Sistema gravitazionale di n corpi

Pietro Augusto Allesina

11 maggio 2024

Indice

1 Introduzione

Il problema di Keplero è un caso particolare del Problema dei due corpi, studiato tramite la meccanica classica, che consiste nel trovare la posizione e la velocità in funzione del tempo di due corpi puntiformi collocati in uno spazio che interagiscono puramente per attrazione gravitazionale conoscendo le loro masse, posizioni e velocità iniziali.

L'obiettivo di questo progetto è lo studio dal punto di vista meccanico di un sistema composto da n corpi che interagiscono con forze solamente di tipo gravitazionale. Lo studio vuole ricreare il movimento relativo di corpi celesti nello spazio, tramite l'utilizzo di metodi di integrazione numerica.

Il problema è stato semplificato in uno spazio bi-dimensionale, ma le osservazioni e i calcoli svolti sono analoghi al caso reale.

2 Descrizione del sistema

2.1 Definizione delle variabili

Le variabili libere del sistema sono, per ogni corpo i, la posizione q_i e la sua derivata prima $\dot{q}_i$.

L'evoluzione del sistema dipende dalla massa m_i, costante nel tempo, dalla posizione q_0 e dalla velocità iniziale $\dot{q}_0$ di ciascun corpo. Il vettore delle condizioni iniziali è costituito quindi da $2n$ elementi.

2.2 Equazioni del moto

Ricaviamo la Lagrangiana del sistema

$$L = K - U$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} K_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} U_{ij}$$

$$L = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{q}}_{\mathbf{i}}^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} G \frac{m_i m_j}{||\mathbf{q}_{\mathbf{j}} - \mathbf{q}_{\mathbf{i}}||}$$

Applichiamo l'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0$$

Calcoliamo $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} m_k \dot{\mathbf{q}}_k{}^2\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\left(\frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{q}}_i{}^2\right) = m_i \dot{\mathbf{q}}_i$$

E la sua derivata rispetto a t:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i}\right) = \frac{d}{dt}(m_i \dot{\mathbf{q}}_i) = m_i \ddot{\mathbf{q}}_i$$

Calcoliamo $\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k+1}^{n} \frac{G m_k m_j}{|\mathbf{q}_k - \mathbf{q}_j|}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = \sum_{j \neq i} \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i}\left(\frac{G m_i m_j}{||\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j||}\right)$$

Ricordandoci che $\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_i}\left(\frac{1}{|\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j|}\right) = -\frac{(q_i - q_j)}{||\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j||^3}$, abbiamo

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_i} = -\sum_{j \neq i} G \frac{m_i m_j}{||\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j||^3}(\mathbf{q}_i - \mathbf{q}_j)$$

Si ottiene per ogni corpo la seguente equazione differenziale del secondo ordine

$$m_i \ddot{\mathbf{q}}_i = \sum_{j \neq i}^{n} G \frac{m_i m_j}{||\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i||^3}(\mathbf{q}_j - \mathbf{q}_i)$$

Come si può notare, la variazione di velocità dipende soltanto dalla posizione reciproca dei corpi, e non dalla loro velocità propria.

3 Metodo di risoluzione

La simulazione è stata svolta calcolando l'accelerazione di ciascun corpo come funzione della distanza dagli altri n corpi, ovvero col cosiddetto *particle-particle method*, o metodo diretto, che richiede un numero di computazioni nell'ordine di $\frac{1}{2}n^2$.

Per l'integrazione numerica è stato scelto il metodo di integrazione simplettico Runge-Kutta del 4° ordine, implementato in Python dal metodo *solve_ivp*() della libreria Scipy.

Per ovviare al problema dei cosiddetti ”piccoli denominatori” tipico di quando si cerca di calcolare il potenziale di un sistema in cui i corpi sono molto ravvicinati tra di loro, è stato aggiunto al denominatore della funzione che calcola il potenziale un parametro di softening, per evitare appunto che la funzione cresca eccessivamente a distanze minime.

4 Esempi

In seguito vengono presentati i grafici relativi ad alcune simulazioni svolte. Si noti che l'energia meccanica e la quantità di moto hanno un comportamento oscillatorio, che si aggira o attorno ad un valore medio o in alcuni casi tende a divergere.

4.1 Sistema Terra-Luna

I corpi esaminati sono Terra e Luna, che interagiscono solamente tra di loro senza l'influenza di forze esterne (es. il Sole).

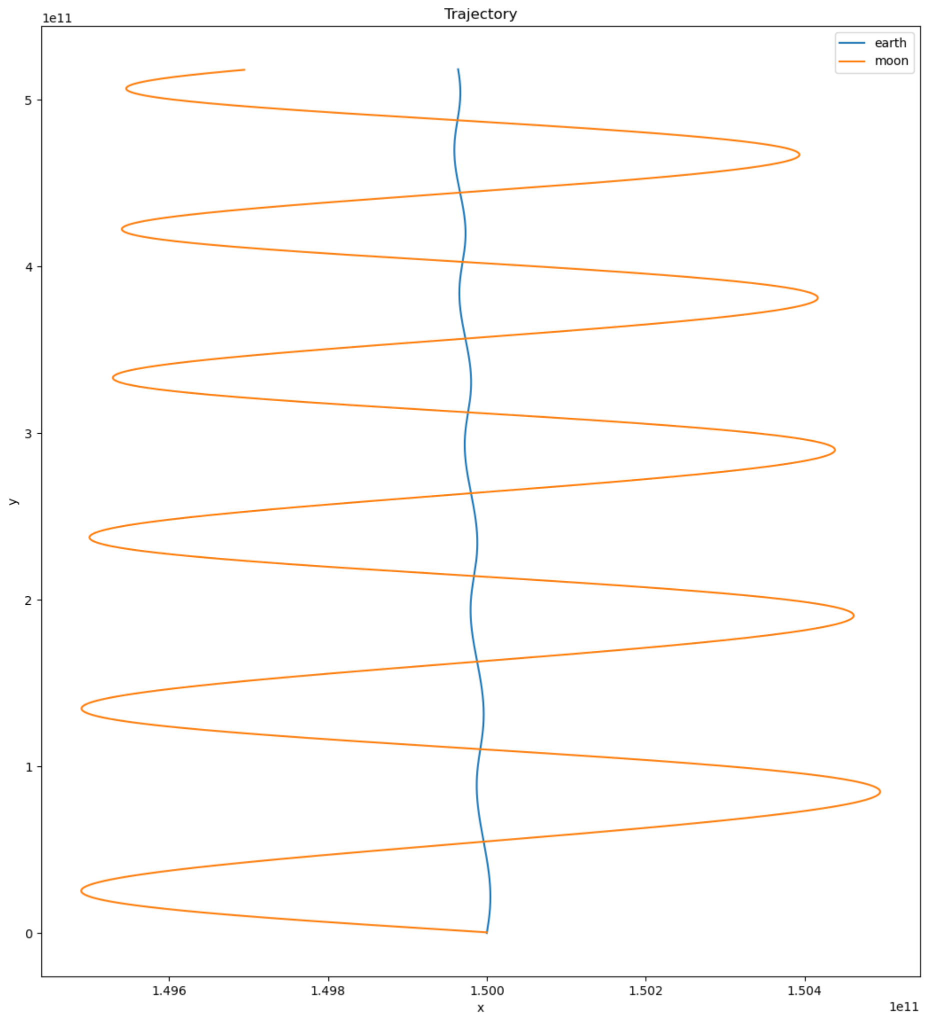

Figura 1: Orbita del sistema Terra-Luna

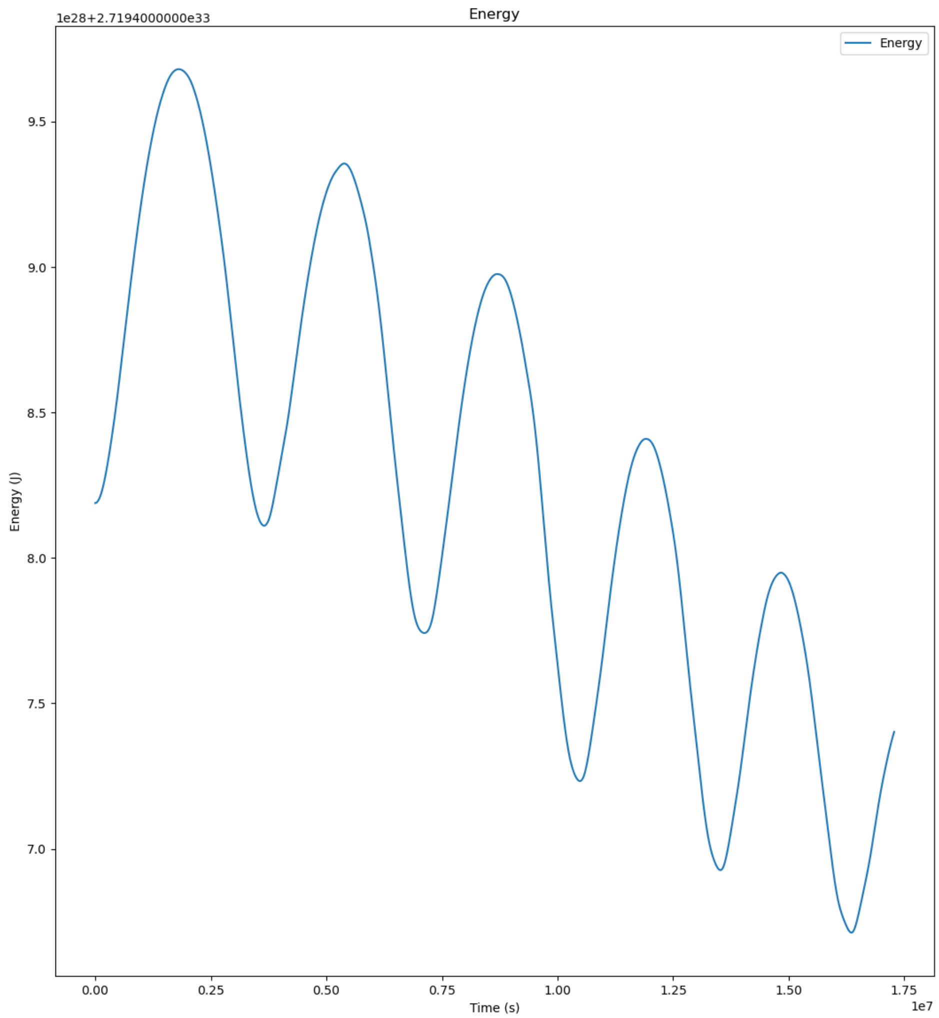

Figura 2: Energia meccanica del sistema Terra-Luna

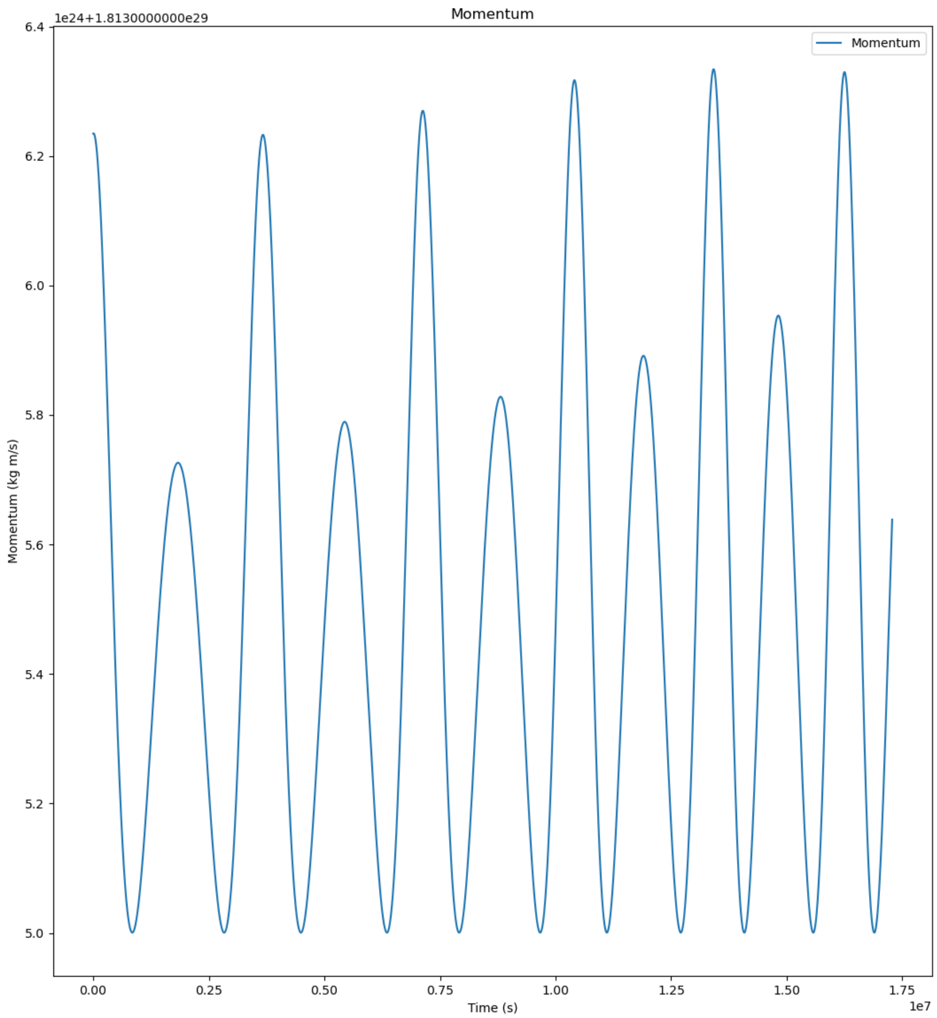

Figura 3: Quantità di moto del sistema Terra-Luna

4.2 Sistema Solare interno

Qui vediamo il comportamento dei quattro pianeti più interni del Sistema Solare, più la Luna. Si notino le anomalie nelle orbite di Marte e della Luna dovute all'errore incrementale introdotto dal metodo diretto di risoluzione.

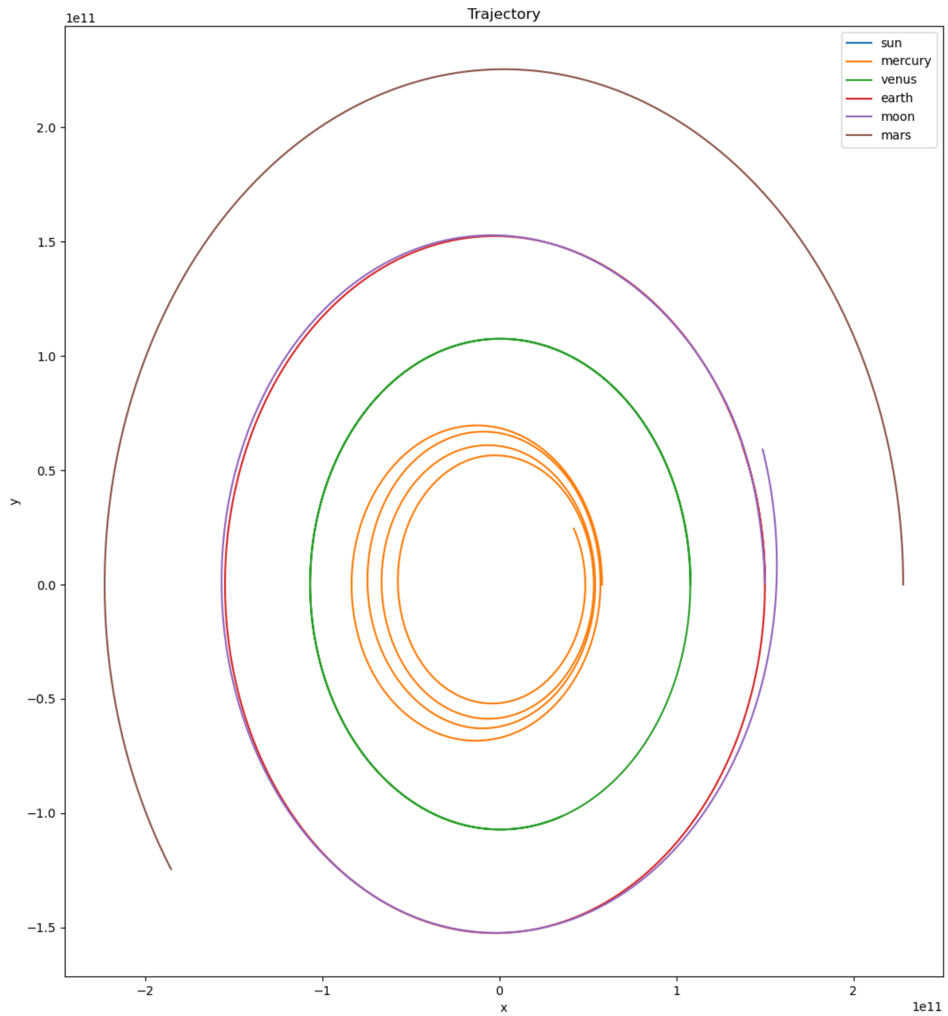

Figura 4: Orbita del Sistema Solare interno

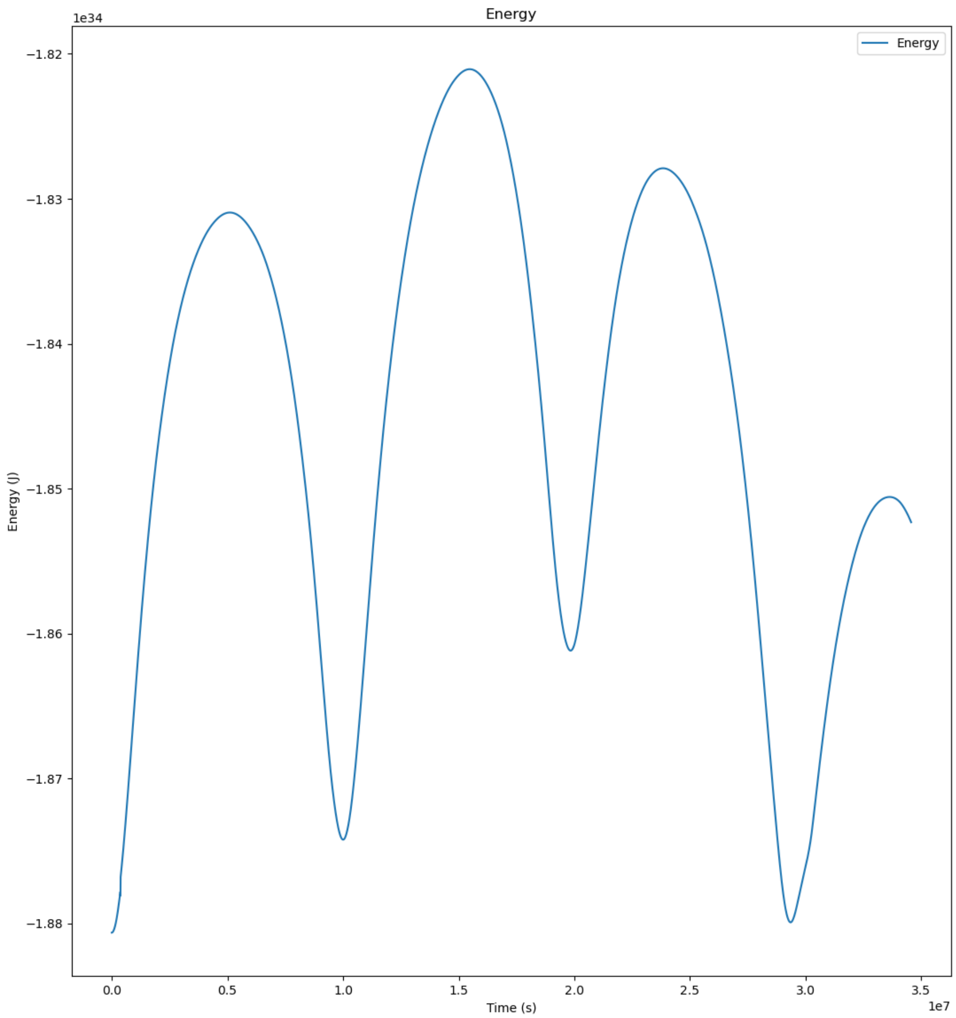

Figura 5: Energia meccanica del Sistema Solare interno

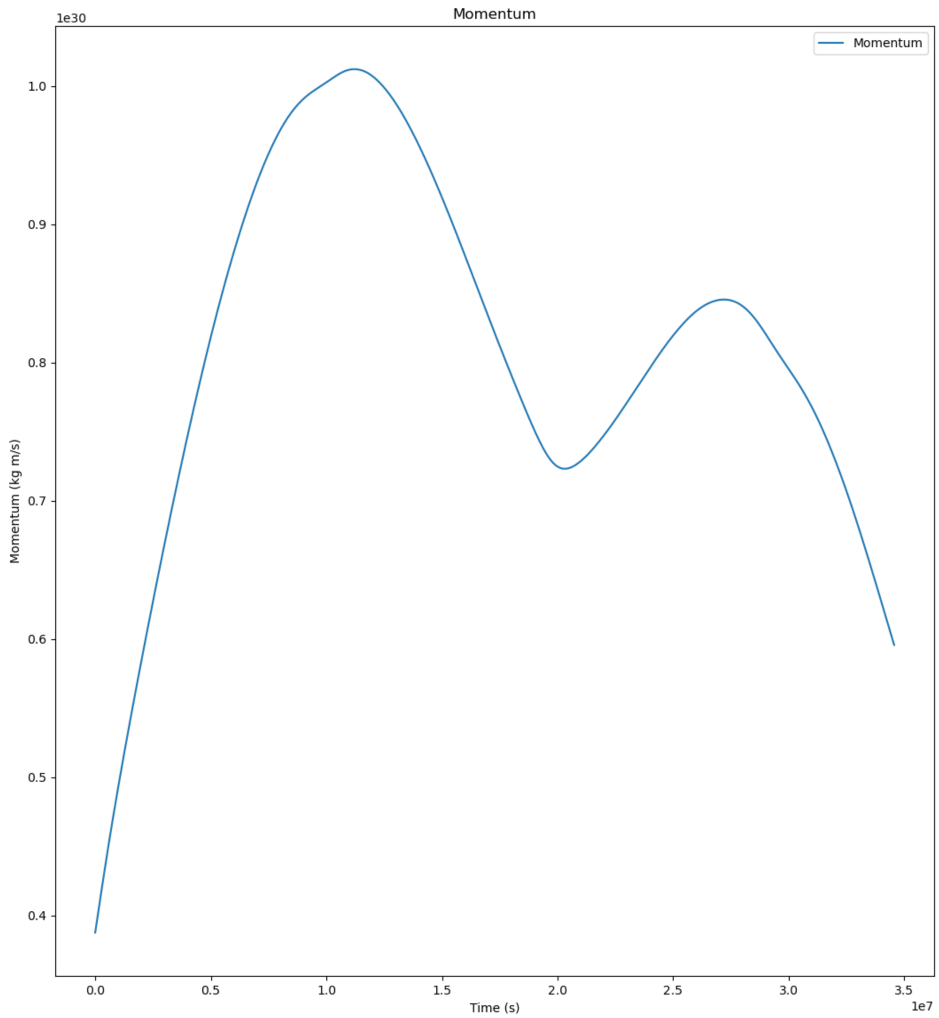

Figura 6: Quantità di moto del Sistema Solare interno