Teoria dei Sistemi
attività integrativa (foglio giallo)

Pietro De Nicolao
(matricola 849761)

26 novembre 2015

Indice

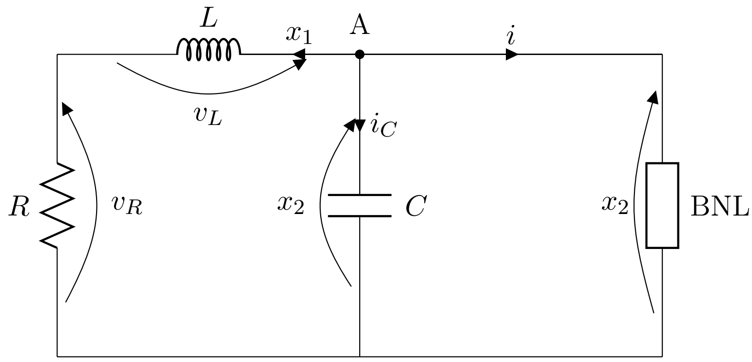


Figura 1: Il circuito elettrico da studiare.

Dati

- $\alpha = 0.04$
- $\beta = 0.18$
- $n = 16 \qquad [n]_3 = 1$
- $c = 4 \qquad [c]_3 = 1$
- $L = 12\,\mathrm{nH}$
- $C = 12\,\mathrm{pF}$
- $i = -\alpha x_2 + \beta x_2^3$

1 Equazioni di stato

Considero l'equazione caratteristica del condensatore C:

$$i_c = C\dot{x_2} \tag{1}$$

Applico LKC al nodo A:

$$i_c = -x_1 - i \tag{2}$$

Sostituendo i_c nell'equazione 1, ottengo la prima equazione di stato:

$$\dot{x_2} = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}\left(\alpha x_2 - \beta x_2^3\right) \tag{3}$$

Poi, considero l'equazione caratteristica del condensatore L:

$$v_L = L\dot{x_1} \tag{4}$$

Applico LKT alla maglia di sinistra, ottenendo:

$$x_2 = v_R + v_L = x_1 R + L\dot{x_1} \tag{5}$$

Da cui la seconda equazione di stato:

$$\dot{x_1} = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \tag{6}$$

Il sistema è dunque descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\dfrac{R}{L}x_1 + \dfrac{1}{L}x_2 \\ \dot{x_2} = -\dfrac{1}{C}x_1 + \dfrac{1}{C}\left(\alpha x_2 - \beta x_2^3\right) \end{cases} \tag{7}$$

2 Assenza di cicli per resistenze elevate

L'assenza di cicli per particolari valori di R può essere mostrata grazie al criterio di Bendixon.

$$\text{div f}(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{R}{L} + \frac{\alpha}{C} - \frac{3\beta}{C}x_2^2 \tag{8}$$

$$R > \alpha\frac{L}{C} \Longrightarrow \text{div f} < 0 \quad \forall x_2 \tag{9}$$

Per $R > \alpha\frac{L}{C} = 40\Omega$, la divergenza assume valore negativo per qualunque x_2: dunque, non sono presenti cicli nell'intero piano.

Il risultato è in accordo con l'analogia intuitiva che associa la resistenza elettrica con l'attrito nei sistemi meccanici: entrambi i fenomeni dissipano energia e smorzano i movimenti periodici.

3 Equilibri e loro biforcazioni

Annullando le derivate delle equazioni del sistema, con semplici passaggi si ottengono gli equilibri mostrati in Tabella 1.

3.1 Stabilità

Lo jacobiano del sistema linearizzato è:

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & \dfrac{\alpha}{C} - \dfrac{\beta}{C}3x_2^2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Analizziamo ora il tipo degli equilibri.

R	**Equilibri**
$R \leq \dfrac{1}{\alpha}$	$(0,0)$
$R > \dfrac{1}{\alpha}$	$(0,0), \left(\pm\sqrt{\dfrac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm\sqrt{\dfrac{\alpha R - 1}{\beta R}}\right)$

Tabella 1: Equilibri del sistema al variare di R.

1. (0,0)

$$J(0,0) = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & \dfrac{\alpha}{C} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\text{tr } J(0,0) = \frac{L\alpha - CR}{CL} \tag{12}$$

$$\det J(0,0) = \frac{1 - r\alpha}{CL} \tag{13}$$

L'analisi di stabilità dell'equilibrio è mostrata in Tabella 2a.

2. $\left(\pm\sqrt{\dfrac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm\sqrt{\dfrac{\alpha R - 1}{\beta R}}\right)$

Questi equilibri esistono solo per $R > \frac{1}{\alpha}$, condizione che dunque può essere assunta nello studio della loro stabilità.

$$J\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm\sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}}\right) = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & \dfrac{1}{L} \\ -\dfrac{1}{C} & \dfrac{3 - 2R\alpha}{CR} \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$\det J = 2\frac{R\alpha - 1}{CL} > 0 \quad \forall R > \frac{1}{\alpha} \tag{15}$$

$$\text{tr } J = \frac{-CR^2 + 3L - 2RL\alpha}{CRL} \tag{16}$$

L'analisi di stabilità degli equilibri è mostrata in Tabella 2b.

[1] $k = \dfrac{-L\alpha + \sqrt{L^2\alpha^2 + 3LC}}{C} = 27.82\Omega$

		tr $J(0,0)$	det $J(0,0)$	tipo
$R < \frac{1}{\alpha}$	$(0, 25\Omega)$	> 0	> 0	instabile
$\frac{1}{\alpha} < R < \frac{L\alpha}{C}$	$(25\Omega, 40\Omega)$	> 0	< 0	sella
$R > \frac{L\alpha}{C}$	$(40\Omega, +\infty)$	< 0	< 0	sella

(a) Stabilità dell'equilibrio $(0,0)$ al variare di R.

		tr J	det J	tipo
$\frac{1}{\alpha} < R < k^1$	$(25\Omega, 27.82\Omega)$	> 0	> 0	fuoco instabile
$R > k$	$(27.82\Omega, +\infty)$	< 0	> 0	fuoco stabile

(b) Stabilità dell'equilibrio $\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R^3}}, \pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R}}\right)$ al variare di R.

Tabella 2: Analisi di stabilità degli equilibri (Tabella 1).

3.2 Biforcazioni degli stati di equilibrio

Le biforcazioni del sistema al variare di R sono elencate in Tabella 3. Il sistema ammette una biforcazione forcone, due Hopf, una doppia omoclina e una biforcazione tangente di cicli. I valori di R a cui si presentano le biforcazioni doppia omoclina e tangente di cicli sono stati ricavati empiricamente simulando il sistema con Pplane.

Per $R < \frac{1}{\alpha} = 25\Omega$, il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'equilibrio instabile nell'origine.

Per $\frac{1}{\alpha} < R < k$, il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'origine (sella) e i due equilibri instabili, compatibilmente con il criterio di Poincaré.

A $R = k = 27.82\Omega$ avviene una biforcazione di Hopf che interessa gli equilibri instabili: resta il ciclo esterno, e si creano cicli instabili attorno ai due equilibri simmetrici, che diventano stabili per $R > k$ (Figura 3).

A $R = 28.49\Omega$ avviene una doppia omoclina: i due cicli instabili collidono con la sella nell'origine e si fondono in un unico ciclo instabile (Figura 4). Il ciclo esterno stabile resta.

A $R = 28.49\Omega$ si ha finalmente una biforcazione tangente di cicli: il ciclo esterno stabile collide con quello interno instabile generato dalla doppia omoclina, e i cicli spariscono.

R	Tipo	Note
$\frac{1}{\alpha} = 25\Omega$	forcone	per $R > 25\Omega$ nascono due equilibri instabili (Figura 2)
$k = 27.82\Omega$	Hopf (doppia)	intorno ai due rami del forcone si creano cicli instabili; i due equilibri diventano stabili (Figura 3b)
28.35Ω	doppia omoclina	i cicli generati dalle Hopf collidono con la sella in $(0, 0)$; si crea un nuovo ciclo instabile interno (Figura 4b)
28.49Ω	tangente di cicli	il ciclo instabile interno e quello stabile esterno collidono e spariscono

Tabella 3: Biforcazioni del sistema al variare di R.

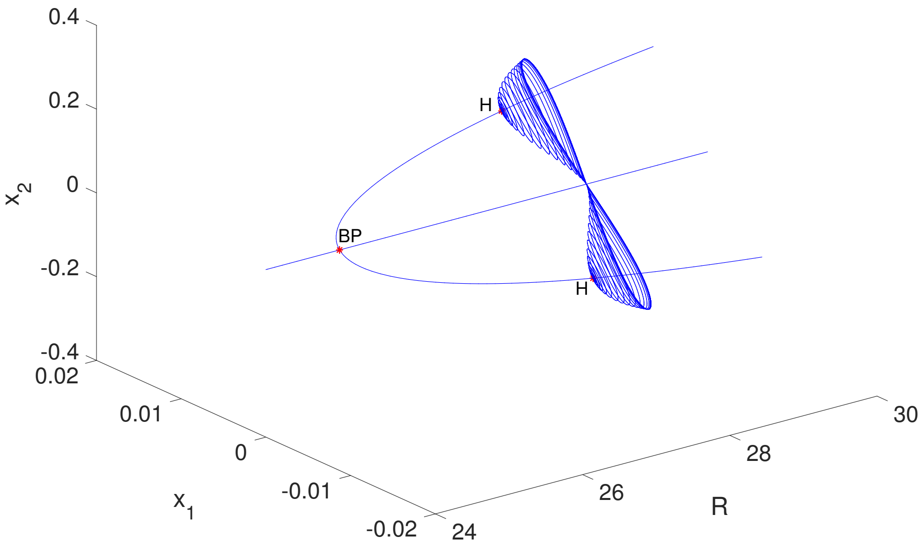
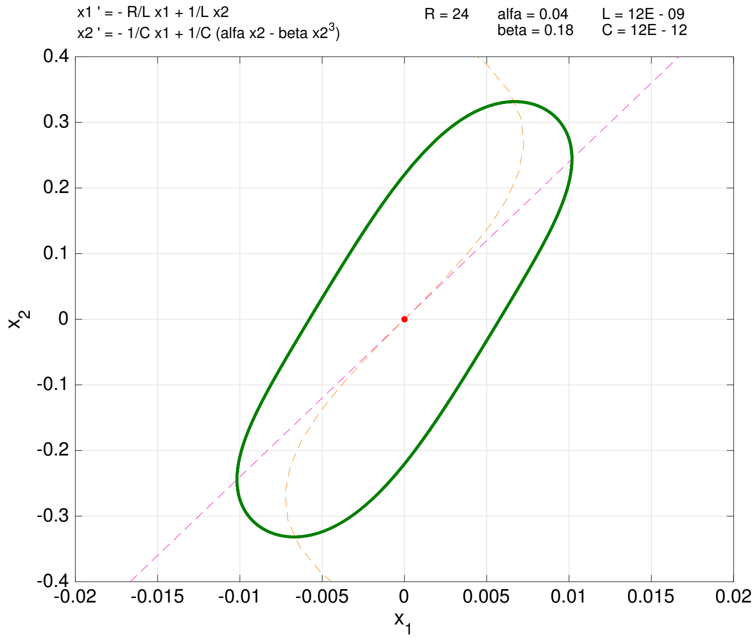
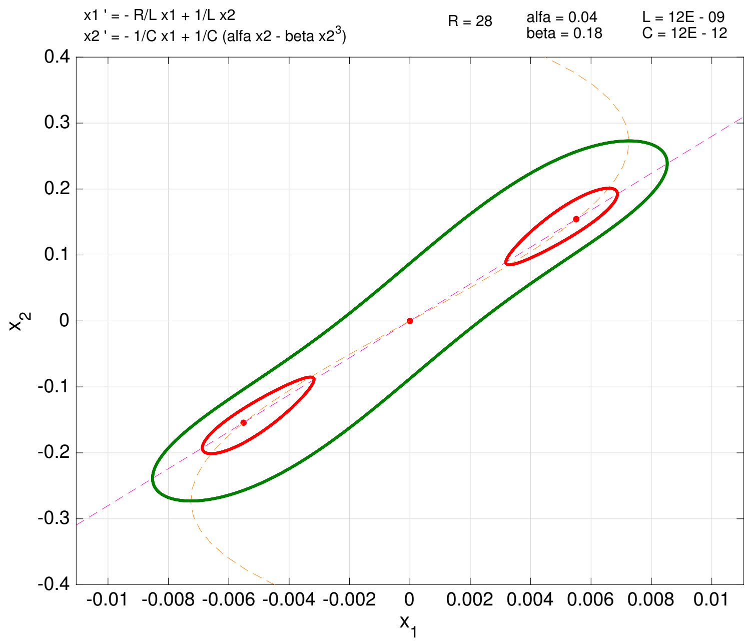


Figura 2: Le biforcazioni forcone e Hopf.

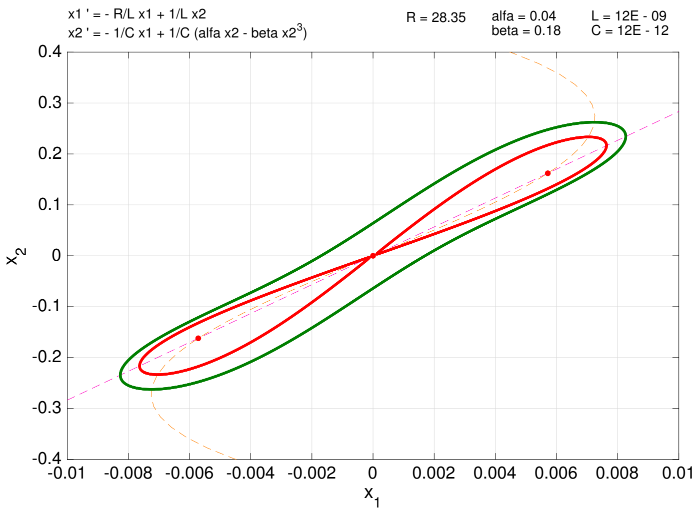


(a) Ciclo stabile per $R = 24\Omega$.

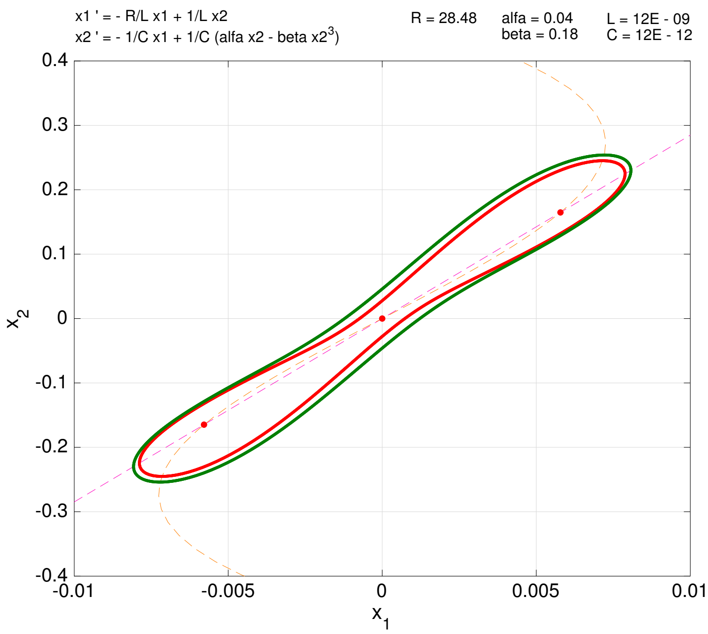


(b) Ciclo stabile (esterno) e cicli instabili (interni) per $R = 26\Omega$.

Figura 3: Cicli prima e dopo la biforcazione di Hopf.



(a) I due cicli instabili toccano la sella in $(0, 0)$ subito prima della biforcazione omoclina.



(b) Dopo la biforcazione omoclina i due cicli instabili si sono fusi; qui sono mostrati immediatamente prima della tangente di cicli.

Figura 4: Cicli prima e dopo la biforcazione omoclina.

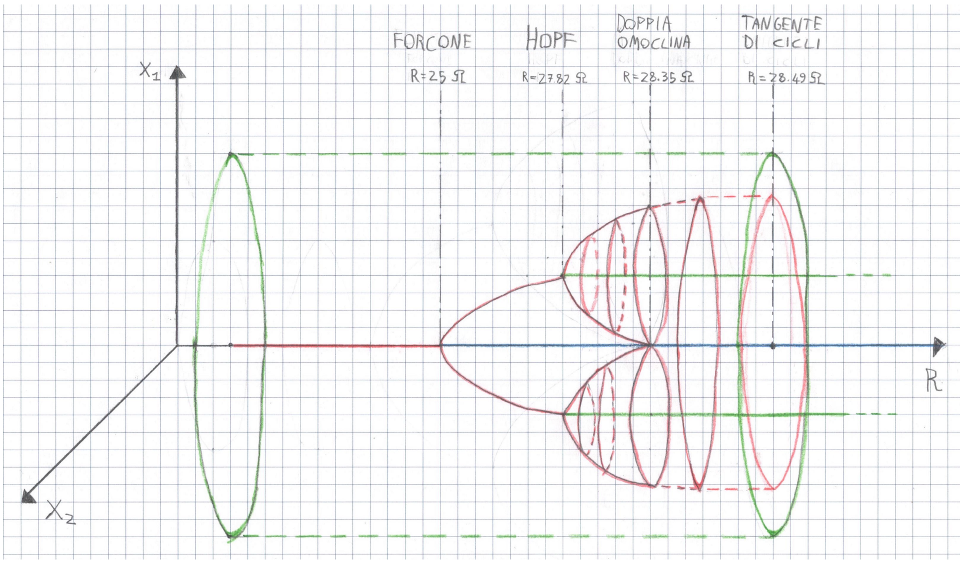


Figura 5: Il diagramma qualitativo delle biforcazioni in funzione di R.

4 Diagramma delle biforcazioni

Il diagramma qualitativo delle biforcazioni è riportato in Figura 5.

Il diagramma delle biforcazioni, ottenuto con MatCont, è riportato in Figura 6.

5 Numero di biforcazioni trovate

Il numero di biforcazioni trovate è riportato in Tabella 4.

forcone	1
Hopf	2
doppia omoclina	1
tangente di cicli	1

Tabella 4: Numero di biforcazioni del sistema.

6 Comportamento caotico del sistema

Si suppone che la resistenza R del sistema vari periodicamente del 25% seguendo la legge:

$$R(t) = \bar{R}(1 + 0.25\sin(\omega t)) \tag{17}$$

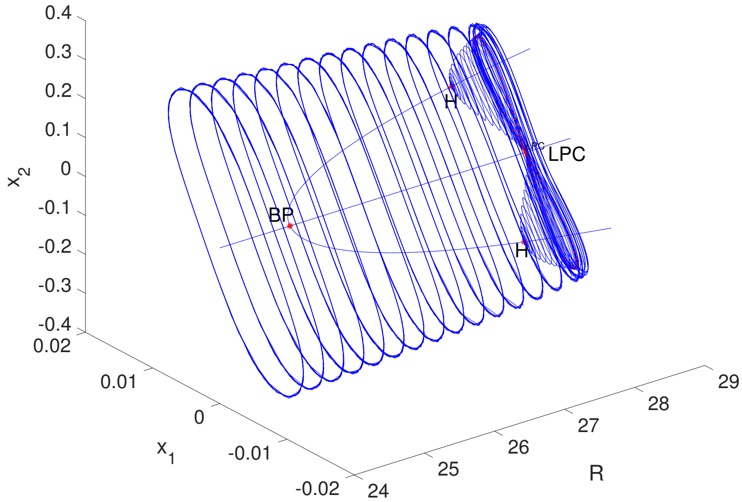


Figura 6: Il diagramma delle biforcazioni in funzione di R.

Per mantenere il sistema autonomo e poterlo quindi simulare, si possono introdurre due nuove equazioni relative a due nuove variabili di stato, disaccoppiate dalle precedenti. Il sistema diventa dunque:

$$\begin{cases} R = \bar{R}(1 + 0.25x_4) \\ \dot{x_1} = -\dfrac{R}{L}x_1 + \dfrac{1}{L}x_2 \\ \dot{x_2} = -\dfrac{1}{C}x_1 + \dfrac{1}{C}\left(\alpha x_2 - \beta x_2^3\right) \\ \dot{x_3} = x_3 - \omega x_4 - (x_3^2 + x_4^2)x_3 \\ \dot{x_4} = \omega x_3 + x_4 - (x_3^2 + x_4^2)x_4 \end{cases} \tag{18}$$

Dove è immediato verificare per sostituzione che

$$\begin{aligned} x_3 &= \cos(\omega t) \\ x_4 &= \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{19}$$

Dall'equazione 17 si osserva che, per valori di $\bar{R}$ ragionevoli (29.5Ω ad esempio) l'oscillazione è sufficientemente ampia da passare per tutti i punti di biforcazione (Tabella 3): non è davvero necessario variare $\bar{R}$ per trovare il caos.

La precedente osservazione semplifica molto il problema, che si riduce a trovare attraverso delle simulazioni un giusto valore del solo parametro ω per cui il sistema presenti comportamento caotico.

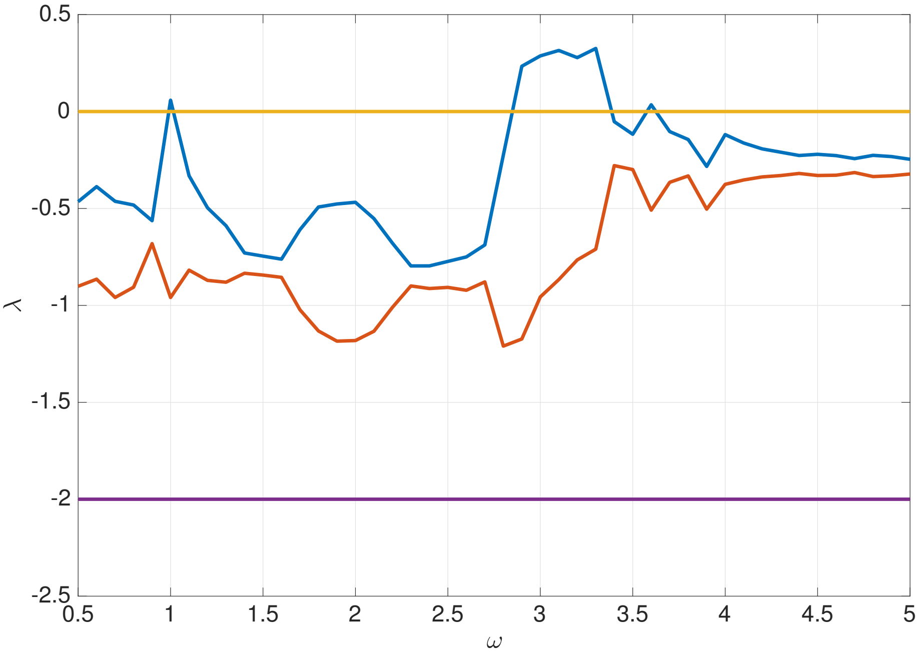


Figura 7: Esponenti di Lyapunov del sistema 18 calcolati per $\omega \in [0.5, 5]$, $\bar{R} = 29.5\Omega$.

I dati usati nelle simulazioni sono i seguenti:

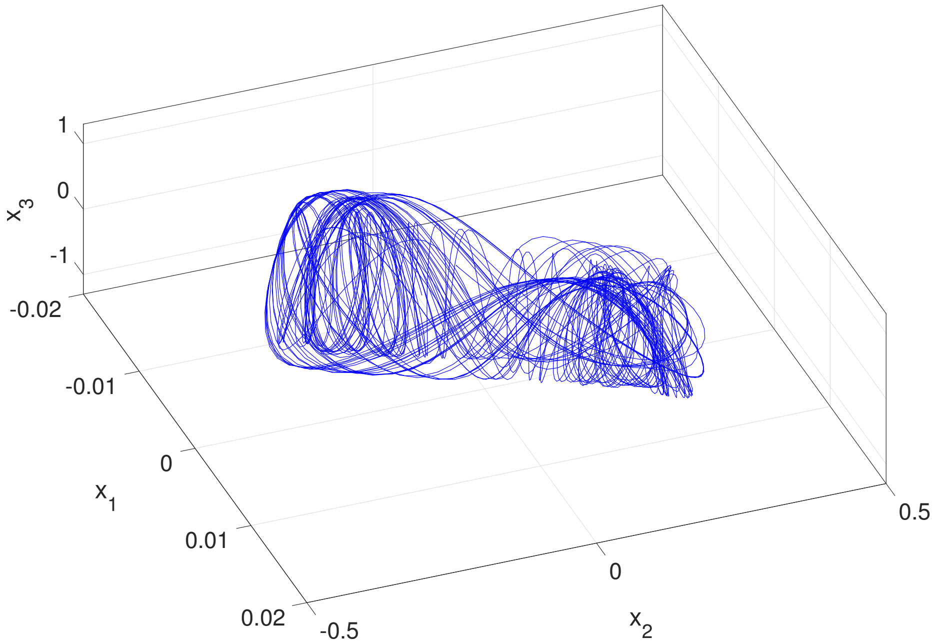
- α, β, L, C come indicati nel testo;
- $R = 29.5\Omega$;
- $\bar{x_0} = [-0.005, -0.001, 0, 1]$;
- $\omega \in [0.5, 5]$.

Provando a calcolare sistematicamente gli esponenti di Lyapunov del sistema 18 per valori di ω nell'ordine di grandezza dell'unità, si ottiene il risultato illustrato in Figura 7.

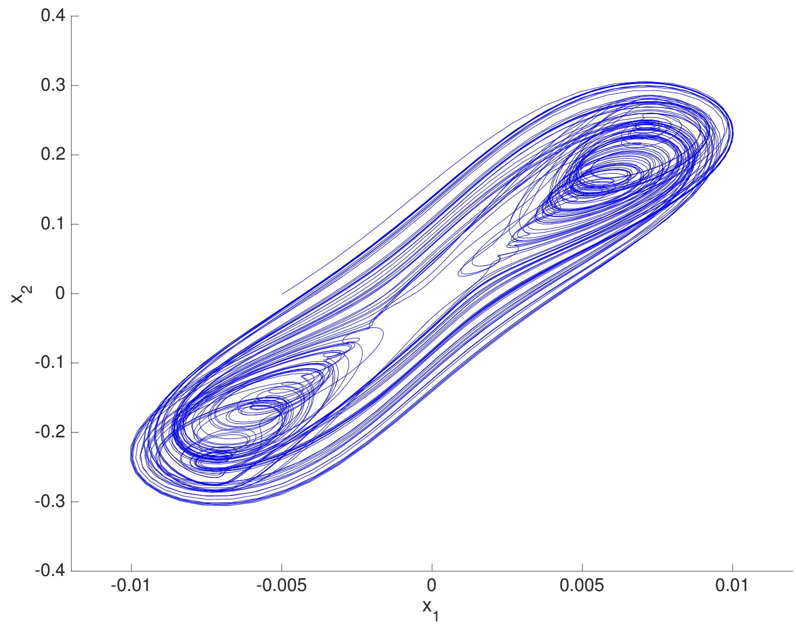
Integrando per intervalli estesi di tempo il sistema, si verifica che per $\omega = 3.1415$ gli esponenti di Lyapunov valgono: $[0.28, 0, -0.77, -2]$.

Ciò dimostra il comportamento caotico del sistema. Lo strano attrattore simulato per gli stessi parametri è mostrato in Figura 8, insieme alla sua sezione di Poincaré in Figura 9.

Infine, è possibile mostrare qualitativamente la sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali, proprietà caratterizzante degli attrattori caotici, simulando due traiettorie che partono da condizioni iniziali molto vicine, e che finiscono per divergere significativamente. Ciò è mostrato in Figura 10.



(a) Simulazione di un'orbita nello strano attrattore.



(b) L'orbita vista "dall'alto", sul piano $x_1 x_2$.

Figura 8: Lo strano attrattore che si ottiene simulando il sistema per $\bar{R} = 29.5\Omega, \omega = 3.1415$.

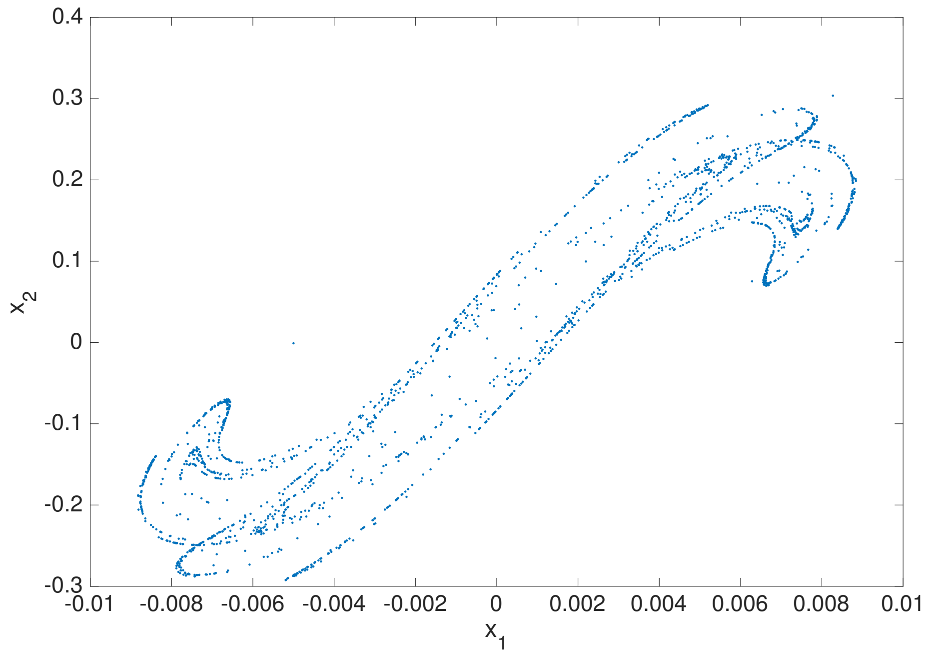


Figura 9: La mappa di Poincaré dello strano attrattore.

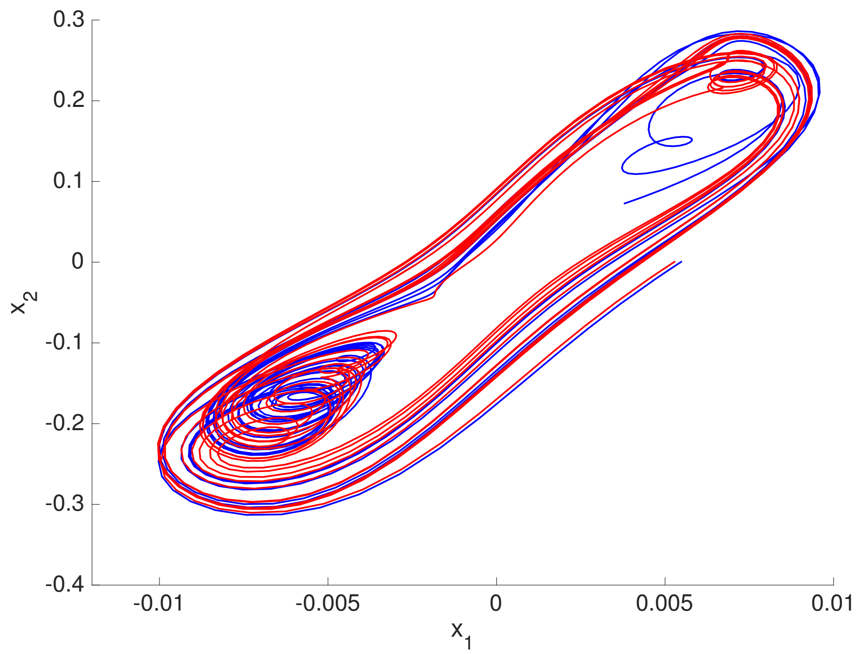


Figura 10: Due traiettorie che partono da stati iniziali molto vicini: si nota la sensibile dipendenza dalle condizioni iniziali.