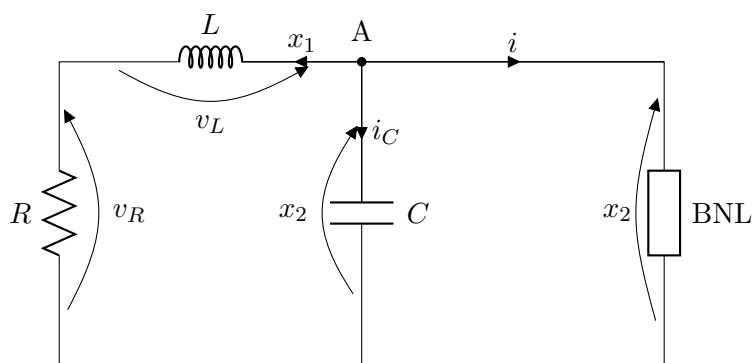


Teoria dei Sistemi

Pietro De Nicolao

15 novembre 2015



Dati

- $\alpha = 0.04$
- $\beta = 0.18$
- $n = 16$
- $c = 4$
- $L = 12 \text{ nH}$
- $C = 12 \text{ pF}$

1 Equazioni di stato

Considero l'equazione caratteristica del condensatore C :

$$i_c = C \dot{x}_2 \quad (1)$$

Applico LKC al nodo A:

$$i_c = -x_1 - i \quad (2)$$

Sostituendo i_c nell'equazione 1, ottengo la prima equazione di stato:

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \quad (3)$$

Poi, considero l'equazione caratteristica del condensatore L :

$$v_L = L\dot{x}_1 \quad (4)$$

Applico LKT alla maglia di sinistra, ottenendo:

$$x_2 = v_R + v_L = x_1 R + L\dot{x}_1 \quad (5)$$

Da cui la seconda equazione di stato:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \quad (6)$$

Il sistema è dunque descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{C}x_1 + \frac{1}{C}(\alpha x_2 - \beta x_2^3) \end{cases} \quad (7)$$

2 Assenza di cicli

L'assenza di cicli per particolari valori di R può essere mostrata grazie al criterio di Bendixon.

$$\text{div } f(x_1, x_2) = \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_2} = -\frac{R}{L} + \frac{\alpha}{C} - \frac{3\beta}{C}x_2^2 \quad (8)$$

$$R > \alpha \frac{L}{C} \implies \text{div } f < 0 \quad \forall x_2 \quad (9)$$

Per $R > \alpha \frac{L}{C} = 40\Omega$, la divergenza assume valore negativo per qualunque x_2 : dunque, non sono presenti cicli nell'intero piano.

Il risultato è in accordo con l'analogia intuitiva che associa la resistenza elettrica con l'attrito nei sistemi meccanici: entrambi i fenomeni dissipano energia e smorzano i movimenti periodici.

3 Equilibri

Annullando le derivate delle equazioni del sistema, con semplici passaggi si ricavano le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} x_1(\beta R^3 x_1^2 - \alpha R + 1) = 0 \\ x_2 = R x_1 \end{cases} \quad (10)$$

Dunque esiste sempre l'equilibrio banale $x_1 = x_2 = 0$. Se $R \leq \frac{1}{\alpha}$, allora il termine $(\beta R^3 x_1^2 - \alpha R + 1)$ è sempre positivo o nullo e non vi sono altri equilibri.

Altrimenti, esistono altri due equilibri oltre a quello banale.

R	Equilibri
$R \leq \frac{1}{\alpha}$	$(0, 0)$
$R > \frac{1}{\alpha}$	$(0, 0), \left(\pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right)$

Tabella 1: Equilibri del sistema al variare di R .

3.1 Stabilità

Lo jacobiano del sistema linearizzato è:

$$J(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{\alpha}{C} - \frac{\beta}{C} 3x_2^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Analizziamo ora il tipo degli equilibri.

1. $(0, 0)$

$$J(0, 0) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{\alpha}{C} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Calcolo traccia e determinante di $J(0, 0)$:

$$\text{tr } J(0, 0) = \frac{L\alpha - CR}{CL} \quad (13)$$

$$\det J(0, 0) = \frac{1 - r\alpha}{CL} \quad (14)$$

L'analisi di stabilità dell'equilibrio è mostrata nella tabella 2.

		$\text{tr } J(0,0)$	$\det J(0,0)$	tipo
$R < \frac{1}{\alpha}$	$(0, 25\Omega)$	> 0	> 0	instabile
$\frac{1}{\alpha} < R < \frac{L\alpha}{C}$	$(25\Omega, 40\Omega)$	> 0	< 0	sella
$R > \frac{L\alpha}{C}$	$(40\Omega, +\infty)$	< 0	< 0	sella

Tabella 2: Stabilità dell'equilibrio $(0,0)$ al variare di R .

$$2. \left(\pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right)$$

Questi equilibri esistono solo per $R > \frac{1}{\alpha}$, condizione che dunque può essere assunta nello studio della loro stabilità.

$$J \left(\pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{3 - 2R\alpha}{CR} \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\det J = 2 \frac{R\alpha - 1}{CL} > 0 \quad \forall R > \frac{1}{\alpha} \quad (16)$$

$$\text{tr } J = \frac{-CR^2 + 3L - 2RL\alpha}{CRL} \quad (17)$$

	$\text{tr } J$	$\det J$	tipo
$\frac{1}{\alpha} < R < k^1$	> 0	> 0	fuoco instabile
$R > k$	< 0	> 0	fuoco stabile

Tabella 3: Stabilità dell'equilibrio $\left(\pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R^3}}, \pm \sqrt{\frac{\alpha R - 1}{\beta R}} \right)$ al variare di R .

$$^1k = \frac{-L\alpha + \sqrt{L^2\alpha^2 + 3LC}}{C} = 27.82\Omega$$

3.2 Biforcazioni degli stati di equilibrio

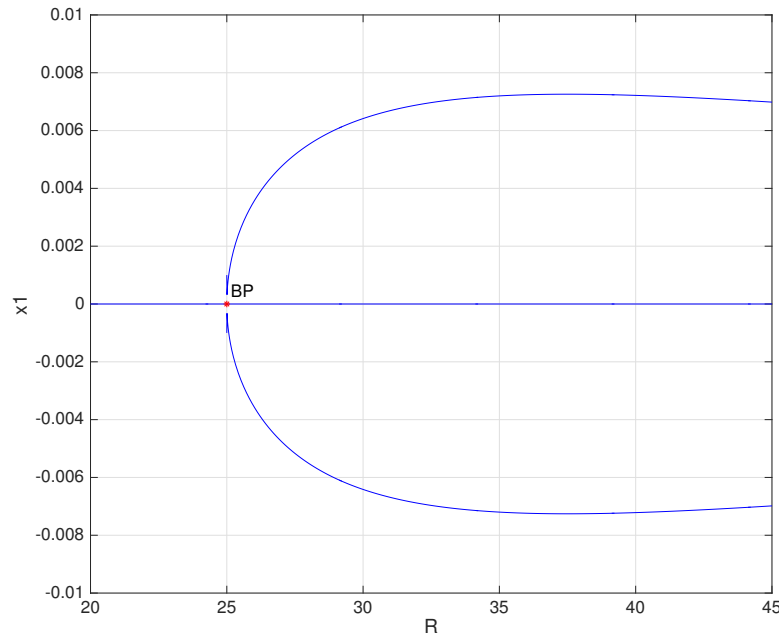
Per $R = \frac{1}{\alpha}$ l'origine passa da equilibrio instabile a sella, e nascono due nuovi equilibri instabili. Abbiamo dunque una biforcazione forcone, illustrata in Figura 1.

Invece, per $R = k = \frac{-L\alpha + \sqrt{L^2\alpha^2 + 3LC}}{C} = 27.82\Omega$, i due equilibri diversi dall'origine passano da fuoco instabile a fuoco stabile. La condizione di Hopf è verificata, dunque abbiamo una biforcazione di Hopf supercritica (dalla simulazione, i cicli – stabili – sono dalla parte dell'equilibrio instabile).

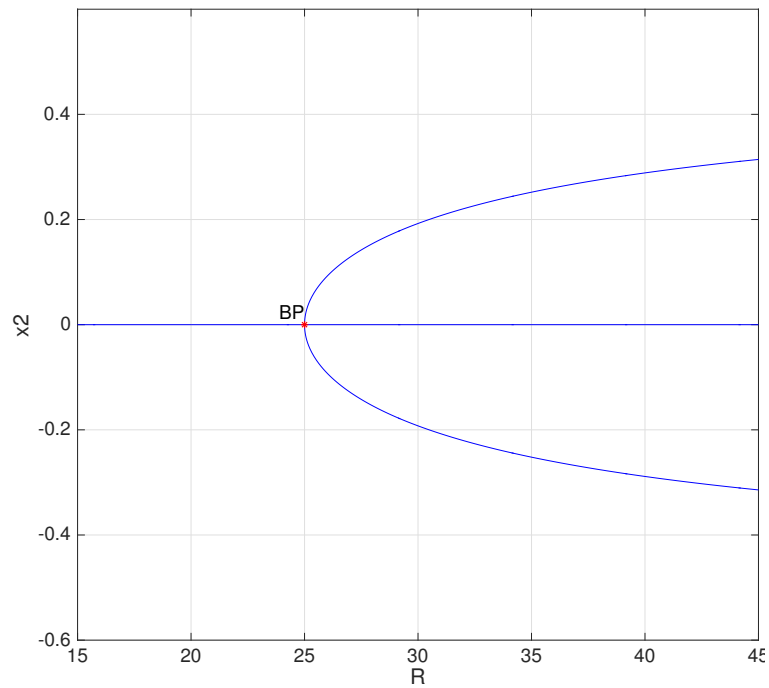
3.3 Cicli

Per $R < \frac{1}{\alpha} = 25\Omega$, il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'equilibrio instabile.

Per $\frac{1}{\alpha} < R < k$, il sistema ammette un ciclo stabile che contiene l'origine (sella) e i due equilibri instabili, compatibilmente con il criterio di Poincaré.

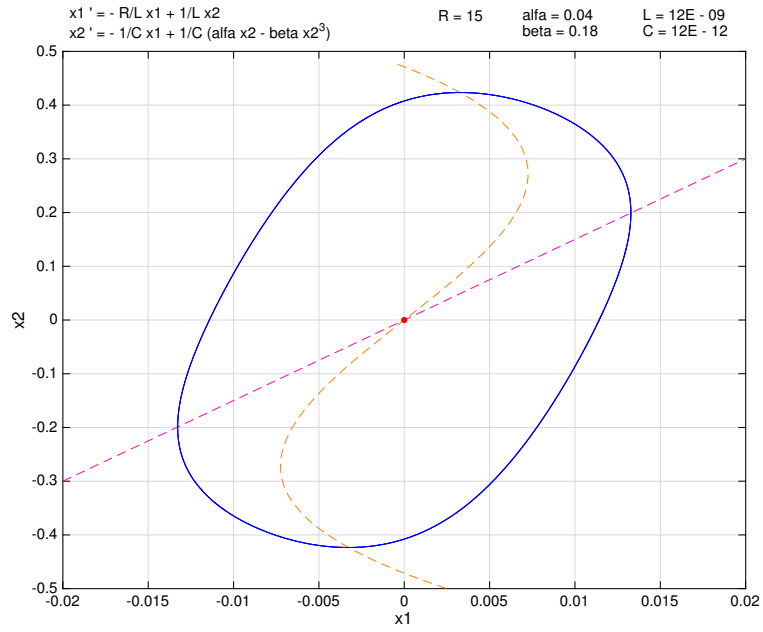


(a) Biforcazione per x_1 al variare di R nell'intorno di $R = 25\Omega$.

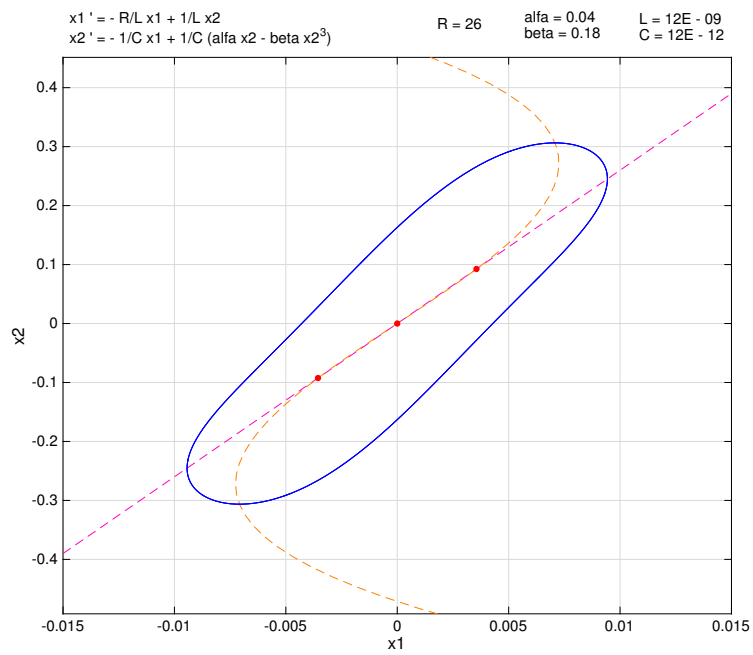


(b) Biforcazione per x_2 al variare di R nell'intorno di $R = 25\Omega$.

Figura 1: Biforcazione forcone per $R = 25\Omega$.



(a) Ciclo per $R = 15\Omega$.



(b) Ciclo per $R = 26\Omega$.

Figura 2: Cicli per due parametri di R .