Risoluzione delle Equazioni Differenziali Ordinarie

Le “Ricette” per gli Esercizi Classici

Sacher

Agenda: Tipi di Equazioni

L'obiettivo di oggi è stabilire una "ricetta" chiara per risolvere i tipi più comuni di equazioni differenziali ordinarie (ODE).

Equazioni del Primo Ordine

- Tipo 1: Variabili Separabili
- Tipo 2: Lineari (con Fattore Integrante)

Equazioni del Secondo Ordine

- Tipo 3: Lineari Omogenee (Coeff. Costanti)
- Tipo 4: Lineari Non Omogenee (Metodo di Somiglianza)

La Chiave del Successo

La parte più difficile *non* è risolvere, ma **riconoscere** il tipo di equazione e sapere (a memoria) quale "ricetta" applicare.

Tipo 1: Primo Ordine a Variabili Separabili (1/2)

Riconoscimento

L'equazione può essere riscritta (algebricamente) nella forma:

$$\frac{dt}{dt} = f(t) \cdot g(t) \quad \text{oppure} \quad N(t)dt = M(t)dt$$

Tutta la dipendenza da t può essere *separata* dalla dipendenza da t.

Tipo 1: Primo Ordine a Variabili Separabili (2/2)

La Ricetta

1. **Separare:** Portare tutti i termini con x (incluso dx) da un lato e tutti i termini con t (incluso dt) dall'altro.
$$\frac{1}{g(x)}dx = f(t)dt$$
2. **Integrare:** Integrare entrambi i lati rispetto alla loro variabile.
$$\int \frac{1}{g(x)}dx = \int f(t)dt$$
3. **Risolvere:** Dopo l'integrazione, si ottiene:
$$G(x) = F(t) + C$$
4. **Esplicitare (se possibile):** Risolvere l'equazione per $x(t)$, se richiesto o possibile.

Esempio: Variabili Separabili (1/2)

Problema: Risolvere $\dot{x} = t \cdot x^2$

Risoluzione

1. **Riconoscimento:** È $f(t) = t$ e $g(x) = x^2$. È a variabili separabili.

$$\frac{dx}{dt} = tx^2$$

2. **Separare:**

$$\frac{1}{x^2} dx = t \, dt$$

Esempio: Variabili Separabili (2/2)

Problema: Risolvere $\dot{x} = t \cdot x^2$

Risoluzione

3. **Integrare:**

$$\int x^{-2} dx = \int t \, dt$$

$$-x^{-1} = \frac{t^2}{2} + C$$

4. **Esplicitare:**

$$-\frac{1}{x} = \frac{t^2}{2} + C$$

$$x(t) = -\frac{1}{\frac{t^2}{2} + C}$$

Tipo 2: Primo Ordine Lineari

Riconoscimento

L'equazione può essere scritta nella **forma standard**:

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)$$

La Ricetta (Metodo del Fattore Integrante)

1. **Standardizzare:** Assicurarsi che l'equazione sia in forma $\dot{x} + p(t)x = q(t)$.
2. **Identificare** $p(t)$.
3. **Calcolare il Fattore Integrante** $I(t) = e^{\int p(t)dt}$.
4. **Moltiplicare** l'eq. standard per $I(t)$.
5. **Riscrivere** il lato sinistro come $\frac{d}{dt}(I(t) \cdot x) = I(t)q(t)$.
6. **Integrare** entrambi i lati: $I(t) \cdot x = \int I(t)q(t)dt + C$.
7. **Risolvere** per $x(t) = \frac{1}{I(t)} [\int I(t)q(t)dt + C]$.

Esempio: Lineare (Fattore Integrante)

Problema: Risolvere $\dot{x} + 2x = e^t$

Risoluzione

1. **Identificare:** $p(t) = 2$ e $q(t) = e^t$.
2. **Fattore Integrante:** $I(t) = e^{\int 2\, dt} = e^{2t}$.
3. **Moltiplicare e Riscrivere:**

$$e^{2t}\dot{x} + 2e^{2t}x = e^{2t}e^t \implies \frac{d}{dt}\left(e^{2t} \cdot x\right) = e^{3t}$$

4. **Integrare:**

$$e^{2t} \cdot x = \int e^{3t} dt = \frac{1}{3}e^{3t} + C$$

5. **Risolvere:**

$$x(t) = \frac{1}{3}e^t + Ce^{-2t}$$

Tipo 3: Secondo Ordine Lineari Omogenee

Riconoscimento

L'equazione ha la forma (con a, b, c costanti):

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$$

(Il lato destro è **zero**).

La Ricetta (Equazione Caratteristica)

1. **Equazione Caratteristica:** Sostituire $\ddot{x} \to \lambda^2$, $\dot{x} \to \lambda$, $x \to 1$:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

2. **Trovare le Radici:** Risolvere l'equazione di secondo grado per λ_1 e λ_2.
3. **Scrivere la Soluzione Generale $x_h(t)$:** La forma di $x_h(t)$ dipende *criticamente* dalla natura delle radici.

Tipo 3: I Tre Casi per la Soluzione Omogenea $x_h(t)$

Sia $x_h(t)$ la soluzione generale di $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$, con radici λ_1, λ_2.

Caso 1: Due Radici Reali Distinte ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

(Il Δ è > 0)

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Tipo 3: I Tre Casi per la Soluzione Omogenea $x_h(t)$

Sia $x_h(t)$ la soluzione generale di $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$, con radici λ_1, λ_2.

Caso 1: Due Radici Reali Distinte ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

(Il Δ è > 0)

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Caso 2: Una Radice Reale Doppia ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

(Il Δ è $= 0$)

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

Tipo 3: I Tre Casi per la Soluzione Omogenea $x_h(t)$

Sia $x_h(t)$ la soluzione generale di $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$, con radici λ_1, λ_2.

Caso 1: Due Radici Reali Distinte ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)

(Il Δ è > 0)

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Caso 2: Una Radice Reale Doppia ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$)

(Il Δ è $= 0$)

$$x_h(t) = C_1 e^{\lambda t} + C_2 t e^{\lambda t}$$

Caso 3: Due Radici Complesse Coniugate ($\lambda = \alpha \pm i\beta$)

(Il Δ è < 0)

$$x_h(t) = e^{\alpha t} \left(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t) \right)$$

(α è la parte reale, β è la parte immaginaria).

Esempio: Omogenea (Caso 1)

Problema: Risolvere $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$

Risoluzione

1. **Equazione Caratteristica:**
$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$
2. **Trovare le Radici:**
$$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$$
Le radici sono $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 3$.
3. **Scrivere la Soluzione:** Siamo nel Caso 1 (Reali e Distinte).
$$x_h(t) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

Tipo 4: Secondo Ordine Lineari Non Omogenee

Riconoscimento

L'equazione ha la forma (con a, b, c costanti):

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = f(t)$$

La Ricetta (Principio di Sovrapposizione)

La soluzione generale è la somma di due parti:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

1. **Soluzione Omogenea $x_h(t)$:** Risolvere $a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0$ (come nel Tipo 3).
2. **Soluzione Particolare $x_p(t)$:** Trovare *una* soluzione x_p che funzioni per l'equazione completa. Il metodo più comune è il **Metodo di Somiglianza** (o Coefficienti Indeterminati).
3. **Soluzione Finale:** Sommare $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

Tipo 4: Il Metodo di Somiglianza (Come trovare x_p)

Si “indovina” la forma di x_p in base alla forma di $f(t)$:

$f(t)$	$\dot{x}(t)$
$p(t)$, poly	$q(t),\ \deg(q) = \deg(p)$ se $b \neq 0$ $q(t),\ \deg(q) = \deg(p) + 1$ se $b = 0 \wedge a \neq 0$ $q(t),\ \deg(q) = \deg(p) + 2$ se $a = b = 0$
$ke^{\alpha t}$	$he^{\alpha t}$ se $\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$ $hte^{\alpha t}$ se $\alpha = \lambda_1 \neq \lambda_2$ $ht^2 e^{\alpha t}$ se $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$
$p(t)e^{\alpha t}$, p poly	$q(t)e^{at}$ se $\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$ $q(t)te^{\alpha t}$ se $\alpha = \lambda_1 \neq \lambda_2$ $q(t)t^2 e^{\alpha t}$ se $\alpha = \lambda_1 = \lambda_2$
$k_1 \cos(\alpha t) + k_2 \sin(\alpha t)$	$h_1 \cos(\alpha t) + h_2 \sin(\alpha t)$ se $i\alpha \neq \lambda_1, \lambda_2$ $t(h_1 \cos(\alpha t) + h_2 \cos(\alpha t))$ se $i\alpha = \lambda_1 \neq \lambda_2$

Tabella: Soluzione particolare di un’equazione differenziale lineare non omogenea a coefficienti costanti

Esempio: Non Omogenea (1/3)

Problema: Risolvere $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 3t$

Risoluzione (Passo 1: Omogenea)

Dall'esempio precedente, la soluzione omogenea $x_h(t)$ per $\ddot{x} - 5\dot{x} + 6x = 0$ è:

$$x_h(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

Esempio: Non Omogenea (2/3)

Risoluzione (Passo 2: Particolare x_p)

1. **Forma di $f(t)$:** $f(t) = 3t$ (Polinomio di grado 1).
2. **Prova $x_p(t)$:** La nostra prova è $x_p = At + B$.
3. **Derivare:** $x_p' = A$, $x_p'' = 0$.
4. **Sostituire nell'ODE:**
$$(0) - 5(A) + 6(At + B) = 3t$$
$$-5A + 6At + 6B = 3t$$
$$(6A)t + (6B - 5A) = 3t + 0$$
5. **Uguagliare i coefficienti:**
   - Termini in t: $6A = 3 \implies A = 1/2$
   - Termini costanti: $6B - 5A = 0 \implies 6B = 5(1/2) \implies B = 5/12$
6. **Soluzione Particolare:** $x_p(t) = \frac{1}{2}t + \frac{5}{12}$.

Esempio: Non Omogenea (3/3)

Risoluzione (Passo 3: Soluzione Finale)

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + \frac{1}{2}t + \frac{5}{12}$$

Il segreto è il Riconoscimento.

Una volta identificato il tipo di equazione, applicate la "ricetta" corrispondente.

In bocca al lupo per l'esame!