

Consideriamo ora il caso in cui ci sia sempre un servitore disponibile

□ Sistema $M/M/\infty$

$$\lambda_k = \lambda$$

$\mu_k = k\mu$ il servitore cresce prop. col carico

$$P_k = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right]^{-1} = \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \right]^{-1} \\ &= \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right]^{-1} = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \end{aligned}$$

$$\boxed{P_k = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} ; k \geq 0} \quad \text{Poissoniana}$$

$$L_s = \mathbb{E}\{k\} = \lambda/\mu$$

$$L_q = \emptyset, \quad W_q = \emptyset$$

$$W_s = \frac{L_s}{\mathbb{E}\{\lambda\}} = \left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot W_x$$

Non ha senso definire il fattore di utilizzo.

Il numero di servitori è c per cui il tasso di servizio può arrivare fino a $c\mu$.

$$\lambda_k = \lambda$$

$$\mu_k = \min\{k\mu, c\mu\}$$

da cui

$$P_k = \begin{cases} P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} & ; k \leq c \\ P_0 \prod_{i=0}^{c-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} \prod_{j=c}^{k-1} \frac{\lambda}{c\mu} & ; \mu > c \end{cases}$$

\Downarrow

$$P_k = \begin{cases} P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} & ; k \leq c \\ P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{c! c^{k-c}} & ; k > c \end{cases}$$

$E\{A\}E\{T_x\} = \frac{\lambda}{\mu}$ e max tasso di smaltimento c ,

quindi il fattore di utilizzo è $\rho = \frac{\lambda}{c\mu}$

$$P_k = \begin{cases} P_0 \frac{(c\rho)^k}{k!} & ; k \leq c \\ P_0 \frac{(c\rho)^k}{c! c^{k-c}} = P_0 \frac{\rho^k c^c}{c!} & ; k > c \end{cases}$$

tasso complessivo di servizio μ_{TOT}

Imponiamo $\sum_{k=0}^{+\infty} P_k = 1$ per determinare P_0 .

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \sum_{k=c}^{+\infty} \frac{\rho^k c^c}{c!} \right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \underbrace{\sum_{k=c}^{+\infty} \rho^{k-c}}_{\frac{1}{1-\rho}} \right]^{-1}$$

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}$$

Un pkt/ut va in coda se ce ne sono già c nel sistema che stanno occupando tutti i server

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\text{queue}\} &= \sum_{k=c}^{+\infty} P_k = \sum_{k=c}^{+\infty} P_0 \frac{c^c}{c!} \rho^k \\ &= P_0 \frac{(c\rho)^c}{c!} \sum_{k=c}^{+\infty} \rho^{k-c} = P_0 \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \\ &= \frac{\frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!} \frac{1}{1-\rho}} \end{aligned}$$

Formula C-Erlang $C(c, A) = \frac{\frac{A^c}{c!} \frac{1}{1-A/c}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^c}{c!} \frac{1}{1-A/c}}$

quindi

$$\mathbb{P}\{\text{queue}\} = C(c, A) \quad \text{con } c = \# \text{ server}$$

$$A = c\rho$$

vale o per $\rho \neq 0$

mediamente in coda c'è un numero di pkt/ut (26)

$$L_q = E\{q\} = \sum_{k=c}^{+\infty} \underbrace{(k-c)}_{\substack{\text{ut. in coda} \\ \text{nello stato } k}} P_k = G(c, \rho) \frac{\rho}{1-\rho}$$

il numero medio di pkt/ut in servizio ($x = k - q$) è

$$L_x = E\{x\} = \sum_{k=0}^c \underbrace{k P_k}_{\substack{\text{ut in servizio} \\ \text{nello stato } k}} + \sum_{k=c+1}^{+\infty} \underbrace{c P_k}_{\substack{\text{ut in servizio} \\ \text{nello stato } k}} = c\rho$$

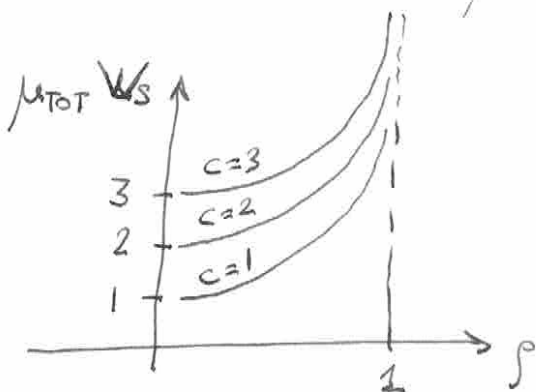
numero medio pkt/ut. nel sistema

$$L_s = L_q + L_x = \left[\frac{G(c, \rho)}{1-\rho} + c \right] \rho \quad , \quad L_s = E\{k\}$$

dalla relazione di Little

$$W_q = \frac{L_q}{E\{\lambda\}} = \frac{G(c, \rho)}{\mu_{TOT}(1-\rho)} \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu_{TOT}}$$

$$W_s = \frac{L_s}{E\{\lambda\}} = \frac{G(c, \rho) + c(1-\rho)}{\mu_{TOT}(1-\rho)}$$



Osservazione: conviene un sistema con pochi servitori veloci rispetto ad uno con molti servitori lenti

↓
verificato

Ex. Si consideri un sistema M/M/c con
 $c=2$ servitori e $\mu=4$ ut/s. all'equilibrio.

Si determini il max ritmo degli arrivi
 affinché il temp medio in coda non
 superi $W_q^* = 300$ ms.

$$W_q = \frac{G(c, c\rho)}{\mu_{TOT}(1-\rho)} \quad ; \quad \mu_{TOT} = c\mu = 8 \text{ ut/s.}$$

$$G(c, A) = \frac{\frac{A^c}{c!} \frac{1}{1 - \frac{A}{c}}}{\sum_{k=0}^{c-1} \frac{A^k}{k!} + \frac{A^c}{c!} \frac{1}{1 - \frac{A}{c}}} \quad ; \quad A = c\rho = \frac{1}{4}$$

$$\rho = \frac{1}{\mu_{TOT}} = \frac{1}{8}$$

$$W_q \leq W_q^* \Leftrightarrow \frac{G(2, \frac{\lambda}{4})}{1 - \lambda/8} \leq 8 W_q^*$$

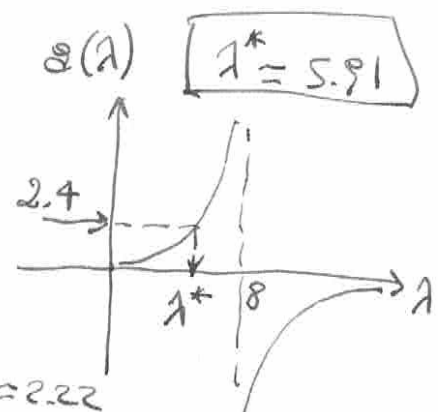
$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \lambda/8}}{1 + \frac{\lambda}{4} + \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \lambda/8}} \cdot \frac{1}{1 - \lambda/8} \leq 8 W_q^* = 2.4 \text{ ut.}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\lambda^2}{32 \left(1 - \frac{\lambda}{8}\right) \left(1 + \frac{\lambda}{8}\right)} \leq 2.4$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\lambda^2}{32} \frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{64}}}_{g(\lambda)} \leq 2.4$$

$$g(6) \approx 2.57, \quad g(5) \approx 1.28, \quad g(5.7) \approx 2.06, \quad g(5.8) \approx 2.22$$

$$g(5.9) \approx 2.38, \quad g(5.95) \approx 2.47, \quad g(5.92) \approx 2.42, \quad g(5.91) \approx 2.402$$

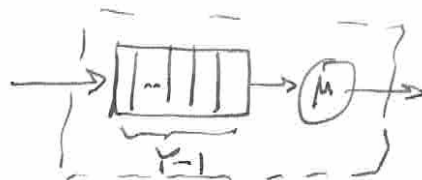


Vediamo ora la caratterizzazione di un sistema con coda finita (capacità del buffer limitata).

■ Sistema $M/M/1/Y$ — al max Y pkt/ut nel sistema
di cui 1 nel server

Se la coda è piena si scartano gli arrivi

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & ; k < Y \\ 0 & ; k \geq Y \end{cases}$$



$$\mu_k = \mu$$

$$P_k = \begin{cases} P_0 \prod_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda}{\mu} = P_0 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^k & ; k \leq Y \\ 0 & ; k > Y \end{cases}$$

note

non si definisce un fattore di utilizzo che dipenderebbe dallo stato rispetto a Y . Definiamo $A = \frac{\lambda}{\mu}$

$$P_0 = \left[1 + \sum_{k=1}^Y A^k \right]^{-1} = \left[\frac{1 - A^{Y+1}}{1 - A} \right]^{-1} \quad A < 1$$

\uparrow
" $\left[\sum_{k=0}^Y A^k \right]^{-1}$ "

da cui

$$P_k = \begin{cases} \frac{1 - A}{1 - A^{Y+1}} A^k & ; k \leq Y \\ 0 & ; k > Y \end{cases} \quad ; k \geq 0$$

La prob. di scartare un arrivo è la prob. che ci siano già Y pkt/ut. nel sistema

$$P_Y = \frac{(1 - A) A^Y}{1 - A^{Y+1}} = P\{\text{block}\}$$

numero medio utenti nel sistema

$$L_s = \sum_{k=0}^{+\infty} k P_k = \underbrace{\frac{A}{1-A}}_{\text{come M/M/1}} - \underbrace{\frac{(Y+1)A^{Y+1}}{1-A^{Y+1}}}_{\text{limitazione buffer}}$$

ritmo medio degli arrivi

$$\begin{aligned} E\{\lambda\} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P_k = \lambda \sum_{k=0}^{Y-1} P_k = \lambda (1 - P_Y) \\ &\stackrel{!}{=} \lambda \frac{1 - A^Y}{1 - A^{Y+1}} \qquad \lambda \left(1 - \underbrace{\sum_{k=Y}^{+\infty} P_k}_{P_Y}\right) \end{aligned}$$

dalla relazione di Little $W_s = \frac{L_s}{E\{\lambda\}}$

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}$$

dalla relazione di Little $L_q = E\{\lambda\} W_q$

Consideriamo ora un caso di interesse per la rete telefonica in cui possono entrare utenti fino a che li si può servire (no code) e poi vengono scartati (es. commut. di circuito)

$$\lambda_k = \begin{cases} \lambda & ; k < Y \\ \emptyset & ; k \geq Y \end{cases}$$

$$\mu_k = k\mu \quad (\text{il caso } k \geq Y \text{ è contemplato in } \lambda_k)$$

$$P_k = P_\emptyset \sum_{i=\emptyset}^{+\infty} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} = \begin{cases} P_\emptyset \prod_{i=\emptyset}^{k-1} \frac{\lambda}{(i+1)\mu} & ; k \leq Y \\ \emptyset & ; k > Y \end{cases}$$

$$\Rightarrow P_k = \begin{cases} P_\emptyset \frac{A^k}{k!} & ; k \leq Y \\ \emptyset & ; k > Y \end{cases} \quad A = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_\emptyset = \left[1 + \sum_{i=\emptyset}^Y \frac{A^i}{i!} \right]^{-1} = \left[\sum_{i=\emptyset}^Y \frac{A^i}{i!} \right]^{-1}$$

quindi

$$P_k = \begin{cases} \frac{\frac{A^k}{k!}}{\sum_{i=\emptyset}^Y \frac{A^i}{i!}} & ; k \leq Y \\ \emptyset & ; k > Y \end{cases}$$

La prob. di blocco degli arrivi è la prob. che tutti i servitori risultino occupati P_Y

$$P\{\text{block}\} = P_Y = \frac{\frac{A^Y}{Y!}}{\sum_{i=\emptyset}^Y \frac{A^i}{i!}} = B(Y, A)$$

formula B-Erlang

$$L_s = \sum_{k=0}^{+\infty} k P_k = \frac{\sum_{j=0}^Y j \frac{A^j}{j!}}{\sum_{i=0}^Y \frac{A^i}{i!}} = \frac{A \sum_{j=1}^Y \frac{A^{j-1}}{(j-1)!}}{\sum_{i=0}^Y \frac{A^i}{i!}}$$

$$= A \frac{\sum_{i=0}^{Y-1} \frac{A^i}{i!}}{\sum_{i=0}^Y \frac{A^i}{i!}} = A [P_0 + P_1 + \dots + P_{Y-1}]$$

$P_k = 0$
se $k > Y$

$$= A [1 - P_Y] = A [1 - B(Y, A)]$$

Nessun utente in coda finché il # di server
egualizza quello degli utenti/pkt.

$$L_q = 0 \quad W_q = 0$$



$$W_s = E\{T_x\} = \frac{1}{\mu}$$

$$E\{\lambda\} = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda_k P_k = \lambda (1 - P_Y) = \lambda [1 - B(Y, A)]$$

$$L_s = E\{k\} = W_s E\{\lambda\} = A [1 - B(Y, A)]$$

