

# Teoria dei Sistemi attività integrativa

Pietro De Nicolao

26 novembre 2015

## Indice

<b>1</b>	<b>Equazioni di stato</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Assenza di cicli per <math>R</math> elevato</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Equilibri e loro biforcazioni</b>	<b>3</b>
3.1	Stabilità . . . . .	4
3.2	Biforcazioni degli stati di equilibrio . . . . .	5
3.3	Cicli . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Diagramma delle biforcazioni</b>	<b>5</b>
<b>5</b>	<b>Numero di biforcazioni trovate</b>	<b>9</b>
<b>6</b>	<b>Comportamento caotico del sistema</b>	<b>9</b>

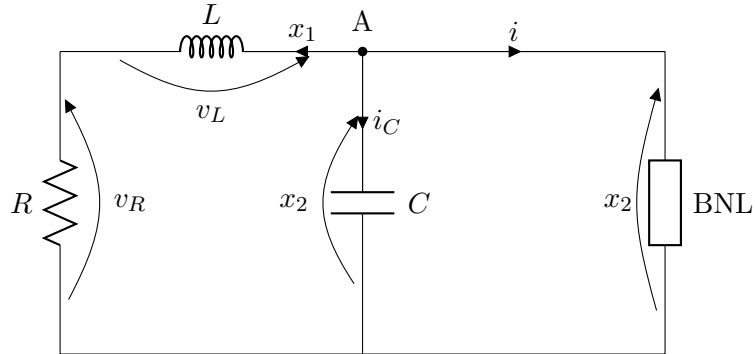


Figura 1: Il circuito elettrico da studiare.

## Dati

- $\alpha = 0.04$
- $\beta = 0.18$
- $n = 16 \quad [n]_3 = 1$
- $c = 4 \quad [c]_3 = 1$
- $L = 12 \text{ nH}$
- $C = 12 \text{ pF}$

## 1 Equazioni di stato

Considero l'equazione caratteristica del condensatore  $C$ :

$$i_c = C \dot{x}_2 \quad (1)$$

Applico LKC al nodo A:

$$i_c = -x_1 - i \quad (2)$$

Sostituendo  $i_c$  nell'equazione 1, ottengo la prima equazione di stato:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \quad (3)$$

Poi, considero l'equazione caratteristica del condensatore  $L$ :

$$v_L = L \dot{x}_1 \quad (4)$$

Applico LKT alla maglia di sinistra, ottenendo:

$$x_2 = v_R + v_L = x_1 R + L \dot{x}_1 \quad (5)$$

<b>R</b>	<b>Equilibri</b>
$R \leq \frac{1}{\alpha}$	$(0, 0)$
$R > \frac{1}{\alpha}$	$(0, 0), \left( \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right)$

Tabella 1: Equilibri del sistema al variare di  $R$ .

Da cui la seconda equazione di stato:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \quad (6)$$

Il sistema è dunque descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \end{cases} \quad (7)$$

## 2 Assenza di cicli per $R$ elevato

L'assenza di cicli per particolari valori di  $R$  può essere mostrata grazie al criterio di Bendixon.

$$\text{div } f(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{R}{L} + \frac{\alpha}{C} - \frac{3\beta}{C}x_2^2 \quad (8)$$

$$R > \alpha \frac{L}{C} \implies \text{div } f < 0 \quad \forall x_2 \quad (9)$$

Per  $R > \alpha \frac{L}{C} = 40\Omega$ , la divergenza assume valore negativo per qualunque  $x_2$ : dunque, non sono presenti cicli nell'intero piano.

Il risultato è in accordo con l'analogia intuitiva che associa la resistenza elettrica con l'attrito nei sistemi meccanici: entrambi i fenomeni dissipano energia e smorzano i movimenti periodici.

## 3 Equilibri e loro biforcazioni

Annullando le derivate delle equazioni del sistema, con semplici passaggi si ottengono gli equilibri mostrati in Tabella 1.

### 3.1 Stabilità

Lo jacobiano del sistema linearizzato è:

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{\alpha}{C} - \frac{\beta}{C} 3x_2^2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Analizziamo ora il tipo degli equilibri.

1. (0,0)

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{\alpha}{C} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\text{tr } J(0,0) = \frac{L\alpha - CR}{CL} \quad (12)$$

$$\det J(0,0) = \frac{1 - r\alpha}{CL} \quad (13)$$

L'analisi di stabilità dell'equilibrio è mostrata in Tabella 2a.

2.  $\left( \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right)$

Questi equilibri esistono solo per  $R > \frac{1}{\alpha}$ , condizione che dunque può essere assunta nello studio della loro stabilità.

$$J \left( \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{3 - 2R\alpha}{CR} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\det J = 2 \frac{R\alpha - 1}{CL} > 0 \quad \forall R > \frac{1}{\alpha} \quad (15)$$

$$\text{tr } J = \frac{-CR^2 + 3L - 2RL\alpha}{CRL} \quad (16)$$

L'analisi di stabilità degli equilibri è mostrata in Tabella 2b.

---


$$^1k = \frac{-L\alpha + \sqrt{L^2\alpha^2 + 3LC}}{C} = 27.82\Omega$$

		$\text{tr } J(0,0)$	$\det J(0,0)$	tipo
$R < \frac{1}{\alpha}$	$(0, 25\Omega)$	$> 0$	$> 0$	instabile
$\frac{1}{\alpha} < R < \frac{L\alpha}{C}$	$(25\Omega, 40\Omega)$	$> 0$	$< 0$	sella
$R > \frac{L\alpha}{C}$	$(40\Omega, +\infty)$	$< 0$	$< 0$	sella

(a) Stabilità dell'equilibrio  $(0,0)$  al variare di  $R$ .

		$\text{tr } J$	$\det J$	tipo
$\frac{1}{\alpha} < R < k^1$	$(25\Omega, 27.82\Omega)$	$> 0$	$> 0$	fuoco instabile
$R > k$	$(27.82\Omega, +\infty)$	$< 0$	$> 0$	fuoco stabile

(b) Stabilità dell'equilibrio  $\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R^3}}, \pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R}}\right)$  al variare di  $R$ .

Tabella 2: Analisi di stabilità degli equilibri (Tabella 1).

### 3.2 Biforcazioni degli stati di equilibrio

Le biforcazioni del sistema al variare di  $R$  sono elencate in Tabella 3. Il sistema ammette una biforcazione forcone, due Hopf, una doppia omoclina e una biforcazione tangente di cicli. I valori di  $R$  a cui si presentano le biforcazioni doppia omoclina e tangente di cicli sono stati ricavati empiricamente simulando il sistema con Pplane.

### 3.3 Cicli

Per  $R < \frac{1}{\alpha} = 25\Omega$ , il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'equilibrio instabile.

Per  $\frac{1}{\alpha} < R < k$ , il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'origine (sella) e i due equilibri instabili, compatibilmente con il criterio di Poincaré.

## 4 Diagramma delle biforcazioni

Il diagramma completo delle biforcazioni è riportato in Figura 5.

<b>R</b>	<b>Tipo</b>	<b>Note</b>
$\frac{1}{\alpha} = 25\Omega$	forcone	per $R > 25\Omega$ nascono due equilibri instabili (Figura 2)
$k = 27.82\Omega$	Hopf (doppia)	intorno ai due rami del forcone si creano cicli instabili; i due equilibri diventano stabili (Figura 3b)
$28.35\Omega$	doppia omoclina	i cicli generati dalle Hopf collidono con la sella in $(0, 0)$ ; si crea un nuovo ciclo instabile interno (Figura 4b)
$28.49\Omega$	tangente di cicli	il ciclo instabile interno e quello stabile esterno collidono e spariscono

Tabella 3: Biforcazioni del sistema al variare di  $R$ .

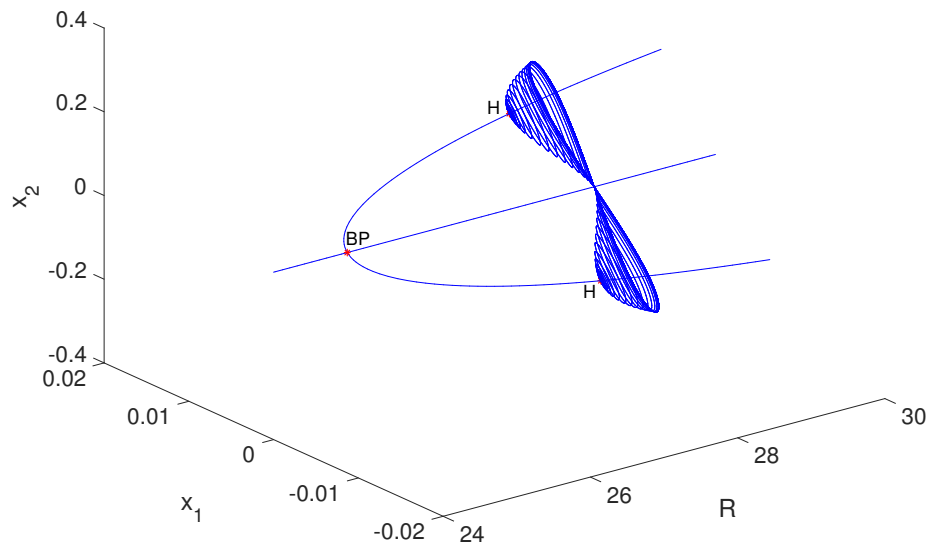
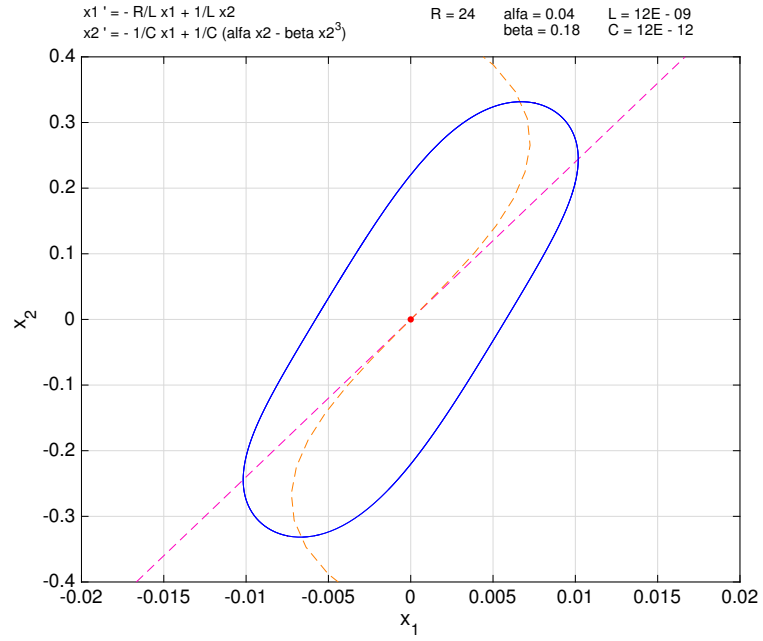
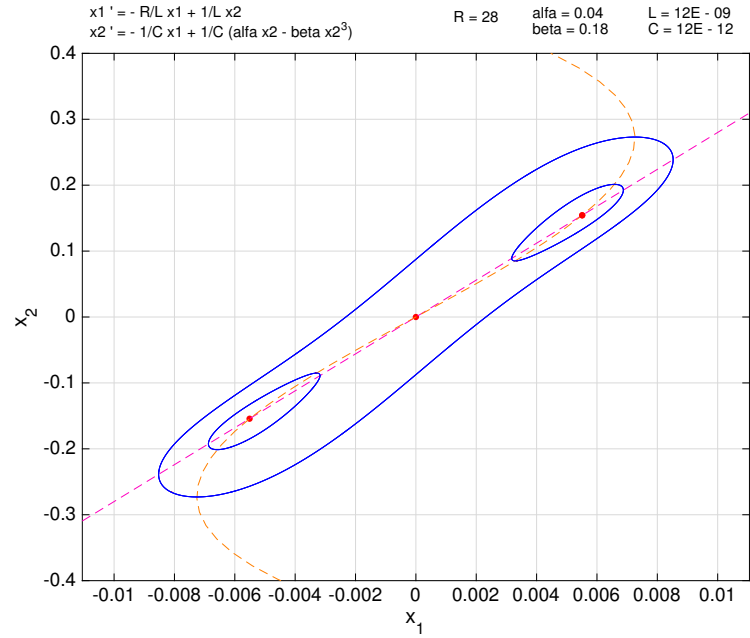


Figura 2: Le biforcazioni forcone e Hopf.

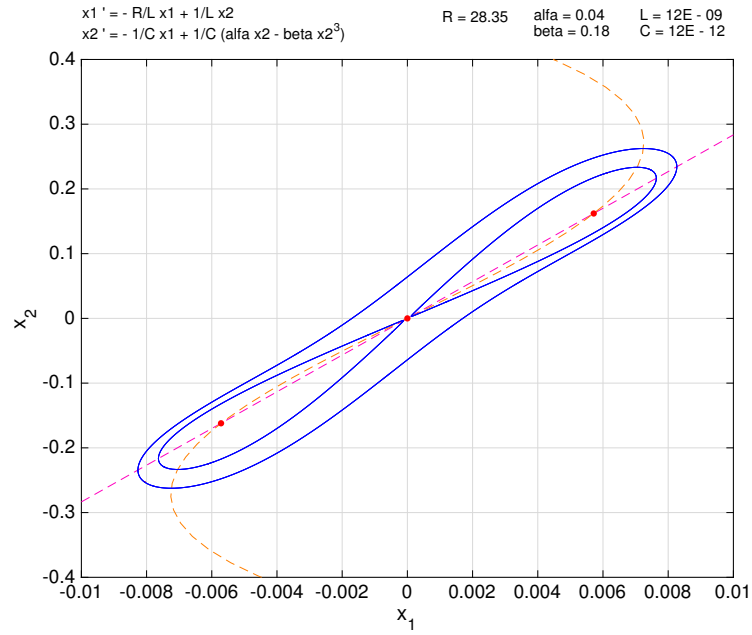


(a) Ciclo stabile per  $R = 24\Omega$ .

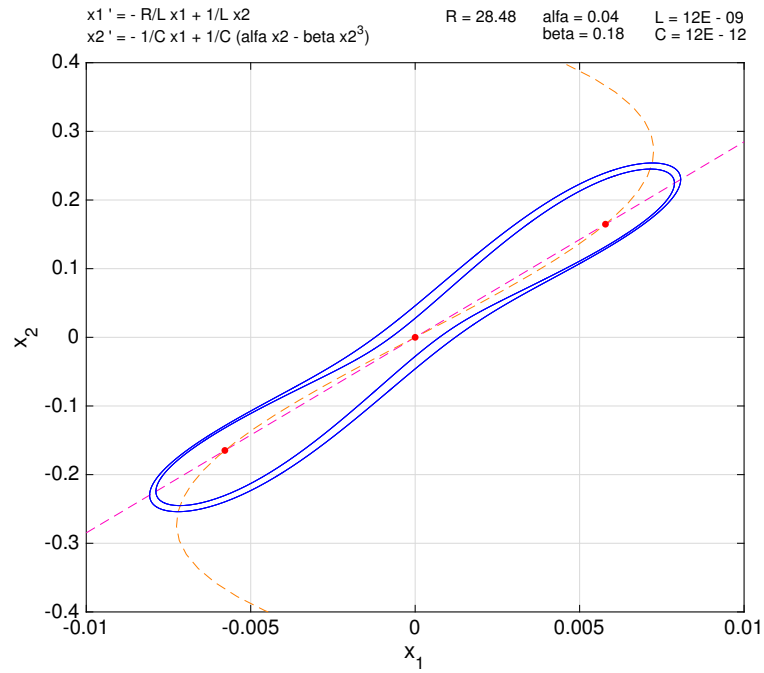


(b) Ciclo stabile (esterno) e cicli instabili (interni) per  $R = 26\Omega$ .

Figura 3: Cicli prima e dopo la biforcazione di Hopf.



(a) I due cicli instabili toccano la sella in  $(0,0)$  subito prima della biforcazione omoclina.



(b) Dopo la biforcazione omoclina i due cicli instabili si sono fusi; qui sono mostrati immediatamente prima della tangente di cicli.

Figura 4: Cicli prima e dopo la biforcazione omoclina.



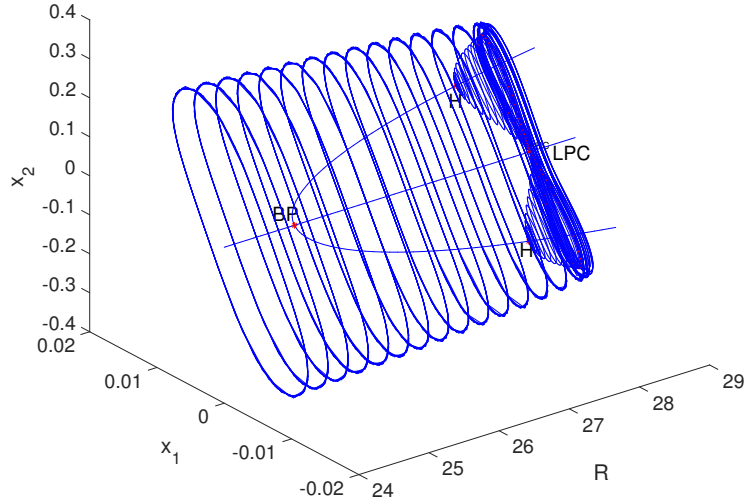


Figura 5: Il diagramma completo delle biforcazioni in funzione di  $R$ .

## 5 Numero di biforcazioni trovate

Il numero di biforcazioni trovate è riportato in Tabella 4.

forcone	1
Hopf	2
doppia omoclina	1
tangente di cicli	1

Tabella 4: Numero di biforcazioni del sistema.

## 6 Comportamento caotico del sistema

Si suppone che la resistenza  $R$  del sistema vari periodicamente del 25% seguendo la legge:

$$R(t) = \bar{R}(1 + 0.25 \sin(\omega t)) \quad (17)$$

Per mantenere il sistema autonomo e poterlo quindi simulare, si possono introdurre due nuove equazioni relative a due nuove variabili di stato, disaccoppiate dalle precedenti. Il sistema diventa dunque:

$$\begin{cases} R = \bar{R}(1 + 0.25x_4) \\ \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \\ \dot{x}_3 = x_3 - \omega x_4 - (x_3^2 + x_4^2)x_3 \\ \dot{x}_4 = \omega x_3 + x_4 - (x_3^2 + x_4^2)x_4 \end{cases} \quad (18)$$

Dove è immediato verificare per sostituzione che

$$\begin{aligned} x_3 &= \cos(\omega t) \\ x_4 &= \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (19)$$

Dall'equazione 17 si osserva che, per valori di  $R$  ragionevoli ( $29.5\Omega$  ad esempio) l'oscillazione è sufficientemente ampia da passare per tutti i punti di biforcazione (Tabella 3): non è davvero necessario variare  $R$  per trovare il caos.

La precedente osservazione semplifica molto il problema, che si riduce a trovare un giusto valore del solo parametro  $\omega$  per cui il sistema presenti comportamento caotico.

Provando a calcolare sistematicamente gli esponenti di Lyapunov del sistema 18 per valori di  $\omega$  nell'ordine di grandezza dell'unità, si ottiene il risultato illustrato in Figura 6.

Integrando per intervalli estesi il sistema, si verifica che effettivamente per  $\omega = 3.1415$  gli esponenti di Lyapunov valgono:  $[0.28, 0, -0.77, -2]$ .

Ciò dimostra il comportamento caotico del sistema. Lo strano attrattore simulato per gli stessi parametri è mostrato in Figura 8, insieme alla sua sezione di Poincaré in Figura 7.

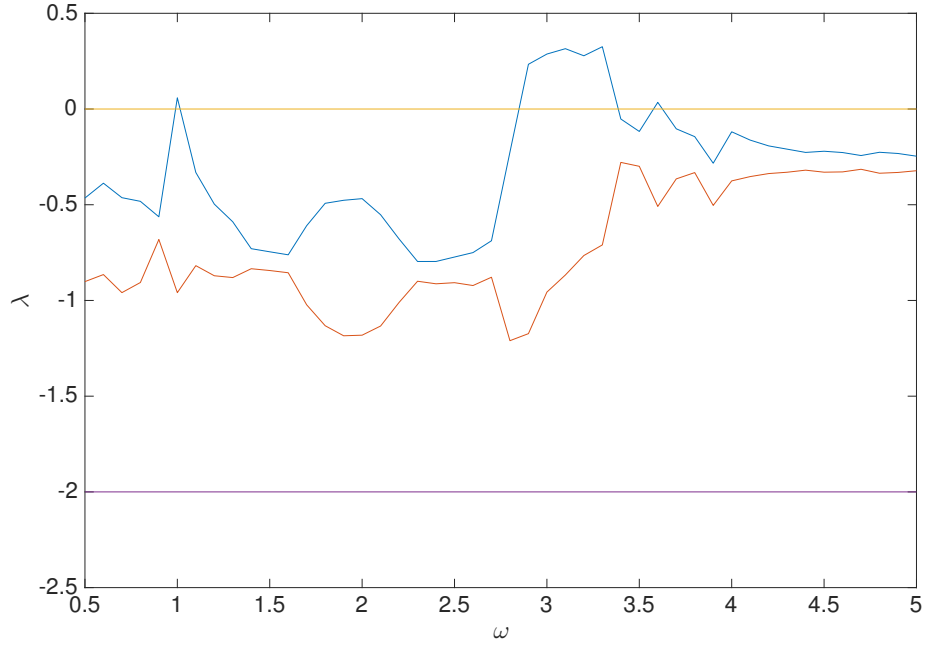


Figura 6: Esponenti di Lyapunov del sistema 18 calcolati per  $\omega \in [0.5, 5]$ ,  $R = 29.5\Omega$ .

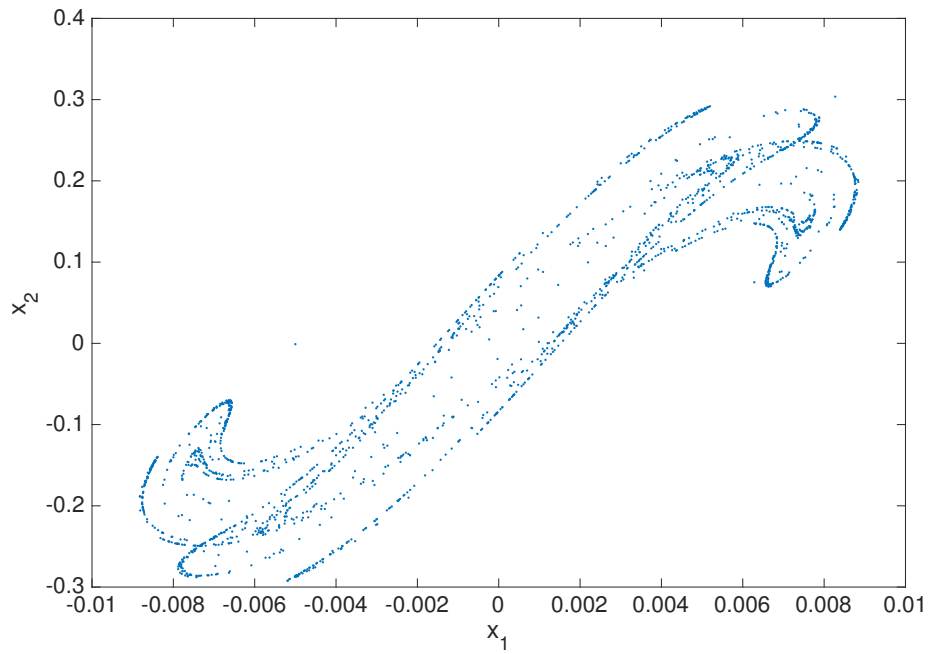
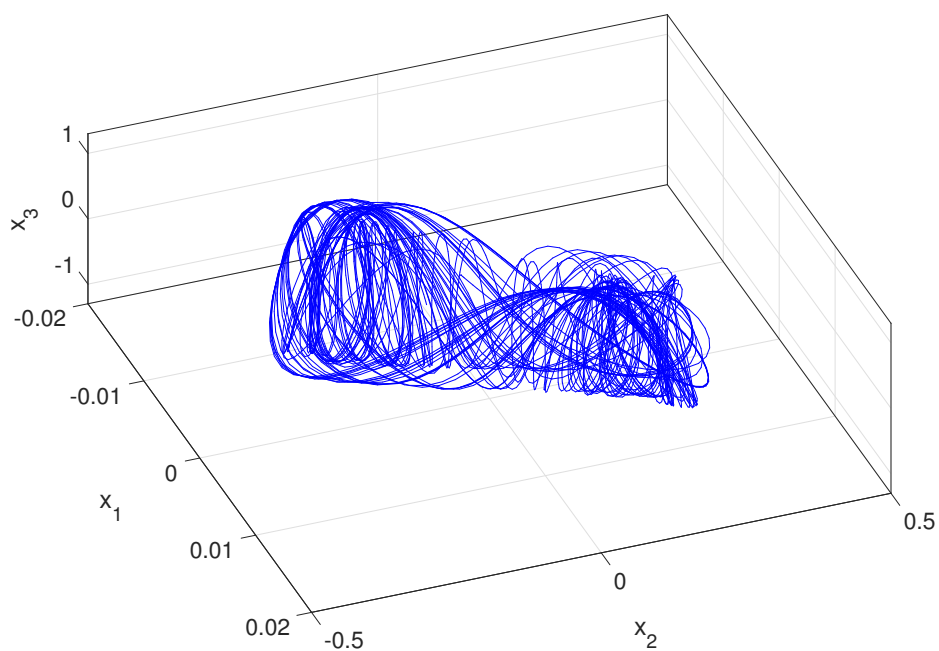
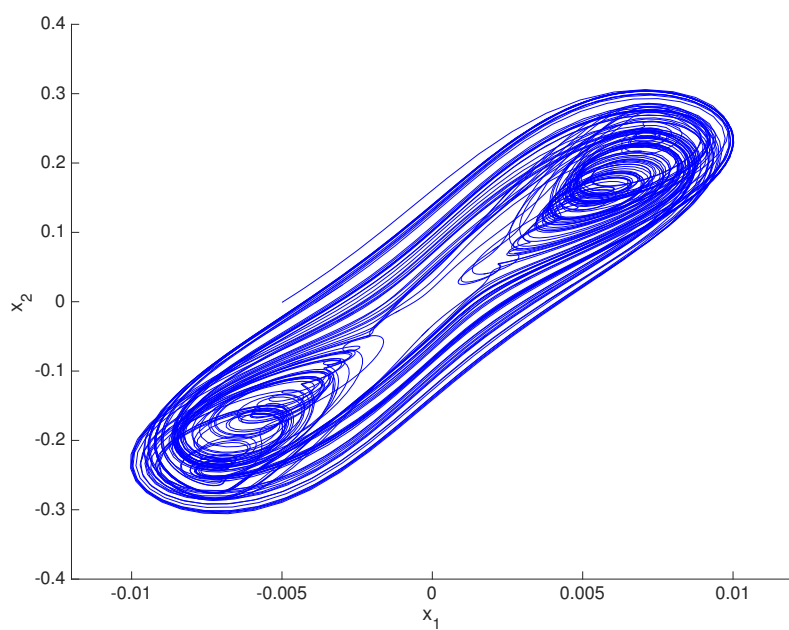


Figura 7: La mappa di Poincaré dello strano attrattore.



(a) Simulazione di un'orbita nello strano attrattore.



(b) L'orbita vista "dall'alto", sul piano  $x_1x_2$ .

Figura 8: Lo strano attrattore che si ottiene simulando il sistema per  $R = 29.5\Omega$ ,  $\omega = 3.1415$ .