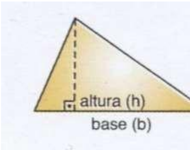
ÁREAS DE POLÍGONOS

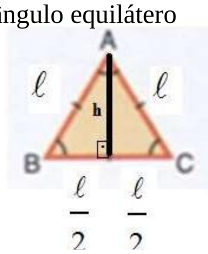
Área dos Triângulos

1. Em função da base e da altura
Considere um triângulo ABC, de base b e altura h, cuja área desejamos calcular.



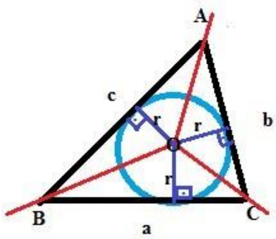
$$S_{ABC} = \frac{b.h}{2}$$

2. Triângulo equilátero



$$h_{\Delta} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \qquad S_{\Delta} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$$

3. Em função do raio da circunferência inscrita



$$S_{ABC} = S_{COB} + S_{AOC} + S_{AOB}$$

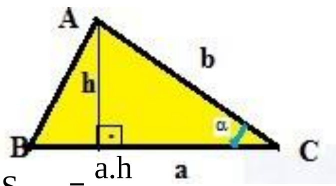
$$S_{ABC} = \frac{a.r}{2} + \frac{b.r}{2} + \frac{c.r}{2}$$

$$S_{ABC} = \frac{r}{2}(a + b + c)$$

$$S_{ABC} = \frac{r}{2}.2p$$

$$S_{ABC} = r.p$$

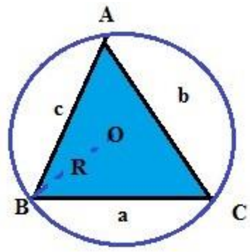
4. Em função de dois lados e do ângulo entre eles



$$S_{ABC} = \frac{a.h}{2}$$

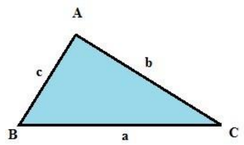
$$S_{ABC} = \frac{a.b.sen\alpha}{2}$$

5. Em função do raio da circunferência circunscrita



$$S_{ABC} = \frac{a.b.c}{4R}$$

6. Em função dos lados



$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

(Fórmula de Hierão)

onde $p = \frac{a + b + c}{2}$ é o semiperímetro

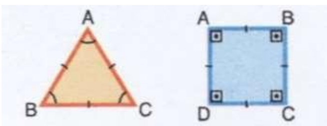
Polígonos circunscritos

Dizemos que um polígono é circunscritível quando ele admite uma circunferência inscrita.
A área de um polígono circunscrito a um circunferência de raio r é:

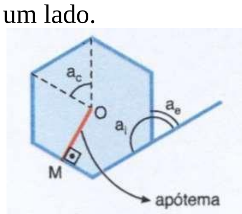
$$S = p.r$$

Polígonos regulares

Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os seus lados congruentes e todos os seus ângulos internos congruentes. Dizemos que um polígono regular é eqüilátero e eqüiângulo.

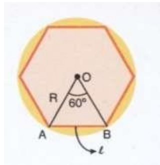


Apótema de um polígono regular é o segmento com uma extremidade no centro e a outra no ponto médio de um lado.



O apótema de um polígono regular é o raio da circunferência inscrita.

Vamos ilustrar com um caso particular importante, o do hexágono regular inscrito em uma circunferência. Dado o raio R da circunferência, vamos determinar o lado ℓ e o apótema a desse hexágono.



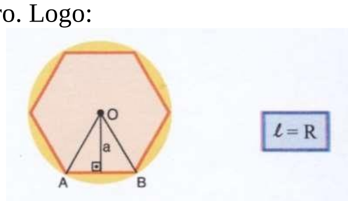
No triângulo OAB da figura acima, temos:

$$\text{Med (AOB)} = \frac{360°}{6} = 60°$$

Por outro lado, esse triângulo é isósceles, pois

$$\overline{OA} \cong \overline{OB}$$

Assim, o Δ OAB é isósceles com ângulo interno de 60°, ou seja, é eqüilátero. Logo:

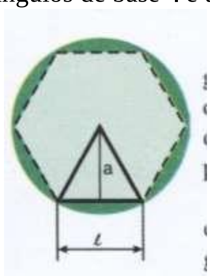


Conseqüentemente, o apótema a é a altura do triângulo eqüilátero:

$$a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Área de polígono regular

Considere um polígono regular de n lados, onde ℓ é o comprimento de cada lado e a o comprimento do apótema.
Podemos decompor esse polígono em n triângulos de base ℓ e altura a.



Então:

$$\left.\begin{aligned} A_{pol} &= n\,.\,A_T \\ A_T &= \frac{\ell\,.\,a}{2} \end{aligned}\right\} A_{pol} = \frac{n\,.\,\ell\,.\,a}{2}$$

Sendo n. ℓ = 2p (perímetro), vem:

$$A_{pol} = \frac{2\,pa}{2}$$

$$A_{pol} = p.a$$

Exercícios de Aula

01. Um triângulo tem lados medindo 5cm, 6cm e 9cm.

a) calcule sua área 2p = 20 p =10

S= $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

= $\sqrt{10(10-9)(10-6)(10-5)}$

=$\sqrt{10.1.4.5} = \sqrt{2.5}.2^2.5 = 10\sqrt{2}cm^2$

b) quanto mede o raio da circunferência inscrita?

$10\sqrt{2} = 9.\frac{r}{2} + 6.\frac{r}{2} + 5.r/2$ = 10r

R=√2

c) quando mede o raio da circunferência circunscrita ?

2R/6 = 5/h h = 30.2R

$10\sqrt{10} = \frac{1}{2}.\frac{9.30}{2R} = 40R\sqrt{2} = 270$

02. Dois lados de um triângulo medem 2cm e 4cm e o ângulo entre eles mede 45º . Qual a área deste triângulo?

S=1/2.4.2.sen45° = ½.4.2.$\sqrt{2}/2$

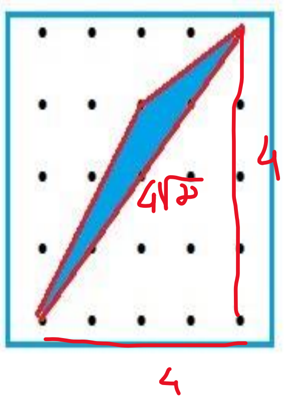
$2\sqrt{2}cm2$

03. (FUVEST) Considere o triângulo

representado na malha pontilhada com quadrados de lados iguais a 1cm. A área do triângulo, em centímetros quadrados é:

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

Diagonal=4$\sqrt{2}$
H=diagonal/2
S = ½.4$\sqrt{2}$.$\sqrt{2}$/2



04. Um polígono de 48 cm de perímetro está circunscrito a uma circunferência de raio 3cm. Calcule a área desse polígono.
S=a.r+b.r+c.r.../2

S=r/2.(a+b+c...) = 3/2.48

S=72cm2

05. Um hexágono regular de 48 cm de perímetro está inscrito numa circunferência de raio 3 cm. Calcule a área desse polígono 6l=48 l=8cm

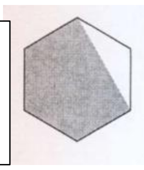
S=6.1/2.8.8$\frac{\sqrt{3}}{2} = 96\sqrt{3}cm2$

06. (MACK) Se o hexágono regular da figura tem área 2, a área do pentágono assinalado é:

(A) $\frac{2}{7}$

(B) $\frac{7}{3}$

S=1/2.l.l$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$l^2\sqrt{3}/4$=s triang
equi=1/3
2-1/3=5/3



(C) $\frac{5}{6}$

(D) $\frac{4}{3}$

(E) $\frac{5}{3}$

Tarefa Básica

01. (UEL) O hexágono ABCDEF da figura ao lado é eqüilátero com lados de 5cm e seus ângulos internos de vértice A, B, D, E medem 135° cada um.
A área desse hexágono, em centímetros quadrados, é igual a

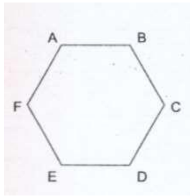
(A) $\frac{25(\sqrt{2}+1)}{2}$

(B) $\frac{75}{2}$

(C) 50

(D) $50\sqrt{2}$

(E) 25($\sqrt{2}$ +1)



02. (FATEC) A altura de um triângulo eqüilátero e a diagonal de um quadrado tem medidas iguais. Se a área do triângulo eqüilátero é $16\sqrt{3}m^2$, então a área do quadrado,

em metros quadrados é:
(A) 6
(B) 24
(C) 54
(D) 96
(E) 150

03. (UFSCAR) Seja um triângulo ABC eqüilátero de lado 2. No interior desse triângulo, cuja área é $\sqrt{3}$, foi escolhido arbitrariamente um ponto P. A soma das distâncias de P a cada um dos lados do triângulo vale

(A) $\sqrt{2}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) 2

(D) 3

(E) $2\sqrt{3}$

04. (UNICAMP) Um triângulo escaleno ABC tem área igual a 96 m^2. Sejam M e N os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente, faça uma figura e calcule a área do quadrilátero BMNC

05. (FUVEST) O triângulo ABC está inscrito numa circunferência de raio 5 cm. Sabe-se que A e B são extremidades de um diâmetro e que a corda BC mede 6 cm. Então a área do triângulo ABC, em cm^2, vale
(A) 24
(B) 12

(C) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$

(D) $6\sqrt{2}$

(E) $2\sqrt{3}$

06. (UFMS) Considere um hexágono regular inscrito numa circunferência

de raio 4cm. Calcular o quadrado da área de um dos triângulos determinados por três vértices consecutivos do hexágono.

Respostas da Tarefa Básica

01. (E)
02. (B)
03. (B)
04. $72m^2$
05. (A)
06. 48

1.Shexag=2.striang+sretang
S retang. = 5.5$\sqrt{2} = 25\sqrt{2}$
H tri rg=(5.5)/5.$\sqrt{2} = 5.\frac{\sqrt{2}}{2}$
S triang={[5($\sqrt{2}$)]. [5($\sqrt{2}$)/2]}/2
S= 2.(25/2)+25$\sqrt{2}$
S=25($\sqrt{2}$ + 1)

2. $16\sqrt{3} = (l^2.\sqrt{3})/4$ (Striang)
L = 8
H = l$\frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$
H = d
D=l$\sqrt{2}$ $4\sqrt{3} = l\sqrt{2}$ l = 2$\sqrt{6}$
S = $l^2 = 4.6 = 24m2$

3. S=$\frac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$
h1+h2+h3=√3

4. K=2 (razao lado ABC e AMN)
k2=4 (razão area)
96/s=4
S =24
96-24=72cm2

5. X2=64 x=8
S=(10.8.6)/(5.4)
S = 24

6. R = Lhex
4.6=24 =p
2p = 48cm