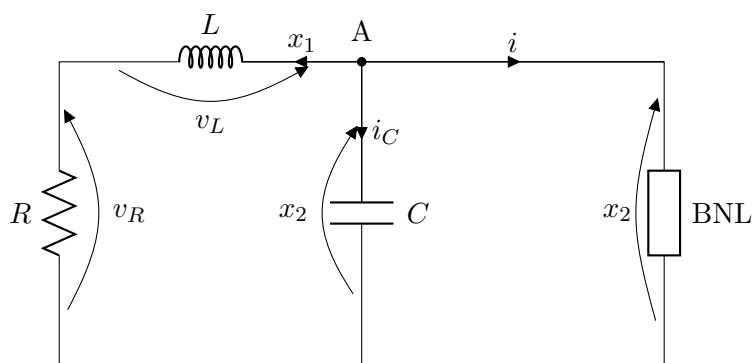


Teoria dei Sistemi

Pietro De Nicolao

18 novembre 2015



Dati

- $\alpha = 0.04$
- $\beta = 0.18$
- $n = 16$
- $c = 4$
- $L = 12 \text{ nH}$
- $C = 12 \text{ pF}$

1 Equazioni di stato

Considero l'equazione caratteristica del condensatore C :

$$i_c = C \dot{x}_2 \quad (1)$$

Applico LKC al nodo A:

$$i_c = -x_1 - i \quad (2)$$

Sostituendo i_c nell'equazione 1, ottengo la prima equazione di stato:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \quad (3)$$

Poi, considero l'equazione caratteristica del condensatore L :

$$v_L = L\dot{x}_1 \quad (4)$$

Applico LKT alla maglia di sinistra, ottenendo:

$$x_2 = v_R + v_L = x_1 R + L\dot{x}_1 \quad (5)$$

Da cui la seconda equazione di stato:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \quad (6)$$

Il sistema è dunque descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \end{cases} \quad (7)$$

2 Assenza di cicli

L'assenza di cicli per particolari valori di R può essere mostrata grazie al criterio di Bendixon.

$$\text{div } f(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{R}{L} + \frac{\alpha}{C} - \frac{3\beta}{C}x_2^2 \quad (8)$$

$$R > \alpha \frac{L}{C} \implies \text{div } f < 0 \quad \forall x_2 \quad (9)$$

Per $R > \alpha \frac{L}{C} = 40\Omega$, la divergenza assume valore negativo per qualunque x_2 : dunque, non sono presenti cicli nell'intero piano.

Il risultato è in accordo con l'analogia intuitiva che associa la resistenza elettrica con l'attrito nei sistemi meccanici: entrambi i fenomeni dissipano energia e smorzano i movimenti periodici.

3 Equilibri

Annullando le derivate delle equazioni del sistema, con semplici passaggi si ricavano le seguenti equazioni:

R	Equilibri
$R \leq \frac{1}{\alpha}$	$(0, 0)$
$R > \frac{1}{\alpha}$	$(0, 0), \left(\pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right)$

Tabella 1: Equilibri del sistema al variare di R .

$$\begin{cases} x_1(\beta R^3 x_1^2 - \alpha R + 1) = 0 \\ x_2 = R x_1 \end{cases} \quad (10)$$

Dunque esiste sempre l'equilibrio banale $x_1 = x_2 = 0$. Se $R \leq \frac{1}{\alpha}$, allora il termine $(\beta R^3 x_1^2 - \alpha R + 1)$ è sempre positivo o nullo e non vi sono altri equilibri.

Altrimenti, esistono altri due equilibri oltre a quello banale.

3.1 Stabilità

Lo jacobiano del sistema linearizzato è:

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{\alpha}{C} - \frac{\beta}{C} 3x_2^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Analizziamo ora il tipo degli equilibri.

1. $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{\alpha}{C} \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\text{tr } J(0, 0) = \frac{L\alpha - CR}{CL} \quad (13)$$

$$\det J(0, 0) = \frac{1 - r\alpha}{CL} \quad (14)$$

L'analisi di stabilità dell'equilibrio è mostrata nella tabella 2.

2. $\left(\pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right)$

		$\text{tr } J(0,0)$	$\det J(0,0)$	tipo
$R < \frac{1}{\alpha}$	$(0, 25\Omega)$	> 0	> 0	instabile
$\frac{1}{\alpha} < R < \frac{L\alpha}{C}$	$(25\Omega, 40\Omega)$	> 0	< 0	sella
$R > \frac{L\alpha}{C}$	$(40\Omega, +\infty)$	< 0	< 0	sella

Tabella 2: Stabilità dell'equilibrio $(0,0)$ al variare di R .

		$\text{tr } J$	$\det J$	tipo
$\frac{1}{\alpha} < R < k^1$	$(25\Omega, 27.82\Omega)$	> 0	> 0	fuoco instabile
$R > k$	$(27.82\Omega, +\infty)$	< 0	> 0	fuoco stabile

Tabella 3: Stabilità dell'equilibrio $\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R^3}}, \pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R}}\right)$ al variare di R .

Questi equilibri esistono solo per $R > \frac{1}{\alpha}$, condizione che dunque può essere assunta nello studio della loro stabilità.

$$J\left(\pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R^3}}, \pm\sqrt{\frac{\alpha R-1}{\beta R}}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{3-2R\alpha}{CR} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\det J = 2\frac{R\alpha-1}{CL} > 0 \quad \forall R > \frac{1}{\alpha} \quad (16)$$

$$\text{tr } J = \frac{-CR^2 + 3L - 2RL\alpha}{CRL} \quad (17)$$

3.2 Biforcazioni degli stati di equilibrio

Le biforcazioni del sistema al variare di R sono elencate in Tabella 4. Il sistema ammette una biforcazione forcone, due Hopf, una doppia omoclina e una biforcazione tangente di cicli. I valori di R a cui si presentano le biforcazioni doppia omoclina e tangente di cicli sono stati ricavati empiricamente simulando il sistema con Pplane.

$${}_1k = \frac{-L\alpha + \sqrt{L^2\alpha^2 + 3LC}}{C} = 27.82\Omega$$

R	Tipo	Note
$\frac{1}{\alpha} = 25\Omega$	forcone	per $R > 25\Omega$ nascono due equilibri instabili (Figura 1)
$k = 27.82\Omega$	Hopf (doppia)	intorno ai due rami del forcone si creano cicli instabili; i due equilibri diventano stabili (Figura 2b)
28.35Ω	doppia omoclina	i cicli generati dalle Hopf collidono con la sella in $(0, 0)$; si crea un nuovo ciclo instabile interno (Figura 3b)
28.49Ω	tangente di cicli	il ciclo instabile interno e quello stabile esterno collidono e spariscono

Tabella 4: Biforcazioni del sistema al variare di R .

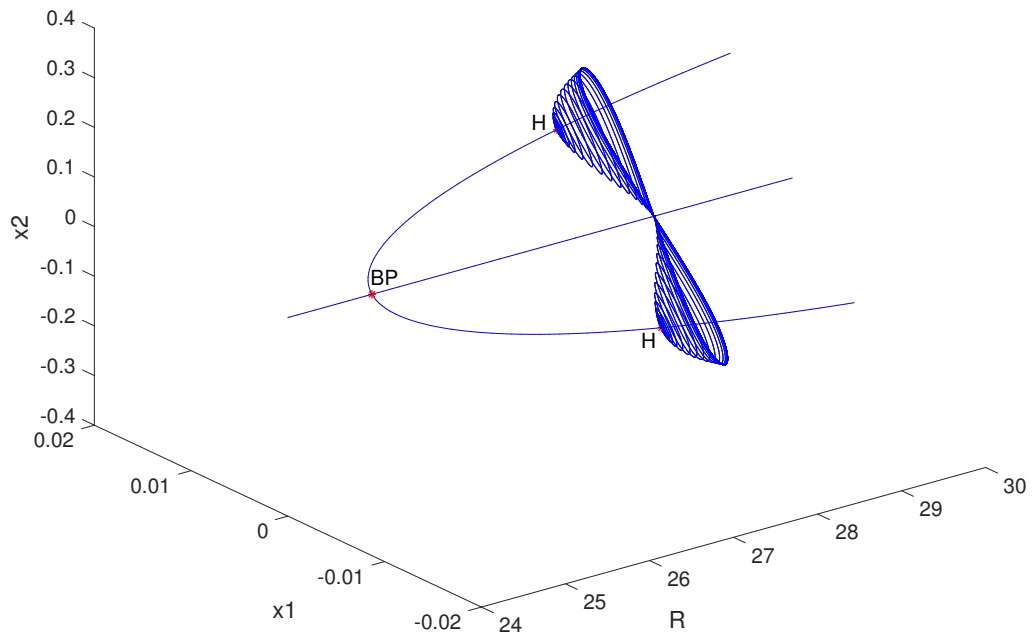
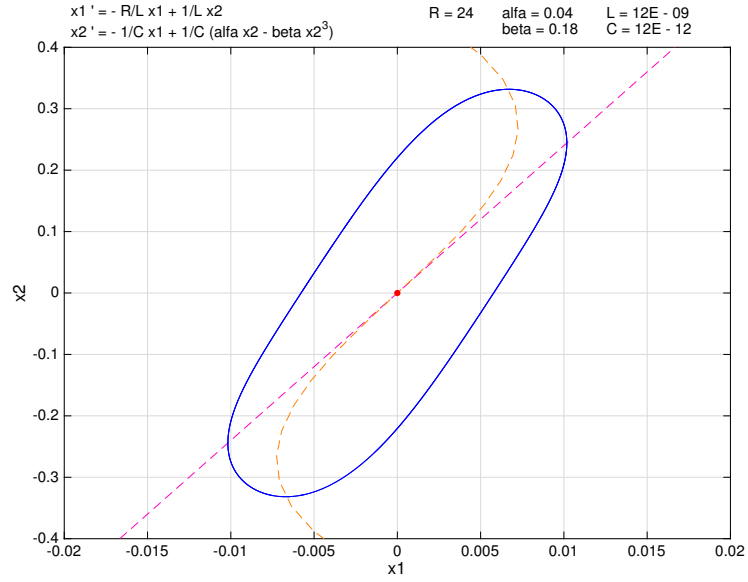


Figura 1: Le biforcazioni forcone e Hopf.

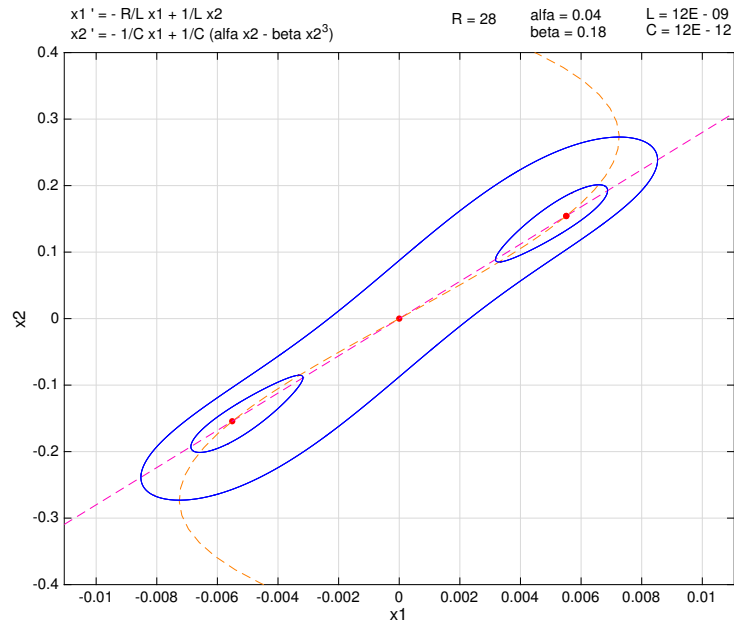
3.3 Cicli

Per $R < \frac{1}{\alpha} = 25\Omega$, il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'equilibrio instabile.

Per $\frac{1}{\alpha} < R < k$, il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'origine (sella) e i due equilibri instabili, compatibilmente con il criterio di Poincaré.

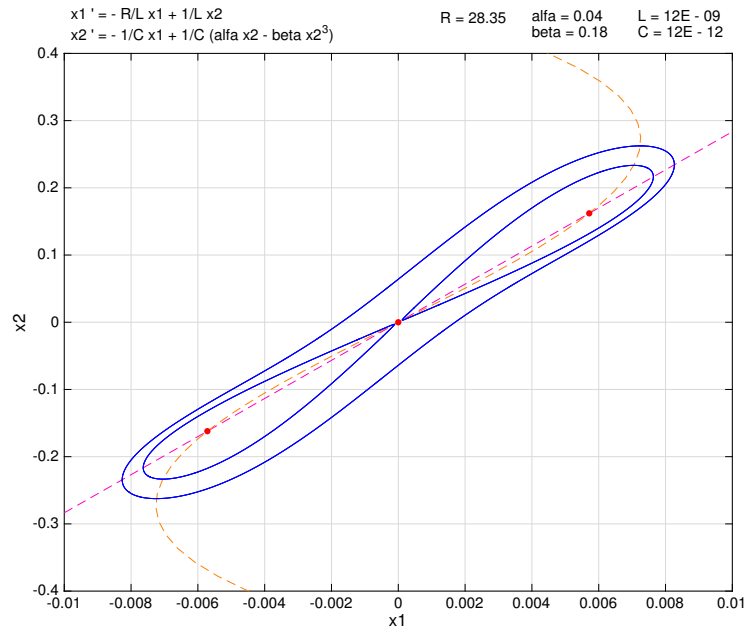


(a) Ciclo stabile per $R = 24\Omega$.

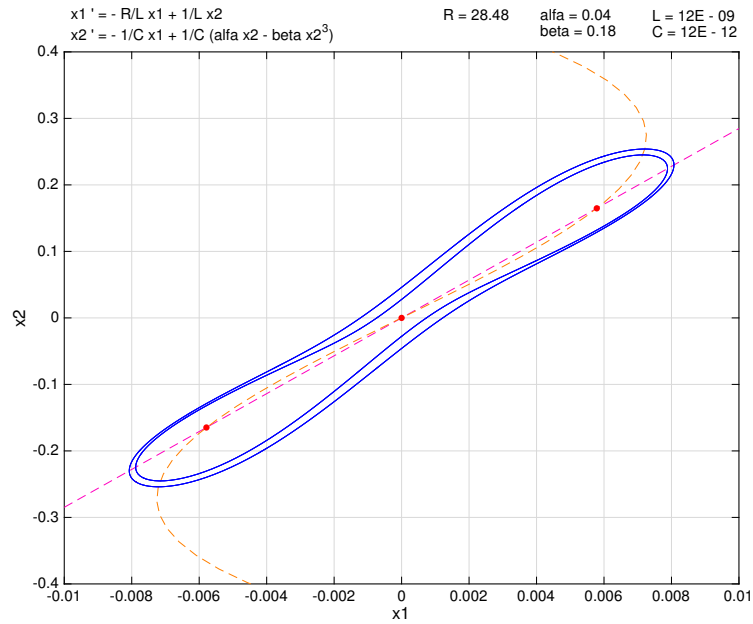


(b) Ciclo stabile (esterno) e cicli instabili (interni) per $R = 26\Omega$.

Figura 2: Cicli prima e dopo la biforcazione di Hopf.



(a) I due cicli instabili toccano la sella in $(0,0)$ subito prima della biforcazione omoclina.



(b) Dopo la biforcazione omoclina i due cicli instabili si sono fusi; qui sono mostrati immediatamente prima della tangente di cicli.

Figura 3: Cicli prima e dopo la biforcazione omoclina.