



Università degli Studi di Milano

FACOLTÀ DI SCIENZE E TECNOLOGIE

Corso di Laurea Triennale in Fisica

Studio della raccolta di carica in rivelatori a pixel in tecnologia HV-CMOS

Candidato:

Marco IANNA

Matricola 811596

Relatore:

Prof. Attilio ANDREAZZA

Correlatore:

Prof. Francesco RAGUSA

Indice

Indice	3
1 Riassunto	5
2 Introduzione	9
2.1 Semiconduttori	9
2.1.1 Semiconduttori intrinseci	9
2.1.2 Drogaggio di tipo n	11
2.1.3 Drogaggio di tipo p	12
2.1.4 Giunzione $p-n$	12
2.2 Radiazione Elettromagnetica	17
2.2.1 Effetto fotoelettrico	18
2.2.2 Effetto Compton	20
2.2.3 Produzione di coppie	23
2.3 Sezione d'urto totale	24
3 Rivelatori a semiconduttore	27
3.1 Formazione del segnale	29
3.2 Raccolta della carica	29
3.2.1 Tempo di raccolta	29
3.2.2 Teorema di Shockley-Ramo	31
3.2.3 Diffusione	32
4 Simulazione	35
5 Misure ai raggi-X	45
6 Conclusioni	53
A Sezione d'urto	55
B Relatività	57
B.1 Energie a riposo utili	58
C Grafici	59
C.1 Spettri	59
Elenco delle figure	63
Elenco delle tabelle	67

Bibliografia**69**

Capitolo 1

Riassunto

L'obiettivo di questa tesi è lo studio della raccolta di carica su un singolo pixel di un rivelatore HV CMOS[1] utilizzato nel progetto HVR CCPD dell'INFN in condizioni di svuotamento parziale. Il rivelatore a pixel in uso è costituito da un totale di 12 pixel di cui 8 attivi e 4 passivi ognuno dei quali di dimensione $250 \times 50 \mu\text{m}^2$. Le misure sono state eseguite mediante la lettura del segnale ricevuto da uno solo dei 4 pixel passivi per diverse tensioni di polarizzazione inversa e di conseguenza per diversi spessori della zona svuotata. Dato che il segnale indotto normalmente si ripartisce su più pixel, il segnale osservato in un solo canale di lettura è solo una frazione del segnale totale.

Una prima fase di simulazione è stata utile per capire le forme qualitative degli spettri di singola linea e per quantificare gli effetti dei fenomeni di non contenimento. Questo mi ha permesso di formulare un modello analitico semplice attraverso il quale interpolare gli spettri misurati.

La fase di simulazione si serve del software GEANT4 per simulare l'interazione radiazione-materia, e in seguito di un programma di digitizzazione che si occupa invece di simulare la fase di raccolta delle coppie elettrone-buca prodotte e della computazione della carica indotta su ciascun pixel.

Per ogni linea monocromatica vengono preparati vari spettri computati a diverse tensioni e spessori di svuotamento (dove il valore di k per il wafer di silicio utilizzato, di tipo p e con resistività $\rho = 125 \Omega\text{cm}$, è pari a $12,7 \mu\text{m}^2\text{V}^{-1}$). Vale infatti la relazione:

$$w = \sqrt{k} \sqrt{V} \quad (1.1)$$

Gli spettri dN/dQ (numero di eventi dN che hanno indotto una carica compresa tra Q e $Q + dQ$) presentano un picco ben definito in posizione $Q_{peak} = E_{peak}/3,6 \text{ eV}^1$ e una distribuzione uniforme di eventi (vallata) che si estende da Q_{peak} a zero. Il picco contiene tutti gli eventi completamente contenuti nel pixel letto mentre la valle quelli parzialmente contenuti. Tre fattori contribuiscono alla suddivisione della carica totale prodotta fra più pixel: il range dei fotoelettroni, diffusione e il cross-talk (che saranno discussi in dettaglio nel capitolo 4). La distribuzione del numero di eventi che hanno rilasciato energia per effetto Compton occupa una regione assai prossima allo zero e viene sempre tagliata fuori. Non sono interessato alle interazioni Compton per il fatto che negli spettri acquisiti questo rimane sempre al di sotto della soglia fissata per la lettura (utilizzata per eliminare il segnale di rumore a basse energie).

¹In realtà il valore ottenuto è minore di questo valore teoricamente a causa del cross-talk.

Per ogni spettro viene calcolato il numero di eventi nel picco e la densità di numero di eventi nella vallata. L'andamento del numero di eventi nel picco è descritto da un esponenziale di assorbimento:

$$N_{peak} = N_0(1 - e^{-\mu w}) \quad (1.2)$$

mentre quello della densità di eventi nella vallata è una funzione che cresce con lo spessore ma di più difficile interpretazione, la prima parte sembra crescere parabolicamente, poi linearmente e infine come un esponenziale di assorbimento.

Il μ ottenuto dalla simulazione non è uguale al coefficiente di assorbimento dei fotoni X, e risulta maggiore di esso per tutte le linee spettrali. Questo significa che il numero di eventi nel picco per il singolo pixel raggiunge la saturazione per spessori svuotati più piccoli rispetto alla lunghezza di assorbimento. Questo effetto è riconducibile al fatto che depositi di energia troppo lontani dalla superficie del rivelatore vengano allargati dalla diffusione e non siano mai contenuti in un singolo pixel.

Per verificare la simulazione sono state fatte delle misure su di un rivelatore CMOS a pixel prodotto dall'INFN di Milano e STMicroelectronics, usando la tecnologia BCD8. Il dispositivo da me studiato era stato irraggiato con protoni da 62 MeV al ciclotrone dei Laboratori Nazionali del Sud a Catania. La fluenza raggiunta era di $3,6 \times 10^{13} \text{ p cm}^{-2}$, corrispondenti ad una dose assorbita di 5,9 Mrad ed un danneggiamento per NIEL (not ionizing energy loss) equivalente a quello prodotto da neutroni di 1 MeV ad una fluenza di $7,2 \times 10^{13} \text{ n cm}^{-2}$.

La catena elettronica utilizzata aveva un rumore di circa 1 keV. Il rumore modifica la distribuzione ideale trasformando la riga monocromatica in una gaussiana:

$$\text{Gauss}(E(c), E_{peak}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(E(c)-E_{peak})^2}{2\sigma^2}} \quad (1.3)$$

e la distribuzione uniforme in una funzione degli errori con valore di soglia in corrispondenza della linea:

$$\text{erf}(E(c), E_{peak}, \sigma) = \int_{-\infty}^{\frac{E(c)-E_{peak}}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \quad (1.4)$$

dove $E(c) = p_1 c + p_0$ è la relazione che lega l'energia al numero di canale (calibrazione). I parametri della calibrazione stessa sono così p_1 e p_0 .

Il rivelatore è stato illuminato con raggi-X delle righe di fluorescenza K_α e K_β di ittrio e rame, ottenute a partire da un tubo a raggi-X con energia massima di 50 keV. Lo spettro ottenuto dalla lettura del rivelatore può venire descritto dalla sovrapposizione degli spettri delle quattro linee:

$$\left(\frac{dN}{dc} \right)_i = N_{peak}^i \text{Gauss}(E(c), E_{peak}^i, \sigma) + P_{valley}^i \left(1 - \text{Erf}(E(c), E_{peak}^i, \sigma) \right) \quad (1.5)$$

dove il l'indice i si riferisce alla singola linea.

Questo fit permette inoltre di determinare la calibrazione del rivelatore e la risoluzione energetica.

Gli spettri misurati a diverse tensioni (da 10 V a 60 V) sono stati analizzati usando l'equazione (1.5) e i valori di N_{peak} e P_{valley} sono estratti e messi in funzione del voltaggio applicato. Come ci si attende dalla simulazione, per piccoli spessori N_{peak} risulta crescere

linearmente con la radice quadrata della tensione mentre P_{valley} cresce anche esso con la tensione ma attraverso un andamento non riconducibile a una funzione analitica semplice.

Il valore della tensione di breakdown del dispositivo (definita dal profilo di drogaggio del processo di produzione di STMicroelectronics) è di 70 V. Questa risulta essere troppo bassa per permettere spessori di svuotamento tali da mettere in evidenza la legge di assorbimento (1.2). La tecnica da me messa a punto potrà essere utilizzata per rivelatori irraggiati a dosi fino a 100 Mrad, che presentano sia una densità effettiva di droganti minore, che una maggiore tensione di breakdown.

Capitolo 2

Introduzione

2.1 Semiconduttori

2.1.1 Semiconduttori intrinseci

Per illustrare il comportamento di conduzione in un *semiconduttore puro* o *intrinseco* considereremo solo i cristalli di Si e di Ge in quanto sono quelli maggiormente utilizzati per le realizzazione dei rivelatori di particelle a stato solido. La struttura cristallina, a forma di tetraedro con atomi ai vertici, è caratterizzata da un legame covalente, in base al quale ciascuno dei quattro elettroni di valenza di un atomo è condiviso da uno degli atomi vicini. Dal punto di vista delle bande la situazione è schematizzata in figura 2.1.

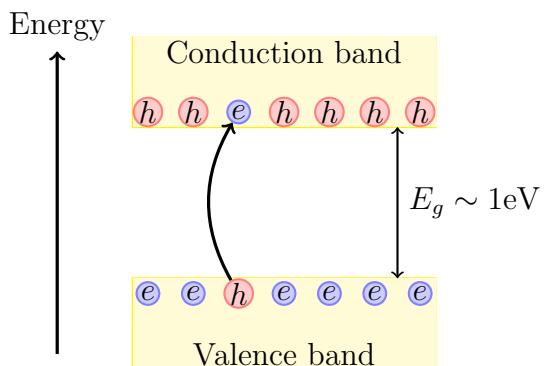


Figura 2.1: Struttura a bande per un materiale semiconduttore.

La banda di valenza è separata dalla banda di conduzione da un gap di energia $E_g \sim 1\text{eV}$ (in particolare vale 1,1 eV per il Si e 0,75 eV per il Ge). Tra queste due bande è collocata l'energia di Fermi ϵ_f . Il comportamento a basse temperature dei semiconduttori è uguale al comportamento degli isolanti, ovvero ci troviamo in una situazione in cui la banda di valenza è totalmente piena e quella di conduzione è inaccessibile e non c'è dunque trasporto di carica attraverso l'applicazione di un campo elettrico esterno. Già a temperatura ambiente invece il numero di elettroni in banda di conduzione diventa elevato e aumenta sempre di più con l'aumentare della temperatura. Gli elettroni che per agitazione termica passano dalla banda di valenza a quella di conduzione, lasciano in essa delle *buche*. La probabilità per unità di tempo che si crei una coppia elettrone-buca è una funzione della temperatura T ed è data dalla:

$$p(T) = cT^{3/2}e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \quad (2.1)$$

dove c è una costante di proporzionalità caratteristica del materiale[3]. La probabilità di formazione dipende dal band gap, più questo è piccolo più il materiale risulterà essere conduttivo a più basse temperature.

In assenza di campo elettrico esterno la concentrazione di coppie elettrone-buca è il risultato di due meccanismi competitivi: il primo è quello di generazione della coppia, la cui probabilità è data dalla (2.1), il secondo è quello di ricombinazione la cui probabilità dipende in modo monotono crescente proprio dalla concentrazione delle coppie. In una situazione di equilibrio la probabilità dei due processi è la medesima. In un certo intervallo di tempo tante coppie si creano quante se ne ricombinano. Se ci spostiamo da queste condizione di equilibrio, andando ad esempio aumentare la temperatura, la probabilità di generazione aumenta, e l'equilibrio si ottiene quando il valore della concentrazione delle coppie è tale da fare sì che la probabilità di ricombinazione associata sia tale da compensare quella di generazione[11].

Quando viene applicato un campo elettrico esterno, alla corrente contribuiscono non solo gli elettroni che si trovano nelle bande di conduzione, ma anche le lacune che si trovano nella banda di valenza. Chiaramente non sono le lacune a muoversi realmente, ma sono gli elettroni della banda di valenza stessa che vanno a riempirle. Quello che si ha è il moto di elettroni nel verso opposto al campo elettrico che viene visto come moto di lacune, ovvero cariche positive, nel verso del campo elettrico.

Siano dunque n_e e n_h rispettivamente il numero di elettroni in banda di conduzione e il numero di lacune in banda di valenza per unità di volume, allora la densità di corrente J_e e J_h , rispettivamente degli elettroni e delle lacune, è data da:

$$J_e = (-e)n_e(-v_e) \quad J_h = (+e)n_h(+v_h) \quad (2.2)$$

dove e è la carica in modulo dell'elettrone, v_e è la velocità di deriva degli elettroni e v_h quella delle lacune. Chiaramente v_e e v_h hanno segno opposto e in particolare la prima è opposta mentre la seconda concorde al campo elettrico esterno (da qui la scelta dei segni + e - delle velocità). La densità di corrente totale J risulta essere:

$$J = J_e + J_h = e(n_e v_e + n_h v_h) \quad (2.3)$$

La *conducibilità elettrica* viene a scriversi come:

$$\sigma = e\left(n_e \frac{v_e}{E} + n_h \frac{v_h}{E}\right) = e(n_e \mu_e + n_h \mu_h) \quad (2.4)$$

dove μ_e e μ_h sono rispettivamente la *mobilità* degli elettroni e delle lacune, definita come $\mu = v/E$.

La *resistività elettrica* è invece:

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{e\left(n_e \frac{v_e}{E} + n_h \frac{v_h}{E}\right)} = \frac{1}{e(n_e \mu_e + n_h \mu_h)} \quad (2.5)$$

Da notare che nel caso di semiconduttore intrinseco, per ogni elettrone che va in conduzione si crea una buca in valenza e pertanto le loro concentrazioni sono le medesime ovvero $n_e = n_h = n_i$ (dove il pedice i sta a significare che sono portatori di carica intrinseci). Pertanto resistività e conducibilità si vengono a scrivere come:

$$\sigma = en_i(\mu_e + \mu_h) \quad (2.6)$$

$$\rho = \frac{1}{en_i(\mu_e + \mu_h)} \quad (2.7)$$

È importante ricordare anche la *legge di azione di massa*[3]:

$$n_e n_h = n_i^2 = CT^3 e^{-\frac{E_g}{k_B T}} \quad (2.8)$$

dove C è una costante che dipende dal tipo di materiale.

I valori numerici delle principali costanti fin qui utilizzate sono riassunti in tabella 2.1.

	Si
Denistà di portatori intrinseci n_i (300 K)	$1,5 \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$
Resistività intrinseca ρ (300 K)	$2,3 \times 10^5 \Omega \text{cm}$
Mobilità elettroni μ_e (300 K)	$1350 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$
Mobilità buche μ_h (300 K)	$480 \text{ cm}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$
Costante dielettrica relativa $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$	12

Tabella 2.1: Valori delle costanti fin qui utilizzate caratteristiche del silicio[3].

2.1.2 Drogaggio di tipo n

Un semiconduttore di tipo n si ottiene quando, alla struttura originale del silicio, vengono aggiunte delle impurità pentavalenti ovvero quando un atomo di silicio viene sostituito da un atomo pentavalente quale ad esempio il fosforo. L'atomo di fosforo (che porta 5 elettroni) si lega covalentemente ai 4 adiacenti atomi di silicio (ognuno dei quali mette in gioco un elettrone per il legame con il fosforo e gli altri 3 per il legame con gli altri atomi di silicio del reticolo) lasciando spaiato un elettrone, che non prende parte al legame, come illustrato in figura 2.2.

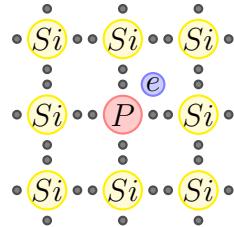


Figura 2.2: Rappresentazione di un impurità pentavalente (fosforo) che va a prendere posto di un atomo di silicio all'interno del reticolo cristallino.

Questo elettrone risulta debolmente legato e va a posizionarsi su un livello energetico assai prossimo alla banda di conduzione. La probabilità di passaggio in conduzione è dunque molto elevata e proprio per questo tali impurità vengono chiamate *donori*. Nella maggior parte dei casi la concentrazione di queste impurità risulta essere molto maggiore della concentrazione del numero di elettroni in banda di valenza e quindi:

$$n_e \approx n_D \quad (2.9)$$

Per la legge di azione di massa in equazione (2.8) il rapporto $n_e n_h$ deve essere costante e in particolare deve essere $n_e n_h = n_i^2$. Dato che la concentrazione di elettroni in valenza

è aumentata per via delle impurità allora, affinché il prodotto rimanga costante, è necessario che diminuisca la concentrazione di buche in banda di valenza. La caratteristica di questo tipo di semiconduttore drogato è quindi di avere il numero degli elettroni in banda di conduzione molto maggiore del numero di buche in banda di valenza. Gli elettroni prendono il nome di *portatori di carica maggioritari* mentre le buche quello di *portatori di carica minoritari*.

2.1.3 Drogaggio di tipo p

Un semiconduttore di tipo p si ottiene quando, alla struttura originale del silicio, vengono aggiunte delle impurità trivalenti ovvero quando un atomo di silicio viene sostituito da un atomo trivale quale ad esempio il boro. L'atomo di boro (che porta 3 elettroni) si lega covalentemente a 3 degli adiacenti atomi di silicio ma rimane uno di essi con il quale il legame covalente risulta essere incompleto come illustrato in 2.2.

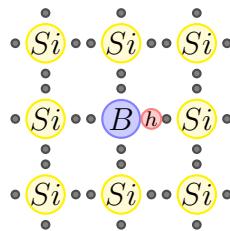


Figura 2.3: Rappresentazione di un impurità trivale (boro) che va a prendere posto di un atomo di silicio all'interno del reticolo cristallino.

L'insaturazione del legame rappresenta una buca, simile a quella che gli elettroni lasciano nel passaggio in banda di conduzione e pertanto può essere riempita da uno di essi (proprio per questo tali impurità vengono chiamate *accettori*). Tuttavia, dato che il legame è con un atomo trivale e non con un atomo di silicio, il suo livello energetico risulta trovarsi assai prossimo alla cima della banda di valenza. Questo fa sì che molti elettroni vadano ad occupare questo livello già a basse temperature. Siccome la concentrazione degli accettori risulta essere di norma molto maggiore delle buche lasciate in valenza per agitazione termica, vale la relazione:

$$n_h \approx n_A \quad (2.10)$$

Ricordando come già fatto in sezione 2.1.2 la legge di azione di massa e procedendo con i medesimi ragionamenti si ottiene che in un semiconduttore drogato con impurità trivalenti il numero di buche in banda di valenza risulta essere assai maggiore del numero di elettroni in banda di conduzione e per tale motivo le prime vengono chimate portatori di carica maggioritari e i secondi portatori di carica minoritari.

2.1.4 Giunzione $p-n$

Una giunzione $p-n$ può essere schematizzata come in figura 2.4. La zona compresa tra le linee tratteggiate è la *regione di carica spaziale* o *zona di svuotamento*. La regione a sinistra invece risulta essere un conduttore di tipo p mentre quello a destra un semiconduttore di tipo n .

Una giunzione di tipo $p-n$ si ottiene saldando insieme un semiconduttore di tipo p e un semiconduttore di tipo n . Quello che qualitativamente accade è il passaggio di elettroni

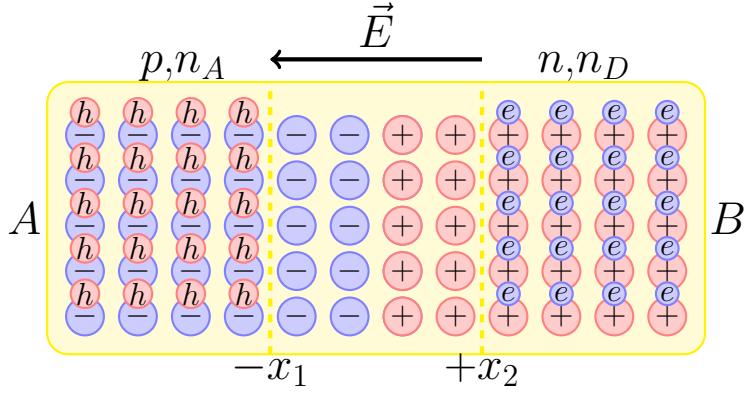


Figura 2.4: Schematizzazione di una giunzione $p - n$.

dalla zona n alla zona p , i quali vanno a riempire le sue buche. Questo processo dura fino a quando tra le due regioni non viene a crearsi un campo elettrico (e dunque una differenza di potenziale) che impedisca ulteriore flusso di carica tra di esse. Il semiconduttore così ottenuto risulta diviso in tre parti, quella a sinistra di tipo p , quella centrale priva di portatori liberi detta *zona di svuotamento* e quella a destra di tipo n . In assenza di campi elettrici esterni, la corrente netta che fluisce è nulla per via della cancellazione di quattro contributi. Nella regione p della zona di svuotamento gli elettroni, che ricordiamo essere portatori minoritari, per via dell'eccitazione termica passano dalla banda di valenza alla banda di conduzione e sono espulsi dal campo elettrico esterno verso la zona n dando origine a una corrente detta *corrente di generazione* e che indicheremo con J_e^{gen} . Contemporaneamente nella regione n della zona di svuotamento pochi elettroni, che ricordiamo essere portatori maggioritari, ottengono abbastanza energia attraverso eccitazione termica da superare la barriera di potenziale a passare nella zona p dove si ricombinano con le lacune presenti. Tale corrente viene chiamata *corrente di ricombinazione* e la indicheremo con J_e^{rec} . Un discorso analogo può essere fatto per le lacune che danno origine a una J_h^{gen} e a una J_h^{rec} . In sostanza i portatori minoritari sono favoriti dal campo elettrico nel passare da una regione all'altra al contrario dei portatori maggioritari che ne sono invece ostacolati. All'equilibrio queste correnti si elidono in coppie ($J_e^{gen} = J_e^{rec}$ e $J_h^{gen} = J_h^{rec}$) e non vi è nessuna corrente netta che fluisce nel semiconduttore[5].

Una giunzione orientata come in figura 2.4 si rappresenta nei circuiti elettrici con il simbolo in figura 2.5.

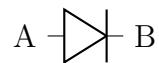


Figura 2.5: Rappresentazione grafico di un diodo.

Applicando ora una tensione ai capi A e B della giunzione abbiamo due effetti possibili a seconda che $\Delta V_{AB} = V_A - V_B$ ¹ sia maggiore o minore di zero. Nel primo caso ci troviamo in una situazione di *polarizzazione diretta*, aumentando sempre di più la differenza di potenziale la barriera ΔV viene ridotta e piano piano i portatori maggioritari sono liberi muoversi tra le due parti della giunzione. Si crea così un'intensità di corrente che va da A a B e che cresce quindi con l'aumentare della tensione. Nel secondo caso ci troviamo

¹Applicare una differenza di potenziale esterna alla giunzione equivale essenzialmente applicarla direttamente alla zona di svuotamento. Questo perché le zone p ed n al di fuori della zona di svuotamento sono ricche di portatori di carica e sono quindi dei buoni conduttori.

invece in una situazione di *polarizzazione inversa*. Quello che accade in queste situazione è che il campo elettrico e dunque la barriera di potenziale tra le due zone della giunzione viene incrementata impedendo qualsiasi passaggio di portatori maggioritari da una regione all'altra della giunzione, solo il passaggio di portatori minoritari è consentito. La conseguenza di questo è una corrente che va dalla zona *n* alla zona *p* che viene chiamata *corrente di leakage*. Da un punto di vista quantitativo dobbiamo fare le seguenti considerazioni: la corrente di generazione dipende debolmente dalla differenza di potenziale applicata ai capi della giunzione ma dipende esponenzialmente dalla temperatura. Al contrario la corrente di ricombinazione dipende fortemente dalla differenza di potenziale applicata[5]. In particolare vale la relazione di proporzionalità:

$$J^{rec} \propto e^{\frac{e(\Delta V_{AB} - V_{bi})}{k_B T}} \quad (2.11)$$

tenendo poi conto che per $\Delta V_{AB} = 0$ si ha che $J^{rec} = J^{gen}$, allora si viene a scrivere:

$$J^{rec} = J^{gen} e^{\frac{e\Delta V_{AB}}{k_B T}} \quad (2.12)$$

e la densità di corrente totale:

$$J = J^{rec} - J^{gen} = J^{gen} \left(e^{\frac{e\Delta V_{AB}}{k_B T}} - 1 \right) \quad (2.13)$$

Questo trattamento vale sia per gli elettroni sia per le buche, differenziando i due casi e tenendo poi presente che la densità di corrente è la somma dei due termini si viene a scrivere che:

$$J = e(J_e + J_h) = e(J_e^{gen} + J_h^{gen}) \left(e^{\frac{e\Delta V_{AB}}{k_B T}} - 1 \right) \quad (2.14)$$

Quando la tensione diventa così alta da superare la tensione di break-down, la corrente aumenta bruscamente e inizia a circolare liberamente. Il comportamento della giunzione è illustrato in figura 2.6.

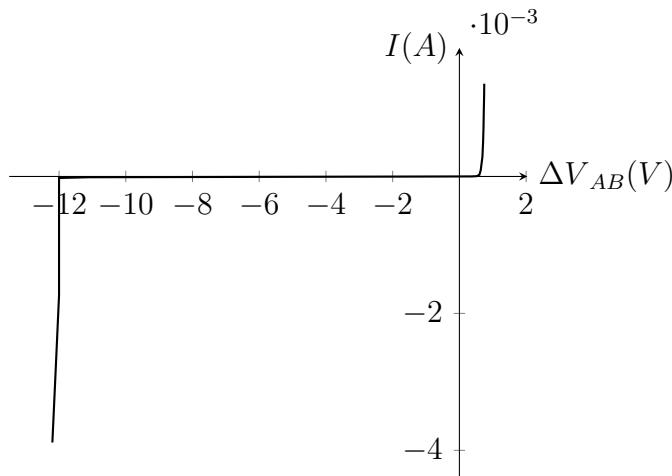


Figura 2.6: Grafico dell'intensità di corrente in funzione della tensione applicata ad un diodo zener con resistenza del circuito $R = 4700 \Omega$.

Vogliamo ora trovare le grandezze che descrivono questo sistema quali, in modo particolare, il campo elettrico nella zona di svuotamento, la sua dimensione e la differenza di potenziale ai suoi capi. Per fare ciò partiamo dall'equazione di Poisson, che lega tra

loro il potenziale in un punto con la densità di carica in un punto (a noi nota). Nel caso unidimensionale, abbiamo dunque le seguenti relazioni:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.15)$$

$$\rho(x) = \begin{cases} -en_A & -x_1 < x \leq 0 \\ en_D & 0 \leq x < x_2 \end{cases} \quad (2.16)$$

dove e è la carica in modulo dell'elettrone e n_A e n_D sono rispettivamente la densità di accettori e donori del semiconduttore[10].

Risolviamo adesso l'equazione di Poisson (equazione differenziale di secondo grado nella variabile x) usando come densità la (2.16) e otteniamo la seguente relazione per la derivata del potenziale:

$$\frac{dV}{dx} = \begin{cases} \frac{en_A}{\epsilon}x + c_1 & -x_1 < x \leq 0 \\ -\frac{en_D}{\epsilon}x + c_2 & 0 \leq x < x_2 \end{cases} \quad (2.17)$$

Determiniamo ora il valore delle costanti aggiungendo le condizioni al contorno per il campo elettrico che ricordiamo essere $E(x) = -dV/dx$. Le condizioni al contorno sono l'annullamento del campo elettrico nelle regioni al di fuori della zona di svuotamento:

$$E(-x_1) = 0 \quad E(x_2) = 0 \quad (2.18)$$

ho pertanto che:

$$c_1 = \frac{en_A}{\epsilon}x_1 \quad c_2 = \frac{en_D}{\epsilon}x_2 \quad (2.19)$$

inserendo questi valori nella 2.27 ottengo:

$$\frac{dV}{dx} = \begin{cases} \frac{en_A}{\epsilon}x + \frac{en_A}{\epsilon}x_1 & -x_1 < x \leq 0 \\ -\frac{en_D}{\epsilon}x + \frac{en_D}{\epsilon}x_2 & 0 \leq x < x_2 \end{cases} \quad (2.20)$$

e dunque:

$$E(x) = \begin{cases} -\frac{en_A}{\epsilon}(x + x_1) & -x_1 < x \leq 0 \\ \frac{en_D}{\epsilon}(x - x_2) & 0 \leq x < x_2 \end{cases} \quad (2.21)$$

Dato inoltre che il campo elettrico deve essere continuo in $x = 0$ ottengo che $c_1 = c_2$ e ciò mi porta a questa importante relazione:

$$n_Ax_1 = n_Dx_2 \quad (2.22)$$

Ora risolvo l'equazione di primo grado per la derivata del potenziale ottenendo:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{en_A}{2\epsilon}x^2 + \frac{en_A}{\epsilon}x_1x + c_3 & -x_1 < x \leq 0 \\ -\frac{en_D}{2\epsilon}x^2 + \frac{en_D}{\epsilon}x_2x + c_4 & 0 \leq x < x_2 \end{cases} \quad (2.23)$$

Devo determinare ora le costanti inserendo le nuove condizioni al contorno sul potenziale ovvero:

$$V(-x_1) = V_1 \quad V(x_2) = V_2 \quad (2.24)$$

ottengo dunque che:

$$c_3 = V_1 + \frac{en_A}{2\epsilon} x_1^2 \quad c_4 = V_2 - \frac{en_D}{2\epsilon} x_2^2 \quad (2.25)$$

e inserendole nella (2.27):

$$V(x) = \begin{cases} \frac{en_A}{2\epsilon} x^2 + \frac{en_A}{\epsilon} x_1 x + V_1 + \frac{en_A}{2\epsilon} x_1^2 & -x_1 < x \leq 0 \\ -\frac{en_D}{2\epsilon} x^2 - \frac{en_D}{\epsilon} x_2 x + V_2 - \frac{en_D}{2\epsilon} x_2^2 & 0 \leq x < x_2 \end{cases} \quad (2.26)$$

e raccogliendo per ottenere un'espressione esteticamente più gradevole:

$$V(x) = \begin{cases} \frac{en_A}{\epsilon} \left(\frac{x^2}{2} + x_1 x + \frac{x_1^2}{2} \right) + V_1 & -x_1 < x \leq 0 \\ -\frac{en_D}{\epsilon} \left(\frac{x^2}{2} - x_2 x + \frac{x_2^2}{2} \right) + V_2 & 0 \leq x < x_2 \end{cases} \quad (2.27)$$

Imponendo la continuità del potenziale in $x = 0$ si ottiene che $c_3 = c_4$ e da questa un'altra importante relazione, ovvero la differenza di potenziale tra le due zone cariche:

$$\Delta V = V_2 - V_1 = \frac{e}{2\epsilon} (n_A x_1^2 + n_D x_2^2) \quad (2.28)$$

Mettendo insieme la (2.22) con la (2.28) si ottiene la relazione che lega le dimensioni lineari della zona svuotata con la tensione ai capi della stessa:

$$x_1 = \sqrt{\frac{2\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} \frac{n_D}{n_A}} \quad x_2 = \sqrt{\frac{2\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} \frac{n_A}{n_D}} \quad (2.29)$$

e da queste, chiamato w lo spessore della regione svuotata:

$$w = x_1 + x_2 \quad (2.30)$$

cercando ora di trovare un'espressione comoda per w eleviamo al quadrato:

$$w^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = \quad (2.31)$$

$$= \frac{2\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} \frac{n_D}{n_A} + \frac{2\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} \frac{n_A}{n_D} + \frac{4\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} = \quad (2.32)$$

$$= \frac{2\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} \frac{n_A^2 + n_D^2}{n_A n_D} + \frac{4\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} = \quad (2.33)$$

$$= \frac{2\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} \frac{(n_A + n_D)^2}{n_A n_D} - \frac{4\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} + \frac{4\epsilon}{e} \frac{\Delta V}{n_A + n_D} = \quad (2.34)$$

$$= \frac{2\epsilon}{e} \frac{n_A + n_D}{n_A n_D} \Delta V \quad (2.35)$$

e dunque in conclusione si ottiene:

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon}{e} \frac{n_A + n_D}{n_A n_D} \Delta V} \quad (2.36)$$

con $\Delta V > 0$.

Come accennato in precedenza, persino in assenza di un voltaggio esterno, gli elettroni e le buche diffondono attraverso la giunzione dando origine a un potenziale e a un campo elettrico. Pertanto possiamo scomporre ΔV in due parti, un potenziale V_{bi} detto potenziale di *built-in*, e un potenziale applicato esternamente ΔV_{AB} . Se avessimo applicata una tensione di polarizzazione diretta ($\Delta V_{AB} > 0$) allora avremmo:

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon}{e} \frac{n_A + n_D}{n_A n_D} (V_{bi} - \Delta V_{AB})} \quad (2.37)$$

con $\Delta V_{AB} < V_{bi}$. Ciò mostra che all'aumentare della tensione di polarizzazione diretta la zona di svuotamento diminuisce fino a diventare pari a zero quando $\Delta V_{AB} = V_{bi}$.

Se avessimo invece applicato una tensione di polarizzazione inversa ($\Delta V_{AB} < 0$) avremmo avuto che:

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon}{e} \frac{n_A + n_D}{n_A n_D} (V_{bi} + |\Delta V_{AB}|)} \quad (2.38)$$

Si può ricavare l'espressione della V_{bi} attraverso delle considerazioni sulle correnti di diffusione[10], scriviamo qui solo il risultato:

$$V_{bi} = \frac{k_B T}{e} \ln \left(\frac{n_A n_D}{n_e n_h} \right) \quad (2.39)$$

dove n_e e n_h sono le concentrazione rispettivamente degli elettroni in banda di conduzione e delle buche in banda di valenza. Ricordando la legge di azione di massa, in equazione (2.8), abbiamo che $n_i^2 = n_e n_h \propto T^3 e^{\frac{E_g}{k_B T}}$ con E_g il gap di energia tra banda di valenza e banda di conduzione.

La zona di svuotamento aumenta dunque all'aumentare in modulo della tensione di polarizzazione inversa e non è simmetrica da ambo le parti della giunzione, ricordando infatti la (2.22) si vede che la zona si estende più dalla parte *p* se $n_D > n_A$ e dalla parte *n* se $n_A > n_D$. La zona di svuotamento è simmetrica solo quando le concentrazioni di accettori e di donori sono le medesime.

2.2 Radiazione Elettromagnetica

In questa sezione analizzeremo a grandi linee i meccanismi che ci permettono di rivelare la radiazione elettromagnetica (in particolare ci occuperemo di radiazione molto energetica ovvero di *raggi X* e *raggi gamma*). I fotoni sono privi di carica e dunque non sono in grado di creare diretta ionizzazione o eccitazione del materiale attraverso cui passano. L'unico modo dunque per rivelare il passaggio di un fotone attraverso un blocco di materia è attraverso la rivelazione delle particelle secondarie che il suo passaggio produce (elettroni) e che sono in grado di depositare energia nel materiale. La rivelazione degli elettroni prodotti dall'interazione del fotone con la materia è dunque la chiave per rivelare il passaggio del fotone stesso e per ottenere informazioni sulla sua energia (tutto ciò sarà descritto in dettaglio nelle prossime sezioni ma è logico aspettarsi che ci sia un legame tra l'elettrone prodotto e l'energia del fotone incidente). Il passaggio di particelle cariche nel rivelatore si può manifestare in diversi modi a seconda del tipo di rivelatore che si utilizza, ad esempio, in un rivelatore a semiconduttore (che sarà descritto in questa sezione), l'effetto principale del passaggio di una particella carica, quale un elettrone, è il

trasferimento di energia tra particella e materiale attraverso la produzione di una o più coppie elettrone-buca (ad esempio per il silicio vale la conversione $N_{e-h} = E_e/3,6\text{ eV}$) che, attraverso un campo elettrico esterno, vengono raccolte dando origine a un segnale elettrico (passaggio di corrente). È importante tenere presente che il fattore di conversione E_i (che nel caso del silicio viene ad essere 3,6 eV) è direttamente proporzionale alla differenza di energia tra banda di valenza e banda di conduzione. Per costruire un rivelatore efficiente dobbiamo dunque tenere presente due fattori:

1. il materiale deve essere in grado di reggere un campo elettrico intenso in modo tale da rendere efficiente la raccolta di elettroni e buche e la formazione dunque di un segnale elettrico. In assenza di fotoni incidenti non ci deve essere flusso di corrente, o quantomeno questo deve essere molto piccolo rispetto alla corrente che si crea in seguito al passaggio di radiazione (basso rumore). Questa condizione ci dice che un materiale isolante potrebbe essere in linea di principio un buon rivelatore.
2. gli elettroni devono potere essere facilmente rimossi dalla banda di valenza (a parità di energia il numero di coppie elettrone-buca create deve essere il più alto possibile) e devono essere in grado di muoversi agilmente all'interno del materiale stesso. Questa condizione suggerisce che dovremmo utilizzare un materiale conduttore.

Mettendo insieme queste due condizioni, la logica scelta potrebbe essere appunto l'utilizzo di un materiale semiconduttore.

Le interazioni tra fotone e materia che possono avvenire all'interno del rivelatore sono descritte in dettaglio nelle sezioni seguenti e sono riassunte in figura 2.7.

2.2.1 Effetto photoelettrico

Nell'effetto photoelettrico, un fotone viene assorbito dall'atomo e uno dei suoi elettroni atomici, chiamato in questo specifico caso *photoelettrone*, viene rilasciato (vedi figura 2.8).

Notiamo che l'effetto photoelettrico è possibile solo quando abbiamo a che fare con elettroni atomici e non con elettroni liberi (in quel caso avremmo infatti come unica possibilità l'effetto Compton descritto in sezione 2.2.2). Non è infatti possibile che un fotone venga assorbito dall'elettrone cedendo ad esso tutta la sua energia poiché per esso non è possibile un rapporto tra energia cinetica e quantità di moto pari a c (per fare fronte a questo dovremmo infatti ipotizzare la non conservazione della quantità di moto!). In presenza del nucleo atomico invece il fotone può cedere tutta la sua energia all'elettrone permettendo la conservazione della quantità di moto: il nucleo infatti assorbe in grande parte la quantità di moto e in minima parte l'energia del fotone che va tutta all'elettrone. L'energia dell'elettrone è uguale a quella del fotone meno l'energia di legame dell'elettrone stesso, ovvero:

$$E_e = E_\gamma - E_b \quad (2.40)$$

La sezione d'urto (descritta in dettaglio in appendice A) per l'effetto photoelettrico, che chiameremo σ_{ph} , è difficile da calcolare ma il suo andamento presenta le seguenti particolarità: essa decresce rapidamente all'aumentare dell'energia dei fotoni incidenti (circa come E_γ^{-3}) ed è quindi molto alta per fotoni che hanno basse energie ($\sim 100\text{ keV}$), e aumenta all'aumentare del numero atomico Z (circa come Z^4). Un'altra caratteristica della σ_{ph} è la presenza di salti discontinui a energie corrispondenti all'energia di legame

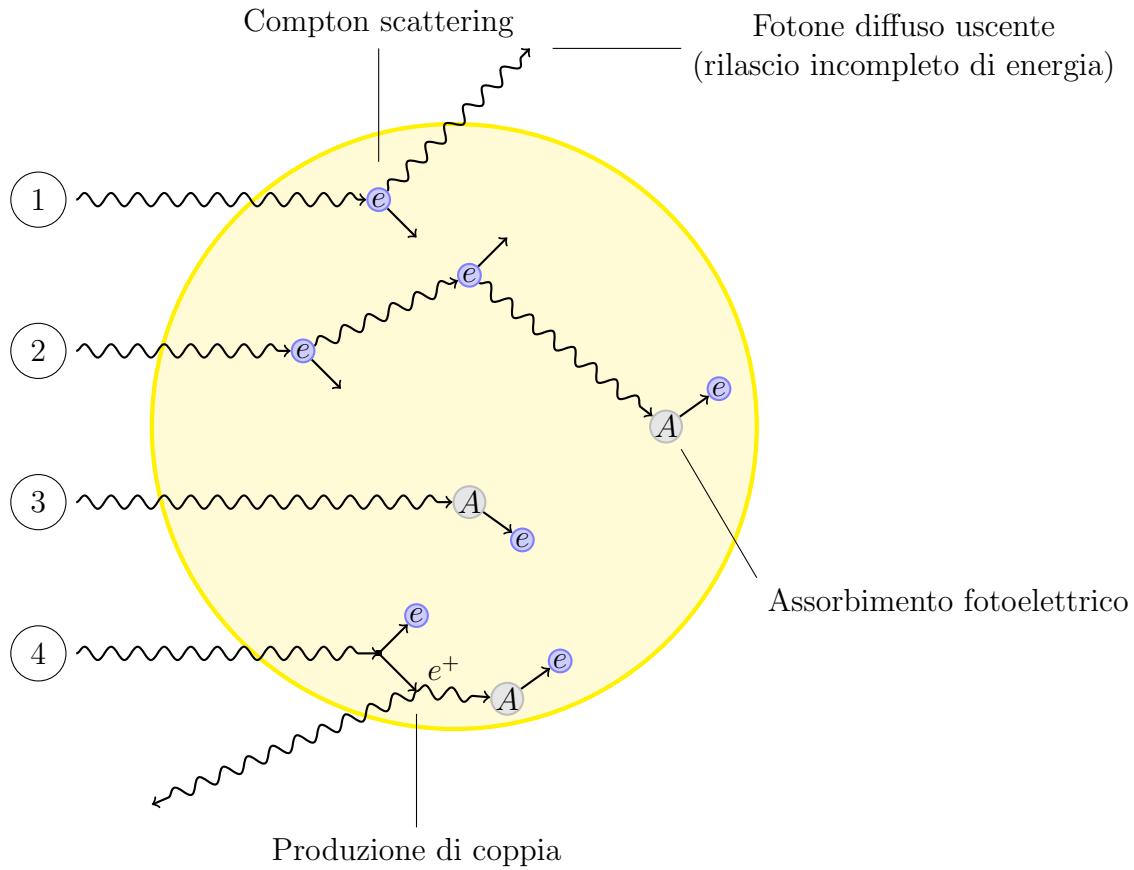


Figura 2.7: Processi che si verificano nella rivelazione dei raggi γ . (1) Il fotone interagisce con la materia attraverso l'effetto Compton e viene diffuso all'esterno del materiale prima di avere totalmente depositato tutta la sua energia. (2) Il fotone interagisce diverse volte attraverso l'effetto Compton senza riuscire a scappare dal materiale e, una volta raggiunta una bassa energia, viene assorbito per effetto fotoelettrico con conseguente emissione di un fotoelettrone. (3) Il fotone viene subito assorbito per effetto fotoelettrico (si verifica per fotoni di bassa energia). (4) Il fotone si trasforma in un elettrone e in un positrone (produzione di coppia). In seguito l'elettrone si ferma nel materiale mentre il positrone si annichilisce con la materia producendo a sua volta due fotoni che possono andare incontro alle precedenti tre interazioni (in questo caso uno dei due fotoni viene assorbito mentre l'altro riesce a scappare dal rivelatore prima di avere depositato la sua energia)[3].

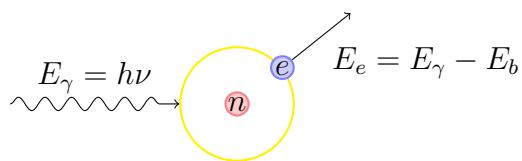


Figura 2.8: Rappresentazione schematica dell'effetto fotoelettrico.

degli elettroni delle shell interne: quando il fotone si trova alla stessa energia della shell allora la probabilità che un elettrone di tale shell venga emesso aumenta.

Nel caso particolare di raggi gamma ($\sim 100\text{keV}$), come si può vedere in figura 2.9, viene tendenzialmente emesso un elettrone proveniente dalla shell K (è questo l'elettrone che porta dunque la quasi totalità dell'energia del fotone incidente) la cui binding energy è dell'ordine di qualch eV . La lacuna che si crea nella shell viene riempita da un

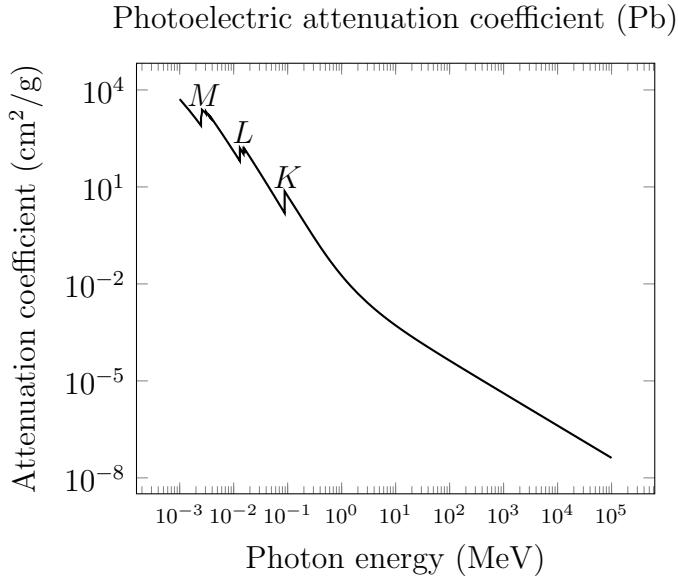


Figura 2.9: Coefficiente di attenuazione (vedi appendice A) dell’effetto fotoelettrico per il piombo[7]. I salti discreti corrispondono alle energie di legame (*binding energies*) dei vari elettroni di shell. A 88 keV abbiamo l’energia della shell *K*.

elettrone proveniente da una shell esterna e la binding energy viene ”liberata” attraverso due tipi di fenomeni: l’emissione di raggi X o l’emissione di un elettrone per *effetto Auger*². L’elettrone emesso per effetto Auger percorre una brevissima distanza per via della sua bassa energia (e viene quindi sempre raccolto dal rivelatore, avendo così un deposito totale di energia), al contrario il fotone (emissione X), che viene prodotto nel 90% dei casi, può percorrere anche diversi millimetri prima di essere riassorbito (sempre attraverso effetto fotoelettrico, in tal caso saranno emessi elettroni di shell più esterne) e può essere che riesca a fuggire dal rivelatore (in tale caso il deposito di energia non è totale)[3].

La risposta di un rivelatore a una serie di eventi fotoelettrici è illustrata in figura 2.10.

2.2.2 Effetto Compton

Consideriamo un’onda elettromagnetica di lunghezza d’onda λ_i incidente su un bersaglio (ad esempio una lamina di un dato materiale) come in figura 2.11. Quello che si osserva è che la radiazione viene deviata di un angolo θ rispetto alla direzione di propagazione originaria e che la sua lunghezza d’onda λ_f risulta essere maggiore di quella incidente, ovvero l’energia della radiazione diffusa risulta essere minore di quella incidente.

Sperimentalmente si ricava questa relazione[6]:

$$\lambda_f = \lambda_i + \lambda_c(1 - \cos \theta) \quad (2.41)$$

dove λ_c è un parametro che risulta essere indipendente dalla lunghezza d’onda λ_i , dall’angolo θ e dal materiale che costituisce il bersaglio.

²L’effetto Auger è un fenomeno fisico attraverso il quale il riempimento di una lacuna di una shell interna di un atomo da parte di un elettrone appartenente a una shell più esterna, è accompagnata dall’emissione di un elettrone dello stesso atomo. Riguardo all’energie dell’elettrone emesso, essa corrisponde alla differenza tra l’energia iniziale della transizione elettronica e l’energia di ionizzazione della shell dalla quale l’elettrone viene emesso.

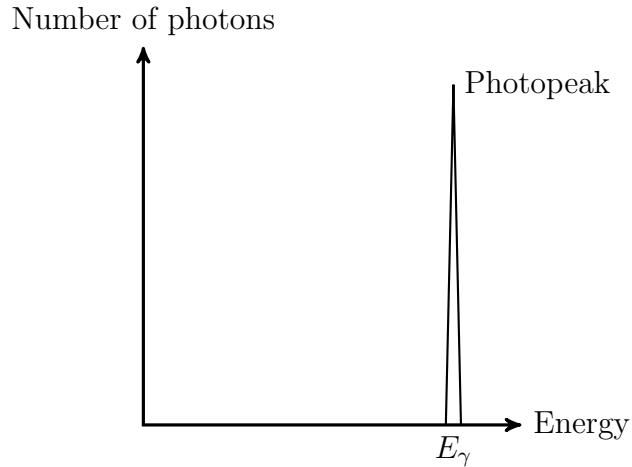


Figura 2.10: Risposta di un rivelatore a un fotone che interagisce con esso solo attraverso l'effetto fotoelettrico. Il fotoelettrone, che porta tutte l'energia del fotone incidente, viene sempre catturato dal rivelatore e il deposito di energia è totale, per tale motivo la distribuzione di energia sarà idealmente una di delta Dirac centrata in E_γ .

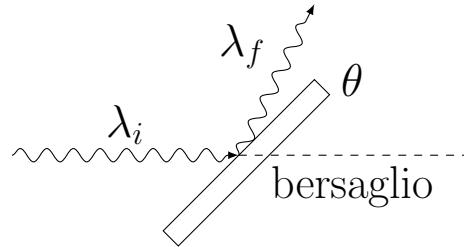


Figura 2.11: Radiazione incidente su lamina bersaglio.

Questo fenomeno che risulta inspiegabile dal punto di vista classico trova invece una sua interpretazione con l'ipotesi che il campo elettromagnetico, quantizzato, si propaghi e interagisca sotto forma di fotoni ciascuno dotato di energia $h\nu$ e quantità di moto $\frac{h\nu}{c}$. I fotoni incidenti sulla materia possono compiere sugli elettroni di valenza dell'atomo un urto assimilabile all'urto elastico (si conserva l'energia totale e la quantità di moto totale) tra particelle puntiformi. Se λ_i è molto piccola ovvero se l'energia dei fotoni incidenti è molto elevata (molto maggiore dell'energia di legame tra l'elettrone e il nucleo atomico) l'urto può essere trattato come urto su particella libera (vedi figura 2.12). L'energia cinetica di rinculo dell'elettrone può dunque essere comparabile con la sua massa a riposo e per quanto detto in appendice B bisogna dunque utilizzare le relazioni valide in relatività ristretta per trattare la cinematica dell'urto[4].

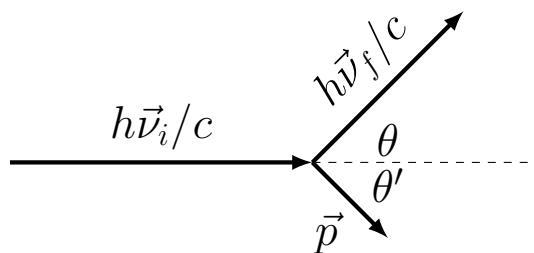


Figura 2.12: Fotone incidente su elettrone bersaglio.

Abbiamo dunque due relazioni:

$$\begin{cases} \frac{h\vec{\nu}_i}{c} = \frac{h\vec{\nu}_f}{c} + \vec{p} \\ E_0 + h\nu_i = E + h\nu_f \end{cases} \quad (2.42)$$

Da questo sistema di equazioni di ricava:

$$\lambda_f = \lambda_i + \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta) \quad (2.43)$$

dove m_e è la massa dell'elettrone e $h/(m_e c) = \lambda_c$ viene chiamata *lunghezza Compton* dell'elettrone.

Da questa si può esprimere la relazione che lega E_γ , ovvero l'energia del fotone incidente, con E'_γ , ovvero l'energia del fotone diffuso:

$$E'_\gamma = \frac{E_\gamma}{1 + \left(\frac{E_\gamma}{m_e c^2}\right)(1 - \cos \theta)} \quad (2.44)$$

L'energia cinetica che invece acquista l'elettrone diffuso è data da:

$$T_e = E_\gamma - E'_\gamma = \frac{E_\gamma^2 (1 - \cos \theta)}{mc^2 + E_\gamma (1 - \cos \theta)} \quad (2.45)$$

Vediamo come ci sia una dipendenza dall'angolo di scattering per quanto riguarda l'energia finale del fotone e l'energia acquisita dall'elettrone. L'energia del fotone diffuso va da un massimo di E_γ per $\theta = 0^\circ$ a un minimo di circa $(E_\gamma mc^2)/(mc^2 + 2E_\gamma)$ per $\theta = 180^\circ$ (il fotone viene scatterato indietro). L'energia dell'elettrone diffuso si comporta in modo opposto a quella del fotone e va da un minimo di zero per $\theta = 0^\circ$ a un massimo di $(2E_\gamma^2)/(mc^2 + 2E_\gamma)$ per $\theta = 180^\circ$.

La sezione d'urto differenziale $d\sigma_c/d\Omega$ dell'effetto Compton in funzione dell'angolo di diffusione (formula di *Klein-Nishina*) può essere determinata attraverso un calcolo di teoria quantistica dei campi. In questa sede diciamo solamente che questa dipende dall'angolo di diffusione e dall'energia del fotone incidente ovvero $d\sigma_c/d\Omega = (d\sigma_c/d\Omega)(\theta, E_\gamma)$.

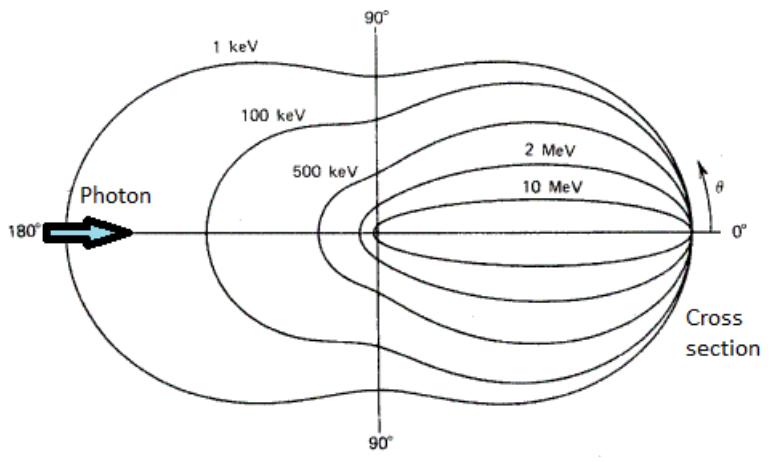


Figura 2.13: Sezione d'urto dell'effetto Compton per varie energie del fotone incidente in funzione dell'angolo di diffusione. Il fotone incidente si propaga da sinistra a destra lungo l'asse orizzontale mentre l'elettrone si trova nell'origine degli assi[3].

La risposta di un rivelatore a un singolo evento compton è mostrata in figura 2.14.

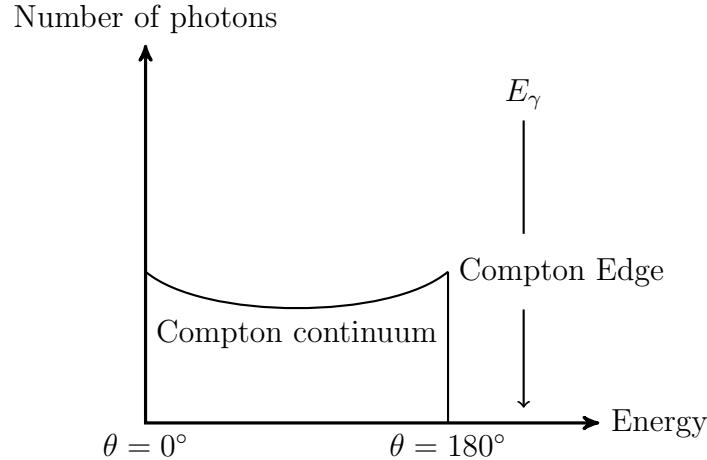


Figura 2.14: Risposta di un rivelatore a un singolo evento di effetto Compton. Come descritto in equazione (2.45), l’energia dell’elettrone diffuso per effetto Compton dipende dall’angolo di diffusione e presenta un valore minimo e un valore massimo. Quest’ultimo in particolare è sempre minore della reale energia del fotone incidente.

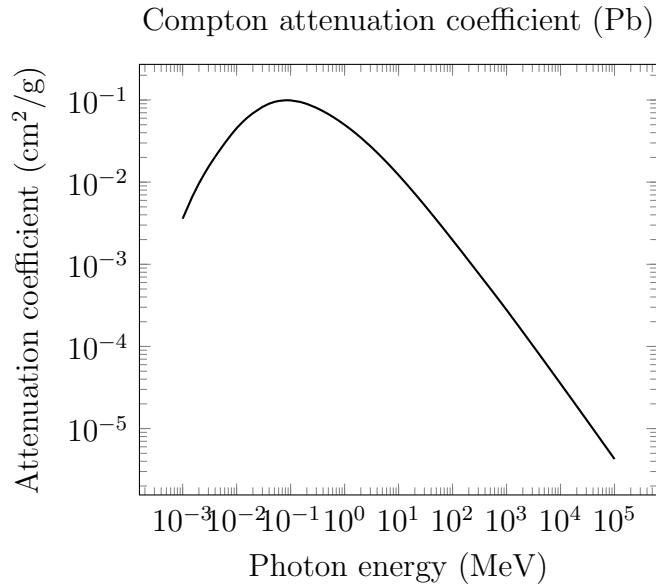


Figura 2.15: Coefficiente di attenuazione dell’effetto Compton per il piombo[7].

2.2.3 Produzione di coppie

A partire da un fotone si può venire a creare una coppia particella-antiparticella. Ovviamente affinchè tale processo si possa realizzare, per il principio di conservazione dell’energia, il fotone deve avere almeno un’energia pari al doppio della massa a riposo della particella considerata, ovvero deve essere:

$$E_\gamma \geq 2m_0c^2 \equiv E_s \quad (2.46)$$

dove chiamiamo E_s *energia di soglia*.

Nel caso specifico della produzione della coppia elettrone-positrone abbiamo $E_s = 2m_e c^2 = 1.02 \text{ MeV}$. Per quanto riguarda la quantità di moto, essa non si può conservare nel processo di trasformazione di un fotone di elettrone-positrone, pertanto non è possibile

il processo $\gamma \rightarrow e^+ + e^-$ ma è solo possibile il processo $\gamma + A \rightarrow A + e^+ + e^-$ dove A è un nucleo il quale assorbe la quantità di moto necessaria a consentirne la conservazione ed è anche tale da essere così massiccio rispetto agli elettroni-positroni da fare sì che tutta l'energia del fotone venga convertita nella loro energia di massa ed energia cinetica ovvero:

$$E_\gamma = 2m_e c^2 + T_+ + T_- \quad (2.47)$$

dove T_+ e T_- sono rispettivamente l'energia cinetica del positrone e dell'elettrone prodotti nel processo.

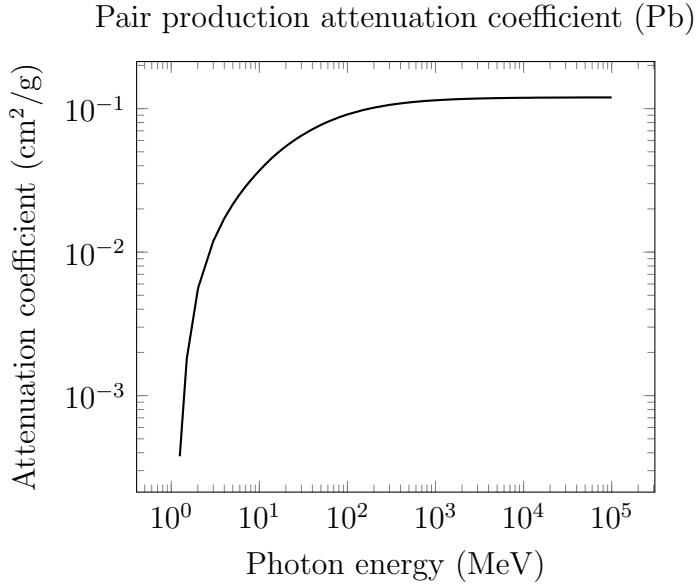


Figura 2.16: Coefficiente di attenuazione dell'effetto di produzione di coppie per il piombo[7].

2.3 Sezione d'urto totale

La sezione d'urto totale (vedi appendice A) per un fotone che interagisce con un blocco di materia è dato dunque dalla somma delle sezioni d'urto delle tre possibili interazioni. In generale possiamo dunque scrivere:

$$\mu_{tot} = \mu_{ph} + \mu_c + \mu_{pc} \quad (2.48)$$

dove $\mu_{ph} = \frac{\sigma_{ph}\rho}{uA_r}$, $\mu_c = Z \frac{\sigma_c\rho}{uA_r}$ con $\sigma_c = \int_0^{4\pi} \frac{d\sigma_c}{d\Omega} d\Omega$ la sezione d'urto per l'effetto compton e $\mu_{pc} = \frac{\sigma_{pc}\rho}{uA_r}$ con σ_{pc} la sezione d'urto per la produzione di coppie. Da notare il fattore Z , in quanto i bersagli dell'effetto compton non sono i nuclei ma gli elettroni dei nuclei che sono dunque Z volte di più.

Nelle regioni di energie di circa 1 MeV si ha invece il dominio dell'effetto compton, mentre per regioni oltre qualche MeV si ha invece un dominio della produzione di coppie (vedi figura 2.17).

Il numero di fotoni sopravvissuti è dato dalla relazione:

$$n(x) = n_0 e^{\frac{\mu_{tot}}{\rho} x_m} \quad (2.49)$$

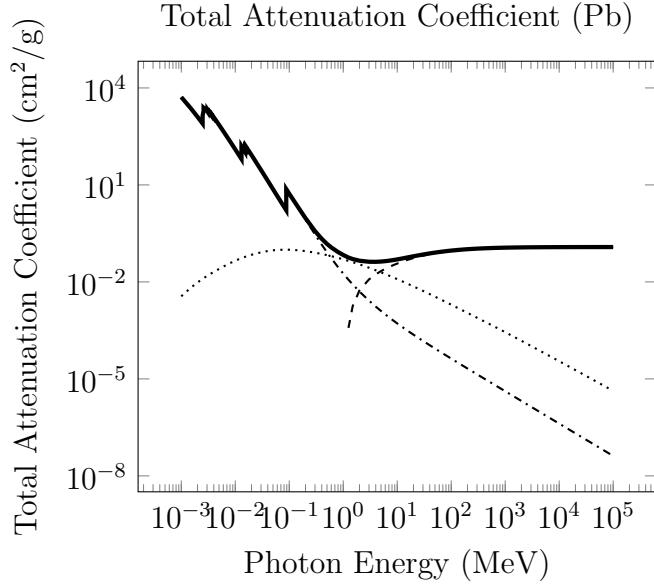


Figura 2.17: Coefficiente di attenuazione totale per il piombo (linea continua). Sono presenti anche i singoli contributi dovuti all'effetto fotoelettrico dominante a basse energie (linea tratto-punto), all'effetto Compton dominante intorno per energie a qualche MeV (linea punteggiata) e all'effetto di produzione di coppie dominante per alte energie (linea tratteggiata)[7].

dove $x_m = \rho x$. Da questa si deduce che la radiazione assorbita dal materiale, ovvero il numero di fotoni che hanno interagito con il materiale, sono $n_0 - n(x)$, dunque:

$$n_a(x) = n_0(1 - e^{\frac{\mu_{tot}}{\rho} x_m}) \quad (2.50)$$

Capitolo 3

Rivelatori a semiconduttore

Da ora in poi tratteremo particolari tipi di giunzioni $p - n$ che saranno quelle utilizzate per costruire la parte sensibile dei rivelatori di particelle. Quando una particella passa attraverso la zona svuotata, genera una coppia elettrone-buca che è l'origine del nostro segnale (da ricordare quanto descritto nel precedente capitolo per quanto riguarda l'interazione radiazione materia). Quello che serve è una ampia zona di svuotamento, in quanto più questa è grande più è grande la probabilità che la particella interagisca e dia segnale. Come è ovvio alla nostra giunzione sarà dunque applicata una tensione di polarizzazione inversa che per brevità scriveremo come $V_b = |\Delta V_{AB}|$, inoltre ci troveremo sempre in una condizione per cui $n_A \ll n_D$ e dunque:

$$\frac{n_A + n_D}{n_A n_D} = \frac{n_D \left(1 + \frac{n_A}{n_D}\right)}{n_D n_A} = \frac{1}{n_A} \quad (3.1)$$

per cui:

$$w = \sqrt{\frac{2\epsilon}{n_A e} (V_{bi} + V_b)} \quad (3.2)$$

e avendo $\rho_A = \frac{1}{en_A \mu_h}$, che altro non è che la resistività solo del semiconduttore accettore (in quanto nella zona p il numero degli elettroni è inferiore a quello delle buche e posso dunque trascurarlo), ottengo:

$$w = \sqrt{2\epsilon \rho_A \mu_h (V_{bi} + V_b)} \quad (3.3)$$

che verrà sinteticamente scritta come:

$$x_1 \approx w = \sqrt{2\epsilon \rho_A \mu_h V} \quad (3.4)$$

avendo posto $V_{bi} + V_b = V$.

Ottenuta questa relazione possiamo calcolare il valore della carica elettrica accumulata nelle due zone, che in prima approssimazione non sarà altro che la carica contenuta nella parte p data l'approssimazione in cui ci troviamo.

$$Q = en_A S w \quad (3.5)$$

dove S è la superficie del rivelatore.

Usando la nota relazione $C = \frac{Q}{V}$ ottengo la capacità del rivelatore in funzione della lunghezza della zona svuotata, infatti invertendo V nella (3.4) e sostituendolo si ha:

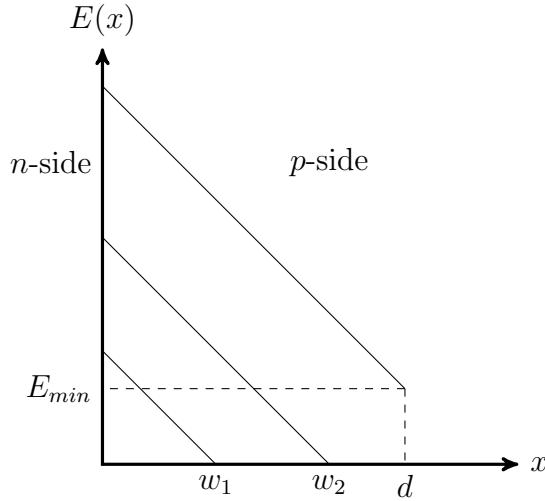


Figura 3.1: Andamento qualitativo del campo elettrico al variare della tensione e della zona svuotata. Quando la tensione V diventa maggiore di V_{dep} la zona svuotata non può più aumentare e il campo elettrico minimo diventa maggiore di zero.

$$C = \frac{2\epsilon S}{w} \quad (3.6)$$

che è uguale a quella di un condensatore piano con carica concentrata sulle armature, a meno di un fattore 2 al numeratore.

Se avessi voluto esprimere la stessa in funzione però della tensione ai capi della giunzione avrei ottenuto:

$$C = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_h \rho_A V}} S \quad (3.7)$$

Il campo elettrico viene a scriversi come:

$$E(x) = \frac{en_A}{\epsilon}(w - x) = E_0(w - x) \quad (3.8)$$

dove è stato posto $E_0 = (en_A)/\epsilon$.

Il valore massimo del campo elettrico si trova nella zona di transizione ($x = 0$) e vale:

$$E_{MAX} = \frac{en_A}{\epsilon}w = E_0w = \frac{en_A}{\epsilon}\sqrt{\epsilon\mu_h \rho_A eV} = \sqrt{\frac{2Ven_A}{\epsilon}} \quad (3.9)$$

esso quindi aumenta all'aumentare della tensione applicata e quindi anche all'aumentare della zona di svuotamento.

Volendo esprimere il campo elettrico solo in funzione di w e V evitando di utilizzare le costanti del materiale, si può ricavare con una serie di sostituzioni la seguente equazione:

$$E(x) = \frac{2V}{w^2}(w - x) \quad (3.10)$$

Ponendo $w = d$ dove d è lo spessore del blocco di materiale, si può calcolare la tensione di polarizzazione inversa V_b che è necessario applicare per svuotare completamente il semiconduttore. Si ottiene che:

$$V_{dep} = \frac{ne}{2\epsilon}d^2 - V_{bi} \quad (3.11)$$

3.1 Formazione del segnale

Come già precedentemente accennato la parte sensibile del nostro rivelatore è la zona svuotata. Essa è priva di portatori liberi di carica e quando una particella energetica si muove al suo interno crea lungo il suo percorso delle coppie elettrone-buca proporzionalmente alla sua energia. Queste vengono in seguito raccolte dagli elettrodi dando origine a un segnale. Il numero di coppie che si formano si ottiene dalla relazione:

$$N_{e-h} = \frac{E}{E_i} \quad (3.12)$$

dove E_i è il fattore di conversione. L'energia minima che un rivelatore ideale è in grado di leggere è quella che corrisponde alla produzione di una sola coppia elettrone buca. Questa energia rappresenta una soglia intrinseca del rivelatore.

3.2 Raccolta della carica

3.2.1 Tempo di raccolta

Una volta che la carica viene prodotta, essa deriva spinta dall'azione del campo elettrico verso gli elettrodi e li viene raccolta dando origine al segnale. La situazione può essere schematizzata come in figura 3.2.

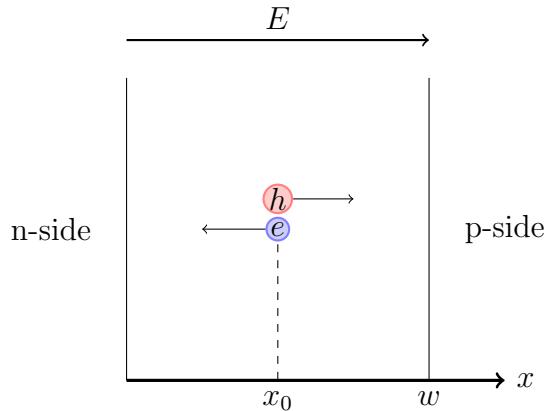


Figura 3.2: La coppia viene creata prodotta in x_0 e poi sotto l'azione del campo elettrico si muovono verso le due diverse parti della giunzione: gli elettroni verso la parte n mentre le buche verso la parte p . Il tempo che impiegano in questo processo viene chiamato tempo di raccolta.

Il tempo che la carica impiega per giungere agli elettrodi viene chiamato *tempo di raccolta*. Sia v_d la velocità di deriva della carica prodotta e μ la sua mobilità, allora vale la relazione:

$$v_d = \pm \mu_{e,h} E(x) \quad (3.13)$$

dove il $+$ vale per le buche la cui velocità è concorde con il campo elettrico mentre il segno $-$ vale per gli elettroni la cui velocità è discorde con il campo elettrico.

Risolvendo l'equazione differenziale:

$$dt = \pm \frac{1}{v_d(x)} dx = \pm \frac{1}{\mu_{e,h} E(x)} dx = \pm \frac{\epsilon}{\mu_{e,h} en} \frac{1}{w-x} dx \quad (3.14)$$

si ottiene che:

$$t(x, x_0) = \pm \int_{x_0}^x \frac{\epsilon}{\mu_{e,h} en} \frac{1}{w-x} dx = \mp \frac{\epsilon}{\mu_{e,h} en} \ln\left(\frac{w-x}{w-x_0}\right) \quad (3.15)$$

dove x_0 è il punto in cui la carica viene prodotta e n è la densità di dell'impurità con denistà minore (nel nostro caso sarebbe dunque $n = n_A$). Ora il segno $-$ si riferisce alla buche mentre il segno $+$ agli elettroni.

Consideriamo ora il caso particolare degli elettroni, essi vengono spinti dal campo elettrico dal punto di produzione alla zona n . Il tempo di raccolta si trova ponendo $x = 0$, e sarà dunque una funzione del punto di produzione della carica:

$$t_{ce}(x_0) = \frac{\epsilon}{\mu_e en} \ln\left(\frac{w}{w-x_0}\right) = \tau_e \ln\left(\frac{w}{w-x_0}\right) \quad (3.16)$$

con $\tau_e = \frac{\epsilon}{\mu_e en}$.

Invertendo la relazione (3.15) si ottiene per gli elettroni:

$$x_e(t) = w - (w-x_0)e^{\frac{t}{\tau_e}} \quad (3.17)$$

valdi per $0 < t < t_{ce}$. Come ci si aspetta per $t = 0$ vale $x_e = x_0$ mentre per $t = t_{ce}$ vale $x_e = 0$.

Le buche invece vengono spinte verso la zona p e in tal caso il tempo di raccolta si trova ponendo $x = w$, o meglio si fa il limite per $x \rightarrow w$ e si ottiene che $t_{ch} = +\infty$. Tecnicamente le lacune impiegano un tempo infinito per giungere all'elettrodo. Tuttavia invertendo la relazione in equazione (3.15) si ha che:

$$x_h(t) = w - (w-x_0)e^{-\frac{\mu_h en}{\epsilon} t} = w - (w-x_0)e^{-\frac{t}{\tau_h}} \quad (3.18)$$

con $\tau_h = \frac{\epsilon}{\mu_h en}$. Come ci si aspetta per $t = 0$ si ha che $x_h = 0$ mentre per $t \rightarrow +\infty$ si ha che $x_h \rightarrow w$.

Quando $t = 3\tau$ la carica ha essenzialmente compiuto il 95% del percorso. Considereremo dunque $t_{ch} = 3\tau_h = 3\frac{\epsilon}{\mu_h en}$. Da notare come τ_h sia costante e non dipenda ne da x_0 e ne da w .

In realtà la mobilità $\mu_{e,h}$ non è un valore costante ma è anche esso dipendente a sua volta dal campo elettrico $E(x)$ e dalla temperatura T^1 .

Questo fa sì che la velocità di drift $v_{de,h}$ non sia legata proporzionalmente al campo elettrico come in equazione (3.13). Per campi elettrici minori di un certo campo elettrico critico E_c la velocità cresce linearmente con E , ma quando E diventa maggiore di E_c la velocità satura e diventa costante.

¹Nella simulazione sarà usata la seguente espressione[2]:

$$\mu_{e,h}(x) = \frac{\mu_{0e,h}}{\left(1 + \left(\frac{\mu_{0e,h} E(x)}{v_{de,h}^{sat}}\right)^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}} \quad (3.19)$$

dove $\mu_{0e,h} = \mu_{0e,h}(T)$ e $\beta = \beta(T)$.

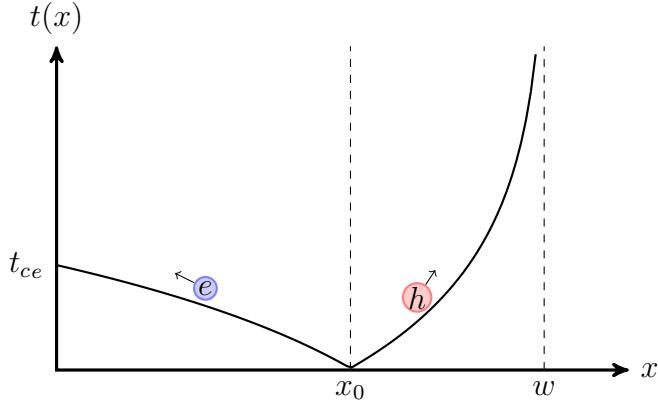


Figura 3.3: Andamento qualitativo di $t_{e,h}$ in funzione di x per elettroni (a sinistra di x_0) e per lacune (a destra di x_0).

3.2.2 Teorema di Shockley-Ramo

Il segnale di corrente non si genera quando la carica giunge all'elettrodo, ma quando essa inizia a muoversi all'interno della zona svuotata sotto l'azione del campo elettrico. Supponiamo di trovarci in una regione di spazio dove sono presenti N conduttori C_k e sia $\vec{E}(\vec{x})$ il campo elettrico ivi presente. Una carica q si muove sotto l'azione del campo elettrico in questa regione. L'intensità di corrente i_k che tale carica induce sul conduttore C_k è data dal cosiddetto *Teorema di Ramo*[8]:

$$i_k = q\vec{v} \cdot \vec{F}_k \quad (3.20)$$

dove \vec{F}_k è il *weighting field*, un campo che si ottiene ponendo il conduttore di interesse a potenziale $V = 1$ e tutti gli altri a zero (*weighting potential*) mentre \vec{v} è la velocità della particella carica determinata dal campo elettrico presente dalla relazione $\vec{v} = \mu\vec{E}$. La scelta del segno + è una convenzione: se l'intensità di corrente indotta sull'elettrodo è positiva allora significa che la corrente sta entrando nell'elettrodo, se negativa che sta uscendo.

La carica indotta sull'elettrodo in funzione del tempo, è data da:

$$Q(t) = \int_0^t idt' = q \int_0^{t'} \vec{F} \cdot \vec{v} dt' = q \int_{\vec{x}_0=\vec{x}(t=0)}^{\vec{x}(t)} \vec{F} d\vec{x} = -q(W(\vec{x}(t)) - W(\vec{x}_0)) \quad (3.21)$$

dove $\vec{F}(\vec{x}) = -\vec{\nabla}W(\vec{x})$ è il weighting potential.

Un rivelatore a semiconduttore può essere schematizzato come in figura 3.2. Ora supponiamo che venga prodotta una coppia elettrone-buca in x_0 . Vogliamo ora determinare la carica indotta su un elettrodo, ad esempio l'elettrodo n (la carica indotta sull'altro sarà uguale ma di segno opposto). Dividiamo tra il contributo dovuto all'elettrone e il contributo dovuto alla buca.

$$Q_e = e(W(0) - W(x_0)) \quad Q_h = -e(W(d) - W(x_0)) \quad (3.22)$$

la carica totale indotta è dunque:

$$Q = Q_e + Q_h = e(W(0) - W(d)) \quad (3.23)$$

ma $W(d) = 0$ e $W(0) = 1$, e così $Q = e$. Si nota dunque come la carica indotta su un elettrodo sia dovuta solo alla carica che termina su quello stesso elettrodo.

Per determinare invece la carica indotta su un elettrodo in funzione del tempo, ci si serve del campo elettrico per determinare $x(t)$, poi si va a valutare la funzione:

$$Q(t) = e \left(W(x_h(t)) - W(x_e(t)) \right) \quad (3.24)$$

dove $x_e(t)$ e $x_h(t)$ sono quelle ricavate rispettivamente in equazione (3.17) e (3.18).

Si voglia ora determinare la corrente indotta sull'elettrodo di raccolta n , a tal fine usiamo l'equazione (3.20) e scomponiamo la corrente totale nei suoi due contributi, la corrente indotta dall'elettrone e la corrente indotta dalla buca, abbiamo così:

$$i_e = -e\mu_e \frac{E}{w} \quad i_h = e\mu_h \frac{E}{w} \quad (3.25)$$

dove abbiamo posto $v_e = -\mu_e E$, $v_h = \mu_h E$ e $F = \frac{1}{d}$. Ora sostituiamo la nota espressione del campo elettrico, ottenendo:

$$i_e = \frac{e}{\tau_e} \frac{w - x_e}{w} = \frac{e}{\tau_e} \frac{w - x_0}{w} e^{\frac{t}{\tau_e}} \quad (3.26)$$

valida per $0 < t < t_{ce}$. Per $t = 0$ si ha che $i_e = \frac{e}{\tau_e} \frac{w - x_0}{w}$ mentre per $t = t_{ce}$ si ha che $i_e = \frac{e}{\tau_e}$.

$$i_h = \frac{e}{\tau_h} \frac{w - x_h}{w} = \frac{e}{\tau_h} \frac{w - x_0}{w} e^{-\frac{t}{\tau_h}} \quad (3.27)$$

valida per $0 < t < +\infty$. Per $t = 0$ si ha che $i_h = \frac{e}{\tau_h} \frac{w - x_0}{w}$ mentre per $t \rightarrow +\infty$ si ha che $i_h \rightarrow 0$.

La carica totale indotta vale dunque:

$$i = \begin{cases} i_e + i_h = e \frac{w - x_0}{w} \left(\frac{e^{\frac{t}{\tau_e}}}{\tau_e} + \frac{e^{-\frac{t}{\tau_h}}}{\tau_h} \right) & 0 < t < t_{ce} \\ i_h & t > t_{ce} \end{cases} \quad (3.28)$$

3.2.3 Diffusione

L'elettrone prodotto per effetto fotoelettrico è libero di muoversi nella regione svuotata. Al contrario di particelle cariche pesanti che proseguono dritte nel loro cammino, l'elettrone, in seguito a molteplici interazioni, percorre una traiettoria segmentata. Lungo tutta questa sua traiettoria esso deposita energia producendo per ionizzazione coppie elettrone-buca. Cio che si verifica è un allargamento del *cluster* elettronico in seguito a urti che sparpagliano uniformemente gli elettroni che si muovono dal punto di produzione al punto di raccolta. La RMS della distribuzione (gaussiana, le direzioni che gli elettroni prendono durante l'interazioni sono completamente casuali) una volta che il cluster è giunto all'elettrodo è data da[10]:

$$\sigma_d = \sqrt{2Dt} \quad (3.29)$$

dove $D = \mu_e \frac{kT}{e}$ è il *coefficiente di diffusione* e t è il tempo impiegato dalla carica a raggiungere l'elettrodo a partire dal suo punto di produzione (ovvero quello ricavato in equazione (3.15)).

Sostituendo la (3.16) nella (3.29), si ottiene il coefficiente di diffusione per gli elettroni:

$$\sigma_{de} = \sqrt{\frac{2kT\epsilon}{ne^2} \ln\left(\frac{w}{w-x_0}\right)} \quad (3.30)$$

il cui andamento è mostrato in figura 3.4.

Fissato x_0 abbiamo che:

$$d\sigma_{de} = \frac{\partial \sigma_{de}}{\partial w} dw = -\sqrt{\frac{kt}{2ne^2}} \frac{1}{\sqrt{\ln\left(\frac{w}{w-x_0}\right)} w(w-x_0)} dw \quad (3.31)$$

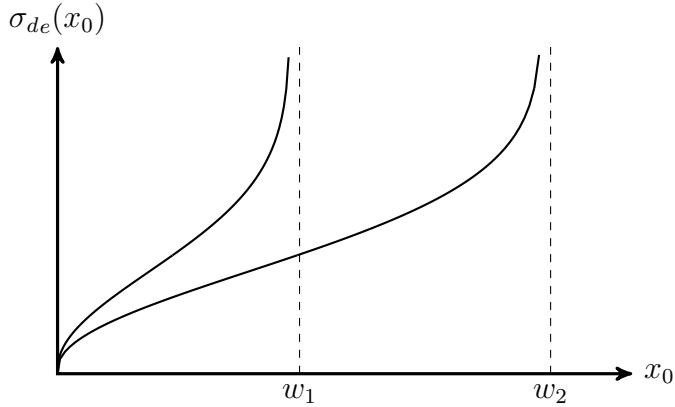


Figura 3.4: Andamento qualitativo della diffusione in funzione del punto di produzione della coppia elettrone-buca x_0 per diversi valori della zona svuotata $w_1 < w_2$.

Consideriamo per ora il caso più semplice ovvero supponiamo che la carica venga depositata dall'elettrone in un unico punto (sia Q la carica totale rilasciata) e, per semplificare i calcoli, supponiamo di trovarci in un ambiente bidimensionale come in figura.

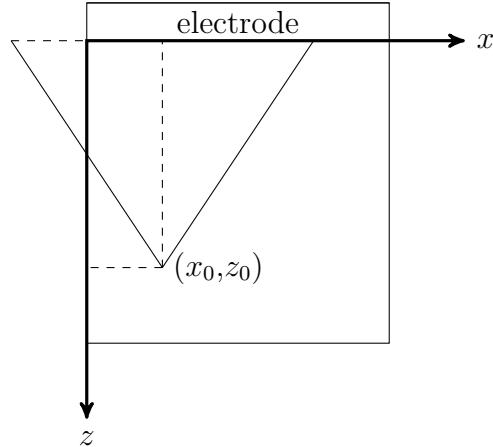


Figura 3.5: Le coppie elettrone-buca vengono tutte create nel punto (x_0, z_0) . Supponiamo ora di considerare per semplicità gli elettroni. Essi si muovono verso gli elettrodi e la loro distribuzione si allarga man mano che si avvicinano al punto di raccolta.

La distribuzione di carica in funzione del tempo sarà[9]:

$$\frac{dQ}{dx}(x, t) = \frac{Q}{\sqrt{2\pi}\sigma_d} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma_d^2}} \quad (3.32)$$

dove Q è la normalizzazione della gaussiana e x_0 è il punto in cui avviene l'interazione iniziale. Sostituendo la (3.29) si ottiene:

$$\frac{dQ}{dx}(x, t) = \frac{Q}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}} \quad (3.33)$$

Ora la carica depositata sul singolo pixel non è altro che l'integrale lungo la larghezza del pixel dalla distribuzione di carica. Sia dunque p la lunghezza del pixel lungo l'asse x :

$$Q_{dep} = \int_0^p \frac{dQ}{dx}(x, x_0, w, z_0) dx \quad (3.34)$$

Capitolo 4

Simulazione

Gli spettri che sono stati misurati sperimentalmente, e che saranno discussi nel capitolo 5, sono stati acquisiti mediante la lettura di un solo canale ovvero di un singolo pixel. In queste circostanze i fenomeni di non contenimento, non manifesti se si guarda la carica totale rilasciata nel rivelatore (ottenuta sommando la carica vista da ciascuno pixel per un singolo evento), assumono invece particolare importanza. Al fine di interpretare al meglio i risultati è stata necessaria una prima fase di simulazione.

I principali fenomeni di non contenimento che portano a una perdita di carica sul singolo pixel sono:

- diffusion: come già descritto in sezione 3.2.3, l'effetto della diffusione è quello di allargare uniformemente le dimensioni la nuvola di carica prodotta dal photoelettrone man mano che esse si avvicina all'elettrodo di raccolta. Se le sue dimensioni finali iniziano a essere dello stesso ordine grandezza di quelle dell'elettrodo allora parte della carica generata verrà depositata tra più pixel.
- cross-talk: il cross-talk nasce dall'accoppiamento capacitivo tra un pixel e i suoi pixel adiacenti. Un certa percentuale della carica depositata su un pixel viene sottratta a questo e ridistribuita tra i pixel adiacenti. Come vedremo porta a uno spostamento verso lo zero della posizione del picco rispetto al punto atteso teoricamente e alla formazione di un altro picco a basse energie;
- *range* dei photoelettroni: accennato in sezione 3.2.3, se il punto di conversione tra fotone e photoelettrone avviene al confine della zona sensibile del pixel, precisamente in punto la cui distanza dal confine è comparabile con quella del range medio del photoelettrone, allora il deposito di energia risulta o essere parziale e questo avviene ad esempio quando il photoelettrone inizia a depositare energia ma poi esce dalla zona svuotata, oppure questo può avvenire parte in un pixel e parte in un altro portando a una suddivisione della carica totale prodotta (perdite laterali). Nel caso generale potrebbe essere anche una combinazione di queste due dinamiche. La vallata della carica letta sul singolo pixel è affetta da entrambe queste componenti, mentre quella della carica totale depositata è affetta solo dalla prima componente, ma non dalle perdite laterali.

La simulazione è essenzialmente suddivisa in due parti:

- *simulation*: nella fase di simulazione ci si serve del software GEANT4 per simulare l'interazione radiazione-materia. Viene impostato il tipo di materiale che compone

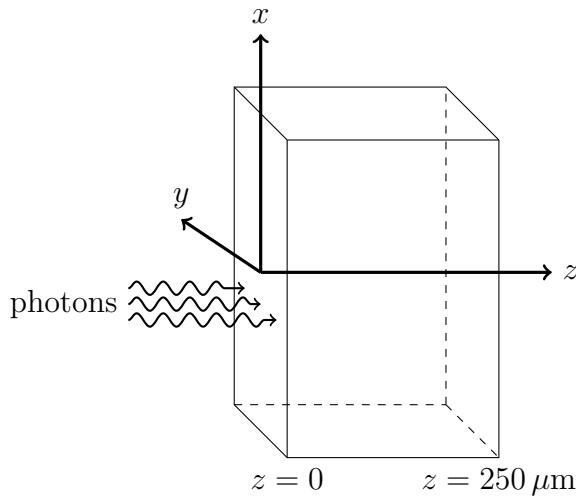


Figura 4.1: Configurazione del sistema utilizzata in fase di simulazione. I fotoni incidono perpendicolarmente e uniformemente sulla faccia posta a $z = 0$ del blocco di silicio ed entrano nel materiale all'interno del quale avvengono le interazioni (Compton e fotoelettrico).

il rivelatore, l'estensione del blocco di materiale, la posizione media della sorgente di radiazione elettromagnetica, il suo spread, il numero di fotoni che viene fatto incidere, la loro energia.

Il programma elabora così un file *.hits* che contiene le informazioni relative al percorso del fotone e dell'elettrone prodotto nel materiale e all'energia da essi depositata. La traiettoria dell'elettrone viene approssimata con una spezzata aperta determinata da una serie di posizioni iniziali e posizioni finali. Per ognuna di esse viene dato il tempo impiegato a percorrerle e l'energia depositata in quel tratto. I valori dei parametri utilizzati sono riassunti in tabella 4.1.

Materiale	Si
Volume	$8 \text{ mm} \times 8 \text{ mm} \times 250 \mu\text{m}$
Baricentro blocco di materiale	$(0,0,125 \mu\text{m})$
Posizione media sorgente	$(0,0,1 \text{ cm})$
Spread sorgente	$(1 \text{ mm}, 1 \text{ mm}, 0)$
Numero fotoni incidenti	1'000'000
Energia fotoni	variabile tra quelle in tabella 4.2

Tabella 4.1: Valori dei parametri utilizzati in fase di simulazione.

Sono stati creati quattro file *.hits* ognuno con un'energia diversa: K_α del rame, K_α dell'ittrio, K_β del rame e K_β dell'ittrio (vedi tabella 4.2) che sono quelle che sono state misurate sperimentalmente.

- *digitization*: nella fase di digitizzazione ci si occupa della raccolta di carica vera propria. Per prima cosa vengono inseriti i parametri utili delle componenti elettroniche del sistema ovvero le dimensioni degli elettrodi, il loro passo e il cross-talk. Viene dato nuovamente l'elemento di cui è composto il blocco di materiale e il suo spessore e viene impostato il valore della E_i . Viene selezionato il tipo di rivelatore (tipo *n* se la zona svuotata si estende di più verso la parte con grande concentrazione

	Cu_{K_α}	Cu_{K_β}	Y_{K_α}	Y_{K_β}
$E(\text{keV})$	8, 0	8, 9	14, 8	16, 7

Tabella 4.2: Valori energetici delle linee prodotte. Non è necessario essere maggiormente precisi sui valori delle energie in quanto la risoluzione della catena di misura è di circa 1 keV (vedi tabella 5.6).

di accettori, tipo p se la zona svuotata si estende di più verso la parte con grande concentrazioni di donori), la temperatura, lo spessore della zona svuotata (chiaramente minore o uguale dello spessore del blocco di materiale stesso) e il potenziale di polarizzazione inversa. È possibile impostare anche un valore di soglia e di rumore ma da noi sono state entrambe poste a zero. Una volta definite queste grandezze il programma di digitizzazione calcola il campo elettrico presente nella zona svuotata e la diffusione. In seguito legge il file *.hits* e per ogni iterazione converte l'energia depositata in coppie elettrone-buca. Queste coppie vengono poi suddivise in piccole unità (*minimum charge*) e distribuite uniformemente tra la posizione iniziale e la posizione finale di deposito. Ognuna di queste unità viene poi tracciata separatamente, tenendo conto della diffusione e degli effetti di *trapping* (tenuti a zero nella nostro caso). Viene determinato il numero dei pixel con deposito di carica e la carica totale depositata su ognuno di essi. In seguito viene aggiunto il rumore, la soglia e il cross-talk (solo lungo l'asse x). I valori delle cariche totali depositate vanno a riempire un unico istogramma dando origine allo spettro dN/dQ di nostro interesse. I parametri da noi utilizzati sono riassunti in tabella 4.3.

Lunghezza elettrodo lungo x	50 μm
Lunghezza elettrodo lungo y	250 μm
Passo elettrodo lungo x	50 μm
Passo elettrodo lungo y	250 μm
Cross-talk	0, 037
E_i	3, 6 eV
Tipo di rivelatore	tipo p
Spessore zona svuotata	variabile tra 0 e 250 μm

Tabella 4.3: Valori dei parametri utilizzati in fase di digitizzazione.

Vengono riportati in figura 4.2 e 4.3 gli istogrammi che rappresentano il dN/dz ovvero il numero di fotoni che hanno interagito per effetto fotoelettrico con il blocco di silicio in un intervallo $z + dz$. Come si può notare la legge di decrescita esponenziale ($N(z) = N_0 e^{-\mu z}$) è pienamente verificata. I valori ottenuti sono raccolti in tabella 4.4 e sono chiaramente compatibili con i valori forniti dal NIST riportati in tabella 4.5.

	Cu_{K_α}	Y_{K_α}
μ	$(0,01452 \pm 0,00002)\mu\text{m}^{-1}$	$(0,00233 \pm 0,00002)\mu\text{m}^{-1}$

Tabella 4.4: Valori di μ ricavati dalla simulazione.

Sia dunque $N_{tot} = 1'000'000$ il numero dei fotoni totali incidenti sul blocco di silicio e sia N_{ph} il numero di fotoni che hanno interagito per effetto fotoelettrico e N_c quelli che hanno interagito per effetto Compton. Per la Cu_{K_α} il numero di eventi fotoelettrici

$$\frac{\text{Cu}_{K\alpha}}{\mu} \quad 0,01486 \mu\text{m}^{-1} \quad Y_{K\alpha} \quad 0,00251 \mu\text{m}^{-1}$$

Tabella 4.5: Valori per μ_{ph} forniti dal NIST[7].

risulta essere il 96% degli eventi totali, il numero di eventi Compton risulta essere lo 0,006% mentre la frazione $N_c/N_{ph} = 0,0006$. Per la $Y_{K\alpha}$ il numero di eventi fotoelettrici risulta essere il 44% degli eventi totali, il numero di eventi Compton risulta essere lo 0,3% degli eventi totati, mentre la frazione $N_c/N_{ph} = 0,007$. Si verifica quindi quanto ci si aspetta, il numero di fotoni che interagiscono con il materiale per effetto fotoelettrico diminuisce con l'aumentare dell'energia dei fotoni incidenti mentre il numero di fotoni che interagiscono per effetto Compton aumenta.

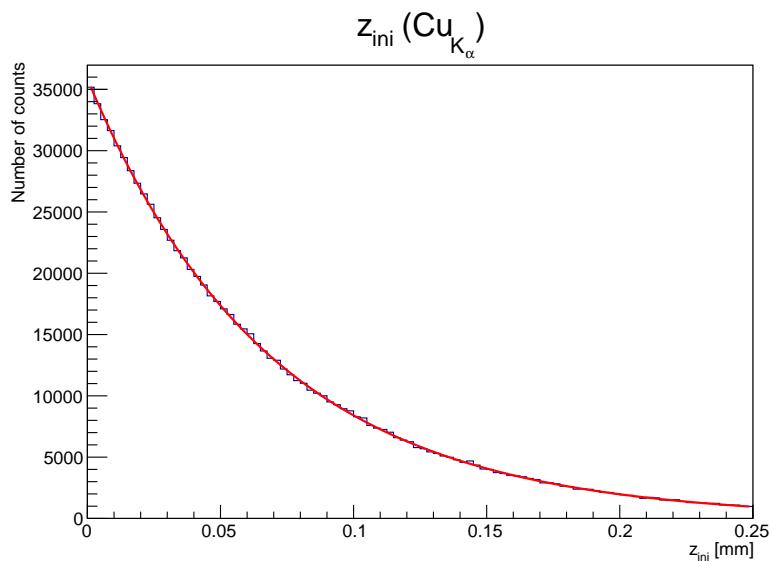


Figura 4.2: Distribuzione dei punti di conversione fotone-elettrone per la $\text{Cu}_{K\alpha}$.

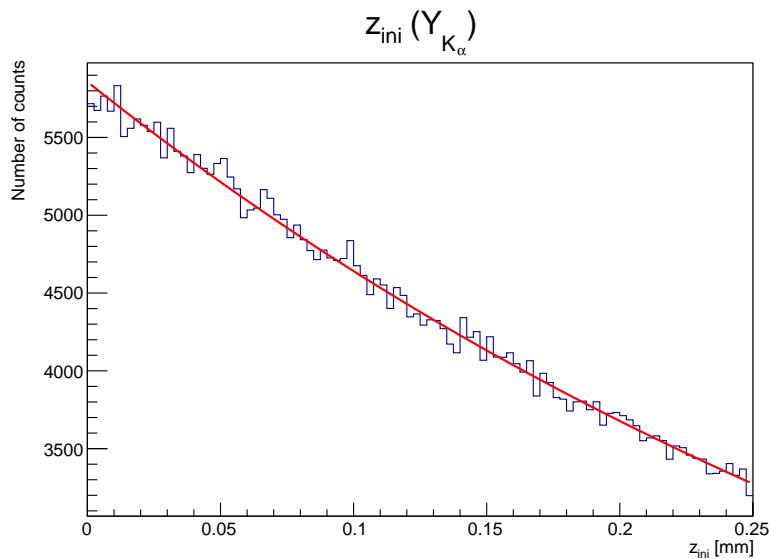


Figura 4.3: Distribuzione dei punti di conversione fotone-elettrone per la $Y_{K\alpha}$.

Da un punto di vista ideale, la funzione:

$$N(w) = \int_0^w \frac{dN}{dz} dz = N_0(1 - e^{-\mu w}) \quad (4.1)$$

mi fornirebbe l'andamento del numero di eventi nel picco in funzione della zona svuotata. Nella realtà dei fatti la diffusione e gli altri fenomeni di non contenimento precedentemente descritti, fanno sì che parte degli eventi che hanno interagito per effetto fotoelettrico rilascino carica parziale finendo nella vallata anziché nel picco. Il numero di eventi fotoelettrici sarà quindi dato dalla somma del numero di eventi nel picco e del numero di eventi nella vallata. Si cerca ora di stabilire quali siano gli effetti di tali fenomeni sugli andamenti di numero di eventi nel picco e densità di numero di eventi nella valle in funzione della zona svuotata. A tal fine, supposto il legame in equazione (3.4) e impostato il valore della resistività al suo valore nominale dato dal fornitore del rivelatore $\rho = 125 \Omega\text{cm}^2$, si è variata la zona svuotata e corrispondentemente il valore della tensione e si sono simulati i vari spettri dN/dQ . Per ognuno degli spettri ottenuti si è andato a valutare il numero di eventi nel picco e la densità del numero di eventi nella valle ottenendo i risultati in figura 4.8 e 4.9. Il picco è stato fissato mediante la funzione:

$$N_{peak} = N_0(1 - e^{-\mu w}) \quad (4.2)$$

Vengono riportati a titolo di esempio anche gli spettri della $\text{Cu}_{K\alpha}$ e della $\text{Y}_{K\alpha}$ per $w = 100 \mu\text{m}$ in figura 4.5.

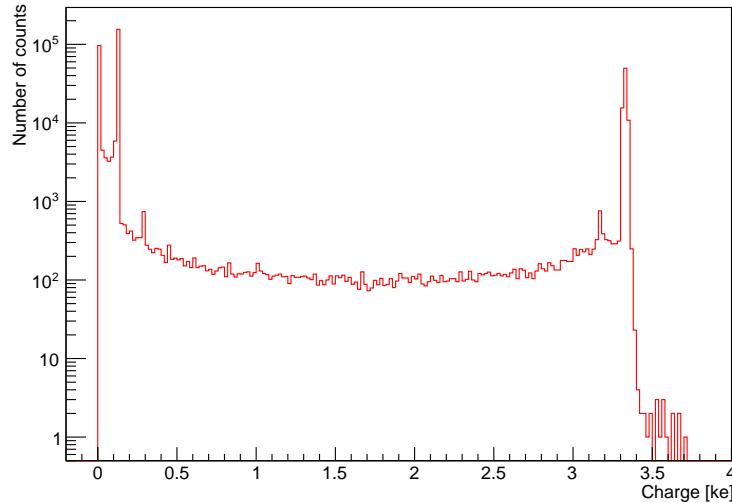


Figura 4.4: Spettro della $\text{Y}_{K\alpha}$ a $w = 40 \mu\text{m}$ per il singolo pixel.

I valori dei coefficienti di assorbimento ottenuti dal fit sono riassunti in tabella 4.6.

	$\text{Cu}_{K\alpha}$	$\text{Y}_{K\alpha}$
μ	$(0,01645 \pm 0,00003) \mu\text{m}^{-1}$	$(0,00411 \pm 0,00003) \mu\text{m}^{-1}$

Tabella 4.6: Valori di μ_{peak} ricavati dalla simulazione.

Si nota come i valori di μ ottenuti a partire dal conteggio del numero di eventi nel picco che chiameremo μ_{peak} siano più grandi rispetto a quelli ricavati precedentemente a partire dai punti di conversione fotone-elettrone che chiameremo μ_{ph} .

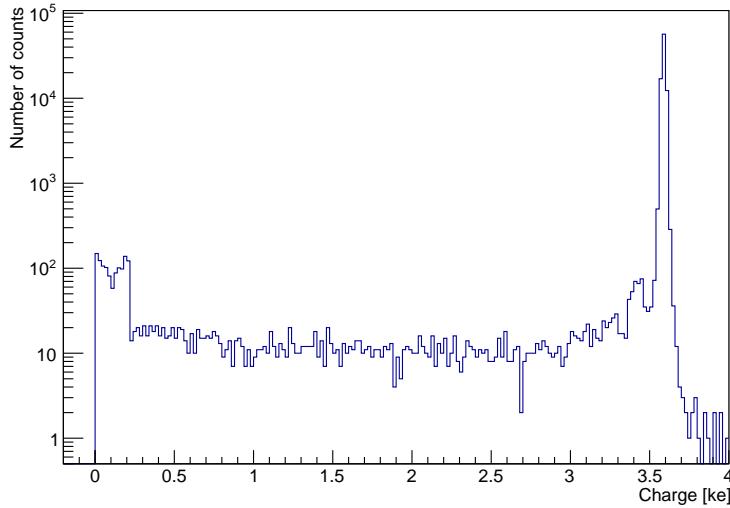


Figura 4.5: Spettro della $Y_{K\alpha}$ a $w = 40 \mu\text{m}$ per la carica totale.

Per quanto riguarda la $\text{Cu}_{K\alpha}$ notiamo una deviazione dal regime lineare del 10% intorno ai $13 \mu\text{m}$ mentre per la $Y_{K\alpha}$ intorno ai $60 \mu\text{m}$ che corrispondono a tensioni rispettivamente di 13 V e 196 V

Osservando gli spettri in figura 4.5 si nota che i picchi risultano essere spostati verso sinistra rispetto alla posizione teorica data da $Q_{peak} = E_{peak}/E_i$ di un δQ , tale che $\delta Q/Q$ rimane costante. Questo può essere interpretato come un effetto del cross-talk. Sistematicamente una medesima percentuale della carica indotta su un elettrodo viene ripartita sugli elettrodi vicini. Se la lettura fosse avvenuta su tutti i pixel, la carica indotta su ogni pixel sarebbe stata sommata e il picco si sarebbe trovato esattamente nella posizione aspettata. Purtroppo non siamo a conoscenza di quanto sia il cross-talk (nella simulazione è stato impostato un valore ragionevole) per il nostro rivelatore e pertanto lo shift simulato non può essere utilizzato per l'analisi della nostra presa dati, infatti i valori E_{peak}^i usati per il fit sono stati fissati ai valori nominali. Tutto questo porta a degli errori sistematici sui parametri della calibrazione.

La vallata risulta essere abbastanza piatta per tutte e due le linee. Questa caratteristica è particolarmente importante in quanto, come vedremo nel capitolo 5, ci permetterà di fissare gli spettri mediante delle funzioni particolarmente semplici.

Il numero di eventi nel picco segue un andamento esponenziale di assorbimento, mentre la valle ha un andamento proprio non facilmente riconducibile a una funzione analitica, ma possiamo tuttavia trarre lo stesso diverse conclusioni. In generale possiamo dire che il numero di eventi nel picco e il numero di eventi nella valle nascono dalla concorrenza di due meccanismi competitivi:

- la diminuzione della diffusione in seguito all'aumento dello spessore della zona svuotata (vedi equazione (3.30) e figura 3.4);
- l'aumento del numero di eventi fotoelettrici che interagiscono con il rivelatore in seguito all'aumento dello spessore della zona svuotata (vedi equazione (4.1)).

L'effetto della diffusione sullo spettro di carica raccolta dal singolo pixel è quello di distribuire uniformemente tra zero e Q_{peak} parte degli eventi che hanno interagito per

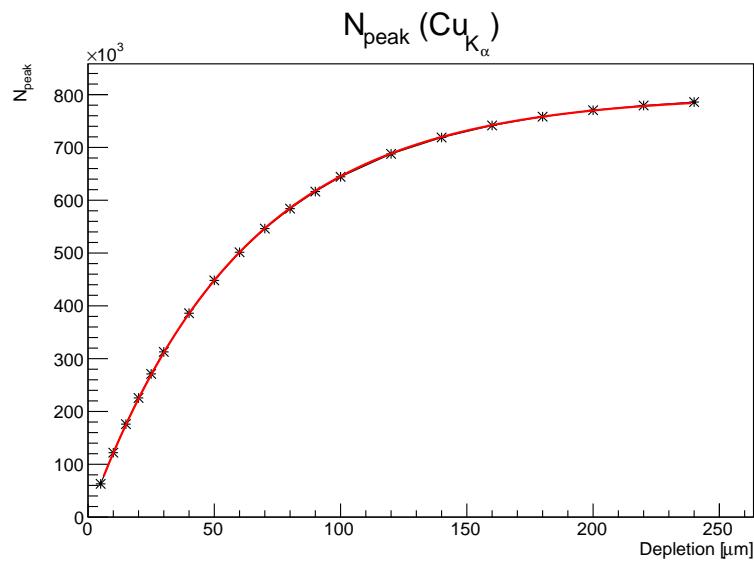


Figura 4.6: Numero di eventi nel picco in funzione dello spessore della zona svuotata per la $\text{Cu}_{K\alpha}$

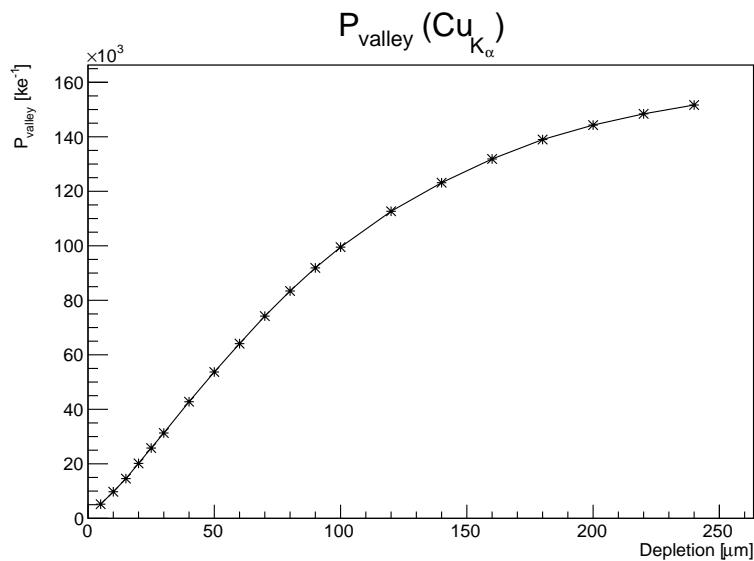


Figura 4.7: Denistà di numero di eventi nella valle in funzione dello spessore della zona svuotata per la $\text{Cu}_{K\alpha}$

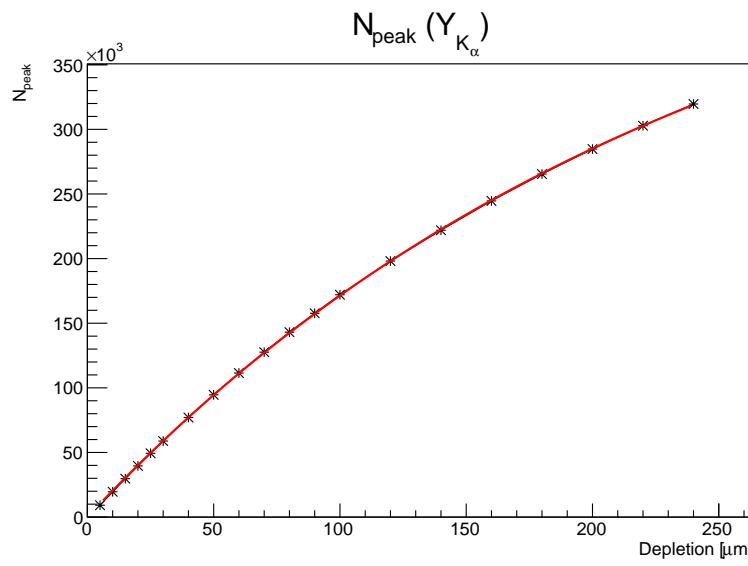


Figura 4.8: Numero di eventi nel picco in funzione dello spessore della zona svuotata per la Y_{K_α} .

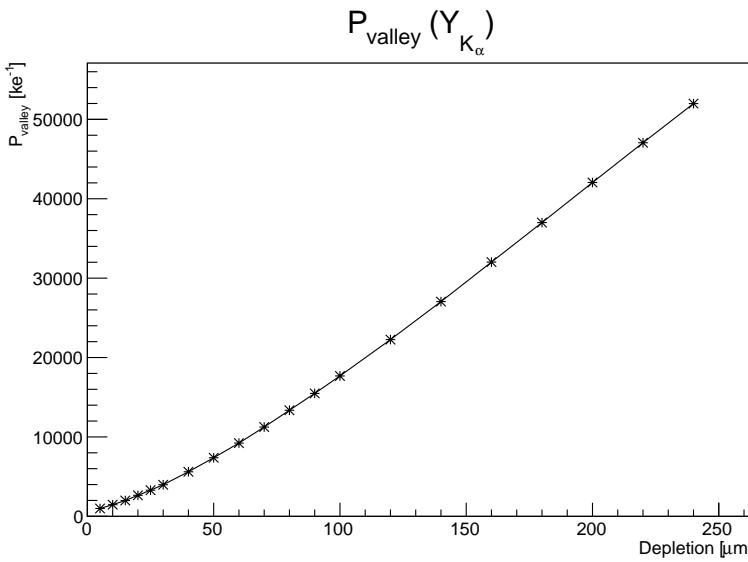


Figura 4.9: Densità di numero di eventi nella valle in funzione dello spessore della zona svuotata per la Y_{K_α} .

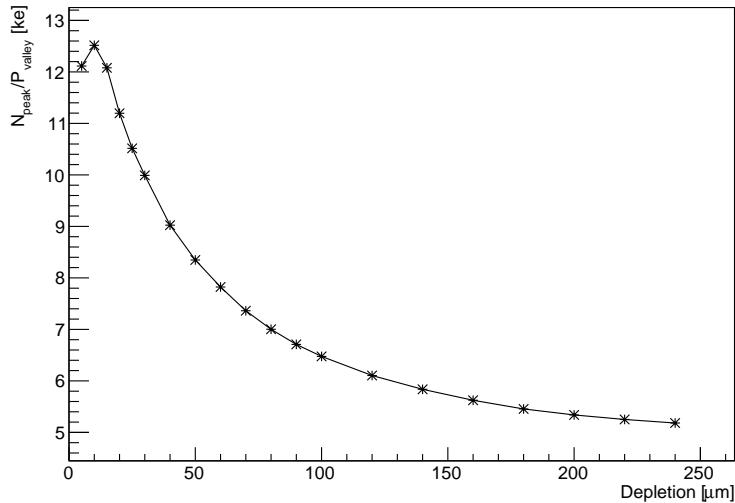


Figura 4.10: Numero di eventi nel picco fratto densità di numero di eventi nella valle in funzione dello spessore della zona svuotata per la Cu_{K_α}

effetto fotoelettrico. Il numero di eventi fotoelettrici a cui accade questo processo è legato monotonicamente alla σ_d , più la σ_d cresce più il numero di eventi fotoelettrici vanno a cadere nella valle piuttosto che nel picco. Ci chiediamo cosa succeda nel passaggio da w_1 a w_2 ovvero aumentando la zona svuotata. Torniamo a considerare la figura 3.4 e supponiamo di sovrapporre a questa l'istogramma in figura 4.2. Tutti gli eventi di w_2 già presenti anche in w_1 ovvero tutti quelli che vanno da zero a w_1 subiscono una diffusione minore e questo porterebbe il numero di eventi nella valle a diminuire a favore del numero di eventi nel picco. Tuttavia ci sono anche i nuovi eventi da tenere in considerazione ovvero tutti quelli che vanno da w_1 a w_2 . Aumentando lo spessore della zona di svuotamento aumentano le perdite laterali e aumentano in generale il numero di eventi che possono rilasciare carica parziale in seguito alla diffusione. Osservando quanto è dato dalla simulazione si vede come siano proprio questi due contributi ad avere la meglio sul primo.

Come possiamo notare l'ittrio non riesce a raggiungere entro d la regione di convergenza mentre il rame la raggiunge intorno ai $200 \mu\text{m}$. Questo si spiega confrontando gli istogrammi in figura 4.2 e 4.3: più aumenta l'energia del fotone incidente più la sezione d'urto per l'effetto fotoelettrico diminuisce. Questo fa sì che, considerato sempre uno spessore d , la distribuzione del punto di conversione diventi una distribuzione costante, rendendo così il secondo contributo sempre più importante rispetto al primo.

Al fine di ottenere un picco apprezzabile e di facile interpolazione è importante che il rapporto tra picco e valle sia il più altro possibile. Tale grandezza è mostrata in figura 4.10 e 4.11 ¹.

Il rapporto picco-valle risulta essere una quantità dipendente dallo spessore della zona svuotata. Esso presenta inoltre un punto di massimo dipendente dall'energia della radiazione incidente. Al fine di masimizzare questo rapporto bisogna portarsi a tensioni

¹In realtà si sarebbe dovuto usare la densità del numero di eventi nel picco anzichè il numero. Tuttavia questo non ha grande rilevanza sulle conclusioni che trarremo in quanto, così come la lunghezza della valle, anche lo spessore del picco è costante al variare di tensione applicata e spessore di svuotamento. L'andamento del rapporto, e in particolare la posizione dei suoi massimi, rimane quindi la medesima.

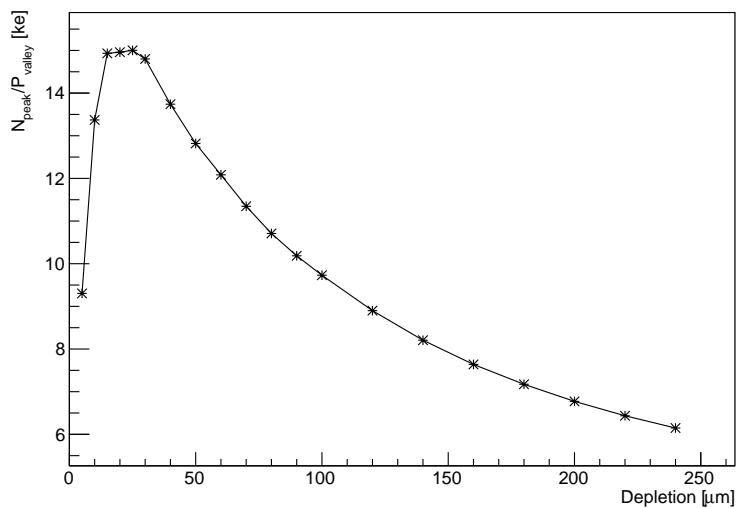


Figura 4.11: Numero di eventi nel picco fratto densità di numero di eventi nella valle in funzione dello spessore della zona svuotata per la $Y_{K\alpha}$

e quindi a spessori di svuotamento particolari. Il punto di massimo per il rame si trova circa a $10 \mu\text{m}$ mentre quello dell'ittrio a circa $30 \mu\text{m}$.

Capitolo 5

Misure ai raggi-X

Per verificare la validità della simulazione si sono presi gli spettri delle linee di fluorescenza presso un laboratorio del politecnico di Milano.

Un fascio di elettroni di energia pari a 50 keV viene fatto incidere su un bersaglio di molibdeno con produzione di raggi-X per *bremsstrahlung*. Questi vengono a incidere su una lamina di ittrio e di rame con la conseguente produzione di raggi-X di fluorescenza delle linee K_{α} e K_{β} di ciascun elemento (per un totale di 4 diverse energie, vedi tabella 4.2 nel capitolo 4). I raggi-X prodotti incidono poi sul rivelatore interagendo subito con la zona depleta. La configurazione del sistema è schematizzata semplicemente in figura 5.1.

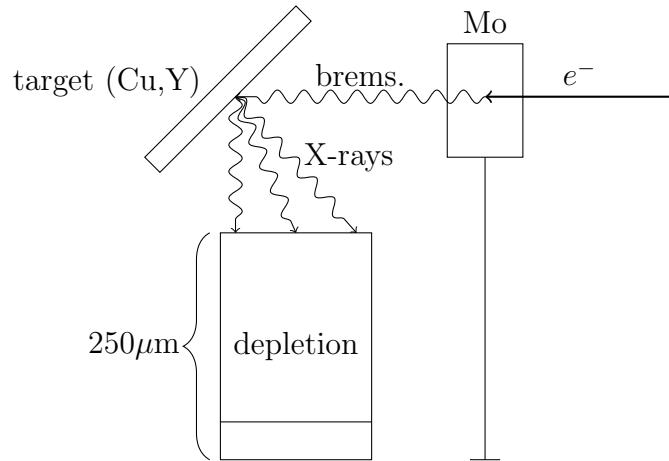


Figura 5.1: Schematizzazione della configurazione del sistema attraverso cui sono state eseguite le misure.

Il sensore da noi analizzato è un rivelatore a pixel CMOS irraggiato con una dose di 5,9 Mrad utilizzato nel progetto HVR CCPD dell'INFN. Un rivelatore a pixel è costituito da un *array* di diversi di pixel ognuno dei quali è in grado di effettuare una lettura indipendente del segnale ricevuto. Le misure sono state effettuate su uno dei 4 pixel passivi (vedi figura 5.2). Il preamplificatore scelto per queste misure è un preamplificatore sensibile alla carica con un una capacità di *feedback* di 0,47 pF, seguito da un *voltage buffer* con un fattore 2 di moltiplicazione. Il suo output è stato connesso ad un *shaping amplifier* pesudo-Gaussiano, che provvede ad aggiungere un fattore 410 di guadagno, e poi a un *multichannel analyzer* (MCA 8000A)[12].

E' stato fatto variare il voltaggio di polarizzazione inversa al fine di aumentare di volta in volta lo spessore della zona di svuotamento e sono stati presi diversi spettri a diversi

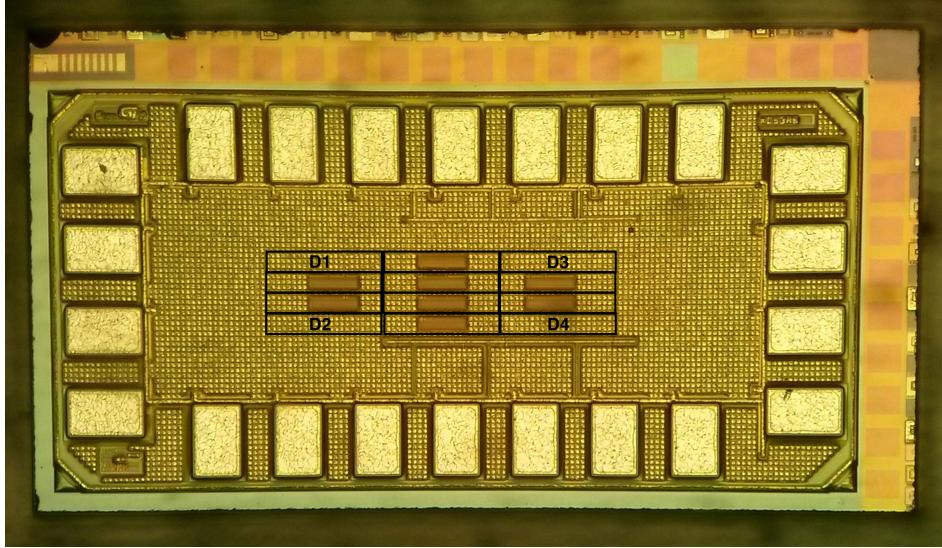


Figura 5.2: *Core layout.* Il rivelatore utilizzato è composto da 12 pixel di cui 8 attivi e 4 passivi (D1, ..., D4). Le misure sono state effettuate su uno dei 4 pixel passivi.

voltaggi sempre per il medesimo tempo di acquisizione pari a 600 s. È stato utilizzato uno *shaping time* di $\tau = 0,5 \mu\text{s}$ e al fine di eliminare il rumore è stata impostata un soglia al canale $c_{thr} = 28$. Ogni spettro è stato poi interpolato con la funzione in equazione (5.1) che rappresenta il numero di eventi dN che cadono in un certo canale c di ampiezza dc (la somma è chiaramente eseguita su tutte le linee di fluorescenza prodotte). La fase di simulazione ha messo in luce la piattezza della valle il che ci suggerisce di poterla approssimare con la funzione $P_{valley}\text{erf}(E(c), E_{peak}, \sigma)$, dove $\text{erf}(E(c), E_{peak}, \sigma)$ trova la sua definizione nelle prossime righe.

$$\frac{dN}{dc} = \sum_{i=\text{Cu}_{K_\alpha}, \text{Cu}_{K_\beta}, Y_{K_\alpha}, Y_{K_\beta}} \left(\frac{dN}{dc} \right)_i \quad (5.1)$$

dove:

$$\left(\frac{dN}{dc} \right)_i = N_{peak}^i \text{Gauss}(E(c), E_{peak}^i, \sigma) + P_{valley}^i \left(1 - \text{erf}(E(c), E_{peak}^i, \sigma) \right) \quad (5.2)$$

$$\text{Gauss}(E(c), E_{peak}, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(E(c)-E_{peak})^2}{2\sigma^2}} \quad (5.3)$$

$$\text{erf}(E(c), E_{peak}, \sigma) = \int_{-\infty}^{\frac{E(c)-E_{peak}}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (5.4)$$

e la relazione che lega l'energia al numero di canale (*calibrazione*) è data da:

$$E(c) = p_1 \cdot c + p_0 \quad (5.5)$$

Valgono inoltre le seguenti relazioni che legano tra loro dN/dQ , dN/dE e dN/dc :

$$E = E_i \cdot Q \quad E = p_1 \cdot c + p_0 \quad (5.6)$$

dove Q è la carica indotta. Da questa si ricava che:

$$dE = E_i \cdot dQ \quad dE = p_1 \cdot dc \quad (5.7)$$

e dunque vale che:

$$dQ = \frac{p_1}{E_i} dc \quad (5.8)$$

ovvero

$$\frac{dQ}{dc} = \frac{p_1}{E_i} \quad (5.9)$$

e dato che $dN/dc = (dN/dQ)(dQ/dc)$, si può scrivere:

$$\frac{dN}{dc} = \frac{p_1}{E_i} \frac{dN}{dQ} \quad (5.10)$$

I parametri del fit vengono così ad essere N_{peak}^i (x4), P_{valley}^i (x4), σ , p_1 e p_0 . Per un totale quindi di 11 parametri. Tuttavia, considerando che l'intensità delle linee K_α è circa 5 volte maggiore dell'intensità delle K_β , ovvero che:

$$I_{K_\beta} = 0,2 \cdot I_{K_\alpha} \quad (5.11)$$

i parametri si riducono e vengono così ad essere 7.

I grafici dei fit si trovano tutti in appendice C.1, qui viene solamente mostrato il fit dello spettro a $V = 50V$ a titolo di esempio.

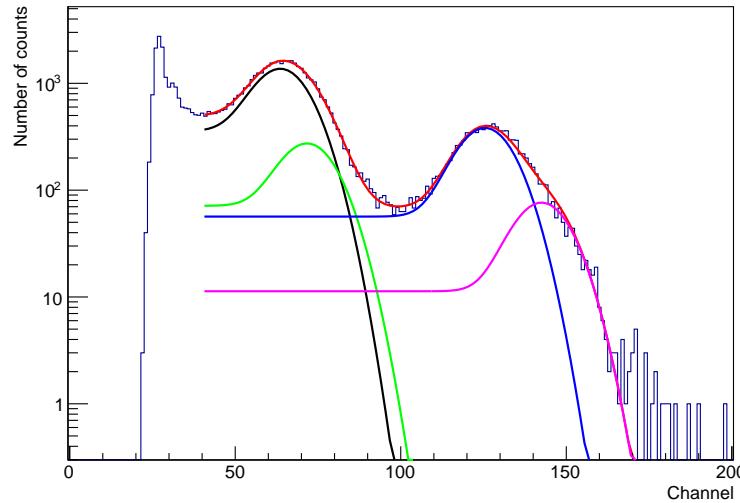


Figura 5.3: Fit a 50V con $I_{K_\beta} = 0,2 \cdot I_{K_\alpha}$. Si mostra in figura lo spettro ottenuto, le singole $(dN/dc)_i$ (colori diversi) e la funzione di fit totale $dN/dc = \sum (dN/dc)_i$. La parte piatta della distribuzione è la componente $\text{erf}(E, E_{peak}, \sigma)$ mentre la parte piccata è la componente gaussiana $\text{Gauss}(E, E_{peak}, \sigma)$.

I valori ottenuti per i vari parametri in funzione del voltaggio applicato sono descritti da un esponenziale di assorbimento (dove w è stato sostituito dalla nota relazione che lo lega alla tensione di polarizzazione inversa applicata):

$$N_{peak} = N_0(1 - e^{-\mu\sqrt{k(V+V_{bi})}}) \quad (5.12)$$

dove N_0 e $k = 2\epsilon\mu_h\rho_A$ sono i parametri nel fit mentre μ e V_{bi} sono stati fissati ai valori nominali. Ciò che si vuole determinare è in particolare il valore della costante k caratteristica del rivelatore utilizzato.

	$N_{peak}^{CuK\alpha}$	δ_{stat}	δ_{sist}
10 V	9810, 04	253, 92	574, 57
20 V	14451, 30	262, 69	773, 55
30 V	18396, 40	250, 03	925, 47
40 V	21499, 40	262, 33	1149, 33
50 V	23587, 20	261, 19	110, 99
60 V	25670, 50	284, 96	1296, 52

Tabella 5.1: Valori di $N_{peak}^{CuK\alpha}$ ottenuti dal fit dello spettro per varie tensioni applicate.

	$N_{peak}^{YK\alpha}$	δ_{stat}	δ_{sist}
10 V	3014, 23	81, 81	132, 60
20 V	4389, 28	90, 36	189, 62
30 V	5467, 67	98, 28	230, 86
40 V	6419, 75	104, 66	267, 43
50 V	7081, 98	105, 99	310, 32
60 V	8014, 47	114, 95	350, 25

Tabella 5.2: Valori di $N_{peak}^{YK\alpha}$ ottenuti dal fit dello spettro per varie tensioni applicate.

	$P_{valley}^{YK\alpha}(c^{-1})$	$\delta_{stat}(c^{-1})$	$\delta_{sist}(c^{-1})$
10 V	44, 17	1, 62	1, 66
20 V	45, 03	1, 74	1, 67
30 V	46, 99	1, 80	2, 05
40 V	53, 68	2, 22	1, 89
50 V	56, 57	2, 61	1, 88
60 V	62, 96	2, 07	2, 59

Tabella 5.3: Valori di $P_{valley}^{YK\alpha}$ ottenuti dal fit dello spettro per varie tensione applicate.

	$p_0(\text{keV})$	$\delta_{stat}(\text{keV})$	$\delta_{sist}(\text{keV})$
10 V	0, 559	0, 053	0, 032
20 V	0, 643	0, 039	0, 021
30 V	0, 700	0, 033	0, 025
40 V	0, 743	0, 030	0, 018
50 V	0, 783	0, 027	0, 023
60 V	0, 772	0, 026	0, 022

Tabella 5.4: Valori di p_0 ottenuti dal fit dello spettro per varie tensione applicate.

	$p_1(\text{keV}c^{-1})$	$\delta_{stat}(\text{keV}c^{-1})$	$\delta_{sist}(\text{keV}c^{-1})$
10 V	0,11266	0,00053	0,0007
20 V	0,11195	0,00041	0,0006
30 V	0,11154	0,00036	0,0007
40 V	0,11136	0,00034	0,0006
50 V	0,11109	0,00029	0,0006
60 V	0,11104	0,00029	0,0006

Tabella 5.5: Valori di p_1 ottenuti dal fit dello spettro per varie tensione applicate.

	$\sigma(\text{keV})$	$\delta_{stat}(\text{keV})$	$\delta_{sist}(\text{keV})$
10 V	0,918	0,016	0,016
20 V	0,919	0,039	0,015
30 V	0,916	0,010	0,012
40 V	0,903	0,009	0,012
50 V	0,889	0,008	0,012
60 V	0,908	0,0085	0,013

Tabella 5.6: Valori di σ ottenuti dal fit dello spettro per varie tensione applicate.

La simulazione ha messo in luce una ulteriore problematica ovvero che il μ dovrebbe essere fissato al valore μ_{peak} e non al valore nominale μ_{ph} . Tuttavia per ricavare questo stesso valore, ad esempio attraverso la simulazione, dovremmo essere a conoscenza del valore di k che però è proprio ciò che dobbiamo ricavare. Un modo interessante di procedere potrebbe essere quello di fissare il valore del coefficiente di assorbimento al valore nominale per ottenere quantomeno uno stima di k . Poi si potrebbe fare una simulazione usando quel valore e ricavare un valore di μ_{peak}^1 . I dati possono di nuovo essere fittati avendo però tenuto fisso μ a questo nuovo valore. Si ottiene così un k_1 che a sua volta può essere usato nella simulazione per ottenere un μ_{peak}^2 e in seguito un altro k_2 e così via fino a una convergenza verso il valore atteso per k .

Una verifica della simulazione potrebbe avvenire senza problemi fissando il valore k al valore nominale e verificando che il μ ottenuto sperimentalmente sia compatibile con il μ_{peak} ottenuto dalla simulazione.

Dato che la relazione (5.11) non è esatta, i fit sono stati eseguiti usando sia $I_{K_\beta} = 0,15 \cdot I_{K_\alpha}$ sia $I_{K_\beta} = 0,25 \cdot I_{K_\alpha}$.

$$\delta = \sqrt{\delta_{stat}^2 + \delta_{sist}^2} \quad (5.13)$$

dove δ_{stat} è l'errore statistico ottenuto dal fit con $I_{K_\beta} = 0,20 \cdot I_{K_\alpha}$, mentre δ_{sist} è l'errore sistematico dato dalla metà del modulo della differenza dei valori ottenuti dai fit a $I_{K_\beta} = 0,15 \cdot I_{K_\alpha}$ e $I_{K_\beta} = 0,25 \cdot I_{K_\alpha}$. Il valore medio è quello ottenuto dal fit con $I_{K_\beta} = 0,20 \cdot I_{K_\alpha}$.

Purtroppo il fit utilizzando tale espressione è tutt'altro che soddisfacente. Infatti, come si può notare in figura 5.4 e 5.5, siamo ancora in un regime lineare. Per $\mu\sqrt{k}\sqrt{V+V_{bi}} \ll 1$ si ha che $N_{peak} \approx N_0\mu\sqrt{k}\sqrt{V+V_{bi}}$ e il fit non è dunque in grado di separare i parametri N_0 , μ e k . Per essere in grado di determinare chiaramente questi parametri avremmo avuto bisogno di andare a tensione più elevate in modo da uscire dalla zona lineare. Tuttavia la tensione massima raggiunta ovvero 60 V era l'ultima potenzialmente raggiungibile perchè la tensione di breakdown per questo dispositivo è stata misurata essere intorno ai 70 V. Osservando le figure 4.6 e 4.8 notiamo che l'usicta

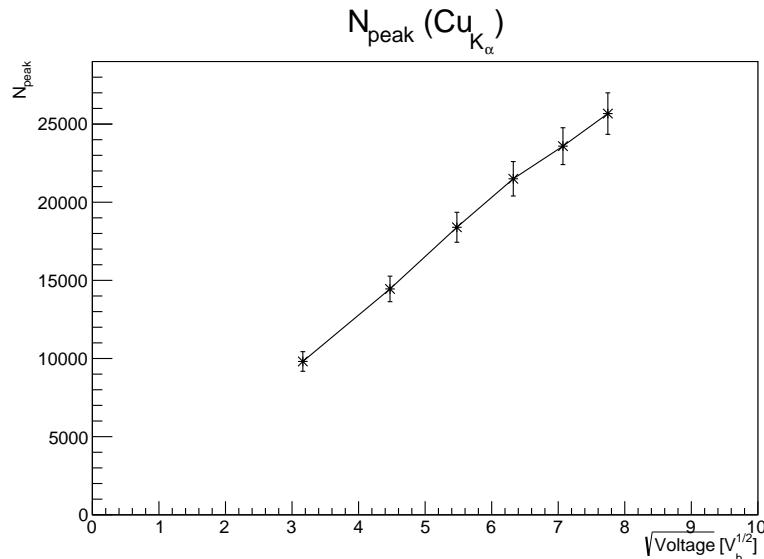


Figura 5.4: Numero di eventi nel picco per la $\text{Cu}_{K\alpha}$ in funzione della radice quadrata della tensione.

dal regime lineare si verifica per entrambe le linee intorno a $w = 40 \mu\text{m}$ ovvero a tensioni circa pari a $V = 126 \text{ V}$. Per riuscire quindi a fissare i dati in figura 5.4 e 5.5 si sarebbe dovuto andare come minimo a tensioni tre volte superiori a quelle raggiunte dal nostro esperimento.

Sebbene non si riesca ad estrarre il parametro k come inizialmente cercato (ne tantomeno, fissato k al valore nominale ricavare μ per verificare quantitativamente la validità della simulazione), si è comunque riuscito a verificare la relazione presente tra tensione applicata e spessore della zona svuotata. Il numero di eventi nel picco per $\mu\sqrt{k}\sqrt{V + V_{bi}} \ll 1$, crescono linearmente con la radice quadrata della tensione, il che ci porta a concludere che il modello descritto dalla simulazione è compatibile con i risultati osservati sperimentalmente.

La densità di eventi nella vallata cresce invece con l'aumentare della tensione, come verificato anche in fase simulazione.

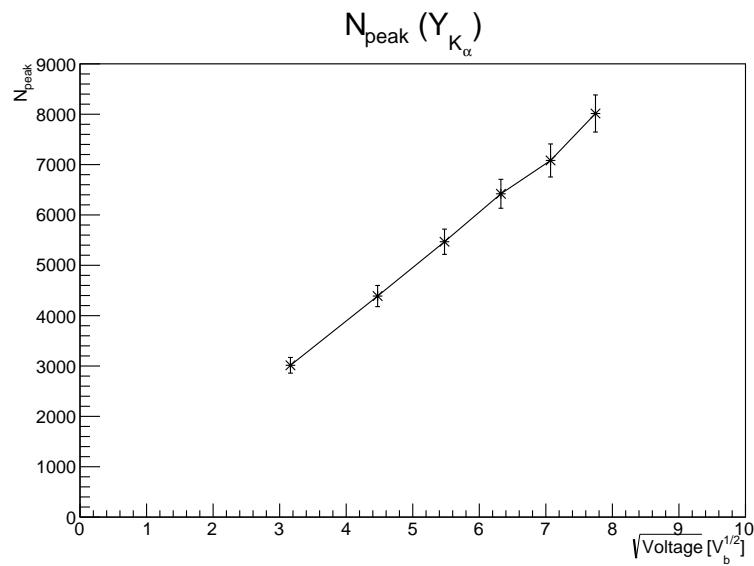


Figura 5.5: Numero di eventi nel picco per la Y_{K_α} in funzione della radice quadrata della tensione.

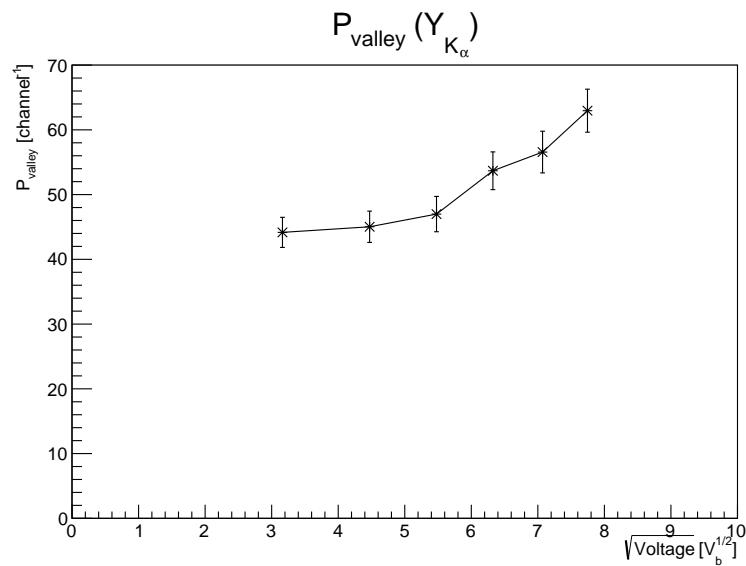


Figura 5.6: Denistà di numero di eventi nella vallata per la Y_{K_α} in funzione della radice quadrata della tensione.

Capitolo 6

Conclusioni

In questa tesi si sono misuari attraverso l'utilizzo di un rivelatore di radiazione ionizzante CMOS irraggiato gli spettri di fluorescenza di rame e ittrio. Tali risultati sono state fittati attraverso il metodo discusso nel capitolo 5 al fine di ricavare il numero di eventi nel picco e la densità di eventi nella vallata.

L'andamento del numero di eventi nel picco sia per l'ittrio che per il rame risulta rispettare per piccole tensioni e spessori svuotati la legge esponenziale di assorbimento suggerita dalla simulazione. Il metodo utilizzato risulta tuttavia inefficiente nel determinare il valore del parametro k (o equivalentemente di μ lasciato fisso k al valore fornito la costruttore) per questo tipo di rivelatori. Esso potrebbe però trovare possibile applicazione per rivelatori che riescono a raggiungere tensioni più elevate senza andare in breakdown o per rivelatori che raggiungono spessori di svuotamento maggiori a parità di tensione applicata ovvero rivelatori con più alta resistività.

L'andamento del numero di eventi nella valle risulta essere anche esso concorde con quanto osservato nella simulazione.

La fase di simulazione ci ha permesso di mettere in luce gli effetti del non contenimento. In particolare modo l'andamento del numero di eventi nel picco segue una legge di crescita di assorbimento proprio come il numero di eventi fotoelettrici, ma il primo risulta giungere più velocemente alla saturazione rispetto al secondo, dai dati risulta infatti $\mu_{peak} > \mu_{ph}$. Questo è quindi da tenere in considerazione nel caso si cerchi di determinare il parametro k . Fissando nel fit $\mu = \mu_{ph}$ otterremo un valore di k sovrassimato rispetto a quello effettivo.

L'andamento del rapporto N_{peak}/P_{valley} presenta un punto di massimo. Oltrepassando quel punto ci si aspetta un degradamento del picco rispetto alla vallata.

Capitolo A

Sezione d'urto

Per quanto riguarda la frequenza con la quale avvengono i vari processi di interazione radiazione materia, così come per ogni altro processo di interazione di particelle, essa è descritta dalla *sezione d'urto* relativa al processo di interazione considerato. Siano n_e il numero di eventi del processo considerato per unità di tempo e n_i il numero di particelle incidenti per unità di tempo e N il numero di particelle bersaglio per unità di area, allora si ha che:

$$n_e = n_i \sigma N \quad (\text{A.1})$$

dove σ , che risulta essere dimensionalmente una superficie, è la sezione d'urto.

Inoltre, nel caso i bersagli delle particelle siano proprio gli atomi del materiale, allora N altro non è che il numero di atomi di materiale per unità di area, e possiamo scriverlo come:

$$N = \frac{\rho dx}{u A_r} \quad (\text{A.2})$$

dove ρ è la densità del materiale, $u = 1.660540210 \times 10^{-27}$ Kg è l'unità di massa atomica e $A_r = \frac{m_a}{u}$ è la massa atomica relativa (con m_a massa del singolo atomo).

Inserendo la A.2 nella A.1 ottengo:

$$\frac{n_e}{n_i} = \frac{\sigma \rho}{u A_r} dx = \mu dx \quad (\text{A.3})$$

Osserviamo a tal punto che $\frac{n_e}{n_i}$ rappresenta la frazione di particelle che il fascio perde passando per uno spessore dx di materiale, pertanto posso riscriverla come la seguente equazione differenziale:

$$-\frac{dn}{n} = \mu dx \quad (\text{A.4})$$

La cui soluzione è:

$$n(x) = n_i e^{-\mu x} \quad (\text{A.5})$$

dove $n(x)$ rappresenta il numero di particelle del fascio sopravvissute dopo unattraversamento di spessore x del materiale.

La quantità μ , che risulta essere l'inverso di una lunghezza, è detta *coefficiente lineare di attenuazione* ed è pari (vedi equazione A.3) a:

$$\mu = \frac{\sigma\rho}{uA_r} \quad (\text{A.6})$$

Talvolta si è soliti utilizzare la *massa di spessore* definita come $x_m = \rho dx$ e pertanto la A.5 viene riscritta come:

$$n(x) = n_i e^{-\frac{\mu}{\rho}x_m} \quad (\text{A.7})$$

dove la quantità $\frac{\mu}{\rho}$, che ha le dimensioni di una superficie per $(\text{massa})^{-1}$, viene chiamata *coefficiente lineare di attenuazione di massa*.

Capitolo B

Relatività

Il *momento relativistico* di una particella di massa a riposo m che si muove con velocità v è:

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{B.1})$$

La sua *energia relativistica* è:

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2} \quad (\text{B.2})$$

La quale, sostituendo al suo interno la B.1, può essere riscritta come:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (\text{B.3})$$

La sua *energia cinetica relativistica* è invece:

$$T = E - mc^2 = \sqrt{p^2 c^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \quad (\text{B.4})$$

Nel caso si abbia a che fare con particelle prive di massa (come ad esempio i *fotoni* o i *neutrini*) vale che:

$$E = T = pc \quad (\text{B.5})$$

In realtà questa è anche una buona approssimazione nel caso in cui l'energia delle particelle sia molto maggiore della loro massa a riposo ($E \gg mc^2$).

Nel caso specifico dei fotoni (di frequenza ν), abbiamo che la loro energia è:

$$E = h\nu \quad (\text{B.6})$$

Anche essi dunque possiedono una quantità di modo che si può ricavare dalla B.6:

$$p = \frac{h\nu}{c} \quad (\text{B.7})$$

Inoltre scriveremo in forma vettoriale:

$$\vec{p} = \frac{h\vec{\nu}}{c} \quad (\text{B.8})$$

dove $\vec{\nu}$ è un vettore avente come modulo la frequenza dell'onda e come direzione la direzione di propagazione dell'onda stessa.

Nel caso invece l'energia cinetica della particella sia molto più piccola della sua energia a riposo ($T \ll mc^2$) allora si possono usare le leggi classiche per energia, energia cinetica e impulso.

B.1 Energie a riposo utili

Ecco un elenco delle energia a riposo delle particelle principali che incontreremo:

$$E_e = m_e c^2 = 5111 \text{ KeV}$$

$$E_p = m_p c^2 = 938.28 \text{ MeV}$$

$$E_n = m_n c^2 = 939.57 \text{ MeV}$$

Capitolo C

Grafici

C.1 Spettri

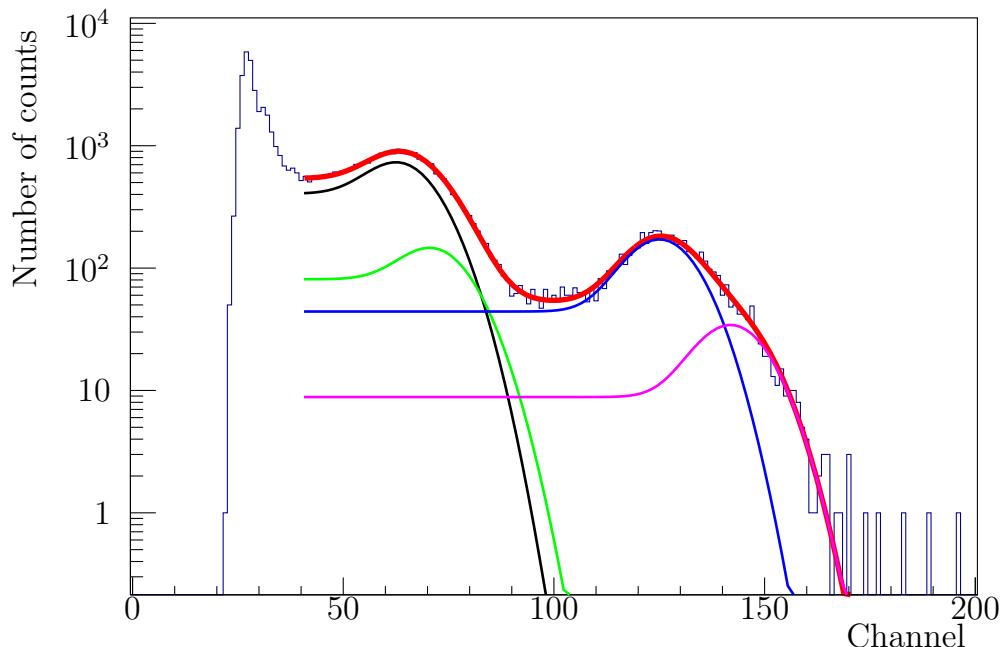


Figura C.1: Fit a 10V.

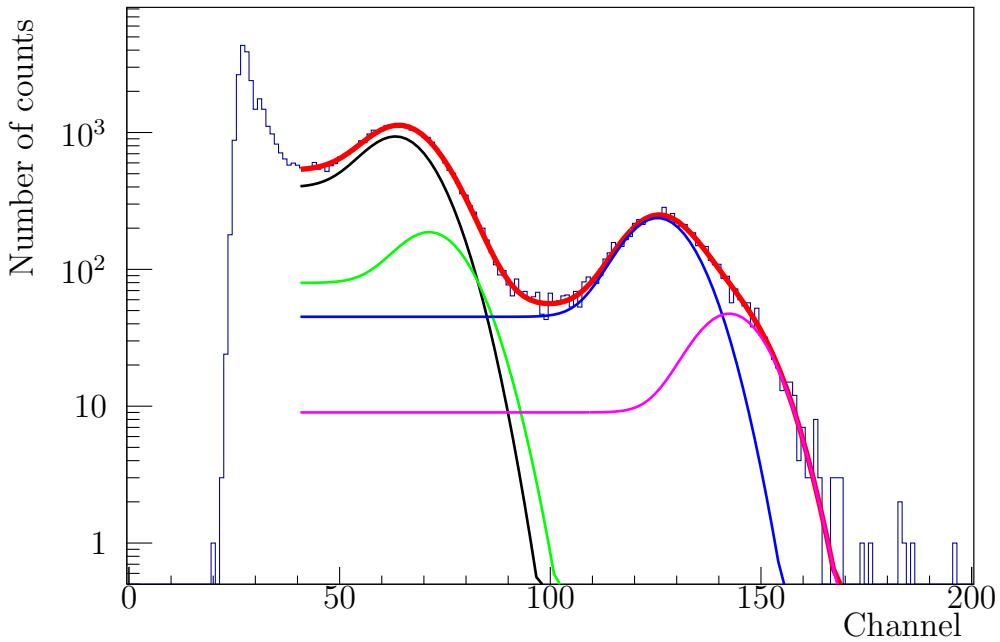


Figura C.2: Fit a 20V.

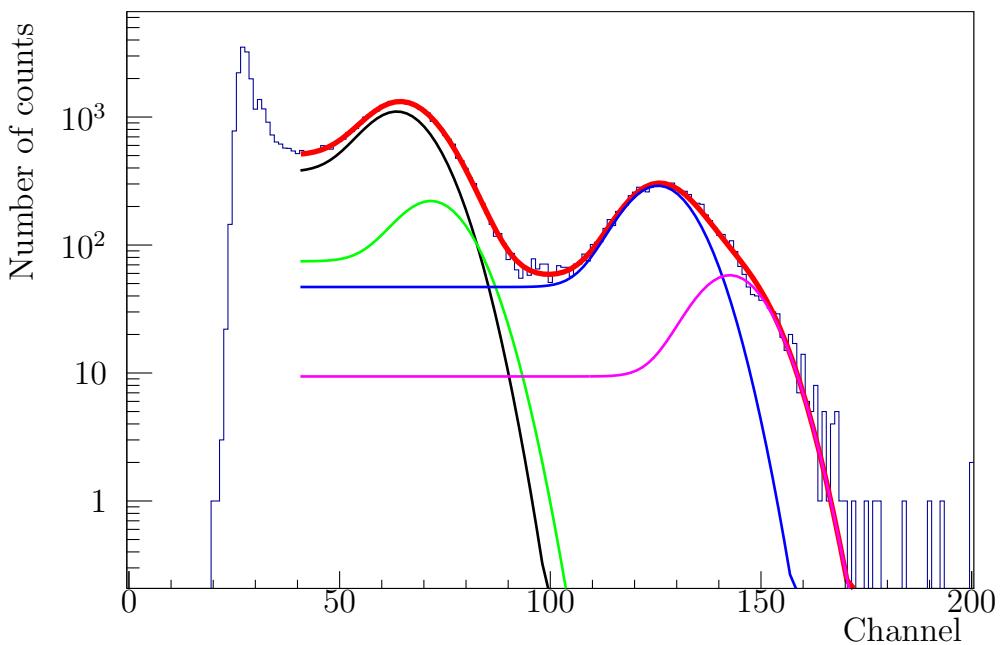


Figura C.3: Fit a 30V.

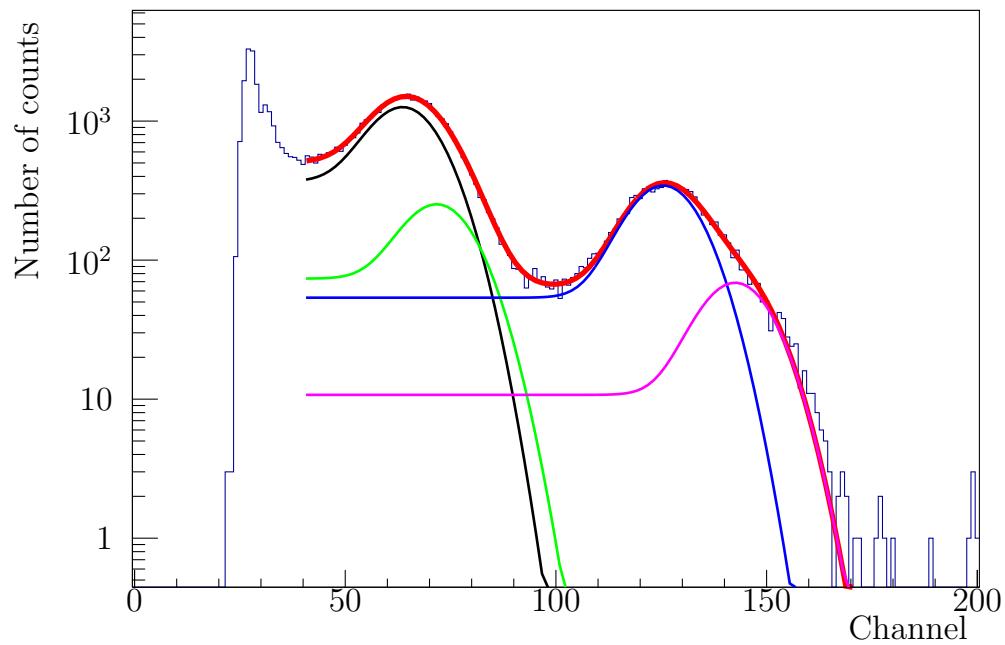


Figura C.4: Fit a 40V.

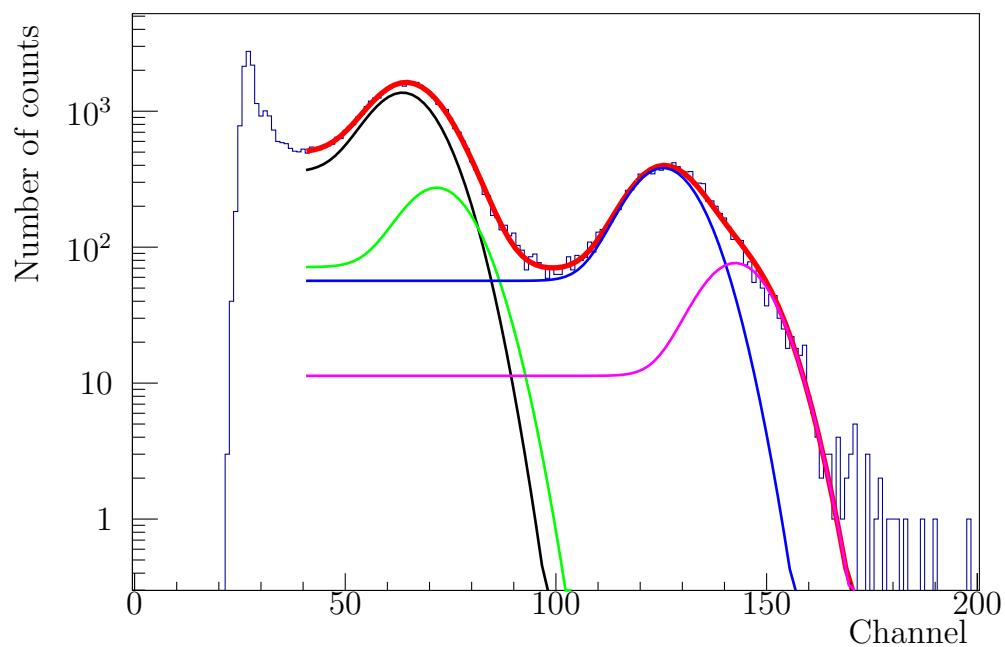


Figura C.5: Fit a 50V.

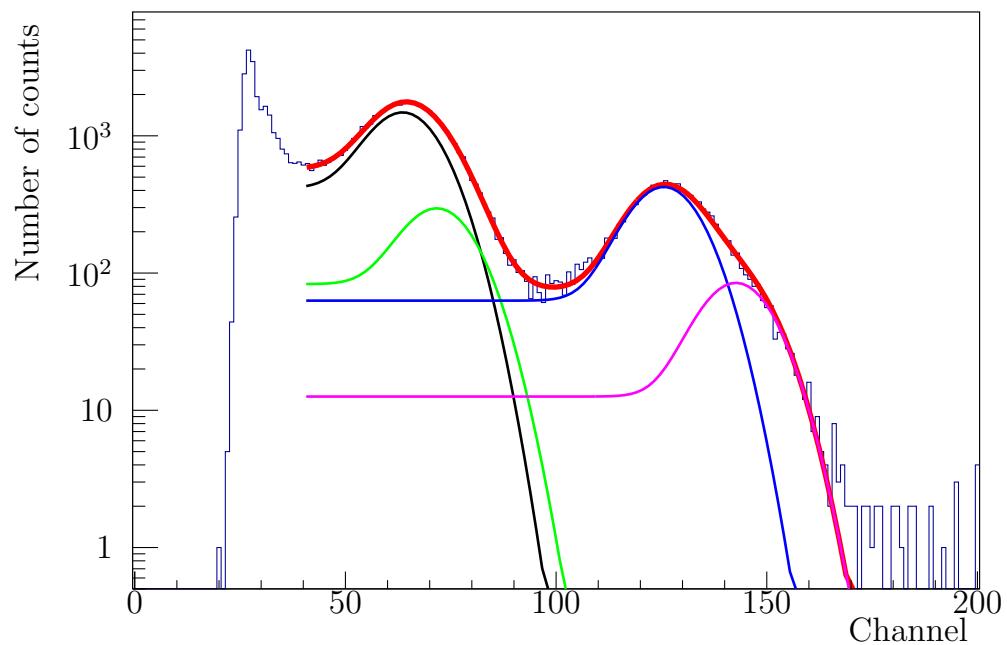


Figura C.6: Fit a 60V.

Elenco delle figure

2.1	Struttura a bande per un materiale semiconduttore.	9
2.2	Rappresentazione di un impurità pentavalente (fosoforo) che va a prendere posto di un atomo di silicio all'interno del reticolo cristallino.	11
2.3	Rappresentazione di un impurità trivale (boro) che va a prendere posto di un atomo di silicio all'interno del reticolo cristallino.	12
2.4	Schematizzazione di una giunzione $p - n$	13
2.5	Rappresentazione grafico di un diodo.	13
2.6	Grafico dell'intensità di corrente in funzione della tensione applicata ad un diodo zener con resistenza del circuito $R = 4700 \Omega$	14
2.7	Processi che si verificano nella rivelazione dei raggi γ . (1) Il fotone interagisce con la materia attraverso l'effetto Compton e viene diffuso all'esterno del materiale prima di avere totalmente depositato tutta la sua energia. (2) Il fotone interagisce diverse volte attraverso l'effetto Compton senza riuscire a scappare dal materiale e, una volta raggiunta una bassa energia, viene assorbito per effetto fotoelettrico con conseguente emissione di un fotonelettrone. (3) Il fotone viene subito assorbito per effetto fotoelettrico (si verifica per fotoni di bassa energia). (4) Il fotone si trasforma in un elettrone e in un positrone (produzione di coppia). In seguito l'elettrone si ferma nel materiale mentre il positrone si annichilisce con la materia producendo a sua volta due fotoni che possono andare incontro alle precedenti tre interazioni (in questo caso uno dei due fotoni viene assorbito mentre l'altro riesce a scappare dal rivelatore prima di avere depositato la sua energia)[3].	19
2.8	Rappresentazione schematica dell'effetto fotoelettrico.	19
2.9	Coefficiente di attenuazione (vedi appendice A) dell'effetto fotoelettrico per il piombo[7]. I salti discreti corrispondono alle energie di legame (<i>binding energies</i>) dei vari elettroni di shell. A 88 keV abbiamo l'energia della shell K	20
2.10	Risposta di un rivelatore a un fotone che interagisce con esso solo attraverso l'effetto fotoelettrico. Il fotoelettrone, che porta tutte l'energia del fotone incidente, viene sempre catturato dal rivelatore e il deposito di energia è totale, per tale motivo la distribuzione di energia sarà idealmente una di delta Dirac centrata in E_γ	21
2.11	Radiazione incidente su lamina bersaglio.	21
2.12	Fotone incidente su elettrone bersaglio.	21
2.13	Sezione d'urto dell'effetto Compton per varie energie del fotone incidente in funzione dell'angolo di diffusione. Il fotone incidente si propaga da sinistra a destra lungo l'asse orizzontale mentre l'elettrone si trova nell'origine degli assi[3].	22

2.14 Risposta di un rivelatore a un singolo evento di effetto Compton. Come descritto in equazione (2.45), l'energia dell'elettrone diffuso per effetto Compton dipende dall'angolo di diffusione e presenta un valore minimo e un valore massimo. Quest'ultimo in particolare è sempre minore della reale energia del fotone incidente.	23
2.15 Coefficiente di attenuazione dell'effetto Compton per il piombo[7].	23
2.16 Coefficiente di attenuazione dell'effetto di produzione di coppie per il piombo[7].	24
2.17 Coefficiente di attenuazione totale per il piombo (linea continua). Sono presenti anche i singoli contributi dovuti all'effetto fotoelettrico dominante a basse energie (linea tratto-punto), all'effetto Compton dominante intorno per energie a qualche MeV (linea punteggiata) e all'effetto di produzione di coppie dominante per alte energie (linea tratteggiata)[7].	25
 3.1 Andamento qualitativo del campo elettrico al variare della tensione e della zona svuotata. Quando la tensione V diventa maggiore di V_{dep} la zona svuotata non può più aumentare e il campo elettrico minimo diventa maggiore di zero.	28
3.2 La coppia viene creata prodotta in x_0 e poi sotto l'azione del campo elettrico si muovono verso le due diverse parti della giunzione: gli elettroni verso la parte n mentre le buche verso la parte p . Il tempo che impiegano in questo processo viene chiamato tempo di raccolta.	29
3.3 Andamento qualitativo di $t_{e,h}$ in funzione di x per elettroni (a sinistra di x_0) e per lacune (a destra di x_0).	31
3.4 Andamento qualitativo della diffusione in funzione del punto di produzione della coppia elettrone-buca x_0 per diversi valori della zona svuotata $w_1 < w_2$.	33
3.5 Le coppie elettrone-buca vengono tutte create nel punto (x_0, z_0) . Supponiamo ora di considerare per semplicità gli elettroni. Essi si muovono verso gli elettrodi e la loro distribuzione si allarga man mano che si avvicinano al punto di raccolta.	33
 4.1 Configurazione del sistema utilizzata in fase di simulazione. I fotoni incidono perpendicolarmente e uniformemente sulla faccia posta a $z = 0$ del blocco di silicio ed entrano nel materiale all'interno del quale avvengono le interazioni (Compton e fotoelettrico).	36
4.2 Distribuzione dei punti di conversione fotone-elettrone per la Cu_{K_α}	38
4.3 Distribuzione dei punti di conversione fotone-elettrone per la Y_{K_α}	38
4.4 Spettro della Y_{K_α} a $w = 40 \mu\text{m}$ per il singolo pixel.	39
4.5 Spettro della Y_{K_α} a $w = 40 \mu\text{m}$ per la carica totale.	40
4.6 Numero di eventi nel picco in funzione dello spessore della zona svuotata per la Cu_{K_α}	41
4.7 Densità di numero di eventi nella valle in funzione dello spessore della zona svuotata per la Cu_{K_α}	41
4.8 Numero di eventi nel picco in funzione dello spessore della zona svuotata per la Y_{K_α}	42
4.9 Densità di numero di eventi nella valle in funzione dello spessore della zona svuotata per la Y_{K_α}	42
4.10 Numero di eventi nel picco frutto densità di numero di eventi nella valle in funzione dello spessore della zona svuotata per la Cu_{K_α}	43

4.11 Numero di eventi nel picco fratto densità di numero di eventi nella valle in funzione dello spessore della zona svuotata per la Y_{K_α}	44
5.1 Schematizzazione della configurazione del sistema attraverso cui sono state eseguite le misure.	45
5.2 <i>Core</i> layout. Il rivelatore utilizzato è composto da 12 pixel di cui 8 attivi e 4 passivi (D1, ..., D4). Le misure sono state effettuate su uno dei 4 pixel passivi.	46
5.3 Fit a 50V con $I_{K_\beta} = 0,2 \cdot I_{K_\alpha}$. Si mostra in figura lo spettro ottenuto, le singole $(dN/dc)_i$ (colori diversi) e la funzione di fit totale $dN/dc = \sum (dN/dc)_i$. La parte piatta della distribuzione è la componente $\text{erf}(E, E_{peak}, \sigma)$ mentre la parte piccata è la componente gaussiana $\text{Gauss}(E, E_{peak}, \sigma)$	47
5.4 Numero di eventi nel picco per la Cu_{K_α} in funzione della radice quadrata della tensione.	50
5.5 Numero di eventi nel picco per la Y_{K_α} in funzione della radice quadrata della tensione.	51
5.6 Denistà di numero di eventi nella vallata per la Y_{K_α} in funzione della radice quadrata della tensione.	51
C.1 Fit a 10V.	59
C.2 Fit a 20V.	60
C.3 Fit a 30V.	60
C.4 Fit a 40V.	61
C.5 Fit a 50V.	61
C.6 Fit a 60V.	62

Elenco delle tabelle

2.1	Valori delle costanti fin qui utilizzate caratteristiche del silicio[3]	11
4.1	Valori dei parametri utilizzati in fase di simulazione.	36
4.2	Valori energetici delle linee prodotte. Non è necessario essere maggiormente precisi sui valori delle energie in quanto la risoluzione della catena di misura è di circa 1 keV (vedi tabella 5.6).	37
4.3	Valori dei parametri utilizzati in fase di digitizzazione.	37
4.4	Valori di μ ricavati dalla simulazione.	37
4.5	Valori per μ_{ph} forniti dal NIST[7].	38
4.6	Valori di μ_{peak} ricavati dalla simulazione.	39
5.1	Valori di $N_{peak}^{CuK\alpha}$ ottenuti dal fit dello spettro per varie tensioni applicate. .	48
5.2	Valori di $N_{peak}^{YK\alpha}$ ottenuti dal fit dello spettro per varie tensioni applicate. .	48
5.3	Valori di $P_{valley}^{YK\alpha}$ ottenuti dal fit dello spettro per varie tensione applicate. .	48
5.4	Valori di p_0 ottenuti dal fit dello spettro per varie tensione applicate. . . .	48
5.5	Valori di p_1 ottenuti dal fit dello spettro per varie tensione applicate. . . .	49
5.6	Valori di σ ottenuti dal fit dello spettro per varie tensione applicate. . . .	49

Bibliografia

- [1] A. Andreazza, A. Castoldi, V. Ceriale, G. Chiodini, M. Citterio, G. Darbo, G. Garriano, A. Gaudiello, C. Guazzoni, A. Joshi, V. Liberale, S. Passadore, F. Ragusa, E. Ruscino, C. Sbarra, H. Shrimali, A. Sidoti, A. Stabile, I. Yadav, and E. Zaffaroni. Hv-cmos detectors in bcd8 technology. *Journal of Instrumentation*, 11(11):C11038, 2016.
- [2] C. Jacoboni, C. Canali, G. Ottaviani, and A. Alberigi Quaranta. A review of some charge transport properties of silicon. *Solid-State Electronics*, 20, 1976.
- [3] Glenn F. Knoll. *Radiation Detection and Measurement*. 4th edition, 2010.
- [4] Kenneth S. Krane. *Introductory Nuclear Physics*. 1988.
- [5] Nicola Manini. *Introduction to the Physics of Matter*. 7th edition, 2013.
- [6] Corrado Mencuccini and Vittorio Silvestrini. *Fisica II, Elettromagnetismo-Ottica*. 3rd edition, 1999.
- [7] NIST. <http://www.nist.gov>.
- [8] Simon Ramo. Currents induced by electron motion. *Proceedings of the IRE*, 27, 1939.
- [9] E. J. Schioppa, J. Idarraga, M. van Beuzekom, J. Visser, E. Koffeman, E. Heijne, K. J. Engel, and J. Uher. Study of charge diffusion in a silicon detector using an energy sensitive pixel readout chip. *IEEE Transactions on Nuclear Science*, 62(5):2349–2359, Oct 2015.
- [10] H. Spieler. *Semiconductor Detectors Systems*. 2005.
- [11] Giovanni Vannozzi. <http://www.cremona.polimi.it/dispense/vannozzi/esercitazioni/elettronica/materiale/SEMICONDUTTORI.pdf>.
- [12] Ettore Zaffaroni. Characterisation of a pixel detector in bcd8 technology.