

Laboratorio di Meccanica - canale Pb-Z

Relazione sulla terza esperienza di laboratorio

Lorenzo Pietropaoli

26 settembre 2024

In questa esperienza ci si è proposti di stimare il **periodo di oscillazione** (per piccolo angolo) e la **lunghezza** del filo di un pendolo matematico, a partire da oggetti e strumenti di facile reperibilità (si veda il par. 1.2), per **verificare l'indipendenza tra massa appesa e periodo** e infine misurare l'**accelerazione di gravità**. χ^2

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Definizione del misurando	3
1.2	Apparato sperimentale	3
2	Misure	5
2.1	Indipendenza del periodo dalla massa	5
2.1.1	Precisazioni sulla massa	5
2.1.2	Periodo	6
2.1.3	Conclusioni	7
2.2	Misura di g	8
2.2.1	Lunghezza	8
2.3	Periodo	10
2.4	Regressione lineare	11

1 Introduzione

1.1 Definizione del misurando

- **lunghezza** di un filo, modellizzato come inestensibile e privo di massa¹, che costituisce assieme ad un perno e ad una massa un sistema pendolo;
- **periodo** di un pendolo matematico, per piccole oscillazioni.

1.2 Apparato sperimentale

- **cronometro** digitale di uno smartphone (modello *Samsung Galaxy S7*), con risoluzione pari a $0.01s$, per le misure di tempo;
- **flessometro** pieghevole (marca *DEXTER*), con portata $5m$ e risoluzione $1mm$, per le misure di lunghezza. Come si vede in Figura 2, il metro ha un'estremità magnetica per ridurre al minimo oscillazioni in fase di misurazione;
- ca. $1m$ di **filo** in cotone, scelto in quanto offre buona resistenza alla trazione in rapporto alla massa;

N.B.: si è fatto uso anche di **nastro carta** per fissare le monete al filo² e il filo al supporto metallico (come si vede in Figura 1 e Figura 2, semplicemente un sostegno laterale d'acciaio di un mobile), nonché di una **livella a bolla** (marca *TAKY*) per ridurre l'errore di parallasse (vedi figure a pag. seguente).

¹Più precisazioni sulla validità di tali approssimazioni saranno trattate nel par. 2.2.1.

²Non è stata effettuata alcuna stima della massa del nastro adesivo in quanto non sembrava utile ai fini dell'esperienza. Si noti, però, che ne è stato usato sempre lo stesso pezzo (dunque la stessa quantità di scotch) per assicurare la massa oscillante: allora l'eventuale contributo alla massa totale dovuto al nastro si può considerare costante e quindi ininfluente ai fini dei confronti a cui si vuole arrivare.

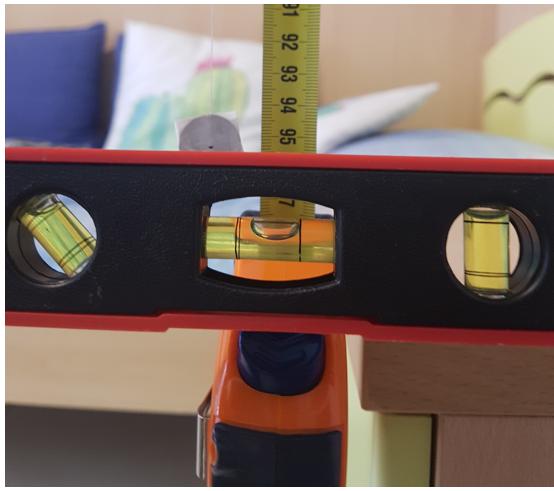


Figura 1: livella a bolla per ridurre l'errore di parallasse; il puntino nero sul nastro adesivo facilita l'allineamento del centro di massa con un valore letto sul flessometro.



Figura 2: *close-up* sul fissaggio del filo e del metro al supporto.

Come si vede in Figura 2, la misura risente di un errore di offset ($\approx 1mm$) dovuto allo spessore dei magneti grazie ai quali il flessometro è sospeso. Si sceglie di includere, nei calcoli che verranno effettuati, la stima di tale errore nell'incertezza strumentale. Per quanto possa sembrare una valutazione poco precisa, non è sembrata meno approssimativa del trascurare incertezze dovute alla flessione della fettuccia metallica durante la misura: i magneti permettono di ridurre al minimo tali effetti.

Inoltre, sia la stima di tale errore di zero che quella di eventuali errori dovuti alla flessibilità del metro (ridotti con il sistema del supporto magnetico) non è risultata fattibile visto il poco tempo a disposizione.

2 Misure

I risultati delle misure sono stati riportati sempre come $\mu = \hat{\mu} \pm \sigma_{tot}$, dove con $\hat{\mu}$ si intende la miglior stima (il valore atteso) del misurando e con σ_{tot} una deviazione standard che comprende i contributi di **tipo A** e di **tipo B** all'incertezza, così sommati in quadratura:

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \quad (2.1)$$

2.1 Indipendenza del periodo dalla massa

Dalla teoria sappiamo che, con le approssimazioni di filo inestensibile e privo di massa e sotto la sola azione della forza-peso, il periodo di un pendolo semplice per piccolo angolo³ è

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (2.2)$$

dove con ℓ indichiamo la lunghezza del filo. Risulta chiaro che il quadrato del periodo dipenda linearmente da ℓ , ma non dipenda in alcun modo dalla massa m attaccata. Con lo scopo di verificare tale indipendenza, supposta g costante o non significativamente variabile nel laboratorio, come anticipato nel brevissimo abstract, sono state effettuate misure di periodo sotto il peso di un numero progressivo n di campioni di massa nota ($n = \{1, 2\}$) ad una fissata lunghezza ℓ , del cui valore per ora non ci preoccupiamo.

e a diverse lunghezze del filo (4 valori di ℓ per ciascun valore di m).

Ci si aspetta, come si vedrà nel paragrafo dedicato (par. ??) di ottenere in linea teorica lo stesso valore di periodo per i due valori di massa: nella pratica bisognerà verificare la compatibilità dei risultati ottenuti entro le incertezze stimate.

2.1.1 Precisazioni sulla massa

Si è scelto di appendere come campioni monete da 2 centesimi di Euro (0.02 €) in quanto considerate di massa nota ($m = 3.06g$)⁴. D'altronde, l'obiettivo dell'esperienza non è la misura della massa da far oscillare all'estremità del pendolo: essa è esclusivamente un dato utile ai fini dei confronti che verranno effettuati nel par. ??.

³Si intende generalmente piccolo angolo quando, detto θ l'angolo formato dal filo con la verticale, si ha $\sin \theta \approx \theta$.

⁴Fonte: https://it.wikipedia.org/wiki/2_centesimi_di_euro.

2.1.2 Periodo

Sono state eseguite N misure ripetute di k periodi di oscillazione per ciascuno dei due pesetti. Sapendo che per misure ripetute di k periodi il valore aspettato di un singolo periodo è

$$E[T] = \frac{E[kT]}{k} \quad (2.3)$$

e sapendo inoltre che la formula 2.1 per le incertezze, nel caso esaminato, diventa

$$\sigma_{tot}(T) = \frac{1}{k} \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = \sqrt{\frac{\sigma_R^2}{Nk^2} + \frac{\sigma_B^2}{k^2}} \quad (2.4)$$

ci si rende conto come agire sul numero k di misurandi sia più efficace, ai fini della precisione della misura, di quanto lo sia agire su N . Avendo un numero di ripetute $N \geq 20$ da effettuare in base alla consegna, si è scelto di misurare di volta in volta $k = 2$ periodi di oscillazione. Tale scelta sul numero di campioni misurati contemporaneamente è dettata dalla considerazione che, come si vede in formula 2.4, si ha $\sigma_A, \sigma_B \propto \frac{1}{k}$: allora basta misurare anche pochi periodi di oscillazione (rimandiamo alla sezione 2.3 per ulteriori considerazioni) per scalare notevolmente entrambi i contributi all'incertezza finale. Visti i limiti di tempo imposti, inoltre, si è scelto di fissare $N = 20$.

Dopo qualche prova è risultato chiaro che questi valori di N e k permettevano stime comparabili delle σ_A e σ_B . Si è raccolto in Tabella 3 e Figura 4 i risultati delle misure condotte⁵, che verranno successivamente commentati, e in Figura 3 si può confrontare i dati raccolti per **due periodi** di oscillazione al variare della massa.

N.B.: non essendo stato possibile effettuare calibrazioni (visti i limiti di tempo) o ottenere informazioni dal costruttore del cronometro riguardo incertezze strumentali, si è assunto $\sigma_B = \sigma_{str}$, dove quest'ultima è stata valutata come $\frac{I}{\sqrt{12}}$, con I intervallo di discriminazione dello strumento⁶, nella valida ipotesi che la grandezza misurata (tempo) si distribuisca in modo uniforme in I .

⁵**N.B.:** si è indicato con indice 1 il periodo del pendolo con massa corrispondente ad una moneta, e con indice 2 quello del pendolo con 2 monete appese.

⁶Si ricorda $I = 0.01\text{s}$ nel caso del cronometro.

<i>indice</i>	<i>stima [s]</i>	$\sigma_A/k [s]$	$\sigma_B/k [s]$	$\sigma_{tot} [s]$	<i>risultato</i>
T_1	1.994	0.0062	0.0014	0.0064	$(1.9940 \pm 0.0064)s$
T_2	2.000	0.0052	0.0014	0.0054	$(2.0000 \pm 0.0054)s$

Tabella 1: risultati per il periodo di oscillazione.

2.1.3 Conclusioni

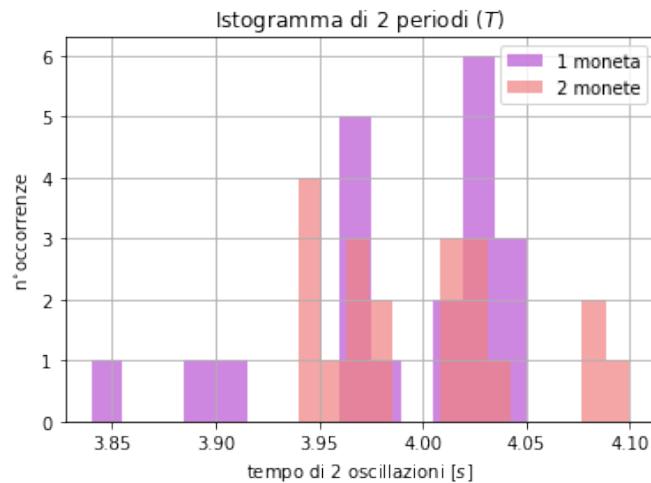


Figura 3: sovrapponendo gli istogrammi dei dati raccolti su kT , per la massa 1 e 2, è notevole come già per $N = 20$ si osserva la tendenza gaussiana della distribuzione dei valori misurati.

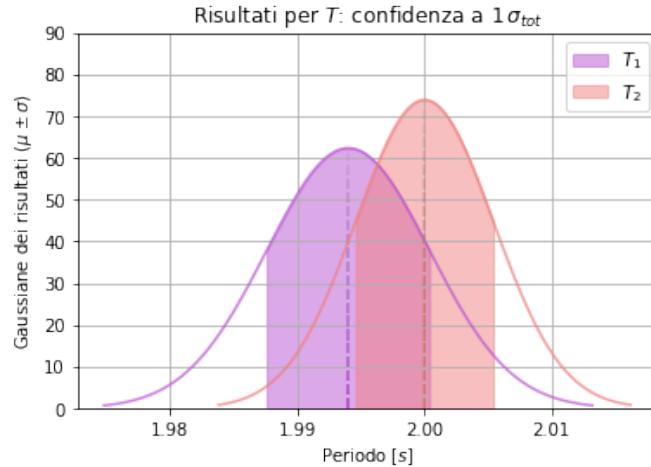


Figura 4: distribuzioni Normali corrispondenti ai risultati delle due misure di periodo.

Come si vede bene in Figura 4, le due misure risultano perfettamente compatibili entro le incertezze fornite. Si conclude che il periodo di un pendolo matematico non dipende dalla massa appesa al filo, come ci si aspettava dalle formule.

2.2 Misura di g

A partire da misure di lunghezza e di periodo, come è chiaro dalla formula 2.2, si può ricavare il valore dell'accelerazione di gravità g :

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T^2} \quad (2.5)$$

Siamo interessati, tuttavia, a calcolare l'accelerazione di gravità a partire dalla legge, sempre facilmente ricavata dalla 2.2, che esprime il quadrato del periodo in funzione della lunghezza:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \ell \quad (2.6)$$

tramite regressione lineare. A tale scopo, calcoleremo i valori del periodo di oscillazione corrispondenti a 4 lunghezze stabilite del filo, appendendo una massa corrispondente ad una moneta; l'elaborazione dei risultati e il *fit* lineare verranno trattati nel par. 2.4.

2.2.1 Lunghezza

La lunghezza del filo è stata misurata, come detto, 4 volte. Si precisa che la misura, come mostrato in Figura 1, è stata effettuata con la massa già appesa al filo e in posizione di equilibrio. Così facendo si è cercato di evitare o di ridurre al minimo l'effetto dell'allungamento elastico del filo dovuto alla massa.

L'incertezza di misura è stata stimata secondo la formula 2.1, in cui ovviamente figurano i contributi di **tipo A** e di **tipo B**. In particolare, vista la mancanza di informazioni di riferimento da parte del costruttore sull'errore massimo del metro e l'impossibilità (viste le restrizioni di tempo) di effettuare una calibrazione, l'incertezza di tipo B è stata fatta coincidere con quella strumentale (σ_{str}) e stimata, vista la natura analogica dello strumento, come $\frac{1}{4}$ di *tacca*⁷ del flessometro (incertezza di lettura).

La sigma di tipo A è stata invece stimata considerando l'incertezza sul valor medio

⁷Si veda par. 1.2.

della lunghezza dopo $N^{(8)}$ misure ripetute della lunghezza del filo. Pertanto, la stima totale corrisponde a

$$\sigma_{tot}(\ell) = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} = \sqrt{\frac{\sigma_R^2}{N} + \sigma_B^2} \quad (2.7)$$

Le quattro lunghezze decise, misurate dal perno al centro geometrico della massa appesa (che è sembrata una buona approssimazione del centro di massa della stessa) e riportate come $\mu = \hat{\mu} \pm \sigma_{tot}(\mu)$, sono quindi raccolte in Tabella 2 con le relative incertezze.

<i>indice</i>	<i>stima [mm]</i>	$\sigma_A [mm]$	$\sigma_B [mm]$	$\sigma_{tot} [mm]$	<i>risultato</i>
ℓ_1	952.40	0.15	0.25	0.29	$(952.40 \pm 0.29)mm$
ℓ_2	740.60	0.21	0.25	0.32	$(740.60 \pm 0.32)mm$
ℓ_3	579.90	0.15	0.25	0.27	$(579.90 \pm 0.27)mm$
ℓ_4	350.05	0.13	0.25	0.28	$(350.05 \pm 0.28)mm$

Tabella 2: risultati delle misure di lunghezza del filo.

I 4 valori della lunghezza del filo sono stati scelti tali che $\ell > 20cm$ per aumentare la precisione nell'approssimare l'angolo di fase iniziale θ_0 ad un angolo piccolo.

Questo perché, fissata un'ampiezza iniziale A_0 a cui è comodo far partire le oscillazioni, al diminuire di ℓ aumenta l'angolo ($\ell \sin \theta_0 \propto A_0$).

Viceversa, a parità di angolo iniziale, fili lunghi permettono rendono il fenomeno oscillatorio meglio osservabile, poiché $T \propto \sqrt{\ell}$: se infatti il processo di misurazione consiste nel fermare lo *stopwatch* quando il punto materiale passa attraverso una determinata posizione (nel caso delle misurazioni effettuate, quando passa per il centro dopo aver effettuato k oscillazioni complete), allora un fenomeno più "dilatato" nel tempo permette di ridurre errori sistematici (ad esempio dovuti ai riflessi umani) nella presa istantanea del valore stesso di kT .

Pur non potendolo osservare in Tabella 2 a causa delle pochissime misure effettuate (relativamente a tale scopo), al diminuire di ℓ ci si dovrebbe aspettare una minore precisione nei risultati.

⁸Dopo aver effettuato alcune prove con $N = 5 \div 10$ si è visto che $N = 5$ era il valore che ottimizzasse al meglio le tempistiche di misurazione senza incidere sulla precisione. Per questa misura, infatti, si ha una σ_B che diventa un "muro" non appena N cresce di poco: infatti, il fattore $\frac{1}{\sqrt{N}}$ scala una σ_R di per sé piuttosto bassa, viste le accortezze prese in preparazione alla misurazione. Si veda Tabella 2 e la formula 2.7 per riferimenti e confronti.

2.3 Periodo

Sono state eseguite N misure ripetute di k periodi di oscillazione. Con gli stessi principi di inferenza visti nel par. 2.1.2, utilizziamo le formule 2.3 e 2.4 per fornire una stima congrua dei valori aspettati del periodo con le relative incertezze.

Considerato il limite di tempo a disposizione per effettuare le misure, si è deciso $N = k = 5$ per le misure di periodo. Per valori di k superiori, oltretutto, si rischierebbe di perdere accuratezza nell'approssimazione di pendolo matematico, in quanto l'attrito con l'aria della moneta ricoperta di nastro adesivo (una superficie non esattamente aerodinamica) causerebbe uno smorzamento del moto e, a tempi lunghi, una variazione del periodo (in un pendolo semplice, pur smorzato, il periodo è costante nel tempo).

Si noti inoltre che, non essendo stato possibile effettuare calibrazioni o ottenere informazioni dal costruttore del cronometro riguardo incertezze strumentali, si è assunto $\sigma_B = \sigma_{str}$, dove quest'ultima è stata valutata come $\frac{I}{\sqrt{12}}$, con I intervallo di discriminazione dello strumento⁹, nella valida ipotesi che la grandezza misurata (tempo) si distribuisca in modo uniforme in I .

Come si vede nei dati riportati sotto¹⁰, inoltre, tale scelta ha permesso di ottenere due contributi dello stesso ordine di grandezza per la σ_A e per la σ_B , quindi confrontabili nella somma in quadratura che dà la σ_{tot} .

N.B: si è indicato con indice 1 il periodo del pendolo di massa corrispondente a 1 moneta (si ricorda $m = 3.06g$).

lunghezza	indice	stima [s]	σ_A/k [s]	σ_B/k [s]	σ_{tot} [s]	risultato
ℓ_1	T_1	1.9572	0.00015	0.00012	0.00019	$(1.95720 \pm 0.00019)s$
ℓ_2	T_1	1.7240	0.00020	0.00012	0.00023	$(1.72400 \pm 0.00023)s$
ℓ_3	T_1	1.5364	0.00022	0.00012	0.00025	$(1.53640 \pm 0.00025)s$
ℓ_4	T_1	1.1940	0.00036	0.00012	0.00038	$(1.19400 \pm 0.00038)s$

Tabella 3: risultati delle misure di periodo per le corrispondenti lunghezze (vedi Tabella 2).

⁹Si ricorda $I = 0.01s$ nel caso del cronometro.

¹⁰I risultati sono riportati ancora una volta come $\mu = \hat{\mu} \pm \sigma_{tot}(\mu)$.

2.4 Regressione lineare

Per calcolare g , come si è anticipato, si può effettuare una regressione lineare a partire dalle misure di periodo al quadrato e lunghezza. Procediamo, anzitutto, col calcolo del quadrato dei periodi già visti in Tabella 3, che verranno usati come punti del *fit* assieme ai corrispettivi valori di ℓ . Essi avranno valore aspettato e incertezza dati da

$$E[T^2] = E[T]^2; \quad \sigma_{tot}(T^2) = 2T\sigma_{tot}(T) \quad (2.8)$$

Si ricorda infatti che, per una funzione $y \equiv y(x_1, \dots, x_n)$, l'incertezza si propaga come

$$\sigma_{tot}^2(y) = \sum_{i,j}^{1,n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \sigma_{ij} \quad (2.9)$$

Secondo le **formule dei minimi quadrati**, la retta migliore che lega le variabili $\vec{y} \equiv (y_1, \dots, y_n)$ e $\vec{x} \equiv (x_1, \dots, x_n)$, che sappiamo a priori essere legate da una funzione del tipo $y \equiv y(x | m, c) = mx + c$