

Termodinamica e Laboratorio - canale M-Z

Relazione sulla seconda esperienza di laboratorio

Gas perfetti

Lorenzo Pietropaoli 1917791

27 settembre 2024

La terza ed ultima esperienza di Laboratorio di Termodinamica è stata svolta presso il Laboratorio Bruno Pontecorvo sito in Via Tiburtina, 205 a Roma. Si è ripartita in due esperimenti: nel primo si è misurato il **coefficiente adiabatico dell'aria**, pari al rapporto tra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante; nel secondo ci si è invece adoperati per **realizzare un ciclo termico**, con particolare attenzione a verificare i risultati ottenuti sul lavoro compiuto dal ciclo stesso. In entrambe le esperienze è stato cruciale il filo diretto con la teoria alla base delle sperimentazioni eseguite, che ha permesso di

Indice

1	Apparato sperimentale e strategia di misura	2
2	Formule e costanti utilizzate	3
3	Verifica della legge di Boyle	4
4	Verifica della legge di Gay-Lussac	8
5	Verifica della legge di Charles	13
6	Conclusioni	17

1 Apparato sperimentale e strategia di misura

Gli **strumenti a disposizione** nel laboratorio sono stati i seguenti:

- *sistema pistone-cilindro*, composto da termos, agitatore e termometro a mercurio (quest'ultimo con una risoluzione di $0.2^{\circ}C$);
- *camera di espansione* composta da un cilindro di lega metallica (probabilmente ottone) chiudibile in maniera approssimativamente ermetica con un tappo di gomma;
- *sensore di posizione angolare* (mod. CI-6538), sensibilità: 1/1440 di giro;
- *sensore di bassa pressione* (mod. CI-6605), sensore di pressione assoluta da 0 kPa a 10 kPa , sensibilità: 0.005 kPa ;
- *sensore di temperatura* in acciaio (mod. CI-6605), sensibilità: $0.05^{\circ}C$;
- *connettori a baionetta e tubicini in gomma* che hanno permesso il collegamento tra il sistema pistone-cilindro, la camera di espansione e il sensore di pressione;
- *dewar* con acqua in funzione di bagno termico;
- *resistenza elettrica* connessa ad un voltaggio, per scaldare l'acqua nel dewar;
- *calibro ventesimale* con cui si sono misurate le dimensioni interne della camera di espansione, risoluzione: 0.05 mm ;
- *software* di lettura e gestione dati DataStudio, che ha permesso di accedere alle misurazioni di posizione, temperatura e pressione.

Le misure sono state condotte, per quanto possibile, in condizioni di ripetibilità e riproducibilità, nonostante ci si trovasse in un ambiente non del tutto termicamente isolato. Gli esperimenti, inoltre, si sono svolti in un tardo pomeriggio autunnale, in cui la temperatura del laboratorio era di circa $17^{\circ}C$.

Le particolari condizioni in cui si è svolta l'esperienza, seppur impedendone la fedelissima riproducibilità, non hanno reso in alcun modo lo studio dei modelli di gas perfetto meno interessante, né in alcun modo hanno prevenuto la realizzazione di una esperienza priva di conclusioni costruttive ([sezione 6](#)).

Come abbiamo già accennato, l'**obiettivo di questa esperienza** è stato la verifica sperimentale delle leggi di Boyle, Gay-Lussac e Charles per le trasformazioni del gas perfetto (aria nel nostro laboratorio, in condizioni di rarefazione) - rispettivamente, isoterma, isocora e isobara.

Per le misure effettuate con il calibro si è scelto di effettuare esclusivamente 3 ripetute per il diametro interno e 3 per la profondità (altezza interna); si è stimato rapidamente,

infatti, che aumentare il numero di misure ripetute avrebbe ridotto eccessivamente l'incertezza standard, a fronte di una sigma di tipo B che avrebbe comunque dominato nella somma in quadratura. Ulteriori riflessioni sulle incertezze di misura sono contenute in [sezione 6](#).

2 Formule e costanti utilizzate

incertezza dai residui	$\sigma = \sqrt{\sum_i^{1,N} \frac{e_i^2}{n-2}} = \sqrt{\sum_i^{1,N} \frac{y_i - \hat{m} \cdot x_i - \hat{c}}{n-2}}$
incertezza sulla misura	$\sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$
propagazione delle incertezze	$\sigma_{tot}^2[y] = \sum_{i,j}^{1,n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Big _{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \Big _{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \sigma_{ij}$
formule dei minimi quadrati	$\hat{m} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$
	$\hat{c} = \frac{\overline{x^2 \cdot y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}$
	$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{1}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) \sum_i \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}}$
	$\sigma_{\hat{c}}^2 = \sigma_{\hat{m}}^2 \cdot \bar{x}^2$
formula del χ^2	$\chi^2 = \sum_i^{1,n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$
equazione di stato dei gas perfetti	$PV = nRT$
costante dei gas perfetti	$R = 8.3144 \text{ J/mol} \cdot K$
zero assoluto (temperatura)	$0 \text{ K} = 273.15^\circ C$

Si noti come si sia scelto di considerare sia i contributi casuali che sistematici nel calcolo dell'incertezza totale. Per quanto riguarda le sigma *random* esse sono state stimate come

$$\sigma_A^2 = \frac{s_{n-1}^2}{N} \quad , \quad (2.1)$$

con N numero di misure ripetute eseguite. Ciò è valido, naturalmente, esclusivamente per la misura del diametro e dell'altezza della camera d'espansione (ϕ , h) adoperata nella verifica delle leggi di Gay-Lussac e di Charles. Si è optato per effettuare una stima delle incertezze sistematiche assumendo una distribuzione uniforme della grandezze misurate entro l'intervallo di discriminazione per gli strumenti digitali, per i quali non c'è possibilità di interpolare tra le tacche - dunque tutti gli strumenti il cui output è stato letto su DataStudio -, e tenendo conto invece proprio dell'interpolazione tra le divisioni della scala graduata per quanto riguarda il cilindro (in particolare, si è ritenuto possibile interpolare a 1/10 di tacca).

N.B.: non sempre verranno riportati i risultati di tutte le misure effettuate, prediligendo il fornire i risultati interessanti agli scopi di questa esperienza; verranno sempre

str. digitali	$\sigma_B = \frac{\sigma_{str}}{\sqrt{12}}$
str. analogici	$\sigma_B = \frac{l}{2}$

però chiarite le procedure di ogni misura. Tutti i risultati saranno comunque forniti nella forma

$$x = \bar{x} \pm \sigma_{tot} \ .$$

3 Verifica della legge di Boyle

La legge di Boyle per le isoterme dei gas ideali afferma che

$$\Delta V = -\frac{V_0}{P_0} \Delta P \quad (3.1)$$

- si sottolinea, quindi, a temperatura costante.

Per verificare tale andamento, in primis si è lasciato che l'aria all'interno del cilindro raggiungesse una pressione supposta pari alla pressione atmosferica, aprendo una delle due valvole per annullare - almeno con buona approssimazione - eventuali squilibri di pressione tra l'interno del cilindro e l'esterno. Si è poi posizionato il pistone in corrispondenza di una tacca di valore x_0 e si è chiusa una delle due valvole. Monitorando la pressione interna tramite il sensore di bassa pressione, opportunamente collegato all'altra valvola, si è applicata una leggerissima pressione (è molto facile difatti saturare lo strumento, che ha portata 10 kPa) con le dita sul pistone in modo da farlo scorrere molto lentamente nel cilindro, comprimendo il gas.

Si sono raccolti dati per circa 60 s ogni 0.1 s . In realtà sono state effettuate diverse misurazioni (circa 5), tra cui si è scelto di considerare quella condotta in condizioni migliori, nonché la più lunga: in conclusione, quella che in prima analisi è sembrata la più rappresentativa del fenomeno. Si è da questa ottenuto un cospicuo numero di punti direttamente nella forma $(\Delta x, \Delta P)$.

Purtroppo, nonostante durante la presa dati sembrasse che il computer stesse registrando i valori di x con precisione sufficientemente grande, al momento dell'esportazione dei file ci si è accorti che la precisione era stata troncata per la maggior parte dei valori a tre cifre decimali, fatto per nulla ottimale visto che la misurazione è stata effettuata in metri (gli spostamenti totali del cilindro non sono stati superiori a 1 cm).

Per ovviare a questo problema, si è deciso di analizzare esclusivamente i valori trascritti con più precisione, purtroppo una frazione minoritaria del totale ma comunque sufficientemente rappresentativi di tutta la presa dati. Il motivo di tale scelta è chiaro se si guarda la [Figura 1](#): fittando i dati e assegnando le incertezze ai punti sperimentali con il

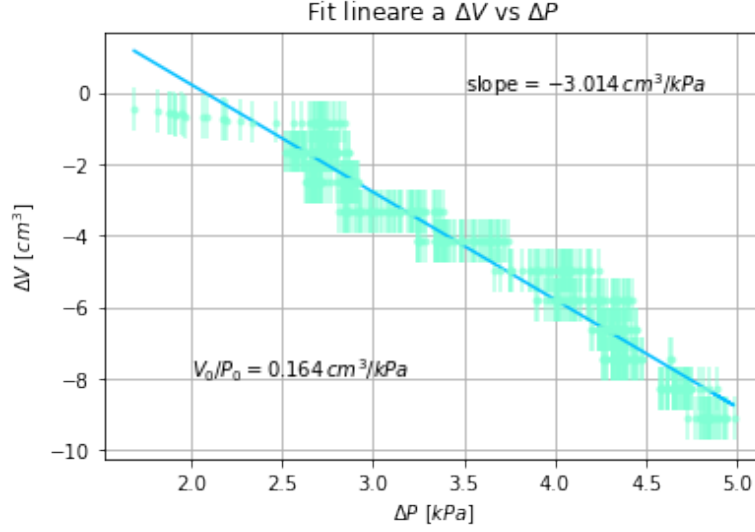


Figura 1: considerando tutti i punti sperimentali (la maggior parte dei quali appaiono "condensati" a blocchi a causa del troncamento della precisione di cui si è ampiamente discusso) il valore assoluto della pendenza è irrealisticamente distante dal suo valore atteso.

metodo dei residui (vedi [sezione 2](#)), si ottiene una pendenza irragionevolmente incompatibile con quella aspettata. Si imputa tale discrepanza alla penalizzante discretizzazione dei dati raccolti.

Si vede altresì come nel range di $\Delta P \in [\approx 0, \approx 2.5] \text{ kPa}$ l'andamento che si verifica è molto meno inclinato¹; si veda anche la [Tabella 1](#).

Confrontiamo la pendenza ottenuta con il suo valore atteso. Una breve nota sul calcolo delle incertezze: per il miglior rapporto $\Delta V / \Delta P$ sono state usate le formule dei minimi quadrati, mentre per calcolare l'incertezza sul valore V_0 / P_0 si è applicata la propagazione delle incertezze, scorrelando le misure di volume e pressione e considerando, in più, la pressione atmosferica nota con certezza ($\delta_{P_0} = 0\%$); si rimanda alla [sezione 2](#). Avendo misurato $x_0 = (2.000 \pm 0.005) \text{ cm}$, considerando la possibilità di interpolare tra le tacche di risoluzione del cilindro, dopo aver svolto i calcoli si ottiene

$$V_0 / P_0 = (0.164 \pm 0.066) \text{ cm}^3 / \text{kPa}$$

$$\Delta V / \Delta P = (0.281 \pm 0.015) \text{ cm}^3 / \text{kPa}$$

La non compatibilità delle due misure entro l'incertezza fornita è dovuta sicuramente

¹Una nota "sulla fiducia": si vedeva, durante la presa dati, tramite un plot generato automaticamente durante le prese, che con la precisione corretta la pendenza globale era molto più simile a quella del tratto iniziale.

$\Delta P [kPa]$	1.69	1.82	1.9	1.88	1.88	1.95
$\Delta V [cm^3]$	0.05625	0.06250	0.06875	0.06875	0.06875	0.06875
$\sigma_{\Delta V} [cm^3]$	0.03670	0.03670	0.03670	0.03670	0.03670	0.03670

Tabella 1: primi 6 punti sperimentali, nella zona con "sufficiente" precisione su Δx (e quindi su ΔV). Si riportano anche le incertezze ottenute dai residui. Si fa notare, a tal proposito, che calcolarle sui Δx e poi propagarle (vedi [sezione 2](#)) per ottenere quelle sui ΔV è **diverso** da ricavare ΔV dalle misure di spostamento e diametro del cilindro e **poi** applicare il metodo dei residui; si è optato per la seconda strada, meno dispendiosa di calcoli e logicamente più sensata.

Si noti pure come l'incertezza relativa sia per i primi punti del fit molto alta, circa del 50%. Si tratta chiaramente di una conseguenza dell'adottare il metodo dei residui e, quindi, di calcolare un unico valore di sigma per tutti i punti.

ad effetti sistematici di cui non si è tenuto conto nel calcolo (ad esempio, il volume del tubicino che collega il misuratore di bassa pressione al cilindro, o ancora la natura relativamente poco ripetibile e riproducibile della procedura di misura; tralasciando il fatto che si sta facendo un'approssimazione quando, in primo luogo, si considera l'aria un gas perfetto. Si veda [sezione 6](#)). Vista, tuttavia, la poca riproducibilità della misura e le tante variabili in gioco, ci si può ritenere sufficientemente soddisfatti del risultato ottenuto, che conferma tutto sommato la validità del modello di Boyle per la proporzionalità tra pressione e volume a temperatura costante in un gas ideale, quale si può trattare l'aria in condizioni di rarefazione come ci si è preoccupati di realizzare in laboratorio.

Per saggiare ulteriormente la compatibilità dei punti sperimentali con l'ipotesi lineare inferita in questo paragrafo si è condotto un test del χ^2 , considerando la stessa regione di interesse di prima. Con un numero di gradi di libertà² $\nu = N - 2 = 42$ e una soglia di accettazione $\alpha = 5\%$ il χ^2 ha un valore atteso³ di 58.12; il valore calcolato dai dati è 42.99, ben minore. Il test è perciò **superato**, il che ci fa concludere che il modello è accettabile e ben descrive il fenomeno osservato con l'incertezza fornita, pur considerando che probabilmente il buon esito è anche dovuto ad una sovrastima delle risoluzioni sperimentali (basti guardare le incertezze prodotte con il metodo dei residui).

Può essere interessante effettuare un'altra verifica, ossia **calcolare il numero di moli** d'aria presenti nel sistema (ignorando, tuttavia, il volume del tubicino) a partire da due valori di V_0 : uno ottenibile per misura "diretta" a partire da x_0 di cui è stato discusso e un altro che si ricava indirettamente dalla pendenza del fit ai dati, che chiameremo rispettivamente V_0^{dir} e V_0^{ind} . Entrambi i valori vengono calcolati dall'equazione di stato

²Con N si è indicato il numero di punti osservati; vi si toglie due gradi di libertà che corrispondono, per ogni punto, all'aver inferito dai dati sia il valore di predizione di ΔV che l'incertezza, dal rispettivo residuo.

³Si è usata la tavola all'indirizzo http://www00.unibg.it/dati/corsi/40025/74822-tavola_chi2.pdf.

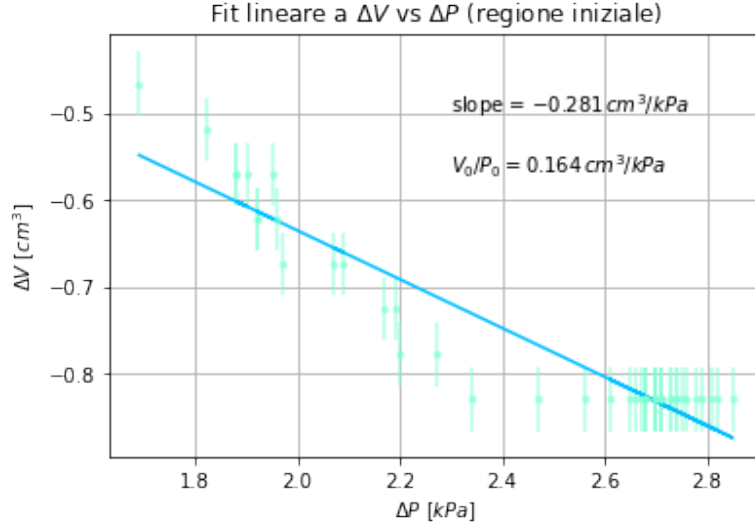


Figura 2: riducendo i valori osservati esclusivamente alla prima sezione emerge un andamento con pendenza molto più vicina a quella aspettata.

dei gas perfetti (cfr. [sezione 2](#)) a partire dalla conoscenza di $P_0 = 101.3 \text{ kPa}$ (privo di incertezza) e dalla misura di T_0 che è stata condotta in contemporanea all'esperimento con il termistore collegato al computer. Una breve nota sull'incertezza relativa a T_0 : poiché è stata rilevata costante e pari a $T_0 = 26.5^\circ\text{C}$ per tutta la durata della presa dati, si è assunta come incertezza direttamente la risoluzione strumentale (σ_{str}) opportunamente scalata, trovandoci nel caso di strumento digitale. Si avrà quindi

$$n^{dir, ind} = \frac{P_0 V_0^{dir, ind}}{R T_0} \quad (3.2)$$

che - trasformando in unità del S.I. - dopo i calcoli e le opportune propagazioni delle incertezze⁴ fornisce

$$n^{dir} = (6.677 \pm 0.027) \cdot 10^{-9} \text{ mol}$$

$$n^{ind} = (11.443 \pm 0.007) \cdot 10^{-9} \text{ mol}$$

Si nota come i due valori **non risultino compatibili** entro numerose sigma di distanza. Si vede altrettanto facilmente, tuttavia, come entrambe le misure, e specialmente la seconda, posseggano incertezze sottostimate, che di certo non tengono conto dei contributi all'errore che abbiamo già accennato e che meglio discuteremo in [sezione 6](#).

⁴Per ovvie ragioni si sono considerate scorrelate le misure di volume e temperatura, e la costante dei gas ideali è stata assunta nota con precisione infinita.

4 Verifica della legge di Gay-Lussac

L'equazione di stato per una isocora di un gas perfetto prende il nome di Legge di Gay-Lussac, e afferma che

$$\Delta P = \frac{nR}{V} \Delta T \quad (4.1)$$

ovvero che, a volume costante, un gas perfetto si trasforma mantenendo una dipendenza lineare tra la variazione di pressione e la variazione di temperatura.

Per questa misura si è adoperato il cilindro di ottone pieno d'aria, mantenuto a volume costante anche grazie ad un tappo di gomma supposto sufficientemente ermetico, forato e collegato al sensore di bassa pressione. Il cilindretto era costantemente immerso in un bagno d'acqua e la temperatura del gas al suo interno monitorata da un termistore, anch'esso collegato al sistema di raccoglimento dati. Una resistenza elettrica permetteva di scaldare l'acqua; partendo da diverse temperature iniziali, si è verificato con questo set-up l'andamento di ΔP in funzione di ΔT , eseguendo almeno 10 misurazioni.

Si è incontrato subito un **problema**, ben evidente dal grafico di ΔP vs Δt in [Figura 3](#): la derivata prima del grafico, dopo una regione in cui - come ci si aspetta - si mantiene non negativa, ad un certo t si negativizza, indicando probabilmente una perdita di gas dal cilindro, che a sua volta si è imputata alla non perfetta aderenza del tappo al cilindro. Non disponendo di un altro tappo si è provato quindi a sostituire il cilindro con uno delle medesime dimensioni⁵ e ciò ha sembrato funzionare, come si può vedere nella [Figura 4](#).

Si è scelto di studiare i dati raccolti nella configurazione che è sembrata meglio garantire l'isolamento del sistema (e quindi la **seconda**). Si fa notare come per questa misura la frequenza di campionamento dei dati è stata sensibilmente ridotta a 1 misura ogni 10 s, a causa del relativamente lento tempo caratteristico di incremento della pressione nel gas (a sua volta imputabile al tempo necessario alla resistenza per scaldare l'acqua nel dewar).

Si riporta in [Figura 5](#) un grafico di tutta la presa dati; è evidente come si osservino regioni in cui la variazione di pressione in funzione della variazione di temperatura si comporta in modo molto differente. In un *primo intervallo* di temperatura ($\Delta T \in [0, 4] K$) la pressione sembra aumentare con un andamento non certo lineare ma sufficientemente aderente alle aspettative, con la variazione di pressione che cresce di pari passo con quella di temperatura. Tra circa 5 K e 10 K avvengono probabilmente due *perdite* di gas che si manifestano come due tratti in cui la funzione ha un massimo relativo subito seguito da un minimo relativo (due oscillazioni, difatti). **Dopo** $\Delta T = 10 K$ si osserva invece una regione di crescita notevolmente più regolare in confronto alla prima.

Si è pensato di calcolare e confrontare le pendenze delle due zone di crescita più o meno regolare del grafico, con l'intento di individuare perlomeno un andamento verosimile al modello di Gay-Lussac del gas ideale. Per verificare ciò si è calcolato in particolare il

⁵Si è effettuata la misura del volume interno - utile in seguito - esclusivamente per il secondo cilindro, osservando con una breve verifica che le differenze nelle dimensioni dei due sarebbero state incluse entro l'incertezza fornita.

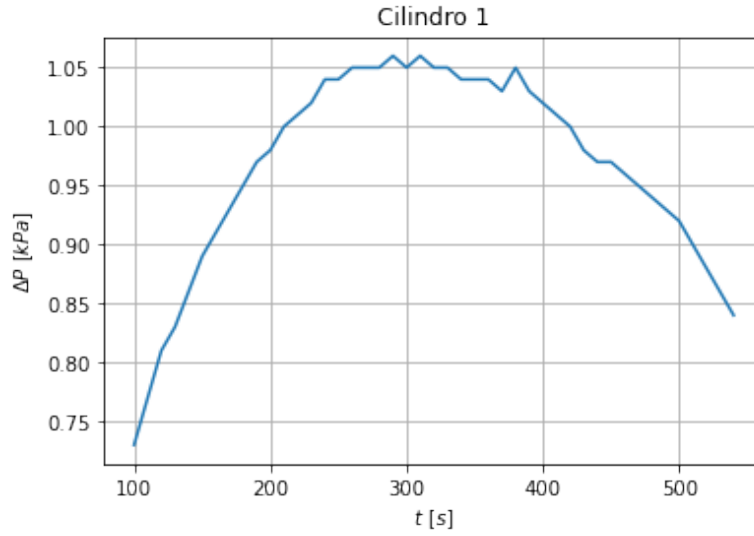


Figura 3: andamento della variazione di pressione in funzione del tempo con la prima configurazione; si è legittimamente supposto che la causa dell'anomalia sia stata una misaderenza del tappo al cilindro.

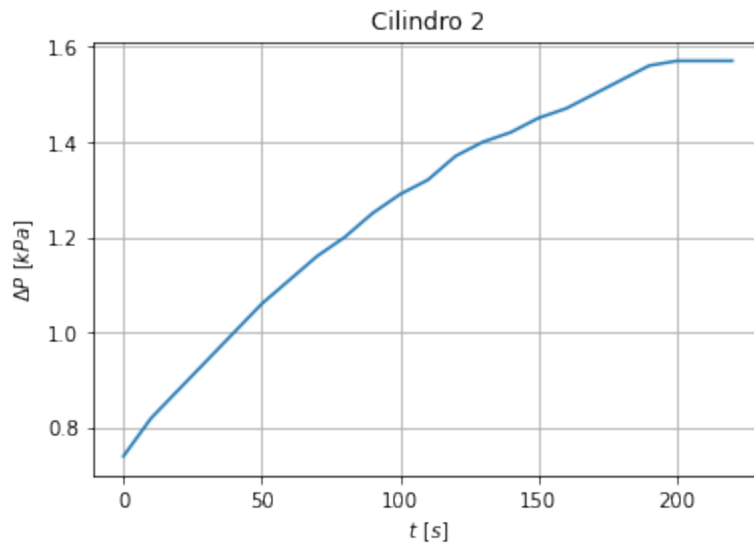


Figura 4: andamento della pressione in funzione del tempo con la seconda configurazione; la sostituzione del cilindro ha sembrato funzionare, almeno in un intervallo di variazione di ΔP comparabile ($\Delta P > 0.70 \text{ kPa}$).

numero di moli di gas presenti nel cilindretto di ottone; a tal proposito è stato necessario misurare il volume interno di quest'ultimo (la misura è stata effettuata con calibro

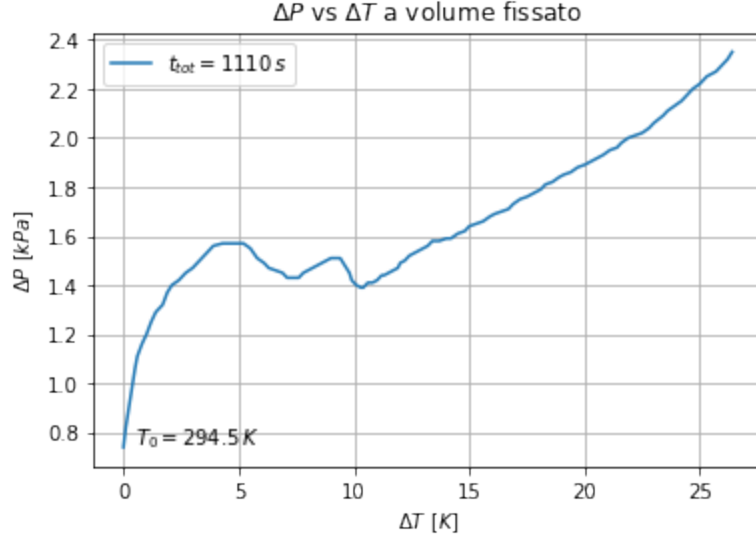


Figura 5: andamento di ΔP vs ΔT su un intervallo ampio sia per quanto riguarda il tempo ($\approx 18 \text{ min}$) che, soprattutto, per la temperatura ($\Delta T_{tot} \approx 30 \text{ K}$). Si osservano comportamenti molto diversi.

				\bar{x}	s_{n-1}
$\phi [cm]$	3.76	3.76	3.77	3.763	0.006
$h [cm]$	8.55	8.54	8.55	8.547	0.006

Tabella 2: misure di volume del contenitore d'aria. La grande precisione dello strumento ha permesso di effettuarne esclusivamente 3 ripetute sia per il diametro che per l'altezza, ottenendo comunque un'incertezza relativa $\delta < 1.5\%$.

ventesimale), si veda la [Tabella 2](#).

Analizzando la **prima regione** ([Figura 6](#)) - in cui si sono presi in considerazione i punti corrispondenti a valori di $\Delta T \in [0, 4] \text{ K}$ - si è calcolato n in due modi, uno invertendo la formula del coefficiente angolare di miglior fit

$$\hat{m} = \frac{n R}{V} , \quad (4.2)$$

e l'altro invertendo la [Equazione 4.1](#) dopo aver calcolato i ΔP e ΔT , ad esempio agli estremi della regione. I risultati che si ottengono sono i seguenti:

$$n_1 = \frac{\hat{m} V}{R} = (2.13 \pm 0.18) \cdot 10^{-8} \text{ mol} ,$$

$$n_2 = \left(\frac{P_f - P_i}{T_f - T_i} \right) \frac{V}{R} = (2.37 \pm 0.02) \cdot 10^{-8} \text{ mol} .$$

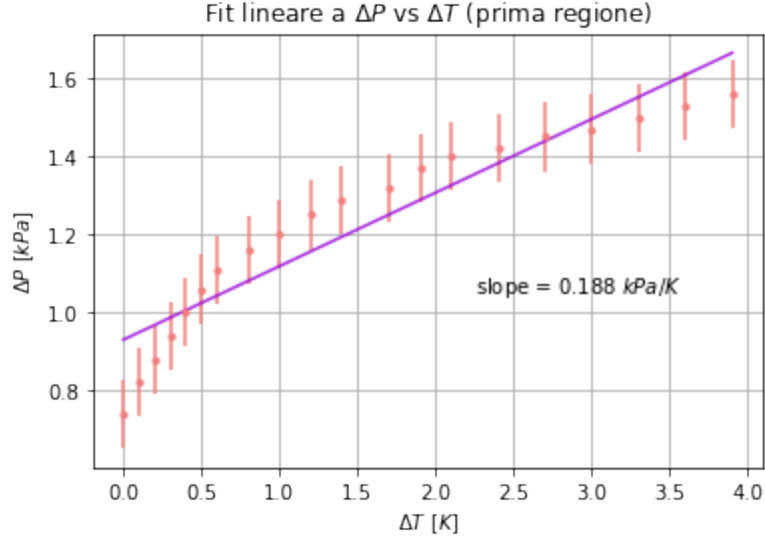


Figura 6: prima regione di linearità. Si stima una pendenza pari a $\hat{m} = (0.188 \pm 0.016) \text{ kPa/K}$. Il test del χ^2 condotto con una significanza $\alpha = 5\%$ e $\nu = N - 2 = 17$ ha esito positivo, in quanto si registra un $\chi^2_{mis} = 13.71$ contro un valore atteso di 27.59.

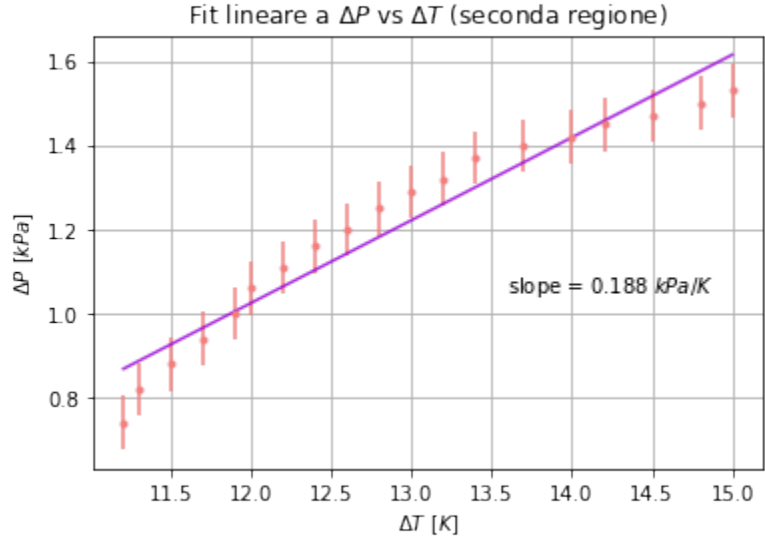


Figura 7: seconda regione di linearità. Si stima una pendenza pari a $\hat{m} = (0.197 \pm 0.012) \text{ kPa/K}$. Con un errore tollerato del 5% il test del χ^2 è superato, fornendo (con $\nu = N - 2 = 17$ gradi di libertà) un valore di 13.71 contro un valore atteso di 27.59.

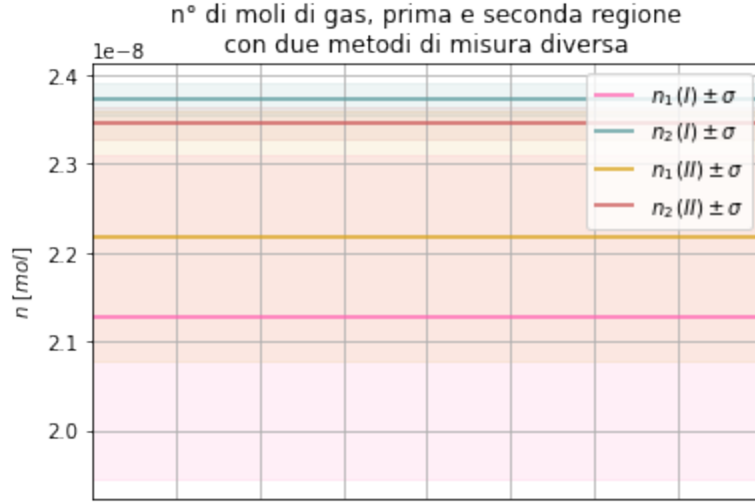


Figura 8: risultati delle misure indirette del n° di moli presenti nel sistema per la **prima** e per la **seconda regione**. Notare la compatibilità già a 2σ di distanza dal valore atteso tra le misure con pedice 1 e quelle con pedice 2. Ciò è da attribuire, *in parte*, alla non ottimale precisione con cui si è ottenuto $n_1(I)$ e $n_1(II)$.

Facendo calcoli analoghi per i punti della **seconda regione** di linearità dell'andamento di ΔP vs ΔT (Figura 7) - in cui si sono studiati i valori corrispondenti a $\Delta T \in [11, 15] K$ - si ottengono i seguenti risultati:

$$n_1 = \frac{\hat{m} V}{R} = (2.22 \pm 0.14) \cdot 10^{-8} \text{ mol} ,$$

$$n_2 = \left(\frac{P_f - P_i}{T_f - T_i} \right) \frac{V}{R} = (2.35 \pm 0.02) \cdot 10^{-8} \text{ mol} .$$

In Figura 8 si può apprezzare un confronto immediato dei risultati: già a 2σ sono tutti perfettamente compatibili. Questo risultato ci soddisfa, in quanto osservando i risultati delle due misure, e soprattutto le incertezze relative ad essi associate - $\delta_{n_1} \approx 8\%$ e $\delta_{n_2} \approx 0.8\%$ - ci si accorge di come la seconda sia di circa un ordine di grandezza più precisa della prima. Questo non ci deve sorprendere però, in quanto essa è stata ottenuta a partire da un rapporto $\Delta P/\Delta T$ ottenuto da due soli punti, a differenza del primo caso in cui tale rapporto, stimato proprio come coefficiente angolare della retta di best fit, era stato calcolato su un braccio di N punti.

Purtroppo non si è condotto, per mancanza di tempo, un esperimento interessante: quello di immergere la camera d'aria in acqua calda anziché portarla dolcemente a temperatura. Possiamo tuttavia immaginare quali possano essere le conseguenze di tale condizione: uno shock termico provocherebbe la **repentina agitazione** delle molecole del gas, che urterebbero tra loro con un'accelerazione decisamente maggiore rispetto

alle condizioni quasistatiche in cui si può tutto sommato assumere di aver condotto i precedenti esperimenti. L'effetto che ci si aspetterebbe di osservare nel nostro laboratorio sarebbe, naturalmente, un aumento di pressione più "accelerato", e dunque una pendenza tendenzialmente crescente del grafico ΔP vs ΔT .

5 Verifica della legge di Charles

La legge di Charles per una trasformazione isobara di un gas ideale afferma che

$$\Delta V = \frac{nR}{P} \Delta T \quad (5.1)$$

che ci dice che, per un gas perfetto come - sempre nelle dovute approssimazioni e con le dovute condizioni - l'aria, a pressione costante il volume varia in modo direttamente proporzionale alla temperatura assoluta.

Per questa misura di è utilizzato di nuovo il sistema cilindro-pistone, collegandolo stavolta alla camera d'espansione di ottone, piena appunto d'aria e tappata⁶. Con le stesse condizioni di monitoraggio della temperatura dell'aria all'interno della camera di espansione, e la camera stessa immersa in acqua con la possibilità di essere scaldata - a sua volta - dalla resistenza elettrica, si è scaldato l'acqua gradualmente e si sono osservate le variazioni di posizione del pistone nel cilindro trasparente, collegato alla camera da un tubicino e sollecitato dall'espansione isobara del gas.

Si sono condotte "soltanto" due misure, in quanto restrizioni di tempo non hanno permesso di eseguirne di più. In prima analisi, durante la presa dati, l'andamento della variazione di volume in funzione della variazione di temperatura è sembrato quantomeno molto regolare, perciò è cruciale verificare se l'esito dell'analisi dei comportamenti osservati concorda con le aspettative teoriche: solo così si capirà se si può essere contenti di aver eseguito per questo esperimento un numero così limitato di misure.

Come è stato per la [sezione 3](#), i dati relativi alle variazioni di posizione sono stati involontariamente troncati a tre cifre decimali durante l'esportazione su disco esterno, ad eccezione di pochi punti (si vedano [Figura 9](#) e [Figura 10](#)).

Sembra più sensato analizzare le zone in cui i dati sono stati trascritti correttamente⁷: per fortuna si dispone di un numero sostanzioso di punti sperimentali. Una volta selezionate le aree di interesse, si può visualizzare le due prese dati su uno stesso grafico,

⁶In riferimento alla discussione sull'ermeticità della chiusura del cilindretto di ottone della [sezione 4](#), si fa presente che questo esperimento è stato condotto dopo quello sulla legge di Gay-Lussac, e si è conseguentemente adoperato il secondo contenitore - la configurazione che d'altronde è sembrata meglio limitare perdite d'aria dalla camera.

⁷Per un motivo alquanto misterioso i primi valori di Δx sono riportati sempre in notazione esponenziale, il che fortunatamente buggera almeno in parte il troncamento di cui si è poc'anzi parlato.

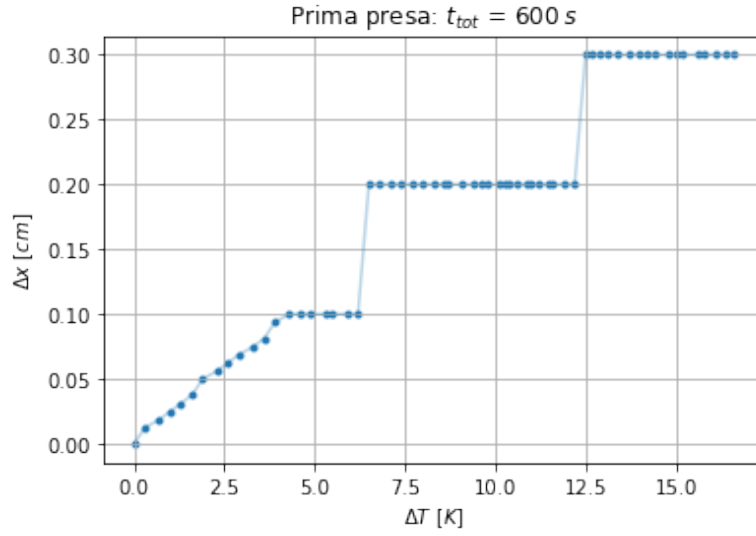


Figura 9: graficazione dei dati esportati relativi alla prima presa. La pesante discretizzazione è dovuta ad uno sfortunato ma inevitabile errore nell'impostazione del computer.

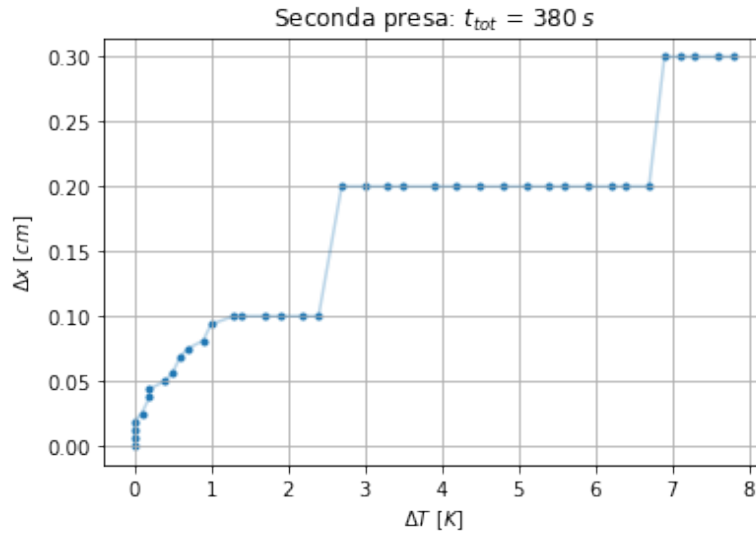


Figura 10: graficazione dei dati relativi alla seconda presa.

limitando i valori entro range compatibili di ΔT , per vedere se si osservano differenze e analogie: le due prese dati, infatti, per quanto intrinsecamente scorrelate, sono state svolte a distanza di pochi minuti, in un ambiente che si è mantenuto a temperatura relativamente costante e, soprattutto, sono state effettuate in un range di temperature

comparabile - T_0 (prima misura) = 296.2 K, T_0 (seconda misura) = 299.4 K. In [Figura 11](#) si è già ricavato un plot del volume.

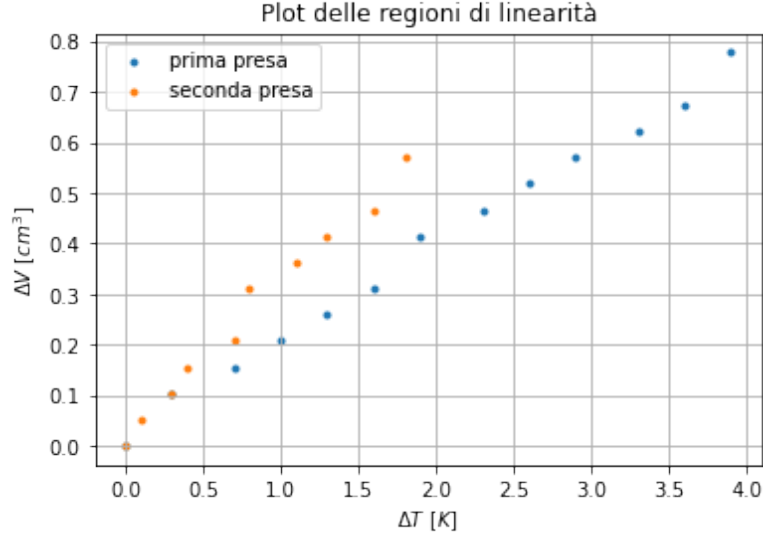


Figura 11: graficazione di regioni di linearità selezionate per l'andamento di ΔV vs ΔT a pressione costante, due misure indipendenti. Si nota una piuttosto sostanziale differenza nella pendenza dei due insiemi di punti.

Si è pensato di stimare, a partire dall'equazione di stato dei gas perfetti, il coefficiente di proporzionalità che lega la variazione di volume a quella di temperatura, come è evidente ricavando la formula

$$\Delta V = \frac{nR}{P} \Delta T \quad (5.2)$$

I **fit lineari** ai punti sperimentali si possono visualizzare in [Figura 12](#) e [Figura 13](#): le migliori stime dei coefficienti angolari sono in rapporto 2:3, che non è affatto trascurabile considerando anche l'incertezza con cui esse si presentano - piuttosto bassa, come si vede, in quanto i punti si sviluppano in bracci relativamente ampi e stretti. Nel ricercare una motivazione per questa **discrepanza**, consideriamo il fatto che le uniche grandezze variabili (anche se in linea teorica costanti) che entrano nel coefficiente angolare sono il numero di moli n e la pressione P . Allora è concretamente possibile - nonché molto probabile, visti i problemi di isolamento della camera d'aria incontrati e discussi nella [sezione 3](#) - che sia una variazione di queste due grandezze la responsabile della variazione della pendenza dei fit, che ricordiamo essere stati costruiti a partire da prese dati condotte in condizioni di buona riproducibilità. Un altro motivo che ci può spingere ad attribuire l'incongruenza rilevata nelle *slope* a n e P è che sono grandezze correlate: in caso di perdita di gas, c'è calo sia di pressione che di volume all'interno del sistema - e quindi di moli d'aria. Essendo piuttosto complicato fornire una stima quantitativa delle **sistematiche** che possa aver introdotto la variazione nel tempo (e quindi

nel corso delle misure) del numero di moli e della pressione del gas, proseguiamo con l'analisi dei dati cercando di fornire una stima, per la prima e per la seconda misura, di n .

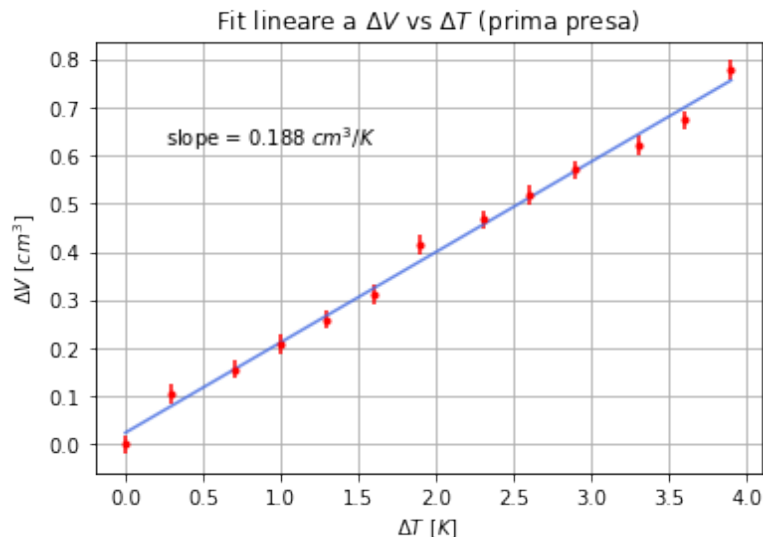


Figura 12: prima presa dati. La pendenza stimata è pari a $\hat{m} = (0.188 \pm 0.005) \text{ cm}^3/\text{K}$. Il χ^2 misurato con $N - 2$ gradi di libertà vale 8.11; effettuando un test con una soglia di errore del 5% si legge un χ^2 atteso pari a 19.68, dunque il test è superato.

Si è calcolato il volume totale occupato dal gas in due modi. In primis come miglior distribuzione dei valori misurati (tale valore, \bar{V} , è proprio quello che entra nella retta di best fit di cui discusso in [Figura 12](#) e [Figura 13](#)), e dunque conoscendo la pendenza e i valori della costante R e della pressione atmosferica P_0 , supposta costante durante l'esperimento si può calcolare

$$n(I) = \frac{\hat{m} P}{R} . \quad (5.3)$$

Si è poi stimata la differenza di volume totale dall'inizio alla fine delle prese dati (a fronte di rispettive variazioni di temperatura) per, infine, invertire ancora una volta l'[Equazione 5.2](#) nel punto sperimentale $(\Delta V_f, \Delta T_f)$, con una procedura analoga alla [sezione 4](#):

$$n(II) = \left(\frac{V_f - V_i}{T_f - T_i} \right) \frac{P_0}{R} . \quad (5.4)$$

I risultati che si ottengono, rispettivamente per le misure I e II (così sono state chiamate la prima e la seconda misura), sono:

$$\begin{aligned} n_1(I) &= (2.26 \pm 0.05) \cdot 10^{-8} \text{ mol} ; & n_1(II) &= (3.62 \pm 0.16) \cdot 10^{-8} \text{ mol} \\ n_2(I) &= (2.40 \pm 0.06) \cdot 10^{-8} \text{ mol} ; & n_2(II) &= (3.81 \pm 0.18) \cdot 10^{-8} \text{ mol} \end{aligned}$$

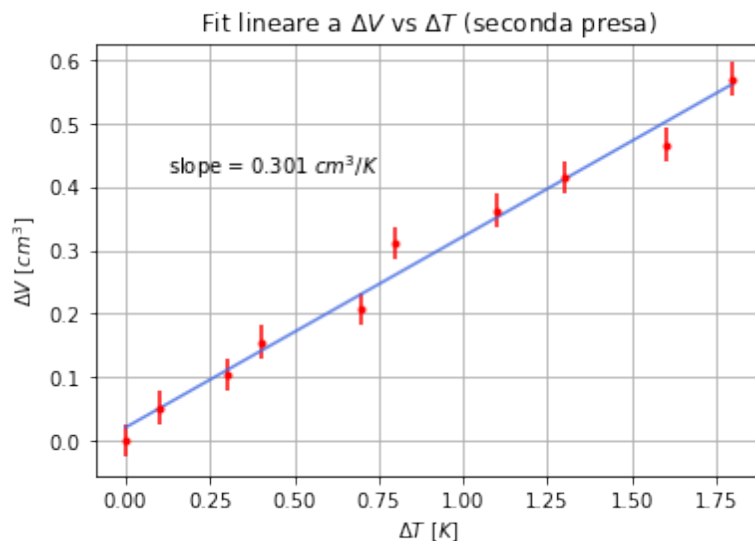


Figura 13: seconda presa dati. La pendenza stimata è pari a $\hat{m} = (0.301 \pm 0.014) \text{ cm}^3/\text{K}$. Il χ^2 misurato con $N - 2$ gradi di libertà vale 5.95; effettuando un test con una soglia di errore del 5% si legge un χ^2 atteso pari a 15.51, dunque il test è superato. Si nota come rispetto alla prima presa la seconda possieda un'incertezza relativa maggiore: ciò è sicuramente dovuto alla minore estensione del braccio di punti su cui si è costruito il fit.

6 Conclusioni

Come ultima analisi dell'esperienza svolta si può affermare che si è ottenuta una **conferma della validità** dei modelli **delle leggi di Boyle, Gay-Lussac e Charles** per le trasformazioni di un gas perfetto.

Non bisogna ignorare, tuttavia, il fatto che le incertezze sono state trattate in modo sicuramente non impeccabile ai fini di una misura formalmente ottimale. Da un lato, si è trascurata una stima quantitativa delle sistematiche che hanno influito nel corso delle prese dati (come, solo per citare un esempio, la **perdita di gas** nell'esperimento di Gay-Lussac). D'altro canto ci sono stati fattori imprevisti che non hanno permesso, in più d'un caso, di accedere a tutte le prese dati che si era considerato ottimali ai fini dell'analisi (si sta citando, chiaramente, i problemi riscontrati con il software DataStudio, o in generale con l'esportazione dei dati su disco esterno, che è risultata nel troncamento delle cifre decimali dopo la terza per tutti i valori di spostamento). Tuttavia, se in ogni caso non sarebbe stato possibile accedere ai valori delle grandezze misurate - e quindi, di riflesso, all'adattamento dei dati alle leggi dei gas perfetti - con precisione grande a piacere, si è riflettuto che non trascurare le incertezze di tipo B avrebbe potuto fornire una stima perlomeno accettabile dei fattori sistematici che hanno compromesso l'accuratezza e la precisione delle misure. Tale scelta è sembrata tutto sommato sensata, in quanto tutti i test statistici condotti sui dati sperimentali sono andati a buon fine entro la soglia

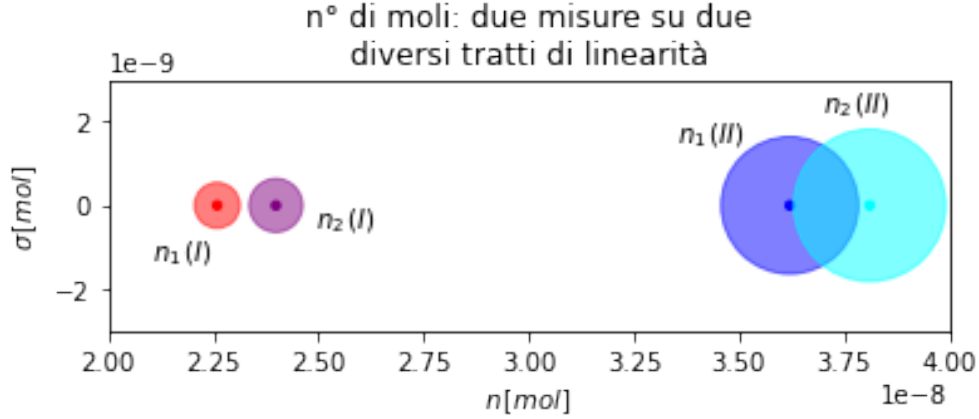


Figura 14: in questo plot si sono raccolti i risultati ottenuti per la stima delle moli di aria presenti nella camera di espansione al momento della trasformazione isobara. Si noti come i due **diversi metodi di misura** portino a **incertezze diverse** di circa un ordine di grandezza (si vedano anche i risultati a pagina precedente). Nel ricercare i motivi per una tale discrepanza, non si dimentichi che il **primo metodo** (indicato con I) permette di mantenere l'**incertezza relativa piuttosto bassa** ($\approx 2\%$) anche grazie al fatto che la linearizzazione da cui esce il coefficiente angolare \hat{m} è stata effettuata sui punti sperimentali ΔV ricavati, senza la propagazione delle incertezze, dalla misura di Δx : per quanto questo modo di procedere permetta, come osservato nella [sezione 3](#), di avere una misura piuttosto precisa del volume, evidentemente cade non appena si propagano le incertezze per la misura del numero di moli - ottenendo comunque due risultati (ricordiamo per le due diverse zone di linearità delle misure) che sono perfettamente compatibili entro 1.5σ . Le **secondo misure** sono state effettuate invece propagando l'incertezza sulla misura di $x_f - x_i$ per ottenere quella di $V_f - V_i$, e come si vede dal grafico ciò si riflette in una **maggiore incertezza** sul valore di $n[mol]$: così si ottengono due valori perfettamente compatibili entro l'incertezza fornita, pagando il prezzo di una misura meno precisa ma che include chiaramente le sistematiche di misura che sono state, per così dire, "aggirate" con il primo metodo.

d'errore che ci si era proposta di adottare, una soglia oggettivamente valida ($\alpha = 5\%$); in conclusione si può essere soddisfatti dell'esperienza condotta, che ha confermato come un gas come l'aria, in condizioni di sufficiente rarefazione, possa rispondere adeguatamente bene (dove "adeguatamente" è ancora da intendersi nei limiti di accettazione che ci si era proposti) alle leggi del gas perfetto.

L'analisi dati è stata effettuata interamente in Python.