

Laboratorio di Meccanica - canale Pb-Z

Relazione sulla quarta esperienza di laboratorio

Gruppo D1-01: L. Pietropaoli, R. F. Rosato, B. Russo, G. Vincenti

26 settembre 2024

L'esperienza svolta ha trattato principalmente lo studio del rotolamento di un cilindro costruito a partire da oggetti e materiali a disposizione in un'abitazione (le critiche condizioni sanitarie ci hanno costretti ancora una volta a lavorare da casa) lungo un piano inclinato (anch'esso ben modellizzato con oggetti di uso quotidiano, cfr. par. 1).

Si è scelto di suddividere, in base agli scopi perseguiti nella realizzazione dell'esperienza, la presente relazione in due parti:

- I. nella **prima parte** ci si è posto l'obiettivo di misurare, attraverso l'accelerometro di uno smartphone (che ha funzionato, indirettamente e impropriamente, da "sensore di inclinazione"), la velocità angolare ω di un cilindro in moto di puro rotolamento lungo un piano inclinato di $\approx 25^\circ$, per poi estrarre una stima dell'accelerazione angolare;
- II. la **seconda parte** ha mirato a ricavare l'accelerazione di gravità g a partire da misure dirette delle grandezze caratterizzanti del sistema *cilindro-sensore* che ha costituito in parte l'apparato sperimentale (cfr. par. 1), sfruttando le leggi del moto che si sono ottenute modellizzando il problema in esame (cfr. par. 3.2).

Indice

1	Apparato sperimentale e strumenti di misura	3
2	Formule utilizzate	3
3	Misure di velocità angolare ω e accelerazione angolare α	6
3.1	Assestamento dell'angolo a $\approx 25^\circ$	6
3.2	Accelerazione angolare	7
3.2.1	Presa dati	7
3.2.2	Analisi dei dati	8
4	Misure di inclinazione	11
4.1	Misure tramite <i>Phyphox</i>	11
4.2	Misure dirette	12
4.3	Calibrazione del sensore di inclinazione	14
5	Misure di α a diverse inclinazioni	15
5.1	Dipendenza lineare di α da $\sin(\theta)$	16
6	Altre misure effettuate	18
6.1	Momenti di inerzia	19
7	Stima di g	20
8	Conclusioni	21
	Confronto di g con il valore atteso	21

1 Apparato sperimentale e strumenti di misura

- **flessometro** avvolgibile per le misure di lunghezza, *tacche* a 1mm;
- **bilancia digitale di precisione** per le misure della massa, soglia di discriminazione 0.01g;
- **smartphone** per rilevamento dei dati provenienti dal *giroscopio* integrato, attraverso l'app *Phyphox*.
Specifiche del sensore. Intervallo Δt di misurazione: 0.0024s; risoluzione: 0.0012rad/s; massimo range di misurazione prima della saturazione: 34.9056rad/s, modello di dispositivo su cui installato: *Google Pixel 4* (STMicroelectronics);
- **tavola** non flessibile ruvida su cui far rotolare un **guscio cilindrico** al cui interno è stato fissato lo smartphone, assicurandosi che non potesse muoversi.

2 Formule utilizzate

Combinazione dei risultati

Date n variabili gaussiane x_k con incertezza σ_k si può effettuare la combinazione

$$\mu = \frac{\sum_k \frac{\hat{x}_k}{\sigma_k^2}}{\sum_k \frac{1}{\sigma_k^2}}; \quad \frac{1}{\sigma^2} = \sum_k \frac{1}{\sigma_k^2} \quad , \quad (2.1)$$

utile per estrarre un unico risultato come combinazione di più risultati.

Regressione lineare

Introducendo la notazione per cui per una qualunque variabile w_i indichiamo con \bar{w} una media pesata di tale variabile, con pesi gli inversi delle incertezze sulle y al quadrato.

In formule:¹

$$\bar{w} = \frac{\sum_i \frac{w_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}} \quad (2.2)$$

¹Le sommatorie nelle formule (2.2) e (2.4) sono chiaramente su $i = 0, \dots, N$ ma, per non appesantire la notazione, ne abbiamo ommesso gli estremi.

Pertanto si possono utilizzare le seguenti formule per inferire i parametri di una legge lineare:

$$\hat{m} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \hat{c} = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (2) \quad (2.3)$$

con relative incertezze e coefficiente di correlazione:

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{1}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) \sum_i \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}} \quad \sigma_{\hat{c}}^2 = \sigma_{\hat{m}}^2 \cdot \overline{x^2} \quad \rho(\hat{m}, \hat{c}) = -\frac{\bar{x}}{\sqrt{\overline{x^2}}} \quad (2.4)$$

Formula dei residui

Ipotizzata l'esistenza di una dipendenza lineare di Y da X , si può dire che le osservazioni della variabile Y si possono ottenere, a meno di un **residuo**, da una funzione lineare delle osservazioni della variabile X . Per ciascuna osservazione avremo quindi

$$y_i = m \cdot x_i + c + e_i^3 \quad (2.5)$$

Considerando che

$$e_i = y_i - (\hat{m} \cdot x_i + \hat{c}) \quad (2.6)$$

allora l'incertezza sui punti sperimentali y_i , nell'ipotesi che le σ_i siano tutte uguali a σ , è data da:

$$\sigma = \sqrt{\sum_i \frac{e_i^2}{n-2}} = \sqrt{\sum_i \frac{y_i - \hat{m} \cdot x_i - \hat{c}}{n-2}} \quad (2.7)$$

Deviazione standard campionaria

$$s_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_i^{1,N} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (2.8)$$

Propagazione delle incertezze

$$\sigma_{tot}^2[y] = \sum_{i,j}^{1,n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \sigma_{ij} \quad (2.9)$$

²Le medie sono intese come sono state appena definite in 2.2.

³Indichiamo con e_i l'errore di approssimazione di y_i tramite una funzione lineare delle x_i .

con $\sigma_{ij} = cov(x_i, x_j)$.

Covarianza tra due funzioni delle stesse variabili casuali

Si ha, per due funzioni $y_1 \equiv y_1(x_1, \dots, x_n)$ e $y_2 \equiv y_2(x_1, \dots, x_n)$,

$$cov(y_1, y_2) = \sum_{i,j}^n \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i} \bigg|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_j} \bigg|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \quad (2.10)$$

Incertezza totale sulla misura

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\frac{s_{n-1}^2}{N} + \sigma_B^2} \quad (2.11)$$

dove σ_B è l'incertezza strumentale, che nel caso della bilancia è stata considerata come $\frac{0.001}{\sqrt{12}}g$, mentre nel caso del metro, interpolando tra le tacche, $1/4mm$; entrambi nel caso di misure ripetute sono scalati di un fattore $1/k$, con k numero di misure.

I **risultati** delle misure sono riportati come:

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{tot} \quad (2.12)$$

3 Misure di velocità angolare ω e accelerazione angolare α

3.1 Assestamento dell'angolo a $\approx 25^\circ$

Dopo aver fissato saldamente il piano a circa 25° , sono state effettuate misure ripetute dell'angolo di inclinazione (tramite l'app per smartphone **Phyphox**) per tre punti differenti del piano al fine di osservare e considerare eventuali difformità della superficie; si è lavorato durante tutta la durata dell'esperimento in connessione remota dal PC⁴, da dove sono state azionate le prese dati, per evitare interferenze durante il processo.

Sono state eseguite 20 misure per ogni configurazione; di seguito sono riportate le medie delle misurazioni con la relativa incertezza stimata a partire dalla deviazione standard campionaria e dall'incertezza di tipo B come chiarito nel paragrafo 2. Poiché la soglia di discriminazione di Phyphox è pari $I = 0.01^\circ$, abbiamo stimato il contributo di tipo B come $\sigma_B = \frac{I}{\sqrt{12}}$. Abbiamo dunque ottenuto:

$$\begin{aligned} \overline{\theta_1} &= 27.087^\circ & s_{n-1} &= 0.400^\circ & \longrightarrow & \theta_1 = (27.088 \pm 0.089)^\circ \\ \overline{\theta_2} &= 27.431^\circ & s_{n-1} &= 0.111^\circ & \longrightarrow & \theta_2 = (27.131 \pm 0.024)^\circ \\ \overline{\theta_3} &= 27.082^\circ & s_{n-1} &= 0.367^\circ & \longrightarrow & \theta_3 = (27.082 \pm 0.082)^\circ \end{aligned}$$

Per determinare in maniera quantitativa la compatibilità dei risultati e poter decidere se supporre il piano privo di avvallamenti, sono stati operati dei rapporti tra le varie inclinazioni ottenute, secondo le formule:

$$R = \frac{\theta_i}{\theta_j}; \quad \frac{\sigma[R]}{R} = \frac{\sigma[\theta_i]}{\theta_i} \oplus \frac{\sigma[\theta_j]}{\theta_j} \quad \forall i \neq j \quad (3.1)$$

Nella seguente tabella sono riportati dunque i rapporti con le relative incertezze. L'elemento (i, j) della matrice è il rapporto $\frac{\theta_i}{\theta_j}$.

	θ_1	θ_2	θ_3
θ_1	-	0.9984 ± 0.0034	1.0002 ± 0.0045
θ_2	1.0016 ± 0.0034	-	1.0018 ± 0.0032
θ_3	0.9998 ± 0.0045	0.9982 ± 0.0031	-

Tabella 1: Rapporti delle *inclinazioni* misurate.

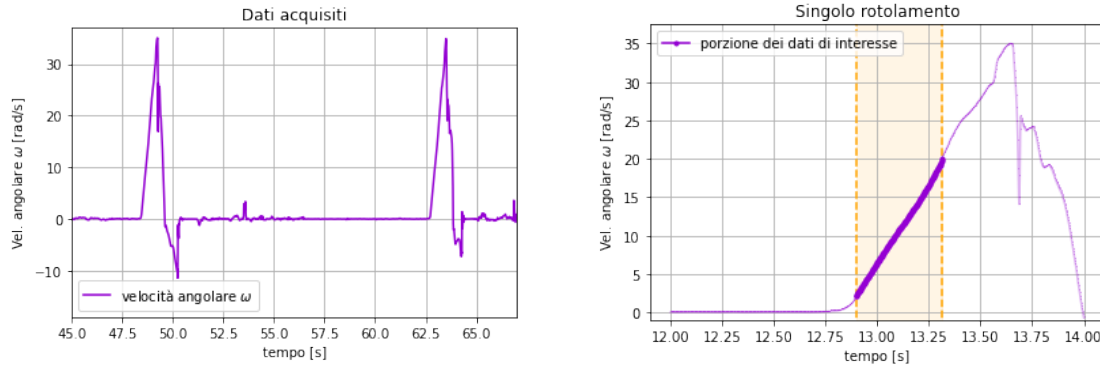
Si può notare che tutti i risultati sono completamente comparabili: i loro rapporti sono infatti confrontabili con 1 ad un $C.L. < 1\sigma$.

⁴Si è impiegato il metodo in remoto anche per le misure di velocità angolare che verranno a breve descritte.

3.2 Accelerazione angolare

3.2.1 Presa dati

Sono state eseguite 20 prese dati della velocità angolare in funzione del tempo. Di seguito sono riportati due grafici relativi ai dati acquisiti:



Si è effettuata **un'unica presa dati**, posizionando di volta in volta il cilindro alla quota massima del piano inclinato e lasciandolo cadere da fermo. La presa dati è stata ininterrotta, e successivamente all'arrivo del cilindro alla base del piano lo si è riportato nella posizione iniziale; prima di dare inizio al rotolamento si è atteso finché il valore della velocità angolare misurato si stabilizzasse su 0 s^{-1} .

Nella **figura a sinistra** sono riportati i dati di due rotolamenti. In un primo tratto la velocità angolare è nulla poiché essa corrisponde all'intervallo temporale in cui il cilindro è tenuto fermo alla massima quota del piano inclinato; la regione di linearità rappresenta il moto di puro rotolamento effettuato dal cilindro; nel tratto successivo, invece, l'andamento appare abbastanza caotico a causa dell'urto del cilindro con il pavimento. Il successivo tratto a velocità angolare nulla corrisponde evidentemente al nuovo posizionamento del cilindro alla sommità del piano inclinato.

Il **grafico a destra** invece evidenzia l'andamento della velocità angolare relativo a un singolo rotolamento⁵. Le due rette tratteggiate che delimitano la zona in giallo rendono chiaro l'intervallo di tempo considerato per la successiva analisi dei dati, che corrisponde all'effettivo moto di puro rotolamento: in quella regione del grafico infatti si nota un andamento pressoché lineare e crescente.

⁵**N.B.:** non si tratta di uno *zoom* del primo grafico ma di un'altra sezione di dati presa a campione.

3.2.2 Analisi dei dati

Nel caso in questione, attraverso l'uso delle equazioni cardinali della meccanica dei sistemi, si trova⁶:

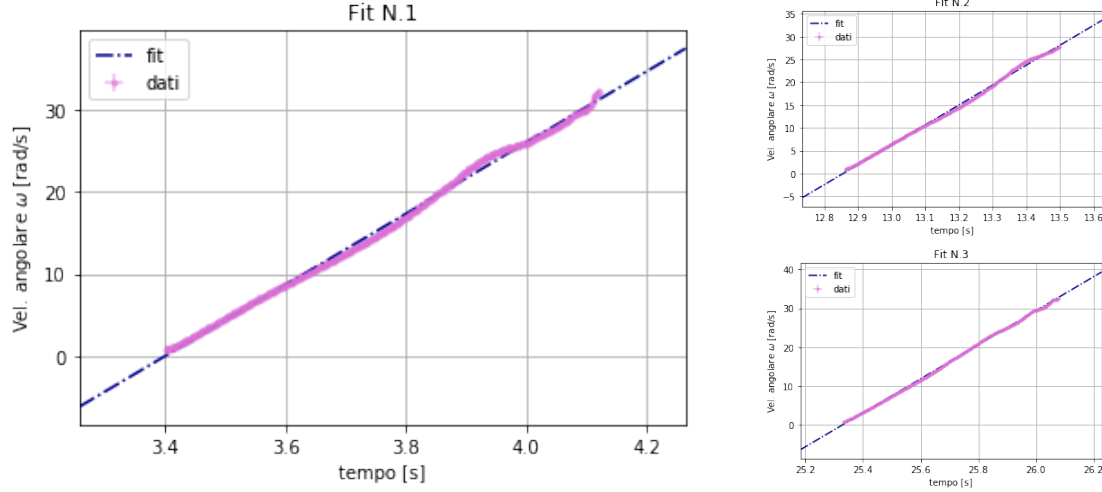
$$\begin{cases} Mg \sin(\theta) - F_a = M \cdot a_{CM} \\ F_a R = I_{CM} \cdot \alpha \end{cases}$$

Imponendo la condizione di puro rotolamento, che corrisponde a $\alpha = \frac{a_{CM}}{R}$, si trova:

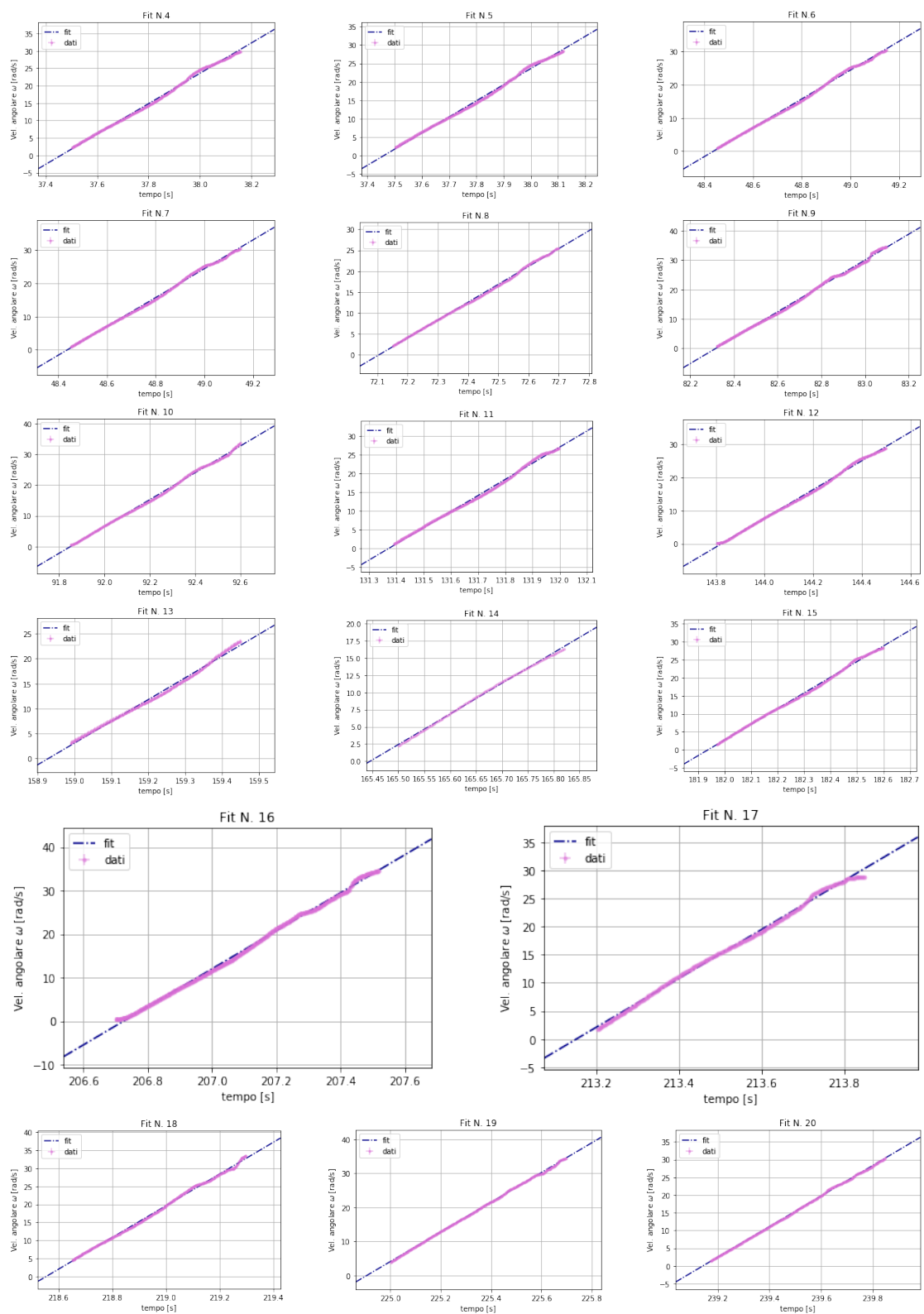
$$\alpha = \frac{MgR}{I_{CM} + MR^2} \sin(\theta) \quad (3.2)$$

Pertanto, ad angolo fissato, l'accelerazione angolare è costante e ci si aspetta una dipendenza lineare di ω_y dal tempo. Per questo per ognuna delle 20 misure è stato realizzato un *fit* lineare ω_y *versus* tempo. Sono di seguito riportati i 20 grafici che rappresentano le rette di *best fit*.

Grafici delle regressioni lineari



⁶Ove si ha M massa totale, θ angolo di inclinazione del piano, a_{CM} e I_{CM} accelerazione e momento di inerzia del centro di massa, α accelerazione angolare.



Si può notare come nei grafici sia riportata con la linea tratteggiata in *blu* la retta secondo i parametri inferiti con il *fit lineare*; in *fucsia* invece i dati effettivamente raccolti. Questi ultimi appaiono avere un comportamento molto simile in tutti i 20 *fit*, assai prossimo alla retta graficata secondo i parametri della legge ricavata. Sono di seguito riportati i parametri relativi ad ogni *fit*.

L'incertezza σ_y riportata sui grafici⁷ e in tabella è stata stimata tramite il metodo dei residui chiarito nella sezione 2; infatti per ogni punto riportato è stata effettuata una singola misura, dunque non è stato possibile associarvi una deviazione standard campionaria.

<i>fit</i>	$\sigma_y [s^{-1}]$	$\hat{m} [s^{-2}]$	$\sigma_m [s^{-2}]$	<i>fit</i>	$\sigma_y [s^{-1}]$	$\hat{m} [s^{-2}]$	$\sigma_m [s^{-2}]$
1	0.45	43.42	0.13	11	0.43	43.11	0.16
2	0.39	43.70	0.13	12	0.39	43.42	0.11
3	0.24	43.82	0.07	13	0.23	43.66	0.23
4	0.43	43.50	0.14	14	0.16	44.47	0.15
5	0.43	43.50	0.13	15	0.34	43.47	0.12
6	0.37	43.32	0.11	16	0.44	43.74	0.10
7	0.51	43.41	0.12	17	0.40	43.40	0.13
8	0.25	42.76	0.10	18	0.12	43.90	0.12
9	0.47	44.02	0.12	19	0.17	43.63	0.05
10	0.10	43.55	0.10	20	0.16	43.11	0.04

Tabella 2: **Riassunto delle regressioni lineari.**

In tabella sono riportati esclusivamente le incertezze stimate con il metodo dei residui, nonché la *slope* della retta con la relativa incertezza.

I valori relativi all'intercetta dei grafici non sono stati riportati, principalmente per due ragioni:

- l'interesse del *fit* era determinare l'accelerazione angolare, ossia il coefficiente angolare della legge inferita;
- i dati rappresentati nei *fit* sono frutto di un'unica lunga presa dati in cui la raccolta è stata bloccata più volte per far ripartire il cilindro dalla massima quota del piano inclinato; i dati relativi ai diversi rotolamenti sono stati separati solo successivamente, pertanto il riferimento $t = 0s$ è di poco interesse;

⁷Nonostante nei grafici non sia molto visibile, in quanto $\sigma_y \ll y \forall y$.

A partire dalle varie misure di α , considerandole come misure ripetute, si è effettuata una stima della *deviazione standard campionaria*. Si è ottenuto:

$$std = 0.124s^{-2}$$

Possiamo notare che la *standard deviation campionaria* calcolata è molto prossima alle incertezze σ_{m_i} associate ai singoli *fit* tramite le formule dei minimi quadrati.

Considerando ora la media aritmetica delle $N = 20$ e l'incertezza attribuitale secondo le formule della sezione 2, possiamo esprimere una stima dell'accelerazione angolare come segue:

$$\alpha = (43.546 \pm 0.028)s^{-2}$$

4 Misure di inclinazione

Con l'obiettivo di effettuare una calibrazione dell'accelerometro di Phyphox (è infatti tramite questo che l'applicazione computa l'inclinazione), sono state misurate le pendenze del piano inclinato in cinque diverse configurazioni con due diversi metodi. Si è avuto cura di tenere traccia delle cinque impostazioni in modo da rendere le misure il più possibile riproducibili.

4.1 Misure tramite *Phyphox*

Per le 5 diverse configurazioni è stato misurato direttamente tramite il sensore di Phyphox l'angolo θ formato con l'orizzontale. Sono state eseguite $N = 20$ misure ripetute per ciascuna inclinazione⁸, e considerando la σ_{str} come già fatto in precedenza si sono elaborati i seguenti risultati:

<i>conf.</i>	<i>risultato</i> [°]	$\delta (\sigma_{tot}/\mu)$
I.	10.550 ± 0.031	0.3%
II.	15.348 ± 0.020	0.1%
III.	19.410 ± 0.013	< 0.1%
IV.	27.099 ± 0.090	0.3%
V.	30.018 ± 0.026	0.1%

⁸Trattandosi di una grandezza che si distribuisce per ipotesi in modo normale, la deviazione standard è $\frac{\sigma_R}{\sqrt{N}}$.

4.2 Misure dirette

Chiameremo dirette invece le misure di inclinazione effettuate a partire da misure di lunghezza e altezza. Dati due punti sul piano inclinato, a cui associamo per i nostri scopi le coordinate di lunghezza sul piano a partire dalla base (l) e altezza dalla base del piano (h), $P_1(l_1, h_1)$ e $P_2(l_2, h_2)$, risulta

$$\theta = \arcsin \left(\frac{h_2 - h_1}{l_2 - l_1} \right) \quad (4.1)$$

Lunghezza e altezza sono state stimate per ogni punto effettuando $N = 10$ misure ripetute con un metro di risoluzione pari a $1mm$. Stimando l'incertezza di tipo B come incertezza strumentale e pari a $\frac{1}{4}$ di tacca si ha:

$$\sigma_{l,h} = \sqrt{\frac{\sigma_R^2}{N} + \sigma_{str}^2} \quad (4.2)$$

Nella seguente tabella sono raccolti i risultati delle misure per le stesse cinque configurazioni della sezione 4.1.⁹

	$l_1[m]$	$l_2[m]$	$h_1[m]$	$h_2[m]$
I.	0.64663 ± 0.00027	1.21960 ± 0.00027	0.17121 ± 0.00027	0.27737 ± 0.00028
II.			0.20534 ± 0.00028	0.35524 ± 0.00027
III.			0.23435 ± 0.00026	0.42924 ± 0.00026
IV.			0.29522 ± 0.00028	0.56322 ± 0.00026
V.			0.29738 ± 0.00027	0.58359 ± 0.00028

Tabella 3: Risultati delle misure di lunghezza e altezza per le cinque diverse configurazioni.

Per propagare l'incertezza secondo la formula chiarita nella sezione 2, abbiamo considerato le derivate parziali:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial \theta}{\partial h_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h_2 - h_1}{l_2 - l_1}\right)^2}} \cdot \frac{1}{l_2 - l_1}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial l_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h_2 - h_1}{l_2 - l_1}\right)^2}} \cdot \frac{-(h_2 - h_1)}{(l_2 - l_1)^2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial h_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h_2 - h_1}{l_2 - l_1}\right)^2}} \cdot \frac{-1}{l_2 - l_1}; \quad \frac{\partial \theta}{\partial l_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{h_2 - h_1}{l_2 - l_1}\right)^2}} \cdot \frac{h_2 - h_1}{(l_2 - l_1)^2} \end{array} \right]$$

⁹Si noti che si è potuto misurare l_1 e l_2 una sola volta per tutte e cinque le configurazioni, a beneficio delle tempistiche.

e le covarianze ($\sigma_{ij} \ \forall i \neq j$) sono state supposte nulle in quanto non è stato possibile stimare la correlazione dovuta a errori di scala o di zero. Si ottengono i seguenti risultati¹⁰:

<i>conf.</i>	<i>risultato</i> [°]	$\delta \ (\sigma_{tot}/\mu)$
I.	10.67747 ± 0.00072	$\approx 10^{-6}$
II.	15.16617 ± 0.00079	$\approx 10^{-6}$
III.	19.88540 ± 0.00080	$\approx 10^{-6}$
IV.	27.88758 ± 0.00097	$\approx 10^{-6}$
V.	29.96825 ± 0.00102	$\approx 10^{-6}$

Si vede, confrontando la prima e la seconda tabella dei risultati, che nella "misura diretta" le incertezze relative risultano di circa tre ordini di grandezza minori rispetto a quelle che si ottengono misurando con il sensore di Phyphox. Per quanto sia il risultato che ci aspettavamo, poiché con questo secondo metodo sono minori i contributi sistematici che possono variare i valori registrati (assenza di surriscaldamento del telefono durante la misura e di variazioni nel segnale elettrico o nella risposta del sensore), potremmo aver leggermente sottostimato le σ_{tot} in quanto non abbiamo considerato, ad esempio, errori di zero o di scala del flessometro.

¹⁰Chiaramente $E[\theta] = \arcsin\left(\frac{E[h_2] - E[h_1]}{E[l_2] - E[l_1]}\right)$.

4.3 Calibrazione del sensore di inclinazione

A partire dalle misure dirette (θ_D) e da quelle con Phyphox (θ_P) si è stimata la retta di calibrazione dello strumento, che le previsioni teoriche indicano seguire l'equazione

$$\theta_P = S \cdot \theta_D + O \quad (4.3)$$

Il fine è quello di stimare un errore di *offset* O e un fattore di *scala* S associati alle misure. Allora si procede secondo le formule per la regressione lineare illustrate nella sezione 2, considerando i seguenti punti:

	x (θ_D)	y (θ_P)	σ_x	σ_y
	10.67747	10.550	0.00072	0.031
	15.16617	15.348	0.00079	0.020
	19.88540	19.410	0.00080	0.013
	27.88758	27.099	0.00097	0.090
	29.96825	30.018	0.00102	0.026
unità	° (deg)	°	°	°

	\bar{x}	\bar{y}	\overline{xy}	$\overline{x^2}$	$\overline{y^2}$	$\sum_i \sigma_{y_i}^{-2}$
valori	19.390	19.163	398.452	403.060	375.983	208.754
unità	°	°	° ²	° ²	° ²	° ⁻²

Si osservi che la scelta di porre θ_D sulle x e θ_P sulle y , calcolando facilmente per due punti qualsiasi $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, fa sì che sia verificata la condizione $m \sigma_x \ll \sigma_y$ (d'altronde, per la retta di calibrazione ci si aspetta una pendenza ≈ 1). Dunque si può assumere $\sigma_x \rightarrow 0$. I risultati del fit sono

$$S = m = 0.9926 \pm 0.0018; \quad O = c = (-0.0845 \pm 0.0367)^\circ; \quad \rho(m, c) = -0.9147 \quad (4.4)$$



Figura 1: Retta di calibrazione per il sensore di inclinazione dello smartphone.

5 Misure di α a diverse inclinazioni

Sono state quindi effettuate delle misure di α analoghe a quelle della misura nella sezione 3.2, per diversi angoli di inclinazione; sono state eseguite le misure per 5 diverse angolazioni, ottenendo i seguenti risultati:

conf.	$\alpha [s^{-2}]$	angolo [°]
I.	15.936	10.550 ± 0.031
II.	25.252	15.348 ± 0.020
III.	31.957	19.410 ± 0.013
IV.	43.546	27.099 ± 0.090
V.	46.421	30.018 ± 0.026

Tabella 4: Tabella riassuntiva

Per le α non sono state operate misure ripetute; pertanto è stata utilizzata la *standard deviation* stimata nella sezione 3.2, pari a $\sigma = 0.12s^{-2}$. Gli angoli di inclinazione sono stati misurati con Phyphox, tenendo conto dell'errore di scala e dell'errore di zero stimati nel paragrafo 4.3, possiamo operare una correzione delle misure come segue:

$$\theta_m = S \cdot \hat{\theta}_c + O \implies \hat{\theta}_c = \frac{\theta_m - O}{S} \quad (5.1)$$

Pertanto, considerando le derivate parziali:

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial S} = \frac{O - \theta_m}{S^2}; \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta_m} = \frac{1}{S}; \quad \frac{\partial \hat{\theta}}{\partial O} = -\frac{1}{S}$$

S	0.9926 ± 0.0018
O	$(-0.0845 \pm 0.0367)^\circ$

si può applicare ancora la (2.9), dove consideriamo **nulle** per ipotesi $cov(\theta_m, O)$ e $cov(\theta_m, S)$ (in quanto la stima dell'angolo corretto presuppone che non ci sia correlazione tra le sistematiche di zero e di scala e il valore corretto), mentre **non nulla** la covarianza tra S e O ; al par. 4.3 si era calcolato infatti $\rho(m, c) = \rho(S, O) = -0.9147$, che dà immediatamente $cov(S, O) = \rho(S, O) \sigma_S \sigma_O$.

valori corretti degli angoli

$$\begin{aligned} \theta_1 &= (10.714 \pm 0.037) \\ \theta_2 &= (15.548 \pm 0.026) \\ \theta_3 &= (19.640 \pm 0.020) \\ \theta_4 &= (27.386 \pm 0.093) \\ \theta_5 &= (30.327 \pm 0.037) \end{aligned}$$

5.1 Dipendenza lineare di α da $\sin(\theta)$

Risolvendo le equazioni del moto di puro rotolamento di un cilindro (di massa M , raggio R e momento d'inerzia rispetto al *c.d.m.* I_{CM}) su un piano inclinato, si trova la relazione

$$\alpha = \frac{M g R}{(I_{CM} + M R^2)} \sin(\theta) \quad (5.2)$$

da cui è ragionevole aspettarsi un andamento lineare dei valori sperimentali di α in funzione di $\sin(\theta)$. Dunque è stato eseguito un *fit* lineare dei dati, riportato nel grafico sotto. Si tenga tuttavia conto dei dovuti *caveat*:

- L'incertezza associata alle accelerazioni angolari riportate sulle ordinate è stata calcolata *a posteriori* tramite il metodo dei residui chiarito al paragrafo 2, ottenendo $\sigma_{post} \approx 0.97 s^{-2}$;
- La curva $fit \pm 1\sigma$ riportata sul grafico corrisponde al $fit \pm u$, ove u è l'incertezza di interpolazione ed estrapolazione sulla regressione lineare, calcolata secondo la formula

$$u = \sqrt{\frac{\sigma_{post}^2}{N} + \frac{\sigma_{post}^2}{N} \frac{(x - \hat{x})^2}{var(x)}} \quad (5.3)$$

dove è chiaramente $N = 5$.

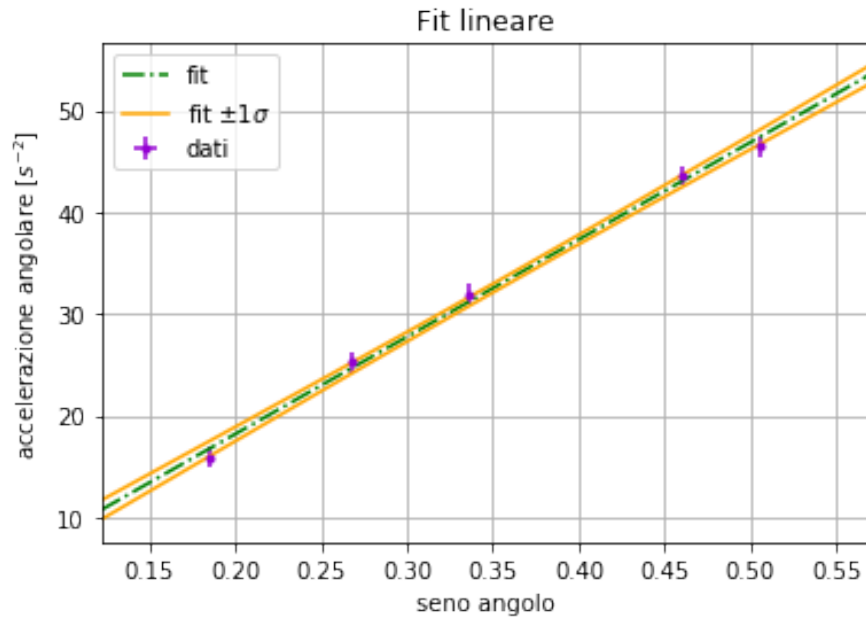


Figura 2: Retta di best fit (verde) deviata di una sigma di interpolazione/estrapolazione (giallo).

Siamo chiaramente interessati alla *slope* del *fit*, che attraverso le formule chiarite al paragrafo 2 si calcola essere: $\hat{m} = (90.0 \pm 3.7)s^{-2}$. L'incertezza relativa risulta essere abbastanza alta, avendo $\delta \approx 4\%$.

6 Altre misure effettuate

Con lo scopo ultimo di determinare il valore dell'accelerazione gravitazionale g a partire dal modello teorico chiarito nella formula (3.2) sono state necessarie altre misure:

- **masse** del telefono, del sistema cilindro + carta e del sistema cilindro+telefono+carta, con 10 misure ripetute per ognuna delle tre;
- **lunghezze** del lato minore e del lato maggiore del telefono, per 10 misure ripetute;
- **raggi** interni ed esterni del cilindro considerato, ancora per 10 misure;

Si sono quindi stimati i **momenti di inerzia** dei componenti del sistema, calcolati a partire dalle misure appena descritte.

In tabella sono riportati i risultati delle misure dirette, con la deviazione standard e la σ_B strumentale considerata (stimata come chiarito al paragrafo 2).

	<i>simbolo</i>	<i>media</i>	σ_R	σ_B	<i>unità</i>
Massa totale	M_{tot}	570.121	0.040	0.029	g
Massa [cilindro + carta]	M_2	377.062	0.058	0.029	
Massa telefono	M_1	193.116	0.044	0.029	
Lato minore telefono	a	7.525	0.053	0.025	cm
Lato maggiore telefono	b	16.042	0.064	0.025	
Raggio interno	R_i	3.753	0.034	0.025	
Raggio esterno	R_e	6.151	0.033	0.025	

Possiamo di conseguenza riportare i risultati, considerando come incertezza di tipo A la deviazione standard sulla media, e calcolando σ_{tot} come chiarito nel paragrafo 2:

$$\begin{aligned}
 M_{tot} &= (570.121 \pm 0.032)g & a &= (7.525 \pm 0.030)cm & R_i &= (3.753 \pm 0.027)cm \\
 M_2 &= (377.062 \pm 0.034)g & b &= (16.042 \pm 0.032)cm & R_e &= (6.151 \pm 0.027)cm \\
 M_1 &= (193.116 \pm 0.033)g
 \end{aligned}$$

6.1 Momenti di inerzia

Il momento di inerzia rispetto al centro di massa del sistema, coincidente con il centro del cilindro, è stato calcolato come la somma di due contributi:

- I_1 , momento di inerzia del guscio cilindrico cui è stata incorporata della carta come spiegato in precedenza, stimato come $I_1 = \frac{1}{2} M_1 (R_e^2 - R_i^2)$;
- I_2 , momento di inerzia del telefono, approssimato come lamina rettangolare, pari a $I_2 = \frac{1}{12} M_2 (a^2 + b^2)$.

Secondo la formula di propagazione delle incertezze (paragrafo 2), considerando le derivate parziali

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_1}{\partial M_1} = \frac{1}{2} (R_e^2 - R_i^2) \\ \frac{\partial I_1}{\partial R_e} = M_1 R_e \\ \frac{\partial I_1}{\partial R_i} = -M_1 R_i \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_2}{\partial M_2} = \frac{1}{12} (a^2 + b^2) \\ \frac{\partial I_2}{\partial a} = \frac{1}{12} 2 a M_2 \\ \frac{\partial I_2}{\partial b} = \frac{1}{12} 2 b M_2 \end{array} \right.$$

si sono calcolati valori aspettati e incertezze. I risultati sono:

$$I_1 = (6.770 \pm 0.011) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$I_2 = (9.866 \pm 0.035) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Possiamo quindi ottenere il momento di inerzia totale come

$$E[I_{CM}] = E[I_1] + E[I_2] , \quad (6.1)$$

cioè come la somma dei due momenti. La sua incertezza si propaga come

$$\sigma[I_{CM}] = \sigma[I_1] \oplus \sigma[I_2] \quad (6.2)$$

Si conclude $I_{CM} = (16.636 \pm 0.037) \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

7 Stima di g

A partire dalla regressione lineare del paragrafo 5, possiamo estrarre g dal coefficiente angolare della retta di *best fit*. Infatti si ha:

$$\hat{m} = \frac{M_{tot} g R_e}{I_{CM} + M_{tot} R_e^2} \implies g = \frac{\hat{m}(I_{CM} + M_{tot} R_e^2)}{M_{tot} R_e} \quad (7.1)$$

Considerando le derivate parziali da impiegare nella propagazione delle incertezze:

$$\left[\begin{array}{ll} \frac{\partial g}{\partial R_e} = \hat{m} - \frac{I_{CM} \hat{m}}{M_{tot} R_e^2}; & \frac{\partial g}{\partial I_{CM}} = \frac{\hat{m}}{M_{tot} R_e} \\ \frac{\partial g}{\partial \hat{m}} = \frac{M_{tot} R_e^2 + I_{CM}}{M_{tot} R_e}; & \frac{\partial g}{\partial M_{tot}} = -\frac{I_{CM} \hat{m}}{M_{tot}^2 R_e} \end{array} \right]$$

Sappiamo tuttavia che $I_{CM} = \frac{1}{2} M_1 (R_e^2 - R_i^2) + \frac{1}{12} M_2 (a^2 + b^2)$: di conseguenza $cov(I_{CM}, R_e)$ **non può essere supposta nulla**¹¹. Secondo le formule riportate nel paragrafo 2, si può stimare tale covarianza come:

$$cov(I_{CM}, R_e) = \frac{\partial I_{CM}}{\partial R_e} \frac{\partial R_e}{\partial R_e} \sigma^2(R_e) = R_e M_1 \sigma^2(R_e) \quad (7.2)$$

Si calcola quindi

$$g = (9.81 \pm 0.40) m/s^2 \quad (\delta_g \approx 4\%) \quad (7.3)$$

Possiamo notare chiaramente come l'incertezza relativa su g sia praticamente identica all'incertezza relativa sul coefficiente angolare della regressione lineare effettuata al paragrafo 5.1; le incertezze relative sugli altri parametri presenti nel calcolo sono notevolmente minori, è di conseguenza l'incertezza su \hat{m} ad essere il **contributo dominante** nella propagazione delle incertezze.

¹¹Sia nella formula di g che nella formula del momento di inerzia (I_{CM}) è presente il contributo delle masse; tuttavia, poiché la massa totale è stata misurata direttamente (dunque indipendentemente), la $cov(I_{CM}, M_{tot})$ è stata supposta nulla.

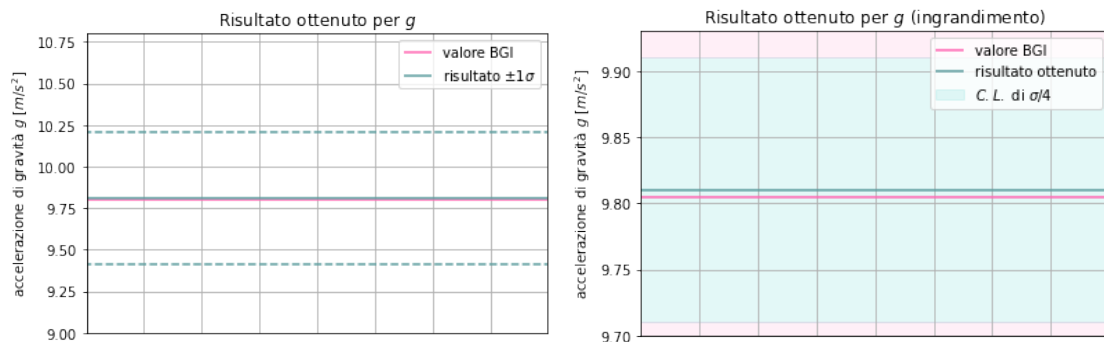
8 Conclusioni

Nella misura di g condotta in questa esperienza sono entrati in gioco diversi **contributi sistematici** all'incertezza.

Quando è stato *possibile* (sistematiche dell'accelerometro di Phyphox, cfr. par. 4.3) si è effettuata anche una calibrazione dello strumento, aggiornando i risultati corretti tramite la taratura nel calcolo dell'accelerazione di gravità (nel caso in questione, i valori dell'inclinazione del piano nelle diverse configurazioni).

Laddove stimare le sistematiche di scala e di *offset* è sembrato un'*eccessiva complicazione* dell'esperimento o è parso rivestire un interesse relativamente inferiore rispetto allo scopo ultimo dell'esperienza, i contributi sistematici all'incertezza sono stati trascurati per concentrarsi sullo studio e sulla riproducibilità delle misure.

Confronto di g con il valore atteso



Il valore atteso per g è quello B.G.I. per la nostra regione di rilevazione (Roma), ossia $9.804 m/s^2$. Scegliendo un *C.L.* del 68% (che corrisponde a 1σ), l'intervallo di confidenza della nostra misura è $9.41 m/s^2 \leq g \leq 10.21 m/s^2$.

Il valore da noi stimato risulta di conseguenza comparabile con il valore B.G.I., ma questo è anche dovuto alla grande incertezza relativa ottenuta su g , le cui ragioni sono già state espresse. In ogni caso possiamo notare una sostanziale prossimità del valore da noi stimato e del valore aspettato.

L'analisi dati è stata effettuata interamente in Python.