

Ottica e Laboratorio - canale M-Z

Relazione sulla prima esperienza di laboratorio

L. Pietropaoli

27 settembre 2024

1 Modello teorico

Quando si indaga la (auto)coerenza spazio-temporale di un laser a He-Ne, un interferometro come quello di Michelson è utile per studiare la funzione di mutua correlazione (Γ_{12}) e il grado di correlazione (γ_{12}) dei fasci laser splittati (1 e 2):

$$\Gamma_{12}(\tau) = \langle E(t) E^*(t+\tau) \rangle_t ; \quad \gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{\Gamma_{11}(\tau=0) \Gamma_{22}(\tau=0)}} = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{\sqrt{I_1 I_2}} ; \quad \tau = \frac{\text{OPD}}{c} = \frac{2|d_2 - d_1|}{c} .$$

Con I è indicata l'intensità del campo elettromagnetico (E) emesso da una sorgente luminosa, che se risulta dalla sovrapposizione delle due componenti precedentemente divise e poi ricongiunte dal beam splitter, sarà

$$I = \langle E E^* \rangle_t = \langle (E_1 + E_2) (E_1^* + E_2^*) \rangle_t = \langle |E_1|^2 \rangle_t + \langle |E_2|^2 \rangle_t + 2 \Re \langle E_1 E_2^* \rangle_t .$$

Nella presente esperienza di laboratorio si è misurata una quantità che prende il nome di visibilità,

$$V(\tau) = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}(\tau)| , \quad (1.1)$$

e si è voluto inferire un'espressione per il valore assoluto del grado di correlazione (che in generale, per inciso, è una funzione complessa), che si calcola invertendo l'[Equazione 1.1](#):

$$|\gamma_{12}(\tau)| = \frac{I_1 + I_2}{2\sqrt{I_1 I_2}} V(\tau) . \quad (1.2)$$

Se ci si restringe a voler studiare la coerenza temporale del laser - che è il caso dell'interferometro di Michelson, in cui un fotodiodo rileva la sovrapposizione dei fasci ricongiunti, dopo che quest'ultima è magnificata attraverso una lente che inoltre ne attenua l'intensità - si può calcolare la visibilità dalle misure dei massimi di oscillazione nelle frange di interferenza dell'intensità luminosa:

$$V(\tau) = \frac{I_{\text{MAX}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{MAX}} + I_{\text{min}}} . \quad (1.3)$$

2 Dati sperimentali

I punti raccolti e altri dati utili sono visibili in [Tabella 1](#) e [Tabella 2](#). Per quanto riguarda la valutazione dell'errore sulle misure di intensità I_1 e I_2 , effettuate oscurando uno specchio alla volta, si è tenuto conto sia della scala e del fatto che a tale scala la lettura della misura fosse meglio effettuata come una media delle fluttuazioni - giudicate stocastiche - del valore entro un certo intervallo, ad esempio:

$$\langle I_1^{[0]} \rangle = \frac{1}{2} (\max\{I_1^{[0]}\} + \min\{I_1^{[0]}\}) = \frac{1}{2} (72.4 + 65.0) \text{ mV} = 68.7 \text{ mV}$$
$$\sigma_{I_1} = \frac{\text{scala}}{10} = 0.2 \text{ mV} (\approx 0.3\%) \quad \text{oppure} \quad \sigma_{I_1} = \frac{1}{2} (\max\{I_1^{[0]}\} - \min\{I_1^{[0]}\}) = 3.7 \text{ mV} (\approx 5.4\%)$$

Come si vede, in quadratura l'incertezza di scala viene sovrastata da quella calcolata sull'intervallo di oscillazione; quest'ultima sembra perciò sufficientemente accurata per essere affiancata alle misure di intensità dei singoli fasci splittati. In maniera simile - e, laddove i contributi fossero confrontabili, facendo il calcolo preciso - sono state stimate le incertezze sulle misure di corrente minima e massima, mentre il valore atteso è stato stimato con una misura diretta al cursore.

3 Analisi e risultati

Si vuole inferire essenzialmente la **lunghezza della cavità del laser** L e il suo **tempo di coerenza** τ_c , nonché quanti siano i modi di oscillazione del laser. L'espressione, con cui fittare i dati variando N (numero di modi), che esprime il grado di coerenza è

$$|\gamma(\tau)| = \frac{e^{-\delta(|\tau|/2)} \sin(N \Delta\omega \frac{\tau}{2})}{N \sin(\Delta\omega \frac{\tau}{2})}; \quad \delta \equiv \frac{2}{\tau_c}; \quad \Delta\omega (= \text{FSR}) = \frac{\pi c}{\Delta L}.$$

Essendo il caso $N = 1$ un esponenziale decrescente, si indagano i casi $N > 1$. Inoltre, per $N \geq 4$, si riscontra che con i **bounds**¹ opportunamente inseriti nel fit, si osservano valori della visibilità maggiori di 1: poiché per costruzione non stiamo studiando la risonanza, scartiamo questi casi. Restano i casi $N = 2$ e $N = 3$: in **Figura 1** si vedono i risultati ottenuti. Calcolando il χ^2 per i due casi si ottiene

$$\chi^2 = \frac{\sum_{k=1}^{15} (E[|\gamma_k|] - |\gamma_k|)^2}{\sigma_{|\gamma_k|}^2} \approx \begin{cases} 99 & N_{\text{modi}} = 2 \\ 142 & N_{\text{modi}} = 3 \end{cases},$$

su un valore atteso per il χ^2 di questa misura pari a $N_{\text{samples}} - \text{d.o.f.} = 15 - 2 = 13$.² Sembra, dai valori di tabella reperibili su qualsiasi **sito web**, che la misura non sia accettabile a nessun grado di confidenza. Ovviamente non è sensato concludere che l'esperimento è stato un fallimento: il limitato numero di misure non ha permesso, probabilmente, di comprendere più a fondo l'andamento della funzione di coerenza, e questo si è riflettuto nell'assegnare incertezze (preponderantemente strumentali) ai punti in sottostima rispetto a ciò che si sarebbe dovuto fare per ottenere un valore di χ^2 più basso. Tuttavia, come si può osservare anche in **Figura 1**, un buon discriminante lo costituisce la stima dei parametri τ_c e ΔL , che risultano fisicamente sensati in entrambi i casi, ma nel caso $N = 3$ sono da scartare in base ai valori della lunghezza di cavità riportati nel datasheet. Concludiamo, pertanto, che il modello da considerare migliore per descrivere il laser studiato è quello a **due modi** di oscillazione, con un **tempo di coerenza** $\tau_c = (4.4 \pm 1.1)\text{ns}$ e una **lunghezza di cavità** $\Delta L = (40.9 \pm 1.7)\text{cm}$, compatibile a una sigma con il valore di datasheet.

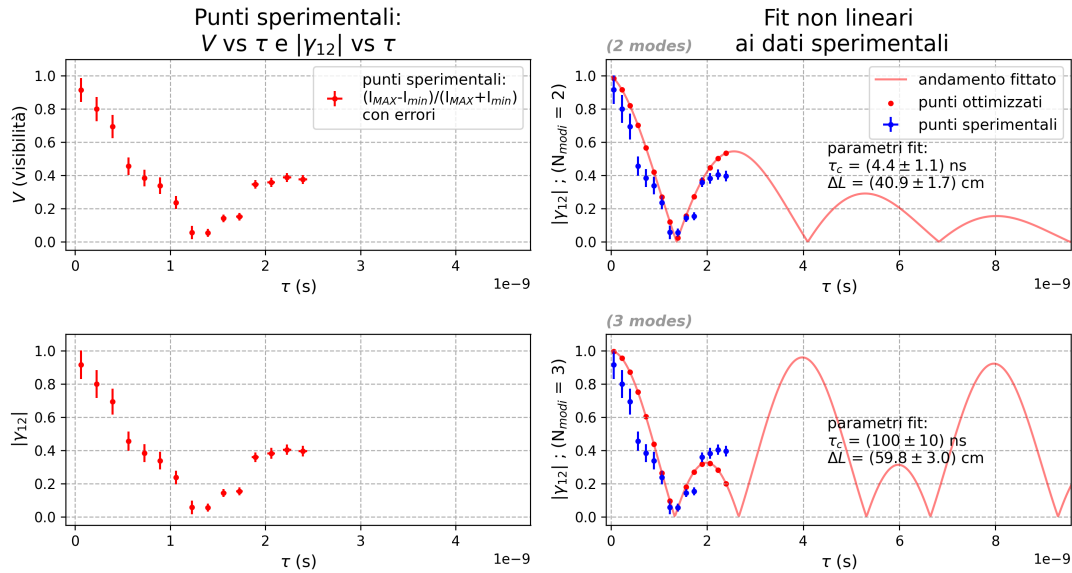


Figura 1: A sinistra, grafico dei punti sperimentali per la visibilità e il grado di coerenza in funzione del tempo, con le relative incertezze su tutte le variabili. A destra, il grafico dei fit ai punti usando le versioni a due e tre modi della funzione **evidenziata**.

¹Il programma impiegato per implementare la regressione ha la possibilità di ricevere delle condizioni sui parametri da inserire nel fit. Questo è diventato necessario poiché, visto l'esiguo numero di punti che si è riusciti a prendere in laboratorio durante l'esperienza, senza alcun intervento l'algoritmo collassava sul fit esponenziale, ossia con tempo di coerenza che tende a zero. Allora, oltre a chiedere un tempo di coerenza maggiore di zero, si è imposto che la lunghezza della cavità laser rientrasse nei parametri esposti nel datasheet dell'oggetto usato (<https://www.thorlabs.com/thorproduct.cfm?partnumber=HNL050L#ad-image-0> - lunghezza interna 400.56 mm).

²I due gradi di libertà sono da attribuire all'inferenza dei parametri δ e $\Delta\omega$, da cui poi si ottengono τ_c e ΔL .

Osservazioni sperimentali (15 punti)							
	d_1 (cm)	I_1 (mV)	I_2 (mV)	sc. (mV)	I_{\min} (mV)	I_{\max} (mV)	sc. (mV)
d_1	9.0 ± 0.1	66.7 ± 4.2	75.5 ± 4.1	5	10 ± 10	268 ± 10	50
$d_1 + 1 \cdot \Delta d$	11.5 ± 0.1	66.7 ± 4.2	64.5 ± 3.4	5	24 ± 10	232 ± 10	50
$d_1 + 2 \cdot \Delta d$	14.0 ± 0.2	66.7 ± 4.2	65.7 ± 3.2	5	38 ± 10	220 ± 10	50
$d_1 + 3 \cdot \Delta d$	16.5 ± 0.3	66.7 ± 4.2	58.9 ± 3.1	5	66 ± 8	180 ± 8	20
$d_1 + 4 \cdot \Delta d$	19.0 ± 0.4	66.7 ± 4.2	62.7 ± 2.9	5	77 ± 8	176 ± 8	20
$d_1 + 5 \cdot \Delta d$	21.5 ± 0.5	66.7 ± 4.2	61.2 ± 3.1	5	82 ± 8	186 ± 8	20
$d_1 + 6 \cdot \Delta d$	24.0 ± 0.6	66.7 ± 4.2	57.2 ± 3.3	5	91 ± 6	149 ± 6	10
$d_1 + 7 \cdot \Delta d$	26.5 ± 0.7	66.7 ± 4.2	48.7 ± 3.4	5	106 ± 6	119 ± 6	10
$d_1 + 8 \cdot \Delta d$	29.0 ± 0.8	121 ± 3	76.8 ± 3.1	5	182 ± 6	203 ± 6	10
$d_1 + 9 \cdot \Delta d$	31.5 ± 0.9	121 ± 3	82.6 ± 3.1	5	170 ± 6	227 ± 6	10
$d_1 + 10 \cdot \Delta d$	34.0 ± 1.0	121 ± 3	82.9 ± 3.1	5	169 ± 6	230 ± 6	10
$d_1 + 11 \cdot \Delta d$	36.5 ± 1.1	121 ± 3	68.5 ± 3.2	5	120 ± 6	249 ± 6	10
$d_1 + 12 \cdot \Delta d$	39.0 ± 1.2	121 ± 3	56.7 ± 3.2	5	111 ± 6	237 ± 6	10
$d_1 + 13 \cdot \Delta d$	41.5 ± 1.3	121 ± 3	65.9 ± 3.5	5	110 ± 6	252 ± 6	10
$d_1 + 14 \cdot \Delta d$	44.0 ± 1.4	121 ± 3	61.5 ± 3.5	5	110 ± 6	245 ± 6	10

Tabella 1: Punti sperimentali. Si osservi che ai fini della misura abbiamo bisogno delle variabili somma e differenza di I_{\min} e I_{\max} , quindi in prima analisi non è tragico aver misurato ad esempio il primo minimo di intensità con un'incertezza relativa così alta. La porzione di tabella evidenziata in giallo si riferisce a misure in cui la lente ottica che si frapponeva tra il beam splitter e il fotodiodo è stata avvicinata a quest'ultimo in un tentativo di pulire l'errore relativo sull'output visualizzato all'oscilloscopio concentrando il fascio.

Altre misure utili			
grandezza	valore	unità	descrizione
d_2	8.1 ± 0.1	cm	specchio fisso
ν	≈ 8	Hz	frequenza onda triangolare piezoelettrico
Δd	2.5 ± 0.1	cm	distanza tra due buchi del tavolo ottico
c	3×10^8	m s^{-1}	velocità della luce
fondo	3.32 ± 2.04	mV	rumore luminoso di fondo (luce accesa nel laboratorio)

Tabella 2: Dati sperimentali utili per interpretare la [Tabella 1](#).