

Teoria dei Sistemi attività integrativa (foglio giallo)

Pietro De Nicolao
(matricola 849761)

26 novembre 2015

Indice

1	Equazioni di stato	2
2	Assenza di cicli per resistenze elevate	3
3	Equilibri e loro biforcazioni	3
3.1	Stabilità	3
3.2	Biforcazioni degli stati di equilibrio	5
4	Diagramma delle biforcazioni	9
5	Numero di biforcazioni trovate	9
6	Comportamento caotico del sistema	9

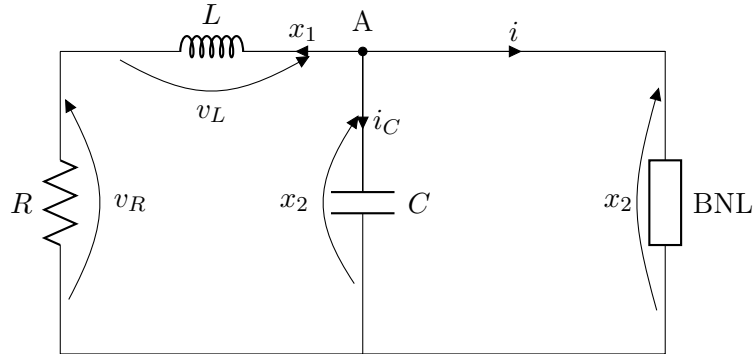


Figura 1: Il circuito elettrico da studiare.

Dati

- $\alpha = 0.04$
- $\beta = 0.18$
- $n = 16 \quad [n]_3 = 1$
- $c = 4 \quad [c]_3 = 1$
- $L = 12 \text{ nH}$
- $C = 12 \text{ pF}$
- $i = -\alpha x_2 + \beta x_2^3$

1 Equazioni di stato

Considero l'equazione caratteristica del condensatore C :

$$i_c = C\dot{x}_2 \quad (1)$$

Applico LKC al nodo A:

$$i_c = -x_1 - i \quad (2)$$

Sostituendo i_c nell'equazione 1, ottengo la prima equazione di stato:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \quad (3)$$

Poi, considero l'equazione caratteristica del condensatore L :

$$v_L = L\dot{x}_1 \quad (4)$$

Applico LKT alla maglia di sinistra, ottenendo:

$$x_2 = v_R + v_L = x_1 R + L \dot{x}_1 \quad (5)$$

Da cui la seconda equazione di stato:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \quad (6)$$

Il sistema è dunque descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \end{cases} \quad (7)$$

2 Assenza di cicli per resistenze elevate

L'assenza di cicli per particolari valori di R può essere mostrata grazie al criterio di Bendixon.

$$\text{div } f(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{R}{L} + \frac{\alpha}{C} - \frac{3\beta}{C}x_2^2 \quad (8)$$

$$R > \alpha \frac{L}{C} \implies \text{div } f < 0 \quad \forall x_2 \quad (9)$$

Per $R > \alpha \frac{L}{C} = 40\Omega$, la divergenza assume valore negativo per qualunque x_2 : dunque, non sono presenti cicli nell'intero piano.

Il risultato è in accordo con l'analogia intuitiva che associa la resistenza elettrica con l'attrito nei sistemi meccanici: entrambi i fenomeni dissipano energia e smorzano i movimenti periodici.

3 Equilibri e loro biforcazioni

Annullando le derivate delle equazioni del sistema, con semplici passaggi si ottengono gli equilibri mostrati in Tabella 1.

3.1 Stabilità

Lo jacobiano del sistema linearizzato è:

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{\alpha}{C} - \frac{\beta}{C}3x_2^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Analizziamo ora il tipo degli equilibri.

R	Equilibri
$R \leq \frac{1}{\alpha}$	$(0, 0)$
$R > \frac{1}{\alpha}$	$(0, 0), \left(\pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right)$

Tabella 1: Equilibri del sistema al variare di R .

1. $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{\alpha}{C} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{tr } J(0, 0) = \frac{L\alpha - CR}{CL} \quad (12)$$

$$\det J(0, 0) = \frac{1 - r\alpha}{CL} \quad (13)$$

L'analisi di stabilità dell'equilibrio è mostrata in Tabella 2a.

2. $\left(\pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right)$

Questi equilibri esistono solo per $R > \frac{1}{\alpha}$, condizione che dunque può essere assunta nello studio della loro stabilità.

$$J \left(\pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right) = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{3 - 2R\alpha}{CR} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\det J = 2 \frac{R\alpha - 1}{CL} > 0 \quad \forall R > \frac{1}{\alpha} \quad (15)$$

$$\text{tr } J = \frac{-CR^2 + 3L - 2RL\alpha}{CRL} \quad (16)$$

L'analisi di stabilità degli equilibri è mostrata in Tabella 2b.

$$^1k = \frac{-L\alpha + \sqrt{L^2\alpha^2 + 3LC}}{C} = 27.82\Omega$$

		tr $J(0,0)$	det $J(0,0)$	tipo
$R < \frac{1}{\alpha}$	$(0, 25\Omega)$	> 0	> 0	instabile
$\frac{1}{\alpha} < R < \frac{L\alpha}{C}$	$(25\Omega, 40\Omega)$	> 0	< 0	sella
$R > \frac{L\alpha}{C}$	$(40\Omega, +\infty)$	< 0	< 0	sella

(a) Stabilità dell'equilibrio $(0,0)$ al variare di R .

		tr J	det J	tipo
$\frac{1}{\alpha} < R < k^1$	$(25\Omega, 27.82\Omega)$	> 0	> 0	fuoco instabile
$R > k$	$(27.82\Omega, +\infty)$	< 0	> 0	fuoco stabile

(b) Stabilità dell'equilibrio $\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R^3}}, \pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R}}\right)$ al variare di R .

Tabella 2: Analisi di stabilità degli equilibri (Tabella 1).

3.2 Biforcazioni degli stati di equilibrio

Le biforcazioni del sistema al variare di R sono elencate in Tabella 3. Il sistema ammette una biforcazione forcone, due Hopf, una doppia omoclina e una biforcazione tangente di cicli. I valori di R a cui si presentano le biforcazioni doppia omoclina e tangente di cicli sono stati ricavati empiricamente simulando il sistema con Pplane.

Per $R < \frac{1}{\alpha} = 25\Omega$, il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'equilibrio instabile nell'origine.

Per $\frac{1}{\alpha} < R < k$, il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'origine (sella) e i due equilibri instabili, compatibilmente con il criterio di Poincaré.

A $R = k = 27.82\Omega$ avviene una biforcazione di Hopf che interessa gli equilibri instabili: resta il ciclo esterno, e si creano cicli instabili attorno ai due equilibri simmetrici, che diventano stabili per $R > k$ (Figura 3).

A $R = 28.49\Omega$ avviene una doppia omoclina: i due cicli instabili collidono con la sella nell'origine e si fondono in un unico ciclo instabile (Figura 4). Il ciclo esterno stabile resta.

A $R = 28.49\Omega$ si ha finalmente una biforcazione tangente di cicli: il ciclo esterno stabile collide con quello interno instabile generato dalla doppia omoclina, e i cicli spariscono.

R	Tipo	Note
$\frac{1}{\alpha} = 25\Omega$	forcone	per $R > 25\Omega$ nascono due equilibri instabili (Figura 2)
$k = 27.82\Omega$	Hopf (doppia)	intorno ai due rami del forcone si creano cicli instabili; i due equilibri diventano stabili (Figura 3b)
28.35Ω	doppia omoclina	i cicli generati dalle Hopf collidono con la sella in $(0, 0)$; si crea un nuovo ciclo instabile interno (Figura 4b)
28.49Ω	tangente di cicli	il ciclo instabile interno e quello stabile esterno collidono e spariscono

Tabella 3: Biforcazioni del sistema al variare di R .

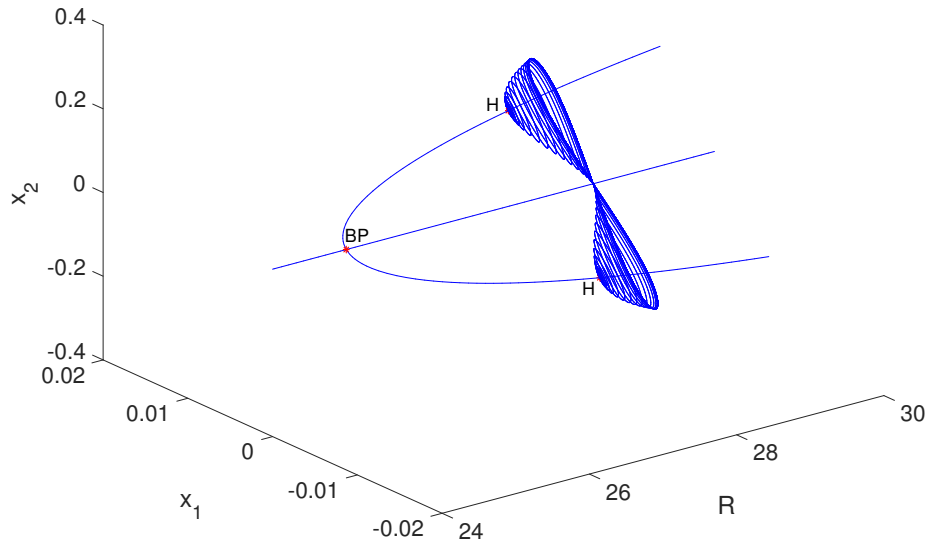
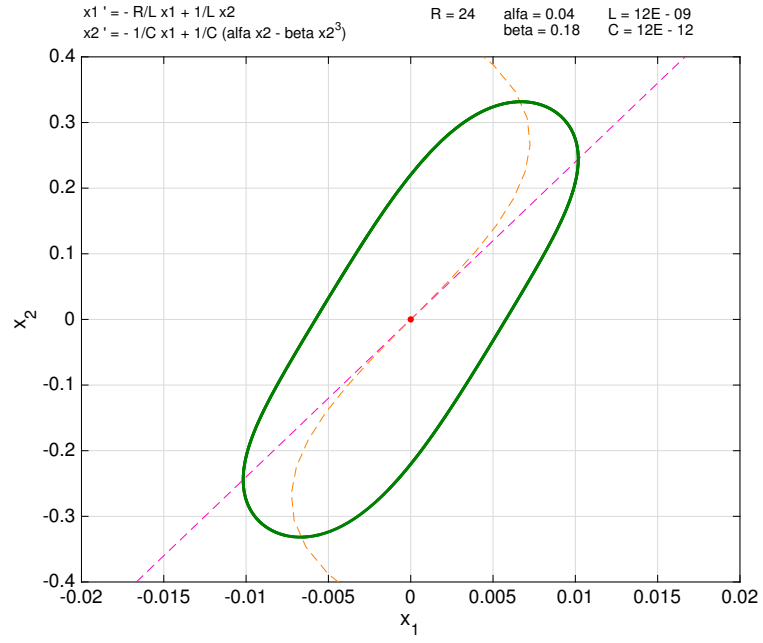
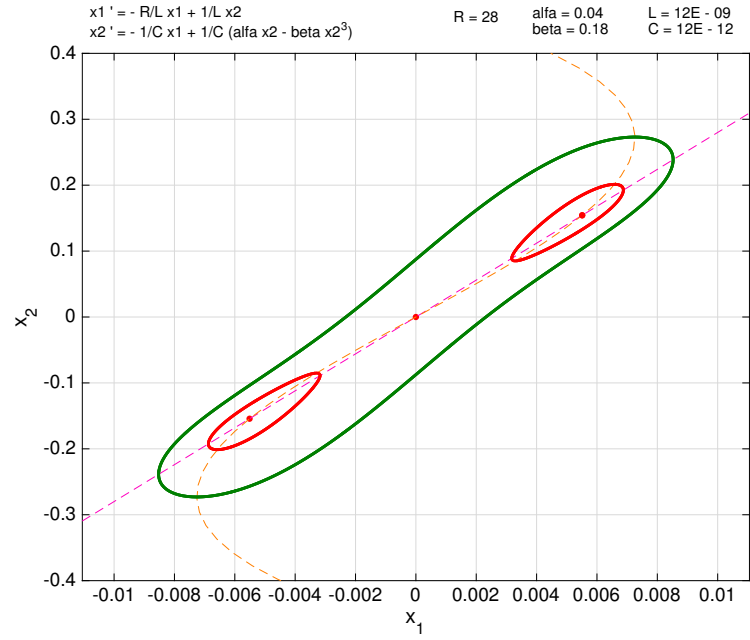


Figura 2: Le biforcazioni forcone e Hopf.

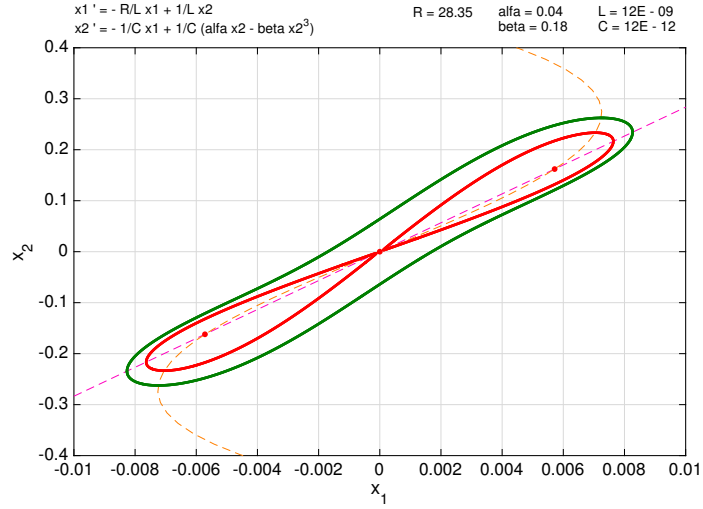


(a) Ciclo stabile per $R = 24\Omega$.

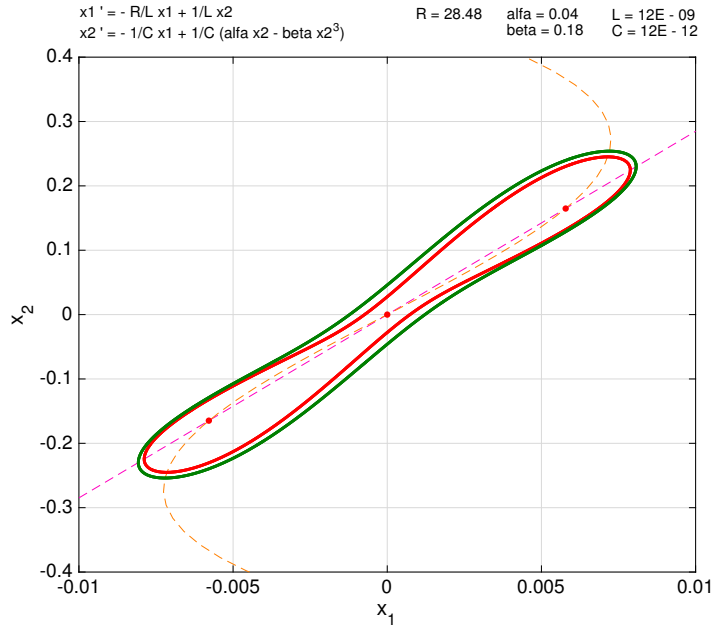


(b) Ciclo stabile (esterno) e cicli instabili (interni) per $R = 26\Omega$.

Figura 3: Cicli prima e dopo la biforcazione di Hopf.



(a) I due cicli instabili toccano la sella in $(0,0)$ subito prima della biforcazione omoclina.



(b) Dopo la biforcazione omoclina i due cicli instabili si sono fusi; qui sono mostrati immediatamente prima della tangente di cicli.

Figura 4: Cicli prima e dopo la biforcazione omoclina.

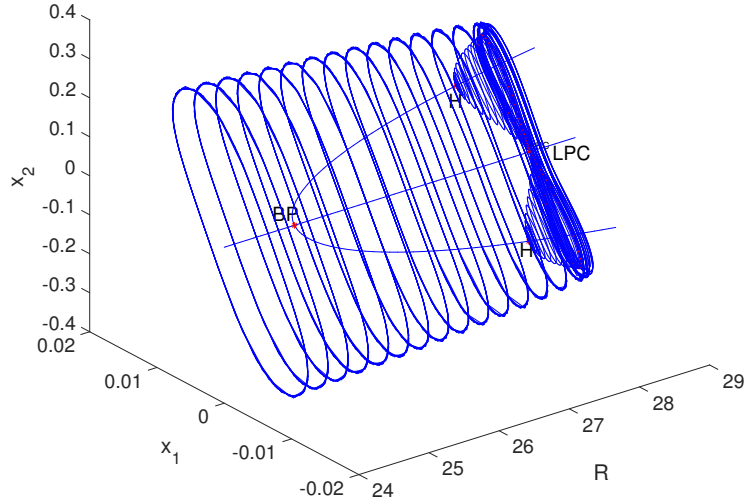


Figura 5: Il diagramma completo delle biforcazioni in funzione di R .

4 Diagramma delle biforcazioni

Il diagramma completo delle biforcazioni è riportato in Figura 5.

5 Numero di biforcazioni trovate

Il numero di biforcazioni trovate è riportato in Tabella 4.

forcone	1
Hopf	2
doppia omoclina	1
tangente di cicli	1

Tabella 4: Numero di biforcazioni del sistema.

6 Comportamento caotico del sistema

Si suppone che la resistenza R del sistema vari periodicamente del 25% seguendo la legge:

$$R(t) = \bar{R}(1 + 0.25 \sin(\omega t)) \quad (17)$$

Per mantenere il sistema autonomo e poterlo quindi simulare, si possono introdurre due nuove equazioni relative a due nuove variabili di stato, disaccoppiate dalle precedenti. Il sistema diventa dunque:

$$\begin{cases} R = \bar{R}(1 + 0.25x_4) \\ \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \\ \dot{x}_3 = x_3 - \omega x_4 - (x_3^2 + x_4^2)x_3 \\ \dot{x}_4 = \omega x_3 + x_4 - (x_3^2 + x_4^2)x_4 \end{cases} \quad (18)$$

Dove è immediato verificare per sostituzione che

$$\begin{aligned} x_3 &= \cos(\omega t) \\ x_4 &= \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (19)$$

Dall'equazione 17 si osserva che, per valori di \bar{R} ragionevoli (29.5Ω ad esempio) l'oscillazione è sufficientemente ampia da passare per tutti i punti di biforcazione (Tabella 3): non è davvero necessario variare \bar{R} per trovare il caos.

La precedente osservazione semplifica molto il problema, che si riduce a trovare attraverso delle simulazioni un giusto valore del solo parametro ω per cui il sistema presenti comportamento caotico.

I dati usati nelle simulazioni sono i seguenti:

- α, β, L, C come indicati nel testo;
- $R = 29.5\Omega$;
- $\bar{x}_0 = [-0.005, -0.001, 0, 1]$;
- $\omega \in [0.5, 5]$.

Provando a calcolare sistematicamente gli esponenti di Lyapunov del sistema 18 per valori di ω nell'ordine di grandezza dell'unità, si ottiene il risultato illustrato in Figura 6.

Integrando per intervalli estesi il sistema, si verifica che effettivamente per $\omega = 3.1415$ gli esponenti di Lyapunov valgono: $[0.28, 0, -0.77, -2]$.

Ciò dimostra il comportamento caotico del sistema. Lo strano attrattore simulato per gli stessi parametri è mostrato in Figura 8, insieme alla sua sezione di Poincaré in Figura 7.

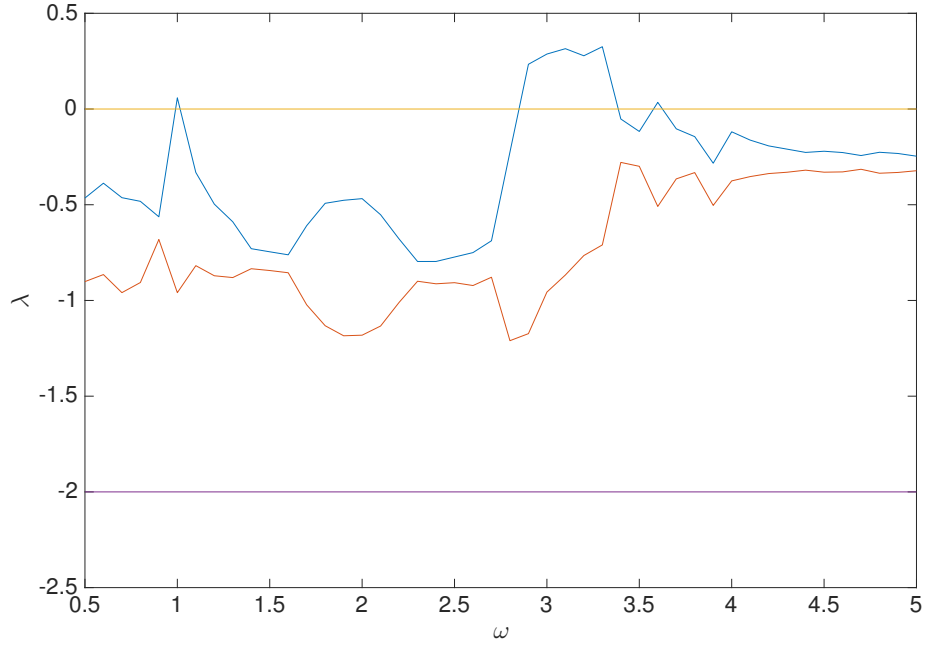


Figura 6: Esponenti di Lyapunov del sistema 18 calcolati per $\omega \in [0.5, 5]$, $\bar{R} = 29.5\Omega$.

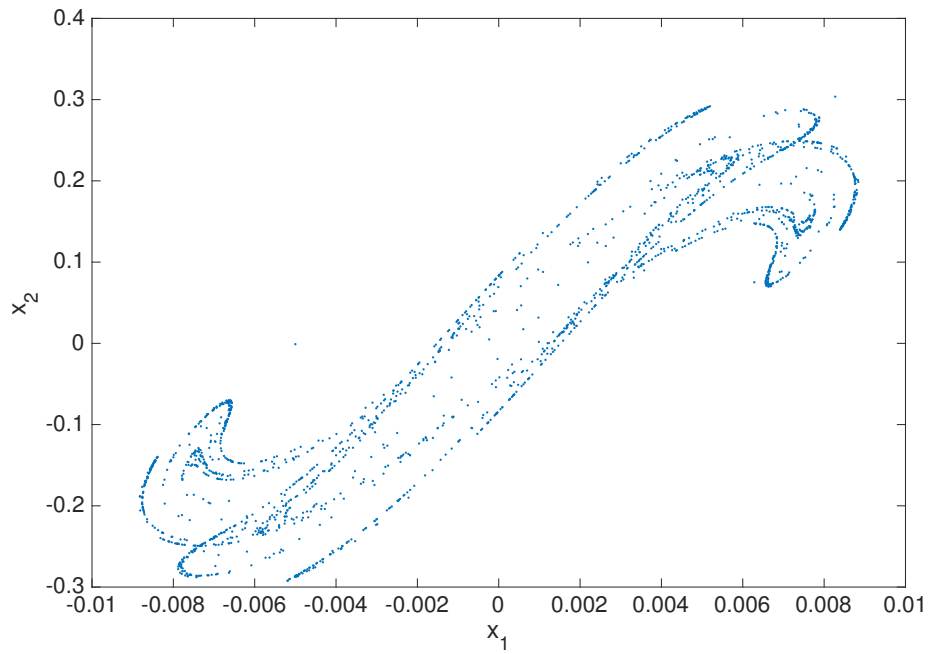
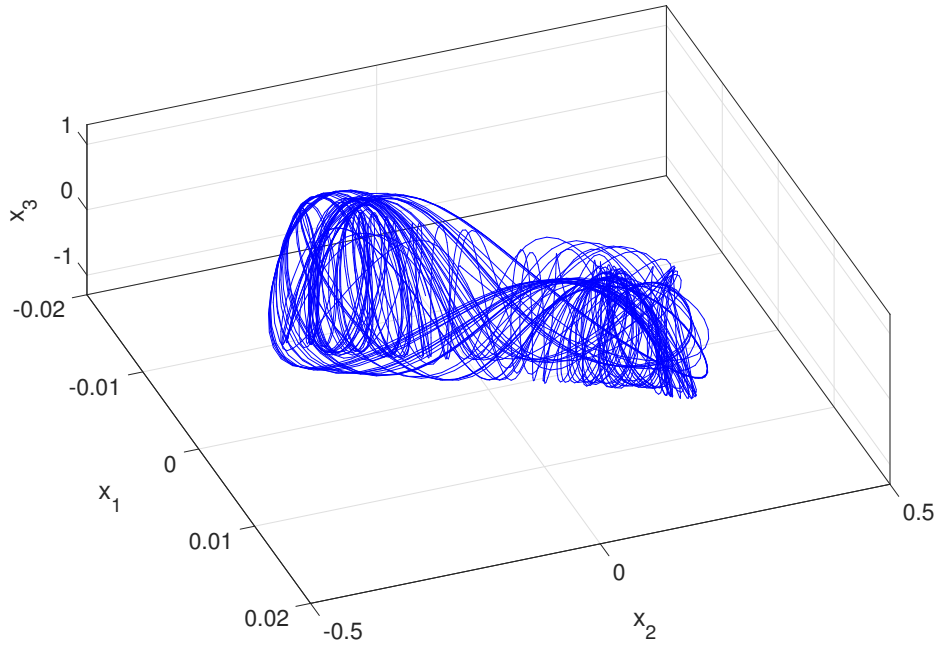
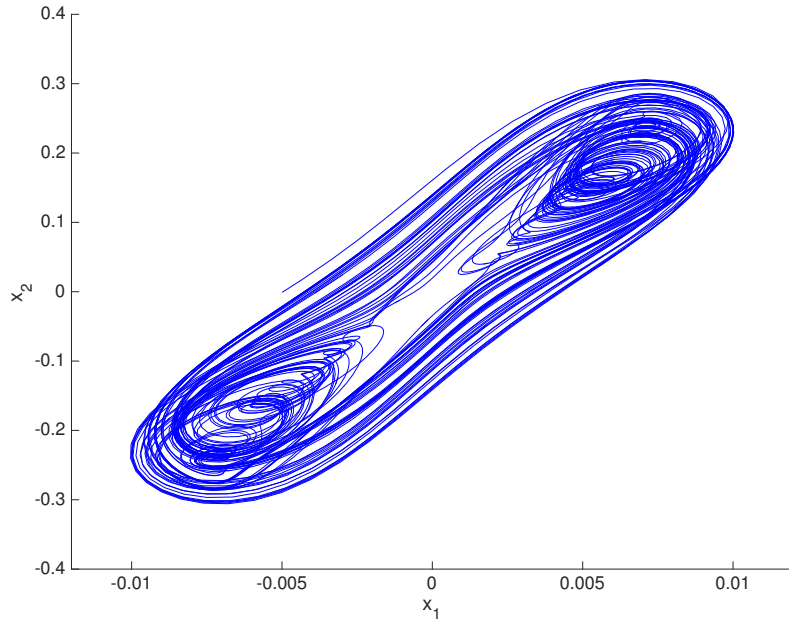


Figura 7: La mappa di Poincaré dello strano attrattore.



(a) Simulazione di un'orbita nello strano attrattore.



(b) L'orbita vista "dall'alto", sul piano x_1x_2 .

Figura 8: Lo strano attrattore che si ottiene simulando il sistema per $\bar{R} = 29.5\Omega$, $\omega = 3.1415$.