particular, dyes like R590 are known as chromophores since the relevant energy levels to their optical properties are given by  $\pi$ -conjugation in their molecular structure.

### B. Ruby: the doped crystal

In crystals, the molecular orbital description no longer holds as the intensity of perturbation by nearby electrons become comparable to the energy difference between different orbital levels. Instead, electrons exist continuously in the energy axis and form bands. However, there exist forbidden regions in the energy range.

The defining feature of nonmetallic crystals are their nonzero bandgap, which is the energy difference between the conduction band and valence band edges. When this bandgap has an energy scale that corresponds to near-infrared to near-ultraviolet energies, the crystal is known as a semiconductor. When the crystal has a higher bandgap than near-ultraviolet energies, as in the case of corundum, the crystal is known as an insulator. Similarly to the definition of HOMO and LUMO in the molecule, the conduction band is defined as the highest occupied band, while the valence band is the band directly above the conduction band. For this reason, pure, undoped corundum is transparent.

However, doping a crystal with foreign atoms introduces impurity levels in the interband region. With rel-

atively low levels of doping, these impurity levels can be assumed to have little uncertainty, as impurities are spatially separated from each other. In fact, an more accurate depiction of the energy levels in ruby would be to consider them as the energy levels of the  $\text{Cr}^{3+}$  ion confined in a crystal field given by  $\text{Al}_2\text{O}_3$ .

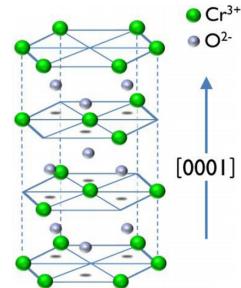


FIG. 3. Structure of ruby, adapted from [3].

The crystal structure of  $\text{Al}_2\text{O}_3$  has the hexagonal space group  $R\bar{3}c[3]$ , as seen in Figure 3. With  $\text{Cr}^{3+}$  acting as a substitutional defect, replacing  $\text{Al}^{3+}$  in the crystal structure. Note that  $\text{Cr}^{3+}$  fills an octagonal ( $O_h$ ) site. Under the cubic field approximation, Therefore, the crystal field near  $\text{Cr}^{3+}$  ideally has  $O_h$  symmetry. In reality, the substitutional defect breaks cubic symmetry as the lattice is stretched in the [0001] direction, and the local crystal field near the  $\text{Cr}^{3+}$  ion has  $C_{3v}$  symmetry. Furthermore, angular displacement of  $\text{O}^{2-}$  ions are spontaneous as per the Jahn-Teller effect, and all symmetry but  $C_3$  is broken. As a result, the lowest excited state, which is the metastable state,  $^2E$ , is split into  $E$  and  $2A$  states. For simplicity, and because the energy between  $E$  and  $2A$  is small enough such that Kasha's rule does not hold for the  $2A \rightarrow ^4A_2$  transition, here the metastable state shall be referred to as  $^2E$ .[4]

Note that while  $^2E \rightarrow ^4A_2$  transition is forbidden, since for an arbitrary dipole operator  $\hat{\mathbf{p}}$ ,  $\langle ^2E | \hat{\mathbf{p}} | ^4A_2 \rangle = 0$ , the transition is allowed for  $E \rightarrow ^4A_2$  and  $2A \rightarrow ^4A_2$ .

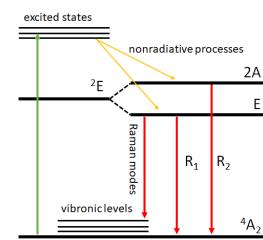


FIG. 4. Jablonski diagram of relevant energy levels and optical transitions for this lab.

## II. METHODS

### A. Experimental Setup

SLD-532-070T 532nm laser was used as the excitation source. The emitted light was collected via DM320i monochromator. The monochromator was connected to Andor DV-401A-FI CCD. In order to minimize signals by the laser, a notch filter was used. The monochromator and CCD was operated under -35°C. The CCD and monochromator was controlled via Andor Solis software on PC. For each experiment, data was acquired for 0.1s every 1s, for a total of 20 acquisitions.

### B. Rhodamine 590

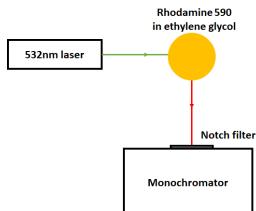


FIG. 5. Experimental setup for the photoluminescence measurement of R590.

The experimental setup was set up as shown in Figure 5, with the position of the R590 sample being adjusted to maximize the intensity of light entering the monochromator. An unknown amount of R590 was dissolved in ethylene glycol (EG) in a glass vial. An unknown amount of R590 was also observed to have stained the glass vial.

### C. Ruby

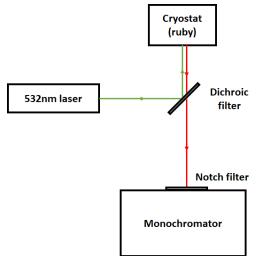


FIG. 6. Experimental setup for the photoluminescence measurement of ruby.

The experimental setup was set up as shown in Figure 6. The dichroic filter was used to selectively reflect the 532nm laser and transmit the ruby fluorescence signal. Measurements were conducted for  $p = 1\text{ atm}$ , room temperature (300K) conditions. Data for measurements

with  $p = 10\text{ mTorr}$ , and temperatures ranging from 10K to 290K were provided in lieu of conducting the measurements, due to technical difficulties with the cryostat.

## III. RESULTS AND DISCUSSION

### A. Rhodamine 590

Prior to the experiment, in order to verify that the light that enters the monochromator is indeed fluorescence, a cursory experiment was conducted using red ( $\lambda \simeq 630\text{nm}$ ), green ( $\lambda \simeq 540\text{nm}$ ), and blue ( $\lambda \simeq 460\text{nm}$ ) light emitting diodes as a light source. Light emission with a much higher intensity than that of scattering was only observed for the green and blue LEDs, indicating that there exists a minimum energy for the light emission to occur. This is consistent with the description for fluorescence, or at least some sort of photoluminescence, in which photons require an excitation energy greater than or equal to the "bandgap".

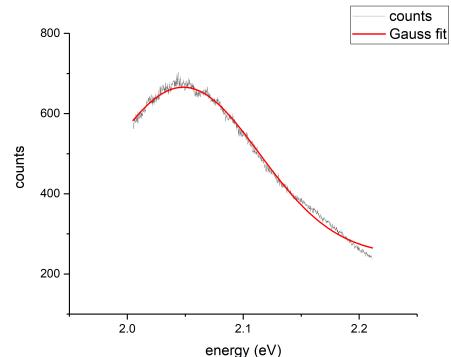


FIG. 7. Photoluminescence spectrum acquired at room temperature for R590 in EG, shown over the entire acquisition range. Fit to a Gaussian function,  $y = y_0 + (A/(w\sqrt{\pi/2}) * \exp(-2(\frac{x-x_c}{w})^2)$ ;  $y_0 = 246.0 \pm 2.5$  ( $p = 0$ ),  $x_c = 2.04836 \pm 0.00031$  ( $p = 0$ ),  $w = 0.1312 \pm 0.00012$  ( $p = 0$ ),  $A = 68.99 \pm 0.91$  ( $p = 0$ ),  $R^2 = 0.98692$ .

A wide Gaussian peak with full width half maximum of  $0.1544 \pm 0.0013$  [eV] is observed. The single peak of the photoluminescence spectrum of R590 suggests that only a single emission mode is present for the R590/EG system. As the initial absorption maximum is  $2.331 \pm 0.003$  [eV], and the emission maximum is  $2.04836$  the Stokes shift is computed to be  $0.282 \pm 0.003$  [eV].

The broadening of the emission can be attributed to the spectral diffusion of R590. For chromophores, the linewidth-scale broadening can generally be attributed to spectral diffusion, as single molecule luminescence studies have uncovered that single molecules yield narrow (width  $\sim 0.5\text{nm}$ ) Lorentzian zero-phonon peaks with auxiliary vibronic modes[5]. This spectral diffusion can be

attributed to intermolecular interactions, and inhomogeneity leads to its Gaussian form.

## B. Ruby

All spectra were fit to Voigt profiles, which are a convolution between Gaussian and Lorentzian functions with variable widths, using the Levenberg Marquardt iteration algorithm in Origin's NLFit module. The specific function used for fitting and fitting details are contained in `DoubleVoigt.fdf` in the supplementary material. Since inhomogeneous broadening yields Gaussian distributions and homogenous broadening yields Lorentzian distributions, the Voigt profile best represents the broadening effects. Fitting details and fitting functions are detailed in the appendix and supplementary information. Figure 8 shows the photoluminescence spectrum acquired at 40K, 10mTorr, and depicts the features that will be discussed below.

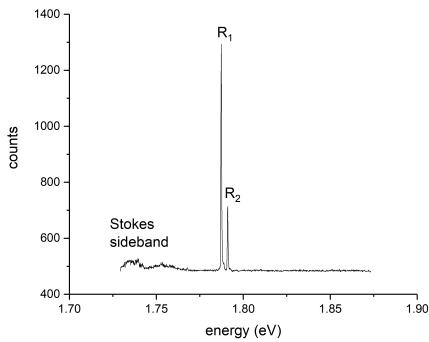


FIG. 8. Photoluminescence spectrum acquired at 40K, 10mTorr for ruby, shown over the entire acquisition range.

The most notable feature of the photoluminescence spectrum is the pair of peaks labeled  $R_1$  and  $R_2$ , near 1.79eV, which correspond to the optical transitions of  $E \rightarrow {}^4A_2$  and  $2A \rightarrow {}^4A_2$  respectively. Also note the Stokes (lower frequency) sidebands in the 1.73eV~1.80eV region, which correspond to vibronic modes of  ${}^4A_2$ .

### 1. $R_1$ , $R_2$ peaks

First, the positions of the peaks should be discussed. The peak positions for a system modeled as a four-level system with  $\epsilon_0 \ll \epsilon_1 < \epsilon_2 \ll \epsilon_3$ ;  $\epsilon_1 - \epsilon_0, \epsilon_3 - \epsilon_2 \gg \hbar\omega_D > \epsilon_2 - \epsilon_1$  has been calculated theoretically. The peak positions for  $R_n$  ( $n=1,2$ )  $x_{c,n}$  is given as in equation 2, where  $T_D$  is the Debye temperature, i.e. the temperature of the Debye acoustic phonon (=760K for this system). The experimental data is in good agreement with this model (Figure 9).

$$x_{c,n}(T) = \epsilon_n + \alpha_n \left(\frac{T}{T_D}\right)^4 \int_0^{T/T_D} dx \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (2)$$

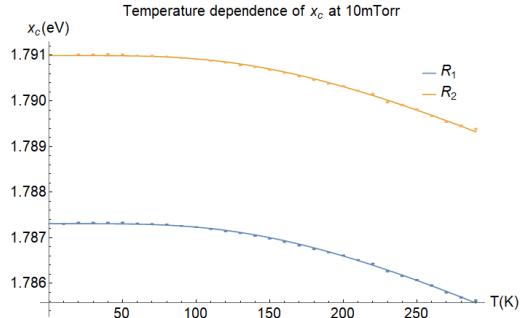


FIG. 9. Peak position  $x_c$  over temperature. Fit to equation 2.  $\epsilon_1 = 1.78731 \pm 0.000006$  ( $p = 7.19 \times 10^{-131}$ ),  $\alpha_1 = -0.04072 \pm 0.00030$  ( $p = 7.49 \times 10^{-40}$ ),  $R^2 = 1$ ;  $\epsilon_2 = 1.79099 \pm 0.000006$  ( $p = 1.00 \times 10^{-124}$ ),  $\alpha_2 = -0.03917 \pm 0.00034$  ( $p = 8.13 \times 10^{-37}$ ),  $R^2 = 1$ .

Qualitatively, this decrease in energy over temperature can be explained as the decrease in orbital overlap between  ${}^4A_2$  and  ${}^2E$  as the crystal expands thermally in the [0001] direction, as is typical for a hexagonal structure. The splitting between the two  $R$ -lines increases by a nearly undetectable amount, indicating the increase of the Jahn-Teller effect, albeit minuscule.

For zero-phonon modes, the main contributions to peak broadening are inhomogeneous spectral broadening due to crystal strain, which yield a Lorentzian distribution, and the natural broadening, as well as experimental factors such as the aperture size. Only the natural broadening, which is temperature dependent, can be quantified. For the same four-level system model discussed above, the FWHM can be computed. The FWHM  $\Gamma_n$  of  $R_n$  peaks  $n = 1, 2$ , is given as equation 3, where  $T_D$  is the Debye temperature. ( $\bar{\alpha}_n$  is distinct from  $\alpha_n$  in equation 2.)[6] As it can be seen in Figure 10, the experimental ruby FWHM is consistent with this model. The temperature-independent terms are represented as the constant term  $\Gamma_n$ .

$$\Gamma_n(T) = \Gamma_n + \bar{\alpha}_n \left(\frac{T}{T_D}\right)^7 \int_0^{T/T_D} dx \frac{x^6 e^x}{(e^x - 1)^2} \quad (3)$$

We now examine the relationship between the two peaks. Under the steady-state assumption, the two-level model can be applied again to the  $E$  and  $2A$  levels to compare their relative intensities. The ratio of peak intensities corresponds to the ratio of occupancies of each state at the steady-state, and thus is proportional to  $\exp(E/k_B T)$ .[4] This relationship is shown in Figure 11. The fitted value for  $E_{12}$  is consistent with the results shown in Figure 9.

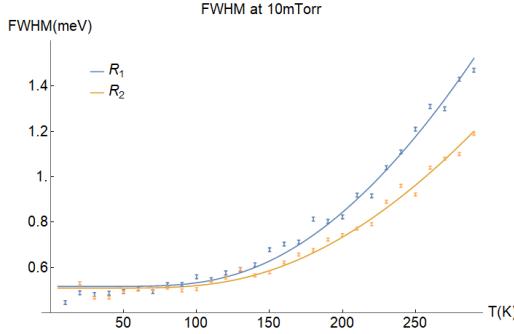


FIG. 10. FWHM of each peak over temperature. Fit to equation 3.  $\Gamma_1 = 4.163 \pm 0.067$  ( $p = 1.09 \times 10^{-30}$ ),  $\bar{\alpha}_1 = 409.6 \pm 8.4$  ( $p = 6.74 \times 10^{-28}$ ),  $R^2 = 0.998452$ ;  $\Gamma_2 = 4.103 \pm 0.050$  ( $p = 6.94 \times 10^{-33}$ ),  $\bar{\alpha}_1 = 281.6 \pm 6.2$  ( $p = 2.36 \times 10^{-26}$ ),  $R^2 = 0.998917$ .

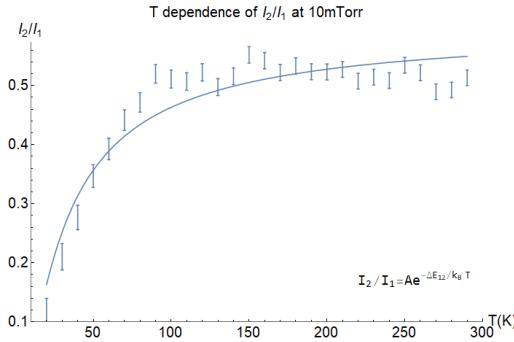


FIG. 11.  $I_2/I_1$  over temperature. Fit to  $(I_2/I_1) = A \exp(-E_{12}/k_B T)$ .  $A = 0.601 \pm 0.013$  ( $p = 0$ ),  $E_{12} = 0.0022 \pm 0.0002$  ( $p = 0$ ),  $R^2 = 0.995186$ .

Overall, the energy level model is consistent with the experimental peak positions, FWHMs, and relative intensities.

## 2. Stokes sideband

While the experimental methods utilized in this lab provide too high of a signal-to-noise ratio to quantitatively analyze these peaks, their energy range and general shape are in good agreement with previous reports on the photoluminescence spectrum of ruby.[7],[8] The shift of the Stokes sidebands correspond to vibronic modes, i.e., phonon-coupled modes of  $\text{Cr}^{3+}$ , which introduce energy levels above  ${}^4A_2$ . The area of the peaks showed a qualitatively decreasing trend over temperature (Figure 12, Figure 16), which is consistent with the temperature-dependent change of distribution for the general boson gas.

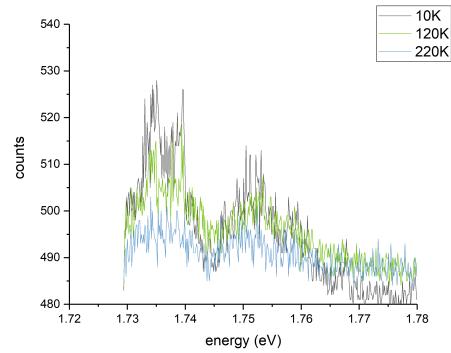


FIG. 12. Some representative spectra in the 1.73eV 1.78eV Stokes sideband range.  $P = 10\text{mTorr}$ , temperature given in figure.

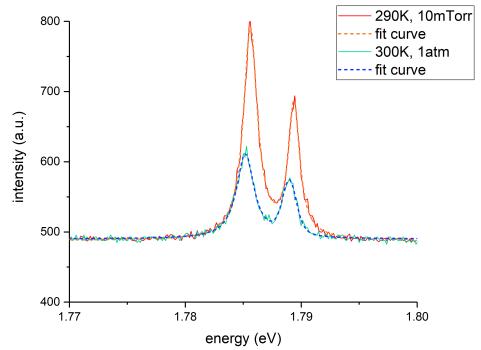


FIG. 13. Acquired  $R$  peaks for the 290K, 10mTorr and 300K, 1atm cases, and their best fit Voigt profiles. Intensity normalized arbitrarily for clarity.

## 3. Environmental effects

We now compare the data acquired at room temperature at vacuum (10mTorr) and 1atm (Figure 13). Previous investigations on the pressure dependence of the peak positions [9] model the pressure and temperature dependence linearly, for reasonable pressures and temperatures.

$$x_{c,k} = \alpha_{k,1} + \alpha_{k,2}p + \alpha_{k,3}(T - T_{ref}) \quad (4)$$

Equation 4 shows the linear model. From previous data,  $\alpha_{1,1} = 14402.5 \pm 0.4$  [ $\text{cm}^{-1}$ ],  $\alpha_{1,2} = -7.59 \pm 0.04$  [ $\text{cm}^{-1}\cdot\text{GPa}^{-1}$ ],  $\alpha_{1,3} = -0.130 \pm 0.006$  [ $\text{cm}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ];  $\alpha_{2,1} = 14402.5 \pm 0.4$  [ $\text{cm}^{-1}$ ],  $\alpha_{2,2} = -7.615 \pm 0.004$  [ $\text{cm}^{-1}\cdot\text{GPa}^{-1}$ ],  $\alpha_{2,3} = -0.122 \pm 0.006$  [ $\text{cm}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ]. For the 290K, 10mTorr case,  $x_{c,1}$  and  $x_{c,2}$  can be predicted to be  $1.78605 \pm 0.00005$  [eV] and  $1.78971 \pm 0.00005$  [eV], while for the 300K, 1atm case,  $x_{c,1}$  and  $x_{c,2}$  can be predicted to be  $1.78589 \pm 0.00005$  [eV] and  $1.78956 \pm 0.00005$  [eV]. Comparison of the predicted values and observed

values is shown in Figure 14.

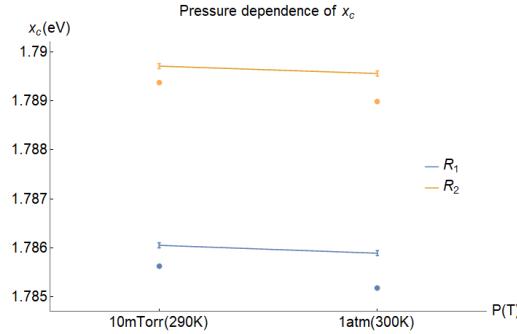


FIG. 14. Comparison of predicted and observed values. Error bars:  $2\sigma$ .

While the general trend is as predicted, the model deviates somewhat, especially for the high pressure case.

#### 4. Comparison of additional experimental data

Another set of experimental data, labeled AE in the eTL post by the TA, was also given for verification. By comparing the peak positions and relative intensities of  $R_1$  and  $R_2$  peaks, it can be confirmed that the AE data is erroneous. Discussions on the FWHM were omitted because FWHM also depends on experimental factors such as the aperture size of the monochromator, and may largely vary over separate experimental trials.

As the model used in section III B has been verified, the fact that the AE data does not fall within the error range of the fit data is sufficient to claim that the experimental data is erroneous.

While the claim cannot be made with absolute certainty, based on the arguments laid out in section III B 3, it is probable that a sufficient vacuum was not maintained during the acquisition of AE data. Another possible experimental error is the temperature difference between the temperature sensor and sample, which is a common issue in low temperature measurements. A remedy to this error would be to at least allow the system to come to its steady state equilibrium, so that the measurement error could be given as a function of temperature.

## IV. CONCLUSION AND OUTLOOK

Photoluminescence was utilized as a method of probing the energy levels for two model systems, rhodamine 590 in ethylene glycol and ruby. In either case, photoluminescence provided a consistent method of measuring the energy difference between the ground state and pertinent excited states, and broadening followed the Voigt profile.

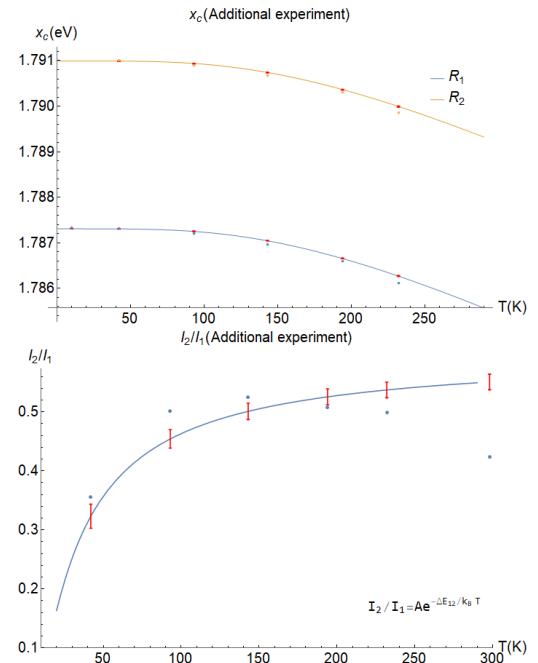


FIG. 15. Peak positions  $x_c$  (top) and relative peak intensity  $I_2/I_1$  (bottom) experimental data plotted together, with fit lines from Figures 9 and 11. Error bars (red) show range of possible measurement uncertainty at the claimed temperature values of the AE data given the model in Section III B holds;  $2\sigma$ .

In rhodamine 590, the photoemission was first verified to be fluorescence, with a Stokes shift of  $0.282 \pm 0.003$  [eV]. The photoluminescence spectrum was observed to have a Gaussian profile, which is consistent with the effect of inhomogeneous spectral diffusion described by previous studies.

In ruby,  $R_1$  and  $R_2$  optical transitions expected from symmetry considerations were observed as two distinct peaks with a well defined peak separation. Using a 4-level system model, the full width half maximum and peak positions were shown to agree well with theory, and the temperature dependence of the relative intensity of the two peaks were discussed. In addition, a Stokes sub-band of single phonon coupled vibronic modes were also observed. While pressure dependence did not strictly adhere to theoretical predictions, it was seen that a larger deviation could be seen for 1atm rather than vacuum pressures.

This topic could be further explored by introducing new factors, e.g., introducing new broadening mechanisms or changing the energy levels. One interesting effect that could be explored further is the solvent effect of rhodamine 590, and the doping level's influence on the spectrum of ruby.

## ACKNOWLEDGMENTS

Many helpful comments on the experimental procedure and data processing were provided by the TAs.

---

- [1] M. Fox, *Quantum optics : an introduction* (Oxford University Press, Oxford New York, 2006).
- [2] H. Watanabe, N. Hayazawa, Y. Inouye, and S. Kawata, DFT Vibrational Calculations of Rhodamine 6G Adsorbed on Silver: Analysis of Tip-Enhanced Raman Spectroscopy, *The Journal of Physical Chemistry B* **109**, 5012 (2005).
- [3] L. Fallarino, C. Binek, and A. Berger, Boundary magnetization properties of epitaxial Cr<sub>2-x</sub>Al<sub>x</sub>O<sub>3</sub> thin films, *Physical Review B* **91**, 10.1103/physrevb.91.214403 (2015).
- [4] R. C. Powell, *The interaction of chromium ions in ruby crystals*, Tech. Rep. AD-651914 (Air Force Cambridge Research Laboratories, Bedford, MA, 1966).
- [5] F. Schindler, J. M. Lupton, J. Feldmann, and U. Scherf, enA universal picture of chromophores in  $\pi$ -conjugated polymers derived from single-molecule spectroscopy, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **101**, 14695 (2004).
- [6] D. E. McCumber and M. D. Sturge, Linewidth and temperature shift of the r lines in ruby, *Journal of Applied Physics* **34**, 1682 (1963).
- [7] U. Rothamel, J. Heber, and W. Grill, Vibronic sidebands in ruby, *Zeitschrift fr Physik B Condensed Matter* **50**, 297 (1983).
- [8] S. Raghavan, P. K. Imbrie, and W. A. Crossley, Spectral analysis of r-lines and vibronic sidebands in the emission spectrum of ruby using genetic algorithms, *Applied Spectroscopy* **62**, 759 (2008).
- [9] R. G. Munro, G. J. Piermarini, S. Block, and W. B. Holzapfel, Model line-shape analysis for the ruby r lines used for pressure measurement, *Journal of Applied Physics* **57**, 165 (1985).

### 1. Appendix

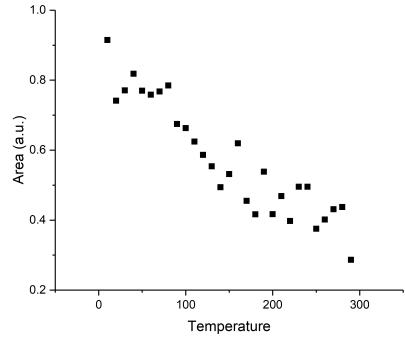


FIG. 16. Integrated area of Stokes sideband over temperature.

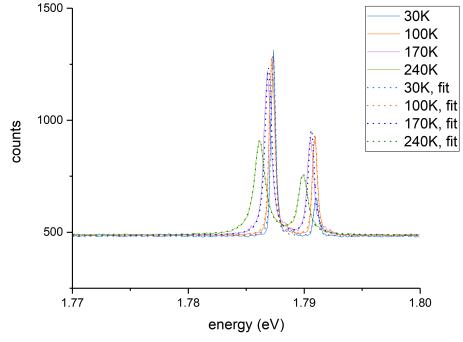


FIG. 17. A sampling of ruby peaks fit to Voigt profiles. Other fitted curves are contained within the supplementary material.

Experimental conditions not mentioned in the report are contained within the supplementary material.