

*“If you’re afraid of falling,
then don’t look down”*

*Al Prof. Stella e al Dott. Bregoli, per quanto mi hanno trasmesso in questo percorso e
per avermi saputo ispirare con la loro passione*

*Ai miei genitori, a Giorgio e ai miei nonni, per il supporto e per la stima che hanno
sempre dimostrato nei miei confronti, oltre che per la sopportazione*

*A Stefania, Diego, Chiara, Michele, Lorenzo, Syria, Luca L., Luca S., Valeria, Davide
e Riccardo, fedeli compagni di montagna, di bici, di viaggi, di concerti, di avventure
e di vita*

*A Giuseppe, Ruben, Simone e Fabio, punti di riferimento in questo percorso
universitario, con i quali ho condiviso soddisfazioni e frustrazioni*

*A Webbergate, ovvero Diego e Roberto, per l’opportunità che mi hanno offerto, per la
grande disponibilità e per la fiducia*

Indice

Elenco delle figure	v
Introduzione	1
1 Concetti Preliminari	3
1.1 Definizioni e Notazione	3
1.2 Bayesian Networks	4
1.2.1 Dynamic Bayesian Networks	5
1.3 Continuous Time Markov Processes	6
1.3.1 Conditional Markov Processes	7
Conditional Intensity Matrix	8
2 Continuos Time Bayesian Networks	9
2.1 Introduzione	9
2.2 Campionamento	10
2.2.1 Interpretazione dello pseudo-codice	12
3 PyCTBN	15
3.1 Tecnologie e Linguaggi utilizzati	15
3.1.1 Python	15
3.1.2 Versioning	16
3.2 Formato dei dati	16
3.3 Package	20
3.4 Diagramma delle Classi	21
3.5 Implementazioni	23
3.5.1 TrajectoryGenerator	23
Multiprocessing	28
3.5.2 NetworkGenerator	30
3.5.3 AbstractExporter	33

3.6	Diagramma di Sequenza	35
3.7	Analisi delle Prestazioni	35
3.7.1	Parametri considerati	36
3.7.2	TrajectoryGenerator	37
	Tempi	37
	Memoria	38
	Multiprocessing	39
3.7.3	NetworkGenerator	41
	Tempi	41
	Memoria	42
	Conclusioni	43
	Bibliografia	45

Elenco delle figure

3.1	Network Graph	17
3.2	Packages	20
3.3	Diagramma di Dominio	22
3.4	Classe TrajectoryGenerator	24
3.5	Diagramma di Attività - multi_trajectory	30
3.6	Classe NetworkGenerator	31
3.7	Classe AbstractExporter - JSONExporter	33
3.8	Diagramma di Sequenza	35
3.9	Tempi di esecuzione - TrajectoryGenerator	37
3.10	Utilizzo della memoria - TrajectoryGenerator	39
3.11	Tempi di esecuzione - Sequenziale vs Parallelo	40
3.12	Tempi di esecuzione - NetworkGenerator	41
3.13	Utilizzo della memoria - NetworkGenerator	42

Introduzione

Le Reti Bayesiane a Tempo Continuo (CTBN) sono un modello grafico probabilistico nato per rappresentare in modo efficiente sistemi dinamici, in evoluzione, sfruttando i concetti fondanti di altri modelli quali le Reti Bayesiane (BN) e i Processi Markoviani a Tempo Continuo (CTMP).

I numerosi domini il cui stato progredisce al trascorrere del tempo (considerato come una quantità continua) costituiscono la naturale applicazione delle CTBN, che permettono di modellarne l'evoluzione nel tempo. Un possibile esempio si colloca nel contesto dei mercati finanziari, in cui la quotazione di uno stock varia nel tempo e il cui trend è condizionato da diversi fattori, quali l'andamento di altri titoli correlati piuttosto che avvenimenti di carattere politico, sociale o commerciale.

Il percorso di stage è stato quindi dedicato all'implementazione di nuove funzionalità all'interno della libreria software *PyCTBN*, sviluppata dal *MAD Lab* (*Models and Algorithms for Data and Text Mining*) allo scopo di mettere a disposizione uno strumento completo ed efficiente per utilizzare il framework delle reti Bayesiane a tempo continuo. In particolare, i nuovi moduli sviluppati vertono sulla generazione randomica di reti e sul processo di campionamento di traiettorie, integrando inoltre utility per l'esportazione su file dei dati prodotti. Questa tesi prevede un capitolo introduttivo (Capitolo 1), strutturato in modo da fornire le definizioni fondamentali ed esporre le notazioni di cui si fa uso nei capitoli seguenti, presentando poi i modelli da cui derivano le CTBN. Vengono successivamente illustrate le reti a tempo continuo (Capitolo 2), partendo dalla definizione formale fino ad arrivare ad una dettagliata trattazione che spiega dal punto di vista teorico i concetti e le procedure su cui si basa il lavoro svolto. Infine, l'ultimo capitolo (Capitolo 3) ha lo scopo di documentare la libreria *PyCTBN*, dedicando ovviamente particolare attenzione alle nuove classi sviluppate, e di discuterne i risultati in termini di efficienza rispetto a velocità di esecuzione e utilizzo della memoria.

Capitolo 1

Concetti Preliminari

Questo capitolo ha lo scopo di introdurre le nozioni fondamentali su cui si basano le Continuous Time Bayesian Networks (CTBN).

1.1 Definizioni e Notazione

Vengono inizialmente fornite le definizioni essenziali e presentate le notazioni convenzionalmente adottate ed utilizzate nel corso dei capitoli successivi.

Variabile di Processo [1] Una variabile di processo può essere considerata come una collezione di variabili aleatorie indicizzate rispetto al tempo continuo e viene indicata con lettere maiuscole. e.g. E , X_i .

Di conseguenza ci si riferisce alle normali variabili aleatorie con un indice temporale, e.g. $X_i(t)$, E_t

Valori delle Variabili Il valore assunto da una variabile è indicato dalla relativa lettera minuscola, e.g. $Z = z$, oppure z_1, z_2, \dots, z_n per riferirsi a valori diversi.

L'insieme delle possibili istanze di una variabile Z è denotato da $Val(Z)$, e il numero delle istanze (ovvero la cardinalità dell'insieme) si indica con $Card(Z)$.

Insiemi di Variabili Insiemi di variabili sono denotati da lettere maiuscole e in grassetto (e.g. \mathbf{E} , \mathbf{V}) e i relativi valori con le corrispondenti lettere minuscole (e.g. \mathbf{e} , \mathbf{v}).

Distribuzione di Probabilità La distribuzione di probabilità associata ai valori di una variabile aleatoria $X(t)$ è denotata equivalentemente da $P(X(t))$ o da $P_x(t)$. Nel caso della distribuzione iniziale, ovvero quando $t = 0$, si usa scrivere P_x^0 .

La distribuzione di probabilità condizionata di $X(t)$ dato $X(s)$ è denotata da $P(X(t) | X(s))$

Genitori Dato un grafo \mathcal{G} , si indica con $\mathbf{Pa}_{\mathcal{G}}(X_i)$ l'insieme dei nodi genitori della variabile X_i .

Similmente, l'insieme dei nodi figli di X_i è rappresentato da $\mathbf{Cd}_{\mathcal{G}}(X_i)$.

Densità di un Grafo [2] Dato un grafo orientato $\mathcal{G} = (V, E)$, dove V sono i nodi ed E gli archi, la densità d è definita come il rapporto tra il numero di archi effettivi ($|E|$) e il numero massimo di archi che \mathcal{G} avrebbe se fosse un grafo completo. Formalmente:

$$d = \frac{|E|}{|V|(|V| - 1)} \quad (1.1)$$

1.2 Bayesian Networks

Il concetto principale su cui si basano le **Reti Bayesiane (BN)** è l'indipendenza condizionale, definita come segue.

Definizione 1.2.1 (Indipendenza Condizionale). [3] *Due variabili aleatorie B_1 e B_2 si dicono condizionalmente indipendenti, dato un insieme di variabili aleatorie \mathbf{C} , se e solo se*

$$P(B_1 | \mathbf{C}, B_2) = P(B_1 | \mathbf{C}) \quad (1.2)$$

Intuitivamente ciò significa che, per ogni possibile valore delle variabili \mathbf{C} , B_1 e B_2 non hanno influenza l'una sull'altra, o analogamente che la loro influenza è mediata dalle variabili in \mathbf{C} .

È ragionevole pensare che la maggior parte delle variabili in una certa rete non abbia un'influenza diretta su gran parte delle altre, ma piuttosto che ciascuna variabile sia direttamente condizionata da un sottoinsieme limitato delle altre variabili.

È a questo punto possibile definire formalmente una rete Bayesiana.

Definizione 1.2.2 (Bayesian Network). [4] *Una Rete Bayesiana \mathcal{B} , definita su un insieme di variabili aleatorie \mathbf{B} , è costituita da:*

- Un grafo diretto aciclico (DAG) \mathcal{G} in cui ciascun nodo è associato ad una variabile $B_i \in \mathcal{B}$
- Per ciascuna variabile B_i , una distribuzione di probabilità condizionata (CPD) $P(B_i \mid \mathbf{Pa}_{\mathcal{G}}(B_i))$ che formalizza la dipendenza diretta di B_i dall'insieme dei suoi genitori.

Una rete Bayesiana rappresenta quindi una distribuzione congiunta di probabilità, che sfruttando la *Chain Rule* può essere espressa come prodotto di fattori:

$$P(B_1, B_2, \dots, B_n) = \prod_{i=1}^n P(B_i \mid \mathbf{Pa}_{\mathcal{G}}(B_i)) \quad (1.3)$$

Il grafo \mathcal{G} associato alla rete incorpora anche informazioni riguardanti l'indipendenza condizionale tra le variabili, in particolare il fatto che una variabile $B_i \in \mathcal{B}$ è indipendente dalle variabili che non sono sue discendenti, dato $\mathbf{Pa}_{\mathcal{G}}(B_i)$

1.2.1 Dynamic Bayesian Networks

Le **Reti Bayesiane Dinamiche (DBN)** sono uno strumento che permette di modellare processi stocastici a **tempo discreto** (o *time sliced*). Lo stato della rete a ciascun istante di tempo, quindi, è descritto da un insieme di variabili aleatorie \mathcal{D} . Indicizzando gli insiemi di variabili rispetto al tempo, si ottiene che l'intera collezione di variabili è perciò costituita dall'insieme $\{\mathcal{D}_0, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n\}$, dove ciascun elemento \mathcal{D}_i denota l'insieme delle variabili della rete all'istante i . Formalmente, una rete Bayesiana dinamica è definita come segue.

Definizione 1.2.3 (Dynamic Bayesian Network). [1] Una rete Bayesiana dinamica è una coppia $\langle \mathcal{B}_0, \mathcal{B}_{2T} \rangle$, dove \mathcal{B}_0 è la rete Bayesiana basata sulle variabili in \mathcal{D}_0 , e \mathcal{B}_{2T} (chiamato **2TBN**, 2 Time Slice Bayesian Network) fornisce un modello di transizione dall'istante i all'istante $i+1$.

In particolare, \mathcal{B}_{2T} consiste in una rete Bayesiana costituita dalle variabili in \mathcal{D}_{i+1} condizionate dalle variabili in \mathcal{D}_i .

Gli archi di questa rete vengono classificati in due categorie:

- **Intra-time-slice:** sono consentiti solo tra variabili appartenenti allo stesso istante temporale, e.g. (X, Y) per $X, Y \in \mathcal{D}_i$
- **Inter-time-slice:** connettono una variabile nel contesto di un istante temporale ad una dell'istante successivo (eventualmente anche la stessa), e.g. $(X \in \mathcal{D}_i, X \in \mathcal{D}_{i+1})$

1.3 Continuous Time Markov Processes

Un ulteriore elemento necessario per poter introdurre le reti Bayesiane a tempo continuo consiste nei processi Markoviani a tempo continuo (**Continuous Time Markov Processes**), che derivano dall'aggiunta di un'assunzione (assunzione di Markov) ai processi stocastici a tempo continuo.

Definizione 1.3.1 (Processo stocastico a tempo continuo). [5] *Si definisce processo stocastico (o aleatorio) a tempo continuo una collezione di variabili aleatorie indicizzate rispetto al tempo $t \in [0, \infty)$. Si consideri la variabile X in relazione a tutti i valori di t come un'unica variabile (**Process Variable**).*

Definiamo quindi l'assunzione di Markov, da applicare al concetto di processo stocastico a tempo continuo.

Assunzione 1 (Assunzione di Markov). [6] *Si assume che, in un processo stocastico, il valore futuro sia indipendente da quello passato, dato il valore presente.*

Formalmente, un processo X soddisfa l'assunzione di Markov se e solo se

$$P(X_{t+\Delta t} \mid X_t, X_s) = P(X_{t+\Delta t} \mid X_t) \quad (1.4)$$

$$\forall s, t \mid s < t < \infty$$

In altre parole, l'assunzione di Markov implica che la transizione verso un nuovo stato dipenda esclusivamente dallo stato immediatamente precedente, e non da come si è giunti ad esso, garantendo quindi la cosiddetta *memoryless property*.

Definizione 1.3.2 (Processo Omogeneo). [7] *Un processo Markoviano si dice omogeneo se la probabilità di transizione $P(X_{t+1} = b \mid X_t = a)$ non dipende dall'istante temporale t ma esclusivamente dagli stati a e b .*

In un processo di Markov omogeneo, quindi, la probabilità di transizione dallo stato a allo stato b è costante nel tempo.

È ora possibile fornire la definizione di **traiettoria**, elemento centrale nel contesto di questa tesi, che verrà ripreso dettagliatamente nel seguito.

Definizione 1.3.3 (Traiettorie). *Una specifica istanza dei valori di una variabile X_t , per ogni t , prende il nome di traiettoria.*

Rappresentazione del processo Markoviano Un processo di questo tipo è generalmente definito da una *distribuzione iniziale* e da una **matrice di intensità di transizione**, concetto che sarà fondamentale anche nell'ambito delle CTBN.

È previsto che gli elementi della matrice che si trovano sulla diagonale principale abbiano valore negativo, mentre gli altri devono essere non negativi. Le matrici devono inoltre soddisfare il vincolo tale per cui la somma degli elementi di ciascuna riga sia pari a zero.

Un esempio di matrice è quindi il seguente:

$$Q_X = \begin{bmatrix} -q_1 & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & -q_2 & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & -q_n \end{bmatrix}$$

$$\text{dove } q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}, \text{ con } q_{ij} \geq 0 \forall i, j \in [1, n]$$

L'interpretazione della matrice è che i valori q_i , ovvero quelli che si trovano sulla diagonale, forniscono la probabilità istantanea di lasciare lo stato x_i , mentre il generico elemento in posizione (i, j) indica la probabilità istantanea di effettuare una transizione dallo stato i allo stato j .

Si parla di probabilità istantanea, e non di probabilità in senso assoluto, in quanto i valori che costituiscono una riga non sommano ad uno. È però possibile assimilare un coefficiente al concetto tradizionale di probabilità effettuando una normalizzazione rispetto alla riga a cui esso appartiene. Per considerare un coefficiente q_{ij} come probabilità p_{ij} , quindi, si procede come segue:

$$p_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_{k \in \{1 \dots n\} \setminus i} q_{ik}} \quad (1.5)$$

Complessivamente, pertanto, la matrice descrive il comportamento istantaneo del processo X rispetto allo stato in cui si trova nell'istante corrente.

1.3.1 Conditional Markov Processes

Un successivo passo verso la definizione delle CTBN è consentito dal concetto di **processo Markoviano condizionato** (Conditional Markov Process) [1], che è un modello di processo Markoviano *non omogeneo* in cui le intensità di transizione variano con il variare del tempo t , ma non in funzione di t .

Le intensità di transizione di una variabile all'istante t dipendono invece dal

valore che altre variabili assumono all'istante t , con queste ultime che a loro volta evolvono come processi Markoviani.

Conditional Intensity Matrix

Sia X una variabile con dominio $Val(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e sia $\mathbf{P} = \mathbf{Pa}(X)$. X evolve nel tempo come processo Markoviano le cui variazioni sono condizionate dallo stato delle variabili in \mathbf{P} , che a loro volta evolvono al variare del tempo.

La necessità di esprimere questa dipendenza introduce il concetto di Conditional Intensity Matrix (**CIM**), sulla base delle matrici di intensità già mostrate. Una CIM, infatti, è sostanzialmente composta da un insieme di matrici di intensità, una per ciascuna istanza \mathbf{p} delle variabili \mathbf{P} .

Nel caso limite in cui X non ha genitori, la sua CIM corrisponde esattamente ad una semplice matrice di intensità.

Una notazione che evidenzia la variazione dei parametri della matrice in funzione dei valori di \mathbf{p} è la seguente (in cui chiaramente valgono gli stessi vincoli sui valori della diagonale):

$$Q_{X|P} = \begin{bmatrix} -q_1(P) & q_{12}(P) & \dots & q_{1n}(P) \\ q_{21}(P) & -q_2(P) & \dots & q_{2n}(P) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1}(P) & q_{n2}(P) & \dots & -q_n(P) \end{bmatrix}$$

Una *CIM* è sempre di forma quadrata, e in particolare di dimensione pari al numero di stati che la variabile X a cui essa è associata può assumere, ovvero la sua cardinalità $Card(X)$.

Capitolo 2

Continuous Time Bayesian Networks

2.1 Introduzione

In questo capitolo viene presentato il modello delle **Continuous Time Bayesian Networks (CTBN)** e la sua semantica.

Questo modello è costruito sulla base dei concetti esposti in relazione ai *Processi Markoviani a Tempo Continuo*, riprendendo inoltre la definizione delle *Bayesian Networks* per sfruttarne la rappresentazione compatta.

Nonostante anche le *Dynamic Bayesian Networks* consentano di modellare una rete che progredisce nel tempo, tracciandone lo stato ad istanti successivi, esse non rappresentano esplicitamente il concetto del tempo. Nelle *DBN*, infatti, le variabili sono indicizzate stabilendo un ordinamento, ma non è presente alcun riferimento all'istante temporale effettivo a cui esse appartengono. Conseguentemente, tale prerogativa fa sì che nelle reti dinamiche il tempo venga regolarmente suddiviso in intervalli di ampiezza costante, comportando limitazioni significative all'efficacia e all'applicabilità di tale modello, precludendo ad esempio la possibilità che i diversi processi evolvano con granularità temporali differenti, oppure che le osservazioni avvengano ad intervalli irregolari. L'elusione di queste limitazioni richiederebbe di rappresentare l'intero sistema con la più piccola granularità possibile, implicando quindi di includere anche istanti temporali intermedi in cui non è occorsa nessuna osservazione.

Le CTBN consentono perciò di superare tali limiti, basandosi sui processi Markoviani ma mantenendo le idee fondanti delle *DBN*.

Definizione 2.1.1 (Continuous Time Bayesian Networks). [8] Sia \mathbf{X} un insieme di variabili X_1, X_2, \dots, X_n , dove ciascuna variabile rappresenta un processo Markoviano a tempo continuo.

Una Continuous Time Bayesian Network \mathcal{N} su \mathbf{X} è definita da:

- Una distribuzione iniziale \mathcal{B}_0 , rappresentata come rete Bayesiana
- Un modello di transizione, costituito da:
 - Un grafo \mathcal{G} sulle variabili in \mathbf{X}
 - Una Conditional Intensity Matrix $Q_{X|Pa(X)}$ per ciascuna variabile in \mathbf{X}

Come già anticipato in precedenza nel contesto dei *Conditional Markov Processes*, la presenza di un arco da X ad Y rappresenta la dipendenza delle intensità di transizione di Y dai valori assunti da X .

È importante sottolineare come nelle CTBN, a differenza delle reti Bayesiane classiche, non sia necessario imporre che il grafo sia aciclico. Infatti, anche se esiste un arco (X, Y) che denota l'influenza di Y nell'evoluzione di X , è concettualmente ammissibile che la transizione di Y possa dipendere a sua volta da X , implicando l'esistenza di un arco (Y, X) .

2.2 Campionamento

Il modello delle CTBN prevede un'assunzione fondamentale, la quale impone che una ed una sola variabile possa effettuare una transizione verso un nuovo stato in uno specifico istante temporale. Questo vincolo ha un'importante implicazione dal punto di vista semantico, dal momento che può essere visto come la formalizzazione del fatto che ciascuna variabile riflette un aspetto della realtà atomico e distinto rispetto alle altre variabili. Non sarebbe quindi né significativo, né realistico, usare le CTBN per modellare un dominio in cui più variabili possono cambiare stato nello stesso istante.

Dopo aver introdotto tutte le definizioni e i concetti teorici necessari, viene ora mostrata, in forma di pseudo-codice, la procedura che costituisce il cuore del lavoro svolto durante lo stage, e conseguentemente di questa tesi, che ha lo

scopo di simulare l'evoluzione dello stato delle variabili della rete, campionando casualmente una *traiettoria*.

```

1 Procedure CTBN_Sample( $t_{end}$ ):
2    $t \leftarrow 0, \sigma \leftarrow \emptyset$ 
3
4   foreach  $X \in \mathbf{X}$  do
5     | Scegli  $x(0)$  dato  $\theta_X^B \mid \mathbf{Pa}_B(X)$ 
6   end
7
8   while true do
9     foreach  $X \in \mathbf{X}$  do
10      | if  $\text{Time}(X)$  is undefined then
11        | |  $\Delta t \leftarrow \text{random\_exponential}(q_{x(t)} \mid u_x(t))$ 
12        | |  $\text{Time}(X) \leftarrow t + \Delta t$ 
13      end
14
15       $X_{tr} \leftarrow \arg \min_{Y \in \mathbf{X}} [\text{Time}(Y)]$ 
16       $t \leftarrow \text{Time}(X_{tr})$ 
17
18      if  $t \geq t_{end}$  then
19        | return  $\sigma$ 
20      else
21        |  $x_{tr}(t) \leftarrow \text{random\_multinomial}(\theta_{x(t)} \mid u_x(t))$ 
22        | Aggiungi  $\langle t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_{tr}(t), \dots, x_n(t) \rangle$  a  $\sigma$ 
23      end
24
25      foreach  $Y \in \{\mathbf{Pa}(X_{tr}) \cup X_{tr}\}$  do
26        |  $Y(t) \leftarrow \text{undefined}$ 
27      end
28    end

```

Algoritmo 1: Procedura CTBN_Sample

Il metodo *CTBN_Sample*, quindi, restituisce come risultato una traiettoria che parte dall'istante $t_0 = 0$ e tale per cui l'istante temporale associato all'ultima occorrenza che è stata campionata è minore o uguale al parametro t_{end} specificato.

2.2.1 Interpretazione dello pseudo-codice

Questa sezione si occupa di analizzare e spiegare le istruzioni dell'Algoritmo 1. La procedura si occupa, in fase di inizializzazione nelle righe da 2 a 6, di assegnare il valore 0 alla variabile t , che rappresenta l'istante temporale corrente, e di definire la traiettoria σ come insieme vuoto \emptyset .

Si è deciso di rappresentare la traiettoria come un insieme, quindi senza un ordinamento, in quanto ciascun elemento appartenente ad esso include l'informazione temporale corrispondente. Una rappresentazione equivalentemente consisterebbe in una sequenza ordinata di n-uple.

A riga 5 si valorizzano le variabili all'istante $t = 0$, infatti $\theta_X^{\mathcal{B}} | \mathbf{Pa}_{\mathcal{B}}(X)$ indica la distribuzione di probabilità iniziale della variabile X dati i suoi genitori.

La parte più significativa della procedura, ovvero il campionamento vero e proprio della traiettoria, è data dalla ripetizione del blocco di istruzioni definite nel corpo del ciclo *while* che inizia a riga 8.

Premesso che con $Time(X)$ ci si riferisce all'istante temporale in cui X effettuerà la prossima transizione di stato, la prima operazione che viene svolta all'inizio di ciascuna iterazione ha lo scopo di determinare $Time(X)$ per ogni variabile X tale per cui esso non sia già definito. Come verrà spiegato successivamente, l'insieme delle variabili il cui tempo di transizione è indefinito è costituito dalla variabile che ha cambiato stato all'iterazione immediatamente precedente a quella corrente, unitamente alle variabili che dipendono da essa (in altre parole le sue figlie).

Per calcolare $Time(X)$ si somma al tempo corrente t un valore Δt estratto in modo casuale da una distribuzione esponenziale di parametro $q_{x(t)} | u_{x(t)}$. La distribuzione esponenziale si addice a questo scopo (e in generale ai domini in cui si rappresenta il tempo rimanente prima che si verifichi un evento) in quanto gode della proprietà di *assenza di memoria*, che stabilisce che il tempo trascorso non influisce sulla probabilità che l'evento si verifichi. Tale proprietà viene formalizzata come segue:

$$P(X > m + n | X > m) = P(X > n) \quad (2.1)$$

Questo parametro consiste chiaramente nel coefficiente della CIM che si trova alla riga associata allo stato attuale della variabile, in corrispondenza della diagonale. Come spiegato nella trattazione sulle CIM, l'interpretazione di questo coefficiente è riconducibile alla probabilità di lasciare lo stato corrente.

Acclarato che $Time(X)$ risulta ora definito per ogni nodo appartenente alla rete, si procede ad identificare la variabile che verrà coinvolta per prima in un cambio di stato, ovvero quella caratterizzata dal minor tempo di transizione

associato. Ciò è formalizzato attraverso l'espressione a riga 15, denotando con X_{tr} la variabile identificata per la transizione.

Si simula quindi un avanzamento nel tempo, un'evoluzione, aggiornando l'istante temporale corrente all'istante in cui avviene la transizione della variabile prescelta. A questo punto, se questa progressione implicasse il raggiungimento o eventualmente il superamento del tempo massimo t_{end} , la procedura terminerebbe ritornando la traiettoria generata fino a quel momento. Il raggiungimento del tempo massimo stabilito costituisce quindi la condizione di uscita del loop di generazione della traiettoria.

Se invece questa condizione non è verificata, si procede all'effettivo cambio di stato della variabile identificata in precedenza. Nel caso generale di variabili con cardinalità n , il nuovo valore viene determinato casualmente estraendolo da una multinomiale con parametri $\theta_{x(t) | u_x(t)}$. La distribuzione multinomiale consiste in una generalizzazione della distribuzione binomiale, in cui le variabili possono assumere solo i valori 0 e 1, al caso in cui ciascuna variabile può assumere k diversi valori. I coefficienti $\theta_{x(t) | u_x(t)}$ utilizzati per la multinomiale sono interpretabili come l'insieme di probabilità che la variabile X effettui una transizione verso ciascuno dei possibili stati, dato l'insieme delle istanze dei genitori $u_x(t)$. Da un punto di vista pratico, questi coefficienti costituiscono la riga della *CIM* corrispondente all'attuale valore della variabile, previa normalizzazione (in modo che la somma dei coefficienti che la compongono sia 1).

Poiché la variabile che compie la transizione non può mantenere lo stato corrente, è necessario avere cura di azzerare la probabilità che lo stato estratto corrisponda a quello attuale (ovvero il valore proveniente dal coefficiente che si trova sulla diagonale).

Questo accorgimento, unitamente all'identificazione di una sola variabile per ciascuna iterazione, è necessario per soddisfare il vincolo precedentemente introdotto in relazione al fatto che esattamente una variabile cambi stato in un dato istante.

È possibile asserire che nel caso particolare di variabili binarie, ossia con cardinalità 2, la transizione è implementabile semplicemente negando lo stato corrente tramite la formula

$$x_{tr}(t) = 1 - x_{tr}(t - 1) \quad (2.2)$$

Una volta realizzata la transizione effettiva di X_{tr} , si ottiene una nuova istanza che viene aggiunta alla traiettoria, interpretabile come una descrizione dello stato di \mathbf{X} , ovvero di tutte le variabili appartenenti alla rete, all'istante temporale corrente t . Questa rappresentazione viene implementata come una

sequenza ordinata in cui si pone in prima posizione l'istante temporale a cui si riferisce la situazione descritta, seguito dallo stato attuale di tutte le n variabili della rete (riga 22).

Il *foreach* finale a riga 25 si occupa di reimpostare ad *undefined* il tempo di transizione della variabile X_{tr} che ha appena cambiato stato nell'iterazione corrente, e di tutte le variabili che hanno un arco entrante che parte da essa, quindi dipendenti. Ciò permette di fare in modo che alla successiva iterazione venga determinato un nuovo istante temporale per la transizione di queste variabili, come illustrato in precedenza.

L'implementazione effettiva integrata nella libreria *PyCTBN* è stata arricchita di alcune estensioni e funzionalità, che verranno descritte nella sezione dedicata, la quale si occupa inoltre di mostrare in termini attuativi quanto introdotto con lo pseudo-codice.

Capitolo 3

PyCTBN

La libreria **PyCTBN** è stata sviluppata allo scopo di fornire uno strumento completo, estensibile e soprattutto efficiente per operare agevolmente con il modello delle *Continuous Time Bayesian Networks*. La libreria implementa le funzionalità relative all'importazione dei dati, all'apprendimento delle strutture e dei parametri.

Nel contesto dell'attività di stage sono stati sviluppati classi e metodi volti ad integrare nel framework già esistente funzionalità quali il campionamento di traiettorie e la generazione casuale della struttura di una rete e delle relative *CIM*.

Questo capitolo ha lo scopo di fornire preliminarmente un'introduzione generale a PyCTBN, alla sua struttura e alle scelte implementative adottate, fornendo poi una descrizione approfondita delle nuove funzionalità introdotte.

3.1 Tecnologie e Linguaggi utilizzati

3.1.1 Python

PyCTBN è stata realizzata in **Python 3**, linguaggio utilizzabile con licenza *Open Source*, che è stato inizialmente introdotto all'inizio degli anni 90 e largamente diffuso oggi nell'ambito di applicazioni scientifiche, dell'intelligenza artificiale e della data science.

Tra i vantaggi che ne hanno permesso la diffusione, i più significativi sono la presenza di una fiorente community di sviluppatori, che implica la disponibilità di una vastissima collezione di librerie e package, e la compattezza della sintassi. Inoltre, Python viene considerato multi-paradigma, in quanto permette l'ado-

zione sia della programmazione procedurale che della *Object Oriented Programming*.

Si tratta però di un linguaggio interpretato, caratteristica da cui deriva il principale svantaggio di Python, vale a dire una riduzione delle prestazioni in termini di velocità se raffrontate con quelle conseguibili con linguaggi compilati quali *C* e *C++*.

Le librerie su cui è stato basato lo sviluppo delle nuove funzionalità sono:

- **Pandas**: libreria che offre strumenti per l'analisi e la manipolazione di dati, come ad esempio la possibilità di utilizzare **DataFrame**. [9]
- **NumPy**: libreria che implementa funzioni per il calcolo scientifico e la gestione di array di grandi dimensioni. È sviluppata in C e Python, motivo per il quale consente di raggiungere prestazioni nettamente superiori a quelle ipotizzabili con le tradizionali liste. [10]

3.1.2 Versioning

Per il controllo della versione del progetto si è scelto di utilizzare **Git**, facendo riferimento alla seguente repository remota su **GitHub**:

<https://github.com/pietroepis/PyCTBN>

È stata inizialmente creata una *fork* del progetto originale ¹, aggiungendo poi un branch *trajectory-generation*.

3.2 Formato dei dati

Per la rappresentazione e il salvataggio delle informazioni relative alle *CTBN*, è stato sfruttato il formato **JSON** (JavaScript Object Notation), definendo convenzionalmente una struttura che renda agevoli le operazioni di importazione ed esportazione.

Per quanto riguarda la struttura del dataset, nell'implementazione attuale di PyCTBN si è deciso di mantenere lo stesso standard previsto dalla libreria **CTBN-RLE** [11], fruibile tramite il linguaggio *R*. La natura estensibile di PyCTBN, tuttavia, permette di adattare agevolmente a formati alternativi le procedure di input/output, senza influire sulla *business logic*.

¹<https://github.com/madlabunimib/PyCTBN>

Le informazioni di interesse necessarie per costituire una descrizione completa della rete sono:

- Variabili: sono caratterizzate da una *label* (il nome della variabile) e dalla cardinalità (chiave *variables* dell'oggetto JSON)
- Struttura della rete: consiste nell'elenco degli archi che collegano la variabili della rete (chiave *dyn.str*)
- Conditional Intensity Matrices: ciascuna variabile possiede tante *CIM* quante sono le combinazioni ottenibili dagli stati che possono assumere i suoi nodi genitore (chiave *dyn.cims*)
- Traiettorie: elenco di *zero o più* traiettorie generate sulla rete descritta (chiave *samples*)

Viene ora fornito un esempio di rappresentazione di una *CTBN* nel formato JSON adottato.

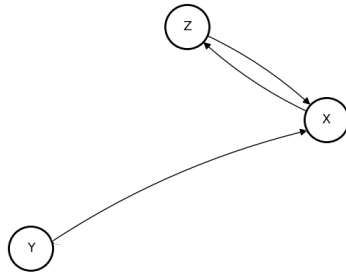


Figura 3.1: Network Graph

Esempio 3.2.1 (Rappresentazione di una *CTBN*). *Si supponga di voler memorizzare in formato JSON le informazioni relative alla rete basata sul grafo mostrato in Figura 3.1, costituita quindi dalle variabili X, Y e Z, tutte con cardinalità 3 (possono assumere i valori 0, 1 e 2).*

La struttura corrispondente è la seguente:

```

{
  "variables": [
    {"Name": "X", "Value": 3},
    {"Name": "Y", "Value": 3},
    {"Name": "Z", "Value": 3}
  ]
}
```

```

],
"dyn.str": [
  {"From": "X", "To": "Z"},
  {"From": "Y", "To": "X"},
  {"From": "Z", "To": "X"}
],
"dyn.cims": {
  "X": {
    "Y=0,Z=0": [
      {"0": -2.5226, "1": 2.495, "2": 0.0276},
      {"0": 1.822, "1": -2.8677, "2": 1.0458},
      {"0": 0.1172, "1": 2.4934, "2": -2.6106}
    ],
    "Y=1,Z=0": [
      {"0": -2.6396, "1": 1.0499, "2": 1.5898},
      {"0": 0.8389, "1": -1.3058, "2": 0.4669},
      {"0": 1.1103, "1": 0.4139, "2": -1.5243}
    ],
    ...
    "Y=2,Z=2": [
      {"0": -1.3253, "1": 1.315, "2": 0.0103},
      {"0": 0.8795, "1": -1.7377, "2": 0.8582},
      {"0": 0.4281, "1": 1.7831, "2": -2.2112}
    ]
  },
  "Y": {...},
  "Z": {...}
},
"samples": [
  [
    {"Time": 0, "X": 0, "Y": 0, "Z": 0},
    {"Time": 0.5237, "X": 0, "Y": 1, "Z": 0},
    {"Time": 0.5962, "X": 0, "Y": 0, "Z": 0},
    ...
    {"Time": 1508.1999, "X": -1, "Y": -1, "Z": -1}
  ]
}

```


La struttura mostrata nell'esempio è piuttosto autoesplicativa, ma occorre aggiungere alcune precisazioni per completezza. L'oggetto indicizzato da *dyn.cims* include a sua volta una chiave per ciascuna variabile, per contenere le CIM relative ad essa. Ricordando che la variabile X ha due archi entranti, provenienti dalle variabili Y e Z , si può notare come le CIM relative ad X siano state espresse in funzione degli stati dei nodi genitore, enumerando tutte le possibili combinazioni.

Nell'esempio sono state incluse per brevità le informazioni concernenti le CIM della sola variabile X (la più significativa, avendo due archi entranti), tuttavia è importante sottolineare che l'oggetto relativo alla variabile Y conterrebbe una sola matrice, poiché dal momento che tale variabile non possiede nessun arco entrante i suoi valori non dipendono da nessun nodo genitore.

L'interpretazione dell'array con cui viene rappresentata una CIM, prevede che l'*i-esimo* elemento dell'array si riferisca allo stato $x = i$ della variabile (considerando un indicizzazione *0-based*). Le chiavi di questo oggetto indicano poi lo stato verso cui avviene la transizione, consentendo di ottenere il coefficiente associato.

Esemplificando, il coefficiente relativo alla probabilità che la variabile X , nel caso in cui $Y = 0$ e $Z = 0$, effettui una transizione dallo stato 1 allo stato 2 è quindi 1.0458.

Per quanto riguarda le traiettorie contenute in *samples*, che come detto possono essere molteplici, l'unica puntualizzazione necessaria è volta ad enunciare la convenzione tale per cui ciascuna traiettoria deve terminare con un'osservazione fittizia in cui tutte le variabili hanno valore -1.

Lo standard adottato prevede che un file possa contenere la descrizione di più reti distinte, quindi il dataset in formato *json* si presenta come un array di oggetti del formato mostrato nell'Esempio 3.2.1.

3.3 Package

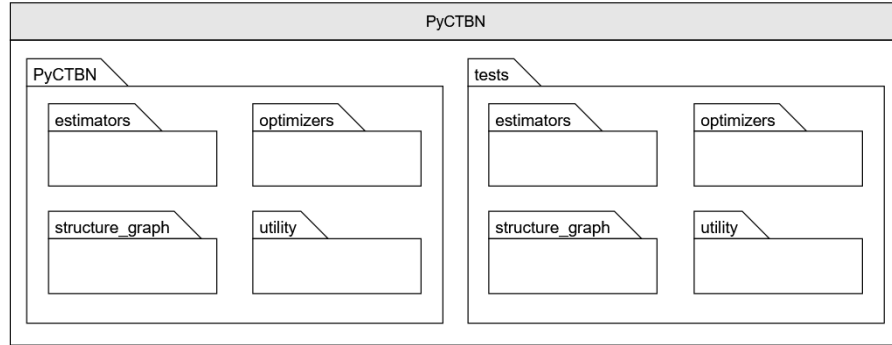


Figura 3.2: Packages

La libreria PyCTBN è stata sviluppata basandosi sul paradigma *OOP*, progettando un'adeguata organizzazione gerarchica delle classi, suddivise in **packages**. Analizzando la struttura delle directory che compongono il progetto partendo dal livello più alto, la radice, viene effettuata una prima suddivisione in due package principali: *PyCTBN* e *tests*.

Il package *PyCTBN* contiene le classi effettive che implementano la logica applicativa, mentre *tests* raggruppa le classi a cui è demandata la realizzazione di **Unit Test**.

Al secondo livello, nel package *PyCTBN* le classi sono state raggruppate in 4 packages, in base alla funzione che svolgono:

- **structure_graph**: Contiene tutte le classi dedicate alla modellazione della struttura completa di una CTBN in tutti i suoi aspetti. Alcuni esempi sono la classe *NetworkGraph* (basata sulla libreria *NetworkX*), che descrive la struttura del grafo orientato, la classe *ConditionalIntensityMatrix*, che memorizza una singola CIM e quindi la classe *SetOfCims* che si occupa di aggregare tutte le matrici associate ad uno specifico nodo in relazione ai valori dei nodi genitore.

L'attività di stage si è focalizzata soprattutto sull'ampliamento di questo package, con l'introduzione delle classi *TrajectoryGenerator* e *NetworkGenerator*, spiegate nel dettaglio nella sezione dedicata.

- **estimators**: In questa cartella sono raccolte le classi deputate all'apprendimento, ovvero al calcolo della stima dei parametri (realizzato nella classe

ParametersEstimator) e della struttura di una CTBN (la cui implementazione si trova in *StructureEstimator*, e nelle relative specializzazioni *StructureConstraintBasedEstimator* e *StructureScoreBasedEstimator*, in base all'algoritmo utilizzato).

- **optimizers:** Le tecniche di ottimizzazione di cui fanno uso gli stimatori trovano implementazione nelle classi appartenenti al package *optimizers*. Le strategie di ottimizzazione applicate in PyCTBN sono: *HillClimbing* e *TabuSearch* (per l'algoritmo di apprendimento Score-Based), e *ConstraintBasedOptimizer* (per l'algoritmo di apprendimento Constraint-Based). Tutte le classi relative all'ottimizzazione prevedono la realizzazione concreta dei metodi definiti nell'interfaccia *Optimizer*.
- **utility:** Tutte le classi ausiliarie che si occupano di procedure di utilità, quali l'importazione e il pre-processing dei dati (*AbstractImporter*, e la realizzazione *JSONImporter* nel caso di dati in formato JSON) o l'esportazione (*AbstractExporter* e quindi *JSONExporter*).

I test sono stati effettuati tramite il framework **unittest**, disponibile nel *core* di Python. In particolare, a ciascuna classe in *PyCTBN* è associata una corrispondente classe di test nel package *tests*, che è perciò strutturato in modo simmetrico.

3.4 Diagramma delle Classi

Dopo aver presentato la struttura generale della libreria e l'organizzazione delle classi nei package, viene ora mostrato il diagramma delle classi in formato **UML** (Unified Modeling Language).

Le classi il cui sviluppo è stato oggetto dello stage sono state rappresentate in grassetto all'interno del diagramma, allo scopo di metterne in evidenza la collocazione all'interno della libreria e la loro relazione con i componenti già esistenti. Si tratta quindi di **TrajectoryGenerator** e **NetworkGenerator** per quanto riguarda il package *structure_graph*, e delle classi finalizzate all'esportazione delle reti, inserite in *utility* (**AbstractExporter** e la relativa realizzazione **JSONExporter**).

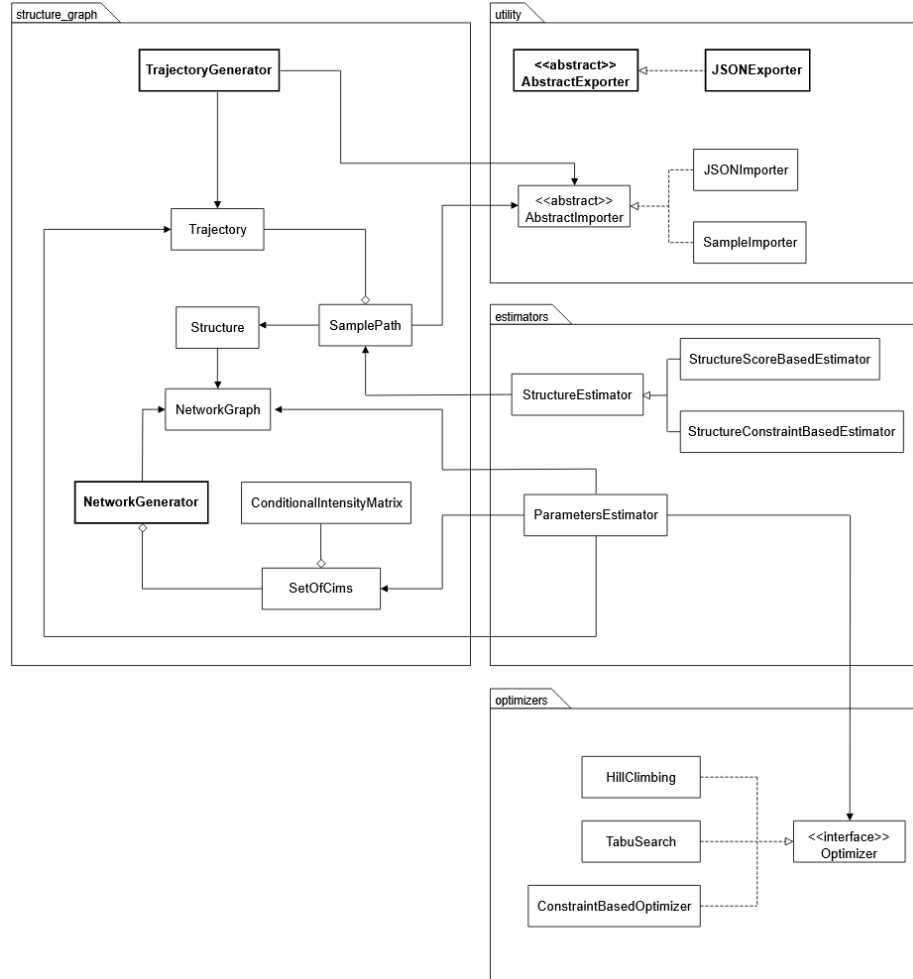


Figura 3.3: Diagramma di Dominio

Il diagramma di dominio qui riportato omette i dettagli delle singole classi, quali attributi e metodi, limitandosi a descrivere le relazioni che intercorrono tra di esse e l'organizzazione generale della libreria. Verrà invece proposta nel seguito una descrizione esaustiva e dettagliata delle nuove classi aggiunte.

3.5 Implementazioni

Naming Al fine di preservare l'uniformità delle convenzioni stilistiche applicate al codice già esistente, per l'implementazione delle nuove classi sono state rispettate le seguenti regole, aderenti alle guidelines sul naming suggerite da Python:

- Notazione *UpperCaseCamelCase* per le classi, e.g. *TrajectoryGenerator*
- Notazione *snake_case* per i metodi, per le variabili e per gli attributi delle classi (in questo caso preceduti da *underscore*), capitalizzando tutte le lettere costitutive di acronimi, e.g. *_network_graph*, *CTBN_Sample()*

Nella firma dei metodi sviluppati sono stati specificati i *tipi* dei parametri richiesti, garantendo maggiore leggibilità e chiarezza. Si è scelto inoltre di prediligere l'utilizzo di named arguments (*keywords*) nell'ambito dell'invocazione di metodi, ottenendo maggiore flessibilità e favorendo la comprensione del significato degli argomenti.

Si è cercato ovviamente di scegliere nomi significativi per variabili e metodi in relazione alla semantica del ruolo che ricoprono, rendendoli il più possibile autoesplicativi.

Vengono ora descritte le implementazioni delle nuove classi introdotte in PyCTBN, vagliando le scelte architetturali adottate, le strutture dati progettate e l'integrazione con le altre funzionalità della libreria.

Questa sezione ha inoltre lo scopo di documentare i metodi, analizzandone i parametri in ingresso e i valori restituiti, riportando anche snippets di codice al fine di mostrarne esempi concreti di utilizzo.

3.5.1 TrajectoryGenerator

È questa la classe che costituisce il fulcro del lavoro svolto e della presente trattazione. **TrajectoryGenerator** include infatti la realizzazione del metodo *CTBN_Sample*, il cui pseudo-codice è stato discusso nel capitolo 2.2.

TrajectoryGenerator
<ul style="list-style-type: none"> - <code>_importer: AbstractImporter</code> - <code>_vnames: List</code> - <code>_parents: Dict</code> - <code>_cims: Dict</code> - <code>_generated_trajectory: pandas.DataFrame</code>
<ul style="list-style-type: none"> + <code>__init__(importer, variables, dyn_str, dyn_cims)</code> + <code>CTBN_Sample(t_end, max_tr): pandas.DataFrame</code> + <code>multi_trajectory(t_ends, max_trs): List</code> - <code>worker(t_end, max_tr, trajectories): void</code>

Figura 3.4: Classe TrajectoryGenerator

Come si può notare dal diagramma di classe riportato in Figura 3.4, il costruttore (metodo `__init__`) accetta 4 parametri, ma l'utilizzo del primo è mutualmente esclusivo rispetto ai successivi. Ciò significa che le informazioni riguardanti la rete su cui generare la traiettoria possono essere estratte dall'*AbstractImporter* al primo parametro se questo è definito, o in alternativa passate singolarmente in corrispondenza di *variables* (le variabili), *dyn_str* (gli archi del grafo) e *dyn_cims* (le CIM).

Poiché il campionamento di una traiettoria impiega intensivamente le informazioni riguardanti la struttura della rete (il grafo) e le CIM, risulta cruciale ai fini della velocità di esecuzione fare in modo che l'accesso a tali dati avvenga nel minor tempo possibile.

Per questo motivo, il costruttore della classe si occupa di eseguire una procedura di *pre-processing* sui parametri in ingresso, al fine di costruire delle strutture dati ottimizzate in relazione alle operazioni che verranno eseguite.

Per chiarire questo concetto, si assuma di voler generare una traiettoria sulla rete rappresentata nella struttura dati dell'Esempio 3.2.1. In questo caso quindi, gli archi fra i nodi sarebbero memorizzati tramite il seguente *pandas.DataFrame*:

	From	To
0	X	Z
1	Y	X
2	Z	X

In questo formato non risulta però immediato ottenere l'elenco dei genitori di un certo nodo, informazione frequentemente necessaria per determinare le dipendenze di una variabile e prelevare di conseguenza i coefficienti dalle CIM. Per tale ragione si è deciso di associare all'attributo `_parents` un **dict** di Python (ovvero una Hashmap), che permette di accedere al valore associato ad una specifica chiave in tempo costante $O(1)$ nel caso generale, strutturato come segue:

```
{
  "X":  ["Y", "Z"],
  "Y":  [],
  "Z":  ["X"]
}
```

Basandosi su considerazioni analoghe vengono valorizzati gli altri attributi della classe. In particolare, `_vnames` si riferisce ad una **list** contenente le labels delle variabili della rete, mentre `_cims` è un **dict** in cui a ciascuna chiave (label della variabile) è associata un'istanza della classe `SetOfCims`, che si occupa di gestire tutte le CIM associate a tale variabile.

CTBN_Sample Questo metodo si occupa della generazione effettiva di una **singola** traiettoria, e riflette fedelmente lo pseudo-codice introdotto in precedenza. Oltre alla condizione standard di terminazione basata sul raggiungimento di un tempo massimo t_{end} , è stato ritenuto opportuno prevedere un'alternativa tale per cui l'evoluzione dello stato della rete, e quindi la creazione della traiettoria, si interrompe quando viene raggiunto un numero n_{tr} di campioni generati. Questa premessa consente di dedurre la semantica dei parametri richiesti dal metodo, ovvero t_{end} e max_{tr} , che determinano quindi rispettivamente il tempo massimo raggiungibile durante il campionamento e il numero di transizioni di interesse. L'implementazione non prevede un utilizzo congiunto dei due argomenti, infatti max_{tr} viene ignorato se t_{end} è diverso da -1 (che è il valore di default per entrambi).

È utile sottolineare come non sia possibile conoscere a priori, prima dell'esecuzione, il numero di campioni di cui sarà composta la traiettoria nel caso in cui venga imposto il tempo massimo come condizione di terminazione. Viceversa, tale valore è ovviamente noto, in quanto viene imposto, se si utilizza la variante che fa uso del numero di transizioni consentite.

Un'ulteriore dissomiglianza rispetto allo pseudo-codice commentato, consiste nel valore iniziale attribuito alle variabili all'istante $t = 0$: è stato infatti ritenuto influente attribuire a tutte le variabili il valore 0 piuttosto che determinarlo

dalla distribuzione iniziale.

Per la generazione casuale dell'intervallo di tempo Δt dopo il quale avverrà la prossima transizione, è stato sfruttato il metodo **random.exponential**, messo a disposizione da *numpy*. A questo metodo deve essere passato un parametro $\beta = \frac{1}{\lambda}$, di tipo *float* e non negativo. L'argomento, come ampiamente discusso, consiste nel valore della CIM che si trova sulla diagonale, alla riga corrispondente allo stato attuale della variabile. Per soddisfare la condizione di non-negatività imposta dal metodo, viene utilizzato l'opposto del coefficiente della CIM, dal momento che quest'ultimo è ovviamente negativo.

Quando viene raggiunto il tempo t in cui avviene la transizione di una variabile X , è necessario determinare il nuovo valore che essa deve assumere. Innanzitutto viene quindi prelevata la CIM da utilizzare in relazione allo stato attuale dei genitori della variabile che effettua la transizione. Questo è facilmente attuato tramite il metodo *filter_cims_with_mask* della classe *SetOfCims* che, presa in ingresso una lista composta dai valori dei genitori, restituisce la matrice corrispondente. Se $X = x$, viene isolata la x -esima riga della CIM stabilita, ovvero quella relativa alle probabilità istantanee di lasciare lo stato x , e si procede come segue:

- Si assegna il valore 0 all' x -esimo elemento della riga in questione
- Si normalizza la riga per fare in modo che la somma dei suoi elementi sia 1

L'array così ottenuto viene perciò utilizzato come argomento del metodo **random.multinomial** (anche in questo caso fornito da *numpy*), allo scopo di estrarre casualmente dalla distribuzione multinomiale il nuovo valore che verrà assegnato ad X .

Per chiarire quanto esposto, si procede con un esempio riguardante l'estrazione dei coefficienti dalla CIM.

Esempio 3.5.1 (Estrazione dei coefficienti dalla CIM). *Sia X una variabile il cui nodo associato non possiede archi entranti, ovvero priva di dipendenze. Si supponga che $X = 1$ all'istante corrente.*

L'unica CIM di X è la matrice riportata di seguito:

$$\begin{bmatrix} -1.9695 & 0.3461 & 1.6234 \\ 0.7465 & -1.3067 & 0.5602 \\ 0.8775 & 1.4581 & -2.3356 \end{bmatrix}$$

Per quanto riguarda l'estrazione casuale di Δt dalla distribuzione esponenziale, il parametro utilizzato sarà $|-1.3067| = 1.3067$, poiché è l'elemento in

posizione (1, 1).

Nell'ambito della transizione, invece, verrà prima estratta la riga associata allo stato 1:

$$\begin{bmatrix} 0.7465 & -1.3067 & 0.5602 \end{bmatrix}$$

Posto a 0 l'elemento diagonale:

$$\begin{bmatrix} 0.7465 & 0 & 0.5602 \end{bmatrix}$$

E infine normalizzata in modo che i suoi valori rappresentino probabilità effettive:

$$\begin{bmatrix} 0.5713 & 0 & 0.4287 \end{bmatrix}$$

Questo array, la cui somma degli elementi è pari ad 1, sarà quindi il parametro di **`numpy.random.multinomial`**.

La traiettoria generata viene memorizzata in un oggetto di tipo **DataFrame** di **pandas**, aggiungendo ad esso una riga ogni volta che avviene una transizione e una variabile cambia stato. Allo scopo di rispettare la convenzione enunciata nel Capitolo 3.2, come ultimo elemento della traiettoria viene aggiunta una riga in cui tutte le variabili hanno valore -1. Questo oggetto rappresenta il valore di ritorno di **CTBN_Sample**. Viene ora mostrato un esempio di esecuzione, includendo una parte della traiettoria generata.

Esempio 3.5.2. Si supponga di voler generare una traiettoria costituita da 1000 osservazioni sulla CTBN basata sul grafo riportato in Figura 3.1, e che la struttura di tale rete sia memorizzata nel file `example.json`.

Il seguente frammento di codice mostra un esempio di utilizzo di **TrajectoryGenerator** per tale scopo.

```
j1 = JsonImporter(
    file_path = "example.json",
    samples_label = "samples",
    structure_label = "dyn.str",
    variables_label = "variables",
    time_key = "Time",
    variables_key = "Name"
)
```

```
j1.import_data(0)

tg = TrajectoryGenerator(importer = j1)
sigma = tg.CTBN_Sample(max_tr = 1000)
```

La traiettoria prodotta, contenuta in sigma, sarà nella seguente forma:

	Time	X	Y	Z
0	0	0	0	0
1	0.0494	2	0	0
2	1.5477	2	1	0
3	1.692	2	1	2
4	1.7851	1	1	2
5	1.9497	2	1	2
6	2.2106	2	2	2
7	2.3166	2	2	1
8	2.3999	2	0	1
9	2.553	2	0	0
10	2.8792	2	0	2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
990	595.85	2	0	1
991	596.89	2	0	0
992	596.943	2	2	0
993	597.96	2	1	0
994	598.155	0	1	0
995	598.696	0	0	0
996	598.856	0	0	2
997	599.426	0	2	2
998	599.58	1	2	2
999	601.761	2	2	2
1000	602.012	-1	-1	-1

Multiprocessing

Nel contesto dell'utilizzo reale della libreria, raramente viene generata una singola traiettoria, ma si usa piuttosto campionarne diverse che vengono poi aggregate. Un primo approccio potrebbe prevedere di generare *sequenzialmente* le traiettorie, iniziandone una solo dopo che la precedente è stata completata. La possibilità di ottimizzazione e velocizzazione di questo metodo, tuttavia, è

suggerita dal fatto che ciascuna traiettoria è completamente indipendente dalle altre, e la sua generazione non dipende dalle traiettorie campionate in precedenza, favorendo quindi un'implementazione basata sull'esecuzione in parallelo. Per realizzare la parallelizzazione della procedura, si è deciso di basarsi sul **multi-processing**, scartando il **multi-threading**, a causa delle problematiche che Python comporta nell'utilizzo dei Thread, legate soprattutto alla gestione attuata dal **GIL** (Global Interpreter Lock). Tale componente infatti, oltre ad una gestione non ottimale della memoria, permette l'esecuzione di un solo thread alla volta, ostacolando un concreto miglioramento delle prestazioni.

Il multi-processing, invece, permette di eludere le restrizioni imposte dal GIL dal momento che ad ogni processo viene assegnato un distinto interprete e uno spazio di memoria dedicato, favorendo un reale parallelismo. Le classi e i metodi necessari sono contenuti nel package **multiprocessing**, disponibile nel core di Python.

La generazione di più traiettorie contemporaneamente è attuabile tramite il metodo *multi_trajectory*, i cui parametri hanno la stessa semantica di quelli di *CTBN_Sample*, trattandosi sostanzialmente di un metodo wrapper. Di conseguenza, i parametri *t_ends* e *max_trs* sono due **List** e contengono rispettivamente l'elenco dei tempi massimi e del numero di transizioni delle traiettorie da generare. Non è possibile utilizzarli congiuntamente, il secondo parametro viene infatti preso in considerazione solo se il primo non è definito. Il numero di traiettorie che verranno campionate è quindi una conseguenza del numero di elementi presenti nella lista passata come parametro.

Vengono dunque inizializzati tanti processi quante sono le traiettorie da generare, tramite la classe **multiprocessing.Process**, e i pandas.DataFrame prodotti da ciascun processo vengono salvati in una lista condivisa che le aggrega.

La procedura target che viene eseguita da ciascun processo è definita nel metodo *worker*, che si occupa semplicemente di generare una singola traiettoria e di aggiungerla alla lista condivisa.

Dopo aver avviato (tramite il metodo *Process.start()*) i processi creati, *multi_trajectory* attende che tutti terminino la loro esecuzione (attraverso *Process.join()*), prima di ritornare al chiamante la lista contenente le traiettorie prodotte.

Esempio 3.5.3. *Si vogliono generare in parallelo 3 traiettorie i cui tempi massimi sono 100, 200 e 500. Si supponga che la struttura della rete sia già stata importata (come mostrato nell'esempio precedente) e sia contenuta nell'oggetto j1:JsonImporter.*

Il seguente frammento di codice mostra un esempio di utilizzo di TrajectoryGe-

nerator *per tale scopo*.

```
tg = TrajectoryGenerator(importer = j1)
trajectories = tg.multi_trajectory(
    t_ends = [100, 200, 500]
)
```

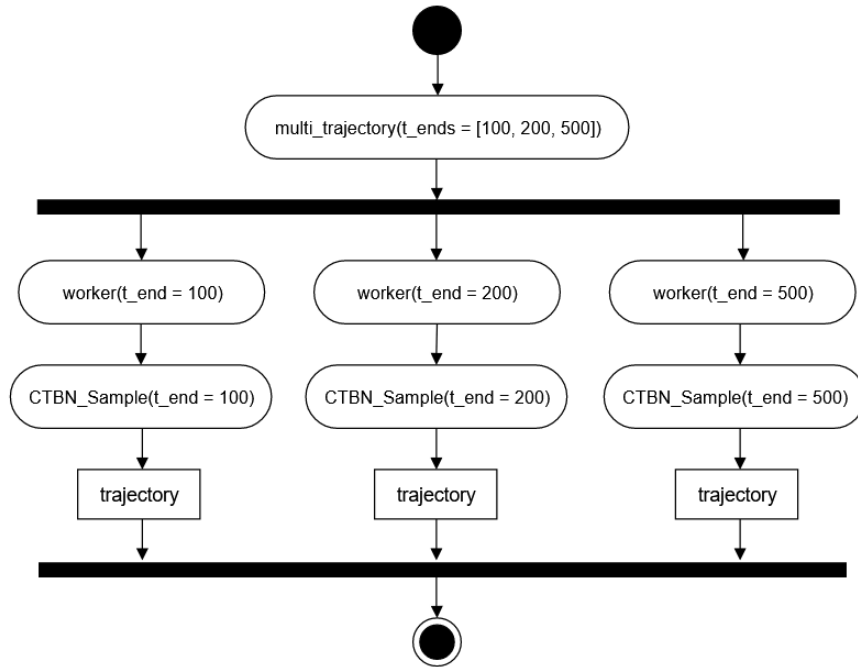


Figura 3.5: Diagramma di Attività - multi_trajectory

Nel Capitolo 4.7 verrà mostrato un confronto tra le prestazioni ottenute tramite l'utilizzo del multi-processing e quelle dell'esecuzione sequenziale, volto a mettere in risalto i miglioramenti ottenuti.

3.5.2 NetworkGenerator

NetworkGenerator espone un insieme di metodi finalizzati alla generazione randomica di una rete. In particolare, questa classe permette di produrre il grafo e le CIM conoscendo a priori il numero di variabili (correlate dalla relativa cardinalità), specificate nell'input.

NetworkGenerator
- <code>_labels</code> : List - <code>_vals</code> : List - <code>_indxs</code> : List - <code>_cims</code> : Dict - <code>_graph</code> : NetworkGraph
+ <code>__init__</code> (importer, labels, vals) + <code>generate_graph</code> (density, fixed): void + <code>generate_cims</code> (min_val, max_val): void - <code>__generate_cim</code> (min_val, max_val, shape): numpy.ndarray

Figura 3.6: Classe NetworkGenerator

Il costruttore della classe, infatti, accetta due **List** come parametri: *labels* e *vals*. Il primo è l'elenco delle etichette associate alle variabili che costituiranno la CTBN generata, le cui cardinalità sono definite nel secondo parametro (nella posizione omologa). Il metodo `__init__` si limita ad assegnare tali parametri ai corrispondenti attributi di classe e ad inizializzare `_indxs` (che non è altro che un'enumerazione in ordine crescente di lunghezza pari al numero di variabili). La costruzione del grafo e la generazione delle CIM vengono gestite, nell'ordine, dal metodo `generate_graph` e dal metodo `generate_cims`, le cui modalità di implementazione vengono illustrate nelle relative descrizioni che seguono.

generate_graph Si occupa della generazione di un grafo orientato, basandosi sull'idea di stabilire, per ciascuna coppia di variabili (X, Y) se esiste un arco da X a Y e viceversa. La presenza di un arco è determinata concettualmente tramite il cosiddetto “lancio di una moneta”, ovvero estraendo casualmente un valore da una distribuzione **Bernoulliana**, stabilendo la convenzione tale per cui l'esistenza dell'arco corrisponde al valore estratto 1.

Una variabile aleatoria distribuita secondo una Bernoulliana di parametro p , infatti, può assumere solo i valori 0 e 1 rispettivamente con probabilità $(1 - p)$ e p . Il valore di p è definito dal parametro *density* di `generate_graph`, volto appunto a calibrare la densità del grafo.

Anche in questo caso, l'estrazione randomica del numero è stata realizzata sfruttando *numpy*, e in particolare il metodo **random.binomial**. Poiché una variabile distribuita secondo una binomiale è definita come la somma di n variabili Bernoulliane di uguale parametro p , tale metodo è stato usato ponendo il parametro n a 1.

Il nucleo di *generate_graph*, sintetizzando, consiste nella seguente **list comprehension**:

```
edges = [(i, j) for i in self._labels
          for j in self._labels
          if np.random.binomial(1, density) == 1 and i != j]
```

Il parametro *density*, tuttavia, rappresenta una probabilità e non garantisce che la densità della rete generata sia effettivamente pari al valore richiesto. Per questa ragione è stato introdotto il parametro booleano *fixed*, che se impostato a *true* determina una diversa procedura di generazione degli archi, assicurando che la densità del grafo prodotto corrisponda realmente a *density*. Questa procedura alternativa consiste nel creare una lista contenente tutti gli archi possibili (eccetto i cappi), ordinarla casualmente, ed estrarre i primi *e* elementi (il numero di archi *e* è ottenuto dalla formula inversa ricavabile dall'equazione (1.1) relativa alla densità). Se la densità richiesta dovesse implicare un numero di archi non intero, verrebbe sollevata un'eccezione di tipo *RuntimeError*.

generate_cims Poiché il numero di CIM che devono essere generate per ciascuna variabile è una diretta conseguenza della struttura della rete (dato che le matrici devono rispecchiare le dipendenze tra le variabili) il metodo *generate_cims* deve obbligatoriamente essere eseguito dopo *generate_graph*, in modo tale che il grafo sia definito.

I parametri *min_val* e *max_val* consentono di stabilire il range numerico all'interno del quale si devono trovare i coefficienti delle matrici.

Il metodo *generate_cims* si occupa esclusivamente di enumerare, per ciascun nodo della rete, le possibili combinazioni degli stati dei genitori, associando a ciascuna di esse una CIM.

Al fine di scomporre la procedura in sottoproblemi di dimensioni minori, la generazione effettiva di una singola CIM senza contesto (vale a dire a prescindere dalla struttura della rete) è demandata al metodo privato *__generate_cim*. Il parametro *shape* di quest'ultimo metodo fornisce informazioni sulle dimensioni della matrice che deve essere generata (il numero di righe e di colonne è chiaramente uguale), e corrisponde quindi alla cardinalità della variabile a cui verrà assegnata la CIM prodotta.

Il processo di costruzione di una CIM prevede di determinare preliminarmente gli elementi che si trovano sulla diagonale maggiore, estraendoli da una distribuzione **uniforme**, e successivamente di calcolare gli altri coefficienti delle righe di conseguenza (quindi facendo in modo che la loro somma corrisponda all'opposto del valore dell'elemento diagonale). Per fare ciò, si determinano casualmente i

coefficienti che compongono le righe (sempre utilizzando una distribuzione uniforme), si normalizzano affinché la loro somma sia 1 e infine si moltiplicano per il valore assegnato all'elemento diagonale.

L'estrazione di valori casuali dalla distribuzione uniforme è delegata a **numpy.random.rand**. Si è convenzionalmente deciso di arrotondare tutti i coefficienti a 4 cifre decimali.

Proprietà di Faithfulness Nella procedura di generazione delle CIM è stata ignorata la possibilità che le matrici prodotte non rispecchino la realtà.

La proprietà di **faithfulness** di una rete statuisce che le CIM devono implicitamente esprimere le dipendenze tra le variabili. Esemplificando il concetto, se una variabile X dipende da una variabile Y , al variare di Y devono variare le matrici di X . Per assurdo, se le CIM restassero uguali al variare di Y , si potrebbe desumere che i nodi sono indipendenti.

La tecnica fondata sull'estrazione casuale dei coefficienti che è stata adottata nell'implementazione, tuttavia, non esclude che possano essere prodotte matrici molto simili, nel caso limite uguali, violando tale proprietà.

3.5.3 AbstractExporter

Poiché PyCTBN non forniva strumenti per l'esportazione e il salvataggio su file delle strutture e delle traiettorie, è stato ritenuto opportuno sviluppare una gerarchia di classi finalizzata a soddisfare queste necessità. L'utilizzo dei file è stato particolarmente importante anche per facilitare la comunicazione e lo scambio dei dati tra i vari componenti della libreria, sfruttando le procedure già esistenti di pre-processing dei dataset.

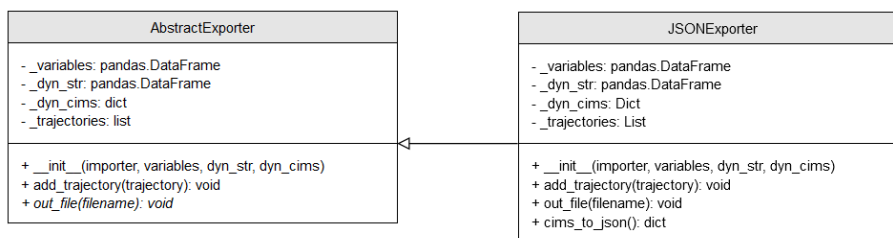


Figura 3.7: Classe AbstractExporter - JSONExporter

Per avvalorare l'estensibilità della libreria e non precludere la possibilità di utilizzare formati diversi dal JSON, le scelte progettuali relative all'esportazione sono state mirate a creare una simmetria con la struttura delle classi previste

per le fasi di importazione. Come accennato, infatti, il package utility include una classe astratta *AbstractImporter* che definisce le funzionalità generiche di importazione e pre-processing dei dati, che trovano poi realizzazione nelle diverse specializzazioni legate ai vari formati, come ad esempio *JSONImporter*. Questa organizzazione gerarchica rende agevole slegarsi dal formato JSON, adottando ad esempio il formato *csv*, senza ripercussioni sull'interazione con le altre classi della libreria.

A prescindere dal formato in cui verrà esportata la rete, quindi, *AbstractExporter* raggruppa tutti i dati che la descrivono (che corrispondono sostanzialmente ai campi dell'oggetto JSON illustrato nel Capitolo 3.2), tramite le strutture dati utilizzate all'interno della libreria. I campi di *AbstractExporter* saranno perciò organizzati come segue:

- *_variables*: istanza di *pandas.DataFrame* contenente, per ciascuna variabile della rete, l'etichetta associata e la cardinalità
- *_dyn_str*: istanza di *pandas.DataFrame* in cui ogni riga rappresenta un arco del grafo, nel formato mostrato nel Capitolo 3.5.1
- *_dyn_cims*: hashmap in cui le chiavi sono le etichette delle variabili, e a ciascuna chiave è assegnato l'oggetto di classe *SetOfCims* corrispondente
- *_trajectories*: lista contenente le traiettorie (memorizzate come istanze di *pandas.DataFrame*)

Il campo *_trajectories* viene inizializzato come lista vuota, e le traiettorie possono essere successivamente aggiunte tramite il metodo *add_trajectory*.

Una volta che tutti i dati riguardanti la rete sono stati forniti alla classe *AbstractExporter*, il file di output può essere creato tramite il metodo *out_file*, che accetta come unico parametro il *filename*. Le operazioni eseguite da tale metodo, oltre che l'estensione del file, dipendono ovviamente dalla specializzazione di *AbstractExporter* che è stata istanziata.

La classe *JSONExporter* include un metodo aggiuntivo, *cims_to_json*, che si occupa di ristrutturare gli oggetti di tipo *SetOfCims* convertendoli in un formato adeguato all'esportazione in *JSON*.

3.6 Diagramma di Sequenza

Il diagramma in Figura 4.8 mostra un possibile scenario di interazione fra le nuove classi sviluppate, mettendo in risalto l'ordine, la successione temporale, in cui ciascuna operazione viene eseguita.

Tale esempio include la generazione di una rete, invocando prima *generate_graph* e solo successivamente *generate_cims*. Le componenti della rete creata vengono usate per inizializzare un oggetto di tipo *JSONExporter* e un oggetto di classe *TrajectoryGenerator*, dopodiché si generano iterativamente delle traiettorie che vengono man mano aggiunte all'exporter tramite *add_trajectory*. Infine viene scritto il file in output.

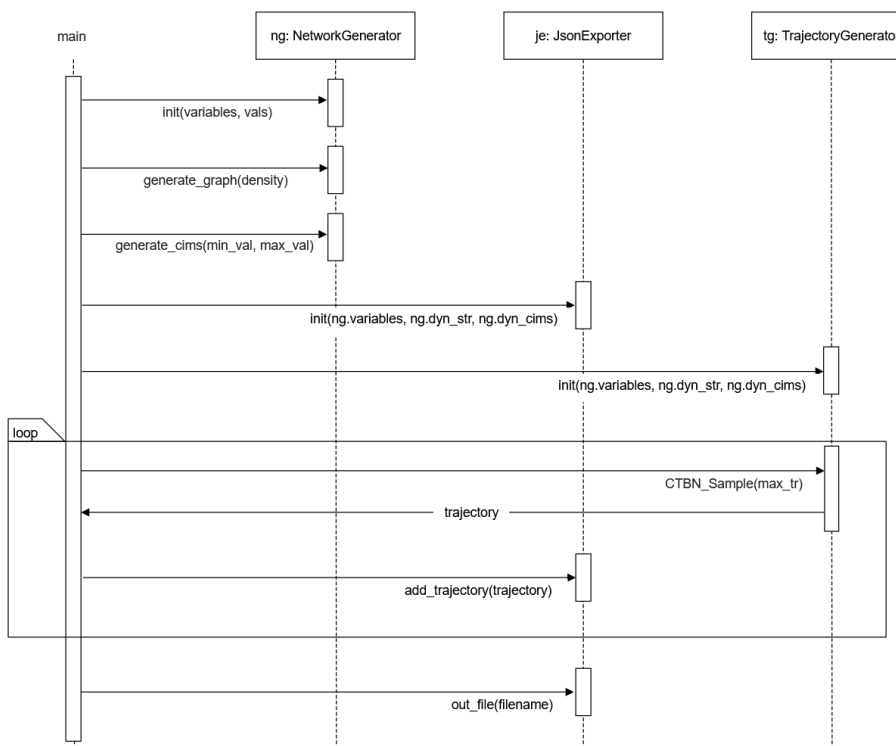


Figura 3.8: Diagramma di Sequenza

3.7 Analisi delle Prestazioni

Uno dei principali parametri di valutazione di PyCTBN è l'efficienza, e perché la libreria sia fruibile è importante che i tempi di esecuzione non diventino ec-

cessivamente proibitivi al crescere delle dimensioni delle reti. Questo capitolo, quindi, si occupa di analizzare i risultati ottenuti con le implementazioni di PyCTBN, sia in relazione ai tempi di esecuzione che alla quantità di memoria RAM occupata, in particolare per quanto riguarda le procedure più critiche, ovvero la generazione delle reti e il campionamento delle traiettorie, focalizzandosi altresì sui benefici ottenuti dall'implementazione parallela.

3.7.1 Parametri considerati

Poiché le prestazioni dei metodi dipendono dalla struttura della rete, le misurazioni sono state effettuate per ciascuna combinazione ottenuta al variare dei seguenti parametri:

- numero di variabili (5, 10, 15 e 20)
- cardinalità delle variabili (binarie, ternarie e quaternarie)
- densità del grafo (0.1, 0.2, 0.3 e 0.4), resa effettiva tramite il parametro *fixed* del metodo *generate_graph*

Il tempo necessario per il campionamento di una traiettoria, piuttosto che quello richiesto per generare le CIM associate ad una rete, dipende non solo dalla densità del grafo, ma anche da come sono disposti gli archi. Una rete in cui tutti gli archi sono diretti verso un solo nodo, ad esempio, implica un numero maggiore di dipendenze e quindi tempi più elevati quando la variabile centrale compie una transizione.

Per la misurazione delle prestazioni si è quindi deciso di prendere in considerazione, per ciascuna combinazione dei parametri scelti, i risultati prodotti da un insieme di 20 esecuzioni distinte. I valori mostrati sui grafici sono stati calcolati come **media** dei valori ottenuti, e per fornire informazioni sul comportamento delle osservazioni vengono riportate anche le relative **deviazioni standard**.

I tempi di esecuzione sono espressi in secondi, mentre i valori relativi alla quantità di memoria RAM occupata sono da intendersi in MegaBytes.

Per favorire la leggibilità e la comunicatività dei grafici, si è deciso di usare la scala logaritmica per l'asse delle ordinate.

Il tempo impiegato per l'esecuzione dipende logicamente dalla macchina su cui gli esperimenti vengono svolti, ma è ad ogni modo possibile trarre importanti informazioni considerando i valori in modo relativo, studiando l'andamento dei tempi al variare della complessità della rete.

Per completezza di informazione, vengono comunque riportate le specifiche hardware più significative della macchina utilizzata:

- Processore Intel(R) Core(TM) i7-1065G7 CPU da 1.30GHz
- RAM 16GB
- SSD 512GB

3.7.2 TrajectoryGenerator

Per quanto concerne la classe *TrajectoryGenerator*, la valutazione delle prestazioni è stata effettuata ovviamente sul metodo *CTBN_Sample*, in particolare generando traiettorie con un numero di transizioni prestabilito pari a 1000.

Tempi

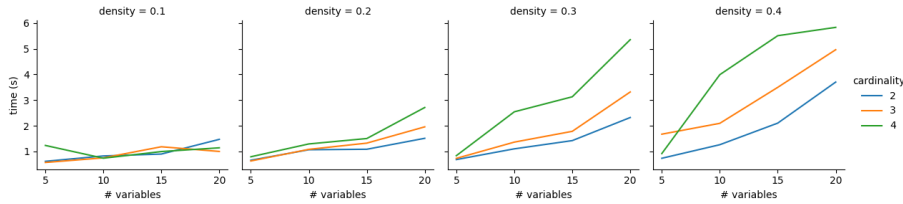


Figura 3.9: Tempi di esecuzione - TrajectoryGenerator

È possibile notare come il tempo necessario per il campionamento delle traiettorie sia molto prossimo allo zero nei casi in cui la rete abbia densità uguale a 0.1 o 0.2, a prescindere dal numero e dalla cardinalità delle variabili coinvolte. All'aumentare della complessità della rete, invece, il tempo impiegato cresce sensibilmente, in particolare nel caso di reti costituite da variabili quaternarie. Come testimoniato dai valori della deviazione standard sotto riportati, la variabilità dei tempi è maggiore in reti più complesse, a dimostrazione del fatto che la distribuzione degli archi all'interno del grafo influenza significativamente l'esecuzione. Le deviazioni standard più elevate, infatti, sono state riscontrate in corrispondenza degli esperimenti su reti caratterizzate da densità più elevate.

# variables		$d = 0.1$	$d = 0.2$	$d = 0.3$	$d = 0.4$
5	card. 2	0.0428	0.4993	0.0530	0.0437
	3	0.0415	0.0715	0.0831	1.3795
	4	0.3656	0.6310	0.9214	1.3203
10	card. 2	0.1060	0.1247	1.1147	0.3889
	3	0.1055	0.8270	0.6428	3.5571
	4	0.1496	1.0902	13.6267	71.7103
15	card. 2	0.0570	0.0885	0.4706	1.9183
	3	0.1153	4.3084	20.7983	85.2990
	4	0.0365	3.2622	18.4352	98.1215
20	card. 2	1.8115	0.3210	4.0379	15.4693
	3	0.1187	0.3121	2.3850	25.3890
	4	0.7821	11.1102	65.2257	152.0916

Tabella 3.1: Dev. Standard dei tempi di esecuzione - TrajectoryGenerator

Memoria

Come si può notare dai grafici, anche l'utilizzo di memoria cresce in modo esponenziale in corrispondenza di reti più grandi e più dense. Questo comportamento è motivato innanzitutto dalla dimensione del *DataFrame* contenente la traiettoria, che sarà costituito da un numero di colonne pari al numero di variabili che costituiscono la rete. In aggiunta, anche il numero di *Conditional Intensity Matrices* coinvolte, e la dimensione di ciascuna matrice, dipendono rispettivamente dalla densità del grafo e dalla cardinalità delle variabili.

Dall'analisi dei dati relativi alle deviazioni standard, invece, è possibile estrarre informazioni significative riguardo alla quantità di spazio richiesta per la generazione di una traiettoria. Ad eccezione dei valori dell'indice calcolati sui risultati delle misurazioni provenienti da reti molto grandi, infatti, tutti i valori sono prossimi allo zero, suggerendo un'occupazione di memoria pressoché costante a parità di parametri utilizzati.

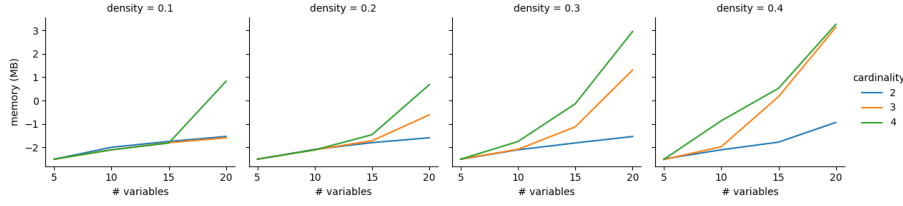


Figura 3.10: Utilizzo della memoria - TrajectoryGenerator

# variables		$d = 0.1$	$d = 0.2$	$d = 0.3$	$d = 0.4$
5	card. 2	0.0003	0.0051	0.0001	0.0005
	card. 3	0.0003	0.0005	0.0001	0.0001
	card. 4	0.0002	0.0003	0.0035	0.0032
10	card. 2	0.0570	0.0103	0.0001	0.0002
	card. 3	0.0007	0.0002	0.0101	0.0002
	card. 4	0.0002	0.0025	0.1249	0.5664
15	card. 2	0.0485	0.0116	0.0029	0.0089
	card. 3	0.0099	0.0509	0.2461	0.9912
	card. 4	0.0005	0.1226	0.0003	1.0029
20	card. 2	0.0438	0.0076	0.0437	0.2317
	card. 3	0.0043	0.3434	3.3019	27.7697
	card. 4	0.1768	3.4122	16.9224	24.8423

Tabella 3.2: Dev. Standard delle quantità di memoria occupata - TrajectoryGenerator

Multiprocessing

Per dimostrare l'entità del vantaggio ottenuto in termini di tempo sfruttando il multiprocessing, sono stati misurati i tempi di esecuzione ottenuti generando n traiettorie costituite da 1000 osservazioni, con $n \in [1, 10]$, sia in modo sequenziale che in modo parallelo. Perché il confronto fosse equo e i valori ottenuti confrontabili, le traiettorie sono chiaramente state generate sulla stessa rete, nel dettaglio caratterizzata da:

- 20 variabili

- cardinalità 3
- densità 0.4

Come evidenziato dal grafico in Figura 3.11 (realizzato in questo caso utilizzando la scala lineare), l'utilizzo del multiprocessing non può ovviamente migliorare le prestazioni nel caso della generazione di una singola traiettoria, ma anzi le peggiora leggermente a causa dell'overhead necessario per l'inizializzazione aggiuntiva. Il miglioramento diventa invece considerevole all'aumentare del numero di traiettorie che si vogliono generare. Se queste vengono campionate sequenzialmente (una dopo l'altra), infatti, si può notare come la crescita del tempo necessario sia sostanzialmente lineare, come prevedibile. Facendo uso invece del metodo *multi_trajectory*, è notevole il fatto che il tempo impiegato cresca molto lentamente e non in funzione del numero di traiettorie generate, grazie al fatto che possono essere sfruttati tutti i *core* fisici della CPU.

Questo vantaggio si rivela particolarmente significativo nel caso di esecuzioni onerose. Generando infatti 10 traiettorie sulla rete utilizzata nell'esperimento (piuttosto complessa), l'esecuzione parallela ha permesso di passare da un tempo di 361.8562 secondi a 136.6533 secondi, con un efficientamento del 62,24%.

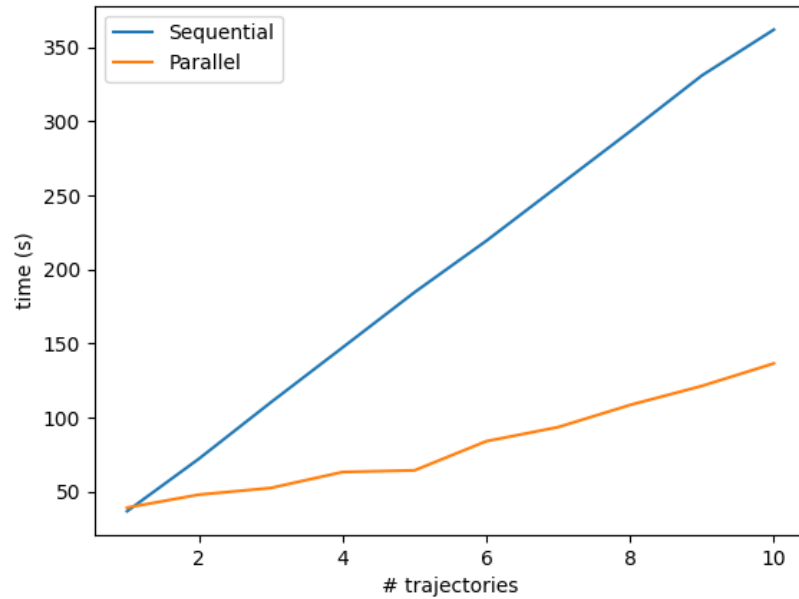


Figura 3.11: Tempi di esecuzione - Sequenziale vs Parallelo

3.7.3 NetworkGenerator

La misurazione fa riferimento all'intera generazione della rete, e include quindi sia l'esecuzione di *generate_graph* che quella di *generate_cims*.

Tempi

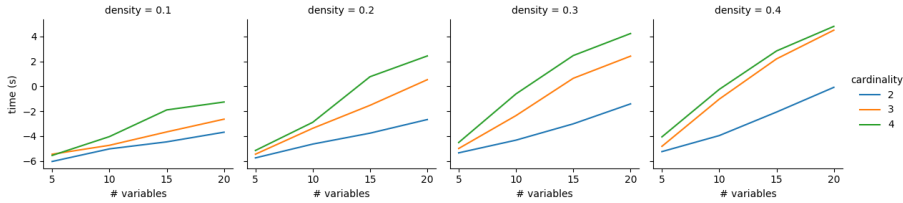


Figura 3.12: Tempi di esecuzione - NetworkGenerator

È possibile osservare come i tempi seguano approssimativamente lo stesso andamento di quelli mostrati per la generazione delle traiettorie rispetto alla complessità della rete. Tuttavia, a parità di parametri, l'esecuzione dei metodi di *NetworkGenerator* è un'operazione mediamente più veloce rispetto al campionamento di una traiettoria.

# variables		$d = 0.1$	$d = 0.2$	$d = 0.3$	$d = 0.4$
5	card. 2	0.0007	0.0008	0.0008	0.0012
	card. 3	0.0007	0.0015	0.0022	0.0025
	card. 4	0.0009	0.0015	0.0035	0.0055
10	card. 2	0.0015	0.0045	0.0039	0.0025
	card. 3	0.0018	0.0250	0.0647	0.1290
	card. 4	0.0070	0.0165	0.8248	0.2829
15	card. 2	0.0025	0.0061	0.0171	0.0219
	card. 3	0.0066	0.2312	0.7580	11.8190
	card. 4	0.0543	1.9960	10.0167	19.2014
20	card. 2	0.0086	0.1340	0.0664	0.4041
	card. 3	0.0210	2.2293	9.5017	43.8563
	card. 4	0.1711	12.2124	22.9523	38.2674

Tabella 3.3: Dev. Standard dei tempi di esecuzione - NetworkGenerator

Memoria

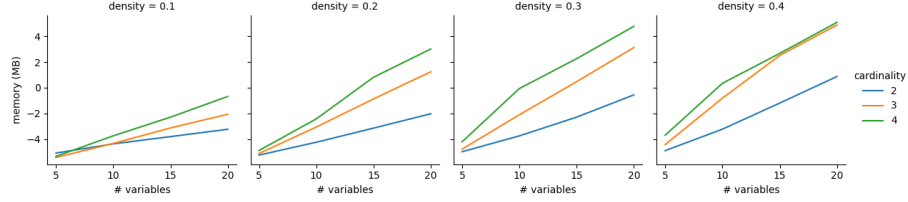


Figura 3.13: Utilizzo della memoria - NetworkGenerator

È possibile applicare un ragionamento analogo a quello presentato in relazione alla variabilità della memoria utilizzata nell'ambito del campionamento delle traiettorie. I valori più elevati si riscontrano infatti in corrispondenza delle densità maggiori, che significano un aumento della probabilità che un nodo abbia più archi entranti, quindi un maggior numero di CIM che riflettano tali dipendenze e come diretta conseguenza un aumento dello spazio occupato in RAM.

# variables		$d = 0.1$	$d = 0.2$	$d = 0.3$	$d = 0.4$
5	card. 2	0.0058	0.0006	0.0007	0.0006
	card. 3	0.0004	0.0003	0.0013	0.0038
	card. 4	0.0007	0.0009	0.0051	0.0074
10	card. 2	0.0074	0.0007	0.0032	0.0064
	card. 3	0.0011	0.0244	0.0514	0.1300
	card. 4	0.0062	0.0304	1.3823	0.5247
15	card. 2	0.0088	0.0072	0.2492	0.0561
	card. 3	0.0151	0.4742	0.6426	13.0242
	card. 4	0.0416	1.8642	6.2715	12.5361
20	card. 2	0.0110	0.0170	0.1434	1.0643
	card. 3	0.0383	4.5907	10.5345	59.6651
	card. 4	0.3288	22.4537	36.4545	51.8351

Tabella 3.4: Dev. Standard delle quantità di memoria occupata - NetworkGenerator

Conclusioni

In relazione a quanto osservato è possibile affermare che gli obiettivi iniziali sono stati soddisfatti, dando un piccolo contributo allo sviluppo e alla crescita di PyCTBN. È stata inoltre mantenuta l'intenzione di rispettare i principi su cui è stata sviluppata la libreria, ricorrendo a scelte progettuali che garantissero la flessibilità e l'estensibilità del software, astraendosi completamente dal formato dei dataset e agevolando ulteriori integrazioni.

Per garantire la qualità del lavoro, tutti i metodi sono stati approfonditamente testati con molteplici configurazioni, sperimentando inoltre l'interazione con le componenti già esistenti. Allo scopo di favorire la leggibilità, la manutenibilità e innanzitutto l'utilizzo dei moduli introdotti, è stata prodotta una documentazione riguardante tutte le classi, i metodi e i relativi parametri, provvedendo inoltre a fornire un esempio pratico di realizzazione dell'intero flusso di esecuzione, che prevede la generazione della rete, il campionamento di una traiettoria su di essa, l'apprendimento della struttura a partire da tale traiettoria e infine l'esportazione su file dei dati prodotti.

Come già ampiamente sottolineato, la libreria rimane aperta all'introduzione di funzionalità aggiuntive che le possano conferire ulteriore completezza, rendendola un framework open-source consolidato per lavorare con le reti Bayesiane a tempo continuo. Si potrebbe pensare di allineare PyCTBN all'unica alternativa esistente, CTBN-RLE, implementando tutti i moduli non ancora presenti e superando le criticità prestazionali peculiari di quest'ultima. Alcune funzionalità significative sarebbero ad esempio legate all'inferenza su una rete e all'apprendimento con dati non completi. Un ulteriore miglioramento possibile, anche se non di banale realizzazione, consisterebbe nel prendere in considerazione la proprietà di faithfulness nell'ambito della generazione delle reti, che come spiegato nel relativo capitolo è stata attualmente trascurata.

Per quanto riguarda il percorso di stage, è stata un'esperienza altamente formativa, che ha convogliato molte delle competenze acquisite nel corso del triennio,

dando inoltre una dimostrazione dell'applicazione pratica di concetti finora ristretti alla sola teoria. È stata anche l'occasione di un primo approccio al mondo della ricerca, cercando di trarre il più possibile dalla competenza, dall'esperienza e dalla passione dimostrate da chi mi ha guidato in questo lavoro, fornendomi spunti e consigli con grande disponibilità.

Bibliografia

- [1] U. Nodelman. Continuous Time Bayesian Networks. Master's thesis, Stanford University, 2007.
- [2] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer, 2000.
- [3] A. P. Dawid. Conditional independence in statistical theory. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, 41:1 – 31, 1979.
- [4] I. Ben-Gal. Bayesian networks. In F. Ruggeri, F. Faltin, and R. Kenett, editors, *Encyclopedia of Statistics in Quality and Reliability*. Wiley & Sons, 2007.
- [5] S. M. Ross. *Stochastic Processes*. Wiley, 2nd edition, 1996.
- [6] C. Shelton and G. Ciardo. Tutorial on Structured Continuous-Time Markov Processes. *Journal of Artificial Intelligence Research*, page 725 – 778, 12 2014.
- [7] O. Häggström. Finite Markov Chains and Algorithmic Applications. *London Mathematical Society Student Texts*, 2002.
- [8] U. Nodelman, C. Shelton, and D. Koller. Continuous Time Bayesian Networks. *Uncertainty in artificial intelligence*, pages 378 – 387, 2002.
- [9] W. McKinney. Data Structures for Statistical Computing in Python. *Proceedings of the 9th Python in Science Conference*, pages 56 – 61, 01 2010.
- [10] C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, et al. Array programming with numpy. *Nature*, pages 357 – 362, 09 2020.
- [11] C. Shelton, Y. Fan, W. Lam, J. Lee, and J. Xu. Continuous Time Bayesian Network Reasoning and Learning Engine. *Journal of Machine Learning Research*, 03 2010.

- [12] H. Boudali and J.B. Dugan. A continuous-time bayesian network reliability modeling, and analysis framework. *IEEE Transactions on Reliability*, 55:86 – 97, 2006.
- [13] S. M. Ross. *Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Elsevier Science, 3rd edition, 2004.
- [14] Kayvan Sadeghi. Faithfulness of probability distributions and graphs. *Journal of Machine Learning Research*, pages 1 – 29, 2017.
- [15] M. Fowler. *UML Distilled: A Brief Guide to the Standard Object Modeling Language*. Addison-Wesley, 3rd edition, 2003.