Metodi Matematici: Strategie Efficaci per l'Esame

Un'infarinatura strategica su 4 esercizi chiave

Sacher

Agenda della Lezione ($\sim$60 Minuti)

L'obiettivo di oggi non è affrontare l'intero programma, ma fornirvi una **"cassetta degli attrezzi"** strategica.
Molti esercizi d'esame sembrano diversi, ma si risolvono con **poche formule e procedure chiave**.

Analizzeremo 4 tipologie di esercizi ricorrenti basati sui compiti d'esame recenti:

Prima Parte

- **Modulo 1:** L'Esercizio VERO/FALSO (Ex. 1)
- **Modulo 2:** L'Esercizio di Topologia e Corrispondenze (Ex. 2)

Seconda Parte

- **Modulo 3:** L'Esercizio sui Sistemi Dinamici (Ex. 3)
- **Modulo 4:** L'Esercizio di Ottimizzazione Dinamica (Ex. 4)

Modulo 1: La Strategia per l'Esercizio 1 (Vero/Falso)

Questo esercizio testa la vostra **comprensione precisa** delle definizioni e dei teoremi.

La richiesta è standard

"Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false. Fornire una **prova formale per una sola** tra le vere e **controesempi idonei per tutte** le false."

Modulo 1: La Strategia per l'Esercizio 1 (Vero/Falso)

Questo esercizio testa la vostra **comprensione precisa** delle definizioni e dei teoremi.

La richiesta è standard

"Stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false. Fornire una **prova formale per una sola** tra le vere e **controesempi idonei per tutte** le false."

La strategia vincente

- **Obiettivo 1:** Identificare rapidamente le proposizioni *false* usando un "arsenale" mentale di controesempi classici.
- **Obiettivo 2:** Identificare la proposizione *vera* (spesso è una definizione fondamentale o un teorema del corso) e prepararsi a dimostrarla formalmente.

Riferimenti Esami: [2023dec19, 2024dic12, 2024feb05, 2024gen10, 2024jul05, 2023oct31]

L'Arsenale dei Controesempi (1/4)

Non perdete tempo a cercare di dimostrare proposizioni che "sembrano" vere. Usate subito i vostri controesempi pronti.

FALSO 1: Compattezza e Controimmagini [2023dec19, 2024dic12]

"Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ continua e K compatto in $\mathbb{R}^k$. Allora $f^{-1}(K)$ è compatto."

Controesempio Chiave: Il Teorema di Weierstrass vale per l'immagine *diretta* ($f(K)$), non per la controimmagine.

- Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 5$ (una costante). f è continua.
- Sia $K = \{5\}$. K è un punto, quindi è compatto.
- $f^{-1}(K) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 5\} = \mathbb{R}$, che **non è compatto**.

L'Arsenale dei Controesempi (2/4)

Non perdete tempo a cercare di dimostrare proposizioni che "sembrano" vere. Usate subito i vostri controesempi pronti.

FALSO 2: Successioni [2023dec19, 2024jul05]

"Se una successione $\{x_k\}$ ammette una sottosuccessione convergente, allora è convergente."

Controesempio Chiave: L'oscillazione.

- Sia $x_k = (-1)^k = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$.
- La sottosuccessione dei pari $x_{2k} = \{1, 1, \dots\}$ converge a 1.
- La sottosuccessione dei dispari $x_{2k+1} = \{-1, -1, \dots\}$ converge a -1.
- La successione x_k **non è convergente**.

Non perdete tempo a cercare di dimostrare proposizioni che "sembrano" vere. Usate subito i vostri controesempi pronti.

FALSO 3: Dipendenza Lineare [2023oct31]

*"Se $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti, allora **qualsiasi** elemento v_i può essere visto come combinazione lineare degli altri."*

Controesempio Chiave: La trappola del vettore nullo.

- Sia $S = \{v_1, v_2\}$ in $\mathbb{R}^2$ con $v_1 = (1, 0)$ e $v_2 = (0, 0)$.
- L'insieme è linearmente dipendente? Sì (es. $0 \cdot v_1 + 5 \cdot v_2 = 0$).
- Possiamo scrivere v_1 come combinazione degli altri? $v_1 = \alpha v_2$?
- $(1, 0) = \alpha(0, 0) \implies (1, 0) = (0, 0)$. **Impossibile**.

Non perdete tempo a cercare di dimostrare proposizioni che "sembrano" vere. Usate subito i vostri controesempi pronti.

FALSO 4: Corrispondenze [2023oct31, 2024jul05]

"Una corrispondenza Upper Hemicontinuous (UHC) è anche Lower Hemicontinuous (LHC)." (O viceversa).

Controesempio Chiave: Le proprietà non si implicano a vicenda.

- $F(x) = [0, 1]$ per $x \neq 0$ e $F(0) = \{0.5\}$. È LHC ma non UHC.
- $F(x) = [0, 1]$ per $x \neq 0$ e $F(0) = [0, 1]$. È UHC e LHC.
- $F(x) = \{0\}$ per $x \leq 0$ e $F(x) = \{1\}$ per $x > 0$. Non è né UHC né LHC in $x = 0$.

Le “Formule Chiave”: Le Proposizioni VERE (1/2)

Una volta eliminati i falsi, scegliete la proposizione VERA più “standard” da dimostrare.

VERO 1: Il Nucleo (Kernel) è un Sottospazio [2023dec19, 2024dic12]

“Sia $l : V \to U$ una funzione lineare. $Ker(l)$ è un sottospazio vettoriale di V.”

“Ricetta” della Dimostrazione: Verificare le 3 proprietà del sottospazio.

1. **$0_V \in Ker(l)$?** $l(0_V) = 0_U$ per la linearità di l. $\implies$ **Sì**.
2. **Chiusura per somma:** Siano $v_1, v_2 \in Ker(l)$. Questo significa $l(v_1) = 0_U$ e $l(v_2) = 0_U$.
   $l(v_1 + v_2) = l(v_1) + l(v_2) = 0_U + 0_U = 0_U$. $\implies$ $(v_1 + v_2) \in Ker(l)$. **Sì**.
3. **Chiusura per prodotto scalare:** Sia $\alpha \in K$, $v_1 \in Ker(l)$.
   $l(\alpha v_1) = \alpha l(v_1) = \alpha \cdot 0_U = 0_U$. $\implies$ $(\alpha v_1) \in Ker(l)$. **Sì**.

Le “Formule Chiave”: Le Proposizioni VERE (2/2)

VERO 2: Formula delle Dimensioni [2024feb05, 2024jul05]

“Sia $l : V \to U$ lineare. Se $dim(V) > dim(U)$, allora l non è ’one-to-one’ (iniettiva).”

“Ricetta” della Dimostrazione: Usare la Formula delle Dimensioni.

1. Il Teorema afferma: $dim(V) = dim(Ker(l)) + dim(\mathrm{Im}(l))$.
2. Per definizione, $\mathrm{Im}(l)$ è un sottospazio di U, quindi $dim(\mathrm{Im}(l)) \leq dim(U)$.
3. Sostituendo: $dim(Ker(l)) = dim(V) - dim(\mathrm{Im}(l)) \geq dim(V) - dim(U)$.
4. Per ipotesi, $dim(V) > dim(U)$, quindi $dim(V) - dim(U) > 0$.
5. $\implies dim(Ker(l)) > 0$.
6. Una funzione è iniettiva $\iff Ker(l) = \{0_V\} \iff dim(Ker(l)) = 0$.
7. Dato che $dim(Ker(l)) > 0$, l **non è iniettiva**.

Modulo 2: La Strategia per l'Esercizio 2

Questo esercizio ha due varianti principali (a volte appaiono successioni, ma queste sono le più comuni):

Tipo A: Insiemi [2023dec, 2024feb]

Domanda: Stabilire se un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ è aperto, chiuso, o nessuno dei due.
Formula Chiave: Analisi delle (dis)uguaglianze.

Tipo B: Corrispondenze [2023oct, 2024gen]

Domanda: Disegnare il grafico e verificare la Semicontinuità Superiore (UHC).
Formula Chiave: Test del grafico chiuso.

Modulo 2: La Strategia per l'Esercizio 2

Questo esercizio ha due varianti principali (a volte appaiono successioni, ma queste sono le più comuni):

Tipo A: Insiemi [2023dec, 2024feb]

Domanda: Stabilire se un insieme $S \subset \mathbb{R}^2$ è aperto, chiuso, o nessuno dei due.
Formula Chiave: Analisi delle (dis)uguaglianze.

Tipo B: Corrispondenze [2023oct, 2024gen]

Domanda: Disegnare il grafico e verificare la Semicontinuità Superiore (UHC).
Formula Chiave: Test del grafico chiuso.

La strategia comune

Entrambi i tipi si risolvono con un'analisi "visiva" (o quasi-visiva) dei **bordi** (le frontiere) dell'insieme o del grafico.

Riferimenti Esami: [2023dec19, 2024feb05, 2023oct31, 2024gen10]

"Formula Chiave" (Insiemi): La Topologia in 30 Secondi (1/2)

Dato un insieme $S = \{(x, y) : \; f(x, y) \sim 0, \; g(x, y) \sim 0, \dots\}$, dove f, g sono continue e $\sim$ è un simbolo di (dis)uguaglianza.

Caso 1: APERTO

Tutte le disuguaglianze sono **strette** $(<, >)$.

- **Esempio [2024feb05]:** $S = \{(x, y) : e^{x+3y} < 10, \;\; x^4 - y^3 > 7\}$
- $f_1(x, y) = e^{x+3y} - 10 < 0$ e $f_2(x, y) = x^4 - y^3 - 7 > 0$.
- Entrambi definiscono insiemi aperti. L'intersezione (finita) di aperti è **aperta**.

“Formula Chiave” (Insiemi): La Topologia in 30 Secondi (1/2)

Dato un insieme $S = \{(x, y) : \ f(x, y) \sim 0, \ g(x, y) \sim 0, \dots\}$, dove f, g sono continue e $\sim$ è un simbolo di (dis)uguaglianza.

Caso 1: APERTO

Tutte le disuguaglianze sono **strette** $(<, >)$.

- **Esempio [2024feb05]:** $S = \{(x, y) : e^{x+3y} < 10, \ \ x^4 - y^3 > 7\}$
- $f_1(x, y) = e^{x+3y} - 10 < 0$ e $f_2(x, y) = x^4 - y^3 - 7 > 0$.
- Entrambi definiscono insiemi aperti. L’intersezione (finita) di aperti è **aperta**.

Caso 2: CHIUSO

Tutte le disuguaglianze sono **non-strette** $(\leq, \geq)$.

- **Esempio:** $S = \{(x, y) : x + y \leq 5, \ \ x \geq 0\}$
- L’intersezione (arbitraria) di chiusi è **chiusa**.

Dato un insieme $S = \{(x, y) : \ f(x, y) \sim 0, \ g(x, y) \sim 0, \dots\}$, dove f, g sono continue e $\sim$ è un simbolo di (dis)uguaglianza.

Caso 3: NÉ APERTO NÉ CHIUSO (La trappola più comune!)

C'è un **mix** di disuguaglianze strette e non-strette.

- **Esempio [2023dec19]:** $S = \{(x, y) : x \geq 2, y \geq 3, x + y < 8\}$
- **Giustificazione:** L'insieme contiene *alcuni* punti della sua frontiera (es. il punto $(2, 3)$), ma non *tutti* (es. i punti sulla retta $x + y = 8$, come $(3, 5)$, sono punti di accumulazione ma non appartengono a S).
- Se un insieme non è chiuso e non è aperto, è **né aperto né chiuso**.

“Formula Chiave” (Corrispondenze): Il Test del Grafico Chiuso

Domanda: $F(x)$ è Upper Hemicontinuous (UHC)?

Definizione Pratica (Test del Grafico Chiuso)

Per domini e codomini compatti (come negli esercizi), UHC $\iff$ Grafico Chiuso.

Ricetta:

1. Disegnate il grafico (il passo più importante!).
2. Identificate i punti x_0 dove il grafico “salta”.
3. Prendete una successione $x_n \to x_0$ (es. $x_n \to x_0^-$ o $x_n \to x_0^+$).
4. Prendete una successione $y_n \to y_0$ tale che $y_n \in F(x_n)$.
5. Il grafico è chiuso (e F è UHC) in x_0 se il punto limite (x_0, y_0) appartiene al grafico, cioè se $y_0 \in F(x_0)$.

"Formula Chiave" (Corrispondenze): Il Test del Grafico Chiuso

Domanda: $F(x)$ è Upper Hemicontinuous (UHC)?

Definizione Pratica (Test del Grafico Chiuso)

Per domini e codomini compatti (come negli esercizi), UHC $\iff$ Grafico Chiuso.

Ricetta:

1. Disegnate il grafico (il passo più importante!).
2. Identificate i punti x_0 dove il grafico "salta".
3. Prendete una successione $x_n \to x_0$ (es. $x_n \to x_0^-$ o $x_n \to x_0^+$).
4. Prendete una successione $y_n \to y_0$ tale che $y_n \in F(x_n)$.
5. Il grafico è chiuso (e F è UHC) in x_0 se il punto limite (x_0, y_0) appartiene al grafico, cioè se $y_0 \in F(x_0)$.

In breve: $F(x_0)$ deve "catturare" tutti i punti limite provenienti da $F(x_n)$.

Esempio Pratico: UHC vs NON UHC (1/2)

Confrontiamo due esercizi d'esame.

UHC [2023oct31]

$$F(x) = \begin{cases} [3,6] & \text{per } 1 \leq x < 3 \\ [0,6] & \text{per } x = 3 \\ [0,3] & \text{per } 3 < x \leq 6 \end{cases}$$

Test in $x_0 = 3$:

- Sia $x_n \to 3^-$. Gli $y_n \in [3,6]$ possono convergere a $y_0 \in [3,6]$.
- Sia $x_n \to 3^+$. Gli $y_n \in [0,3]$ possono convergere a $y_0 \in [0,3]$.
- L'insieme dei punti limite y_0 è $[0,3] \cup [3,6] = [0,6]$.
- **Verifica:** L'insieme dei limiti è contenuto in $F(3)$?
- $[0,6] \subseteq F(3)$?
- $F(3) = [0,6]$.
- $[0,6] \subseteq [0,6]$. **Sì. È UHC**.

Esempio Pratico: UHC vs NON UHC (2/2)

Confrontiamo due esercizi d'esame.

NON UHC [2024gen10]

$$F(x) = \begin{cases} [1, x] & \text{per } 1 \leq x < 4 \\ [1, 1] & \text{per } x = 4 \end{cases}$$

Test in $x_0 = 4$:

- Sia $x_n \to 4^-$ (es. $x_n = 4 - 1/n$).
- Sia $y_n = x_n$. Notiamo che $y_n \in F(x_n) = [1, x_n]$.
- $y_n \to 4$. Quindi $y_0 = 4$.
- Il punto limite è $(x_0, y_0) = (4, 4)$.
- **Verifica:** $y_0 \in F(x_0)$?
- $4 \in F(4)$? $F(4) = [1, 1]$.
- $4 \notin [1, 1]$. **Test fallito. NON è UHC**.

Questo esercizio è uno dei più **prevedibili** dell'esame.

Le domande sono SEMPRE due [2023dec19, 2024feb5, 2024jan10, 2024dec12]

1. Trovare le **soluzioni stazionarie** (punti di equilibrio).
2. Verificare se sono **localmente asintoticamente stabili** (o instabili, o selle).

Questo esercizio è uno dei più **prevedibili** dell'esame.

Le domande sono SEMPRE due [2023dec19, 2024feb5, 2024jan10, 2024dec12]

1. Trovare le **soluzioni stazionarie** (punti di equilibrio).
2. Verificare se sono **localmente asintoticamente stabili** (o instabili, o selle).

La strategia vincente

Esiste un'unica "ricetta" procedurale che funziona per **tutti** i sistemi (continui e discreti, lineari e non lineari).
L'unica cosa che cambia è il criterio di stabilità finale.

Riferimenti Esami: [2023dec19, 2024feb5, 2024jan10, 2024dec12]

"Formula Chiave": La Ricetta Jacobiana in 4 Passi (1/2)

Passo 1: Trovare gli Equilibri (x^*, y^*)

- **Sistemi Continui** $(\dot{x}, \dot{y})$ [2023dec19, 2024feb5]: Risolvere $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = 0 \\ \dot{y} = g(x, y) = 0 \end{cases}$
- **Sistemi Discreti** (x_{t+1}, y_{t+1}) [2024jan10, 2024dec12]: Risolvere $\begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(x, y) \end{cases}$

"Formula Chiave": La Ricetta Jacobiana in 4 Passi (1/2)

Passo 1: Trovare gli Equilibri (x^*, y^*)

- **Sistemi Continui ($\dot{x}, \dot{y}$)** [2023dec19, 2024feb5]: Risolvere $\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) = 0 \\ \dot{y} = g(x, y) = 0 \end{cases}$
- **Sistemi Discreti (x_{t+1}, y_{t+1})** [2024jan10, 2024dec12]: Risolvere $\begin{cases} x = f(x, y) \\ y = g(x, y) \end{cases}$

Passo 2: Calcolare la Matrice Jacobiana

Si calcola la matrice delle derivate parziali delle funzioni f e g.

$$J(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(N.B. Per i sistemi discreti $f(x, y) = x_{t+1}$ e $g(x, y) = y_{t+1}$)

"Formula Chiave": La Ricetta Jacobiana in 4 Passi (2/2)

Passo 3: Valutare J in ogni Equilibrio

Calcolare la matrice numerica $J(x^*, y^*)$ per *ogni* punto di equilibrio (x^*, y^*) trovato al Passo 1.

“Formula Chiave”: La Ricetta Jacobiana in 4 Passi (2/2)

Passo 3: Valutare J in ogni Equilibrio

Calcolare la matrice numerica $J(x^*, y^*)$ per *ogni* punto di equilibrio (x^*, y^*) trovato al Passo 1.

Passo 4: Trovare gli Autovalori (λ_1, λ_2)

Per ogni matrice $J(x^*, y^*)$, risolvere l'equazione caratteristica:

$$\text{Det}(J(x^*, y^*) - \lambda I) = 0$$

(Shortcut: $\lambda^2 - \text{Tr}(J)\lambda + \text{Det}(J) = 0$)

La Ricetta Jacobiana: Passo 5 (Il Criterio di Stabilità)

Questo è l'unico passo che **differenzia** i sistemi continui e discreti. Una volta trovati gli autovalori λ_1, λ_2, usate questa tabella:

Natura dell'Equilibrio	**Sistemi CONTINUI ($\dot{x}, \dot{y}$)** [2023dec19, 2024feb5]	**Sistemi DISCRETI (x_{t+1}, y_{t+1})** [2024jan10, 2024dec12]
Localmente Asint. Stabile	$Re(\lambda_1) < 0$ **e** $Re(\lambda_2) < 0$	$\lvert\lambda_1\rvert < 1$ **e** $\lvert\lambda_2\rvert < 1$
(*Stable Node/Focus*)	(Autovalori nel semipiano negativo)	(Autovalori nel cerchio unitario)
Instabile	$Re(\lambda_1) > 0$ **o** $Re(\lambda_2) > 0$	$\lvert\lambda_1\rvert > 1$ **o** $\lvert\lambda_2\rvert > 1$
(*Unstable Node/Focus*)	(Almeno un autovalore a destra)	(Almeno un autovalore fuori)
Sella	$Re(\lambda_1) < 0$, $Re(\lambda_2) > 0$ (o viceversa)	$\lvert\lambda_1\rvert < 1$, $\lvert\lambda_2\rvert > 1$ (o viceversa)
(*Saddle Point*)	(Autovalori con segni reali opposti)	(Un autovalore dentro, uno fuori)
Casi Limite / Indefiniti	$Re(\lambda_i) = 0$	$\lvert\lambda_i\rvert = 1$
(*Center, etc.*)	(Studio non lineare necessario)	(Studio non lineare necessario)

Tabella: Criteri di Stabilità Locale per gli Autovalori (λ_1, λ_2)

Questo esercizio ha due varianti. Il vostro primo compito è riconoscerle **immediatamente**.

La domanda chiave da porsi

L'integrale da ottimizzare contiene una **variabile di controllo** $u(t)$ separata, oltre a $x(t)$ e $\dot{x}(t)$?

Questo esercizio ha due varianti. Il vostro primo compito è riconoscerle **immediatamente**.

La domanda chiave da porsi

L'integrale da ottimizzare contiene una **variabile di controllo** $u(t)$ separata, oltre a $x(t)$ e $\dot{x}(t)$?

Caso A: NO $u(t)$ [2024jan10, 2024feb5, 2024dec12]

Riconoscimento:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t)) dt$$

L'integrale dipende solo da $t, x, \dot{x}$.
Tipo di Problema: Calcolo delle Variazioni (CdV)
Formula Chiave: Equazione di Eulero-Lagrange

Questo esercizio ha due varianti. Il vostro primo compito è riconoscerle **immediatamente**.

La domanda chiave da porsi

L'integrale da ottimizzare contiene una **variabile di controllo** $u(t)$ separata, oltre a $x(t)$ e $\dot{x}(t)$?

Caso B: SÌ $u(t)$ [2023dec19]

Riconoscimento:

$$\max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), u(t))dt$$

soggetto a $\dot{x}(t) = G(t, x(t), u(t))$
Tipo di Problema: Controllo Ottimo (OC)
Formula Chiave: Hamiltoniana

"Formula Chiave" Caso A: Calcolo delle Variazioni (1/2)

Problema: $\max \int_{t_0}^{t_1} F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$

Ricetta: Equazione di Eulero-Lagrange

La funzione $x(t)$ ottimale *deve* soddisfare:

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

"Formula Chiave" Caso A: Calcolo delle Variazioni (2/2)

Esempio [2024jan10]

min $\int_0^1 [2t^2 + \dot{x}(t)^2] dt$, con $x(0) = 0, x(1) = 1$.

1. **Identificare F:** $F(t, x, \dot{x}) = 2t^2 + \dot{x}^2$.
2. **Calcolare derivate:**
   - $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$ (tratta x come variabile, $\dot{x}$ come costante)
   - $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 2\dot{x}$ (tratta $\dot{x}$ come variabile, x come costante)
3. **Applicare Eulero-Lagrange:**
$$0 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}) = 0$$
$$-2\ddot{x} = 0 \implies \ddot{x} = 0$$
4. **Risolvere l'Equazione Differenziale:** $\ddot{x} = 0 \implies \dot{x}(t) = C_1 \implies x(t) = C_1 t + C_2$.
5. **Usare condizioni al contorno:** $x(0) = 0 \implies C_1(0) + C_2 = 0 \implies C_2 = 0$.
   $x(1) = 1 \implies C_1(1) + 0 = 1 \implies C_1 = 1$.
6. **Soluzione:** $x(t) = t$.

“Formula Chiave” Caso B: Controllo Ottimo (1/2)

Problema: $\max \int F(t, x, u)dt$ soggetto a $\dot{x} = G(t, x, u)$.

Ricetta: Principio del Massimo di Pontryagin

1. **Scrivere l'Hamiltoniana (H):**

$$H(t, x, u, \lambda) = F(t, x, u) + \lambda \cdot G(t, x, u)$$

2. **Applicare le 3 Condizioni Necessarie:**
   (1) **Ottimizzazione Controllo:** $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \implies$ (Si ricava $u^* = \dots$)
   (2) **Equazione di Costato:** $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$
   (3) **Equazione di Stato:** $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}$ (restituisce il vincolo G)
3. **Risolvere** il sistema di equazioni differenziali in (x, λ) usando le condizioni al contorno.

“Formula Chiave” Caso B: Controllo Ottimo (2/2)

Esempio [2023dec19]

max $\int_0^1 -u(t)^2 dt$, s.t. $\dot{x} = x + u$, $x(0) = 1$.

- $F = -u^2$, $G = x + u$.
- **(H)** $H = -u^2 + \lambda(x + u)$.
- **(1)** $\frac{\partial H}{\partial u} = -2u + \lambda = 0 \implies u = \lambda/2$.
- **(2)** $\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -(\lambda) \implies \dot{\lambda} = -\lambda$.
- **(3)** $\dot{x} = x + u \implies \dot{x} = x + \lambda/2$.
- *(Ora si deve “solo”) risolvere il sistema* $\dot{\lambda} = -\lambda$ *e* $\dot{x} = x + \lambda/2$ *con le condizioni al contorno...)*

Le 4 "Ricette Chiave" da ricordare (1/2)

Questa lezione ha mostrato che 4 esercizi apparentemente complessi si basano su procedure fisse.

Ex. 1 (Vero/Falso)

Non farti ingannare. Pensa ai 3-4 controesempi classici (es. $x_k = (-1)^k$, $f(x) = c$) e scegli la "verità" più facile da dimostrare (es. $Ker(I)$ è sottospazio).

Le 4 "Ricette Chiave" da ricordare (1/2)

Questa lezione ha mostrato che 4 esercizi apparentemente complessi si basano su procedure fisse.

Ex. 1 (Vero/Falso)

Non farti ingannare. Pensa ai 3-4 controesempi classici (es. $x_k = (-1)^k$, $f(x) = c$) e scegli la "verità" più facile da dimostrare (es. $Ker(I)$ è sottospazio).

Ex. 2 (Insiemi/UHC)

Guarda i **bordi**.

- *Insiemi:* Mix di $\leq$ e $<$ $\implies$ Né aperto né chiuso.[2023dec19]
- *UHC:* Controlla se $F(x_0)$ "cattura" i limiti y_0 (Test Grafico Chiuso).[2023oct31, 2024gen10]

Le 4 "Ricette Chiave" da ricordare (2/2)

Ex. 3 (Sistemi Dinamici)

È **sempre** la stessa ricetta in 5 passi: **Equilibri** $\rightarrow$ **Jacobiano** $\rightarrow$ **Valuta** $J(x^*)$ $\rightarrow$ **Autovalori** $\rightarrow$ **Criterio Stabilità.**

- Attenzione: Continuo $(Re(\lambda) < 0)$ vs Discreto $(|\lambda| < 1)$.

Le 4 "Ricette Chiave" da ricordare (2/2)

Ex. 3 (Sistemi Dinamici)

È **sempre** la stessa ricetta in 5 passi: **Equilibri** $\rightarrow$ **Jacobiano** $\rightarrow$ **Valuta** $J(x^*)$ $\rightarrow$ **Autovalori** $\rightarrow$ **Criterio Stabilità.**

- Attenzione: Continuo ($Re(\lambda) < 0$) vs Discreto ($|\lambda| < 1$).

Ex. 4 (Ottimizzazione Dinamica)

È una domanda binaria:

- Solo $x, \dot{x}$? $\implies$ **Eulero-Lagrange**.
- Appare $u(t)$? $\implies$ **Hamiltoniana**.

In bocca al lupo per l'esame!