

Laboratorio di Elettromagnetismo e Circuiti - canale M-Z

Relazione sulla terza esperienza di laboratorio

Gruppo 19: L. Pietropaoli, S. Scacco, A. Scarpa, F. Scipione

27 settembre 2024

Indice

1 Abstract	2
2 Formule utilizzate	2
3 Procedura sperimentale	3
3.1 Strumentazione	3
3.2 Set up sperimentale	3
3.3 Presa dati	4
4 Risultati sperimentali	5
5 Analisi dati	6
5.0.1 Discussione sulle incertezze	6
5.0.2 Valori teorici	6
5.1 Studio ai capi di R	7
5.1.1 Fit per α	7
5.2 Studio ai capi di C	10
5.3 Passaggio dal regime sottosmorzato a quello sovrasmorzato	10
6 Conclusioni	11

1 Abstract

Lo studio del **circuito RLC impulsivo** è il tema attorno al quale si è sviluppata questa esperienza. In particolare, si è focalizzata l'attenzione sulla determinazione dei parametri α e β che ne classificano e qualificano l'oscillazione. Tali stime si sono effettuate osservando il comportamento della tensione e dello sfasamento ai capi del resistore (in modo quantitativo) e del condensatore (solo qualitativamente). Infine, è stata effettuata una misura di α in corrispondenza del valore di discriminazione del comportamento sovrasmorzato e sottosmorzato.

2 Formule utilizzate

Vengono riportate di seguito le formule utili a comprendere le relazioni tra le grandezze che caratterizzano l'RLC in regime impulsivo.

I segnali di tensione in uscita ai capi della resistenza e del condensatore hanno la forma:

$$v_{out}^R(t) = A e^{-\alpha t} \sin(\beta t) = v_S \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2.1)$$

$$v_{out}^C(t) = v_S - A e^{-\alpha t} \sin(\beta t) = v_S - v_S \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \quad (2.2)$$

con A , ampiezza massima del segnale, costante e α , β t.c.:

$$\alpha = \frac{R_{Tot}}{2L} \quad (\text{inverso del tempo caratteristico del circuito}) \quad (2.3)$$

$$\beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (\text{pseudopulsazione del sistema}) \quad (2.4)$$

e ω_0 pari a

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad . \quad (2.5)$$

Si ricorda che L e C sono l'induttanza dell'induttore e la capacità del condensatore, mentre R_{Tot} indica l'equivalente di resistenza misurata ai capi dell'elemento circuitale di interesse. Per il resistore,

$$R_{Tot} = R + R_L + R_G \quad (2.6)$$

con R_L resistenza dell'equivalente di Thevenin dell'induttore reale e R_G resistenza interna del generatore reale.

Scopo parallelo dell'esperienza è stato, chiaramente, determinare α e β dalle misure sull'oscilloscopio e verificare l'accordo tra i valori ottenuti e le stime teoriche.

3 Procedura sperimentale

3.1 Strumentazione

Gli strumenti utilizzati durante questa esperienza sono stati i seguenti:

- multimeter Fluke 77, utilizzato come ohmetro per misurare le resistenze
- generatore di funzioni *Insteek GFG-8216A*
- oscilloscopio digitale *Tetronix TDS 1002*
- cavi con connettori BNC, morsetti e raccordi a T



Figura 1: Foto della strumentazione utilizzata: il generatore di funzioni, il multimeter e l'oscilloscopio.

3.2 Set up sperimentale

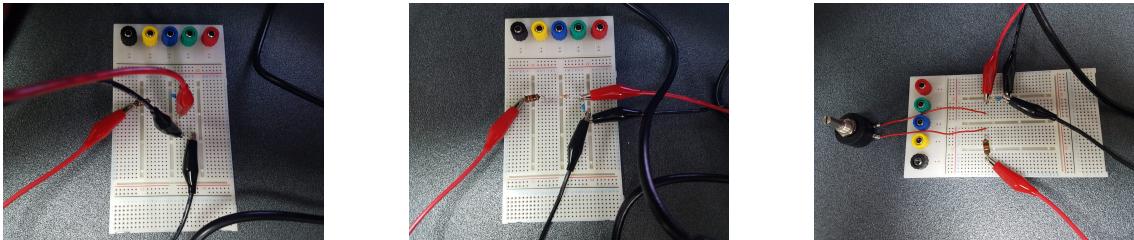


Figura 2: Da sinistra verso destra, i due circuiti RLC di cui si è voluta misurare la tensione rispettivamente ai capi della resistenza e del condensatore, e a seguire il medesimo RLC, con uscita ai capi di C, dove R è stato sostituito con un potenziometro da $5\text{ k}\Omega$.

3.3 Presa dati

La presa dati è stata organizzata in linea sia con la tripartizione "guidata" di questa esperienza - che come accennato nell'Abstract si articola in uno studio della tensione in uscita ai capi del resistore, uno ai capi del resistore e uno nuovamente ai capi del condensatore ma sostituendo il resistore con un potenziometro - sia con il duplice intento, da una parte di descrivere e inferire quantitativamente i parametri dell'oscillazione smorzata che descrive l'*output* tipico dell' RLC in regime impulsivo (**prima parte**), e dall'altra di verificare e comprendere tali fenomeni dal non banale punto di vista qualitativo, con lo scopo di fornire una stima del valore critico di resistenza nell'ambito del fenomeno di smorzamento caratteristico del circuito (**seconda parte**).

Si può schematizzare il processo di misura come segue:

- Misure di resistenza dei componenti forniti (resistenza R e resistenza interna dell'induttore R_L);
- Per la *prima parte*, misure all'oscilloscopio tramite cursori di tipo "ampiezza" dei **picchi** positivi e negativi della tensione in uscita ai capi del resistore R . Pur essendo sufficienti, per una prima stima dei parametri α e β , solo i valori dei massimi, si è scelto di prendere anche i minimi in un tentativo di sistematizzare un errore di offset che si è osservato in fase di presa dati su ogni picco;
- Sempre per la *prima parte*, e immediatamente dopo le misure dei picchi, misure di **ricerca degli zeri** delle oscillazioni (il cui andamento teorico è quello in Equazione 2.2) tramite cursore di tipo "tempo" con intersezione in ampiezza. In particolare, si è registrata l'ascissa corrispondente al primo zero, cioè il punto iniziale dell'oscillazione (si è denotato tuttavia che in lettura appariva un disturbo in corrispondenza della coda dell'oscillazione precedente) e poi si è misurato ogni Δt tra due zeri. Quest'ultima scelta è stata operata in quanto il calcolo dell'incertezza associata a ogni valore è più preciso rispetto a metodi che erano sembrati apparentemente equivalenti nel momento delle misurazioni: per esempio, decidere di misurare ogni ascissa di intersezione a partire da uno zero convenzionale introduce il problema che i cursori si spostano con lo spostarsi lungo gli assi (perciò se si avesse voluto seguire questa strada si sarebbe dovuti comunque ricorrere a somme parziali, tornando al metodo che si è in ultimo scelto di impiegare);
- Ancora per la *prima parte* con un metodo del tutto analogo a quello poc'anzi descritto per le misure di Δt tra zeri, si è misurato anche il Δt tra picchi, utile ovviamente per trovare i punti caratteristici della funzione esponenziale che si è voluto studiare, e sui quali è stato necessario effettuare una regressione lineare (naturalmente sul logaritmo dei valori in ordinata);
- Per la *seconda parte*, in un primo momento si sono scollegati gli elementi sulla basetta dal resto del circuito e si è invertito R e C , riposizionando i cavi nella precedente configurazione per misurare la tensione in uscita ai capi del condensatore. Questa è stata a tutti gli effetti una misura qualitativa, volta a verificare che l'andamento visualizzato sullo schermo dell'oscilloscopio rispettasse le previsioni teoriche;
- In ultimo, sempre per la *seconda parte*, si è sostituito, rispetto all'ultimo RLC configurato, la resistenza R con un potenziometro, per studiare prima qualitativamente i regimi di sotto e sovrasmorzamento e poi trovare il **valore "critico" di resistenza** $R_P^{critico}$ tale per cui si passasse dal sovra al sottosmorzamento. Questa misura è stata comunque compiuta, con un seppur basso fattore di qualitatività, nel modo più accurato che ci è sembrato potesse offrire un'osservazione grafica all'oscilloscopio: scegliendo una scala di tensione appropriata allo scopo (né troppo grande, per poter comunque indagare piccole flessioni della curva, né troppo piccola, per non essere ingannati da rumore o da falsificazioni dovute all'eccessivo ingrandimento del segnale), si è osservato quando il profilo della tensione cominciasse a presentare un flesso, ossia a formare la prima "gobba", mentre si variava lentamente il valore di R_P . Trovata la "gobba" - anche grazie all'ausilio di un cursore di tipo "ampiezza" (si vedano le immagini in sottosezione 5.3) - si è staccato R_P dal circuito e si è misurato $R_P^{critico}$.

4 Risultati sperimentali

Si fornisce anzitutto una visualizzazione delle altre grandezze che caratterizzano i circuiti studiati (si veda Tabella 1): L'equivalente di resistenza misurata ai capi del circuito risulta essere, come descritto

Grandezza fisica	Valore misurato	Tolleranza
Resistenza	$R = 99.3 \Omega$	5%
Resist. interna induttore	$R_L = 38.3 \Omega$	5%
Resist. interna generatore	$R_G = 50 \Omega$	n.d.
Induttanza	$L = 10 \text{ mH}$	n.d.
Capacità	$C = 4.7 \text{ nF}$	n.d.

Tabella 1: n.d. = "non determinato". Per tale grandezza, il costruttore non fornisce alcuna incertezza.

dalla Equazione 2.6:

$$R_{Tot} = 188.30 \Omega \pm 5.32 \Omega$$

Sono riportati i risultati delle prese dati della prima parte - quella relativa allo studio ai capi di R - in Tabella 2 e Tabella 3. In Figura 6 si possono visualizzare, in particolare, i massimi sperimentalmente graficati sopra gli andamenti previsti - quello atteso per $v_{out}(t)$ e quello semplicemente esponenziale.

Massimi	Scala	Δt_{\max}	Scala	Minimi	Scala
324 mV	100 mV	10.2 μs	5 μs	-248 mV	100 mV
188 mV	100 mV	43.4 μs	5 μs	-148 mV	50 mV
112 mV	50 mV	42.8 μs	5 μs	-90 mV	50 mV
66 mV	50 mV	42.0 μs	5 μs	-55.2 mV	20 mV
41.6 mV	20 mV	42.2 μs	5 μs	-35.2 mV	20 mV
25.6 mV	20 mV	42.2 μs	5 μs	-21.6 mV	10 mV
15.6 mV	10 mV	41.8 μs	5 μs	-14 mV	5 mV
10 mV	10 mV	41.8 μs	5 μs		

Tabella 2: Massimi e minimi relativi della tensione $v_{out}(t)$ misurata ai capi di R e tempi in corrispondenza dei massimi relativi. **N.B.:** le misure di tempo sono state effettuate come spiegato in sottosezione 3.3 - partendo dall'impulso (corrispondente al primo valore di Δt_{max}) e prendendo le distanze temporali tra massimi adiacenti.

Δt	Scala Δt
43.0 μs	5 μs
42.8 μs	5 μs
42.8 μs	5 μs
42.8 μs	5 μs
42.2 μs	5 μs
42.4 μs	5 μs

Tabella 3: Intervallo di tempo fra gli zeri della funzione $v_{out}(t)$.

5 Analisi dati

5.0.1 Discussione sulle incertezze

In ogni misura, non essendoci oscillazione tra i valori del segnale riportate dai cursori, possiamo valutare le incertezze da assegnare ad ogni punto sperimentale nel seguente modo:

- Dal manuale dell'oscilloscopio si evince che ad ogni misura è assegnata una incertezza di lettura di tipo sistematico. Tale incertezza è di entità compresa tra lo 0% e il 3% della scala scelta per le misure. Non essendo note, e per motivi di tempo, queste incertezze non verranno considerate per la trattazione in sezione 5. In ogni caso, questo errore sistematico riguarda tutte le misure allo stesso modo, e pertanto provoca "solo" una dilatazione o un offset dei dati.
- Per poter fare un confronto tra i dati, ad ogni misura è stata assegnata un'incertezza pari a $1/\sqrt{12}$ della risoluzione del cursore: ad ogni scala scelta per le misure sull'oscilloscopio, la risoluzione del cursore (cioè la distanza tra ogni "tacca" su cui può essere posizionato) è $1/50$ della scala. Se tale incertezza viene interpretata come "digitale", essa corrisponde ad una distribuzione uniforme in cui il valore misurato (ammesso non sia affetto da sistematiche) è $1/50$ della tacca. A questa distribuzione assegniamo quindi $1/\sqrt{12}$ della tacca come incertezza sulle misure, sia sui tempi che sull'ampiezza. L'incertezza assegnata al singolo valore di lettura del cursore è pertanto $1/50\sqrt{12}$ della scala scelta per la misurazione.
- Poiché i cursori necessari alla determinazione di un $\Delta = X_2 - X_1$ sono due, e di questi viene catturata la differenza, allora l'incertezza totale assegnata sul dato è la somma in quadratura delle due. In conclusione, l'incertezza che assegniamo ad ogni dato è $1/50\sqrt{6} \approx 1/120$ della scala scelta.

5.0.2 Valori teorici

Utilizzando le formule 2.3, 2.4, 2.5 si calcolano i valori teorici per i parametri α (coefficiente di smorzamento), β (pseudopulsazione del sistema) e per la pulsazione ω_0 .

Grandezza	Valore	Incognita
coeff di smorzamento α	9420 rad s^{-1}	470 rad s^{-1}
pseudo-pulsazione β	$145\ 560 \text{ rad s}^{-1}$	210 rad s^{-1}
frequenza risonanza ν_0	23.215 kHz	—
Periodo T	$43.06 \mu\text{s}$	$0.06 \mu\text{s}$

Tabella 4: Valori teorici attesi. Si osservi che gli unici parametri misurati con una tolleranza assegnata (5%) sono le resistenze. Tutte le altre incertezze sono state assegnate tramite una opportuna propagazione delle incertezze

Riportiamo un confronto veloce tra i valori misurati del periodo ed il valore atteso:

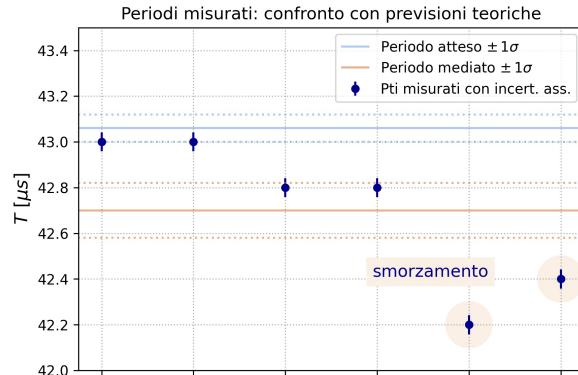


Figura 3: Renditione grafica della Tabella 3. Si noti come in generale la bassa incertezza relativa sulle singole misure non permetta un buon accordo a una sigma tra i valori campionati e la previsione teorica. Questa problematica è evidente in particolare negli ultimi due punti, misurati come distanza temporale tra gli ultimi picchi non rumorosi della tensione in uscita.

5.1 Studio ai capi di R

La prima parte dell'esperienza è stata dedicata alla stima del coefficiente di smorzamento α e della pseudo-pulsazione β attraverso lo studio della tensione in uscita ai capi della resistenza in un circuito RLC (visibile in Figura 2).

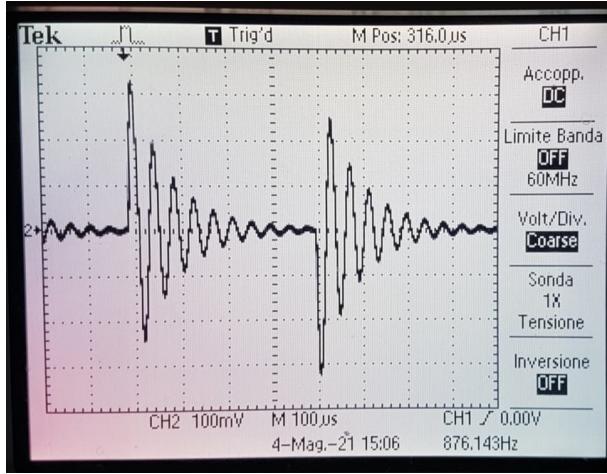


Figura 4: Foto del profilo della tensione in uscita ai capi del resistore.

La pseudo-pulsazione β è stata stimata attraverso le misure del periodo T di oscillazione del segnale in uscita (i valori sono riportati in Tabella 3), poiché risulta che $T = 2\pi/\beta$. La miglior stima di T è stata ottenuta attraverso la media delle misure dei periodi riportate in Tabella 3, le incertezze sono state assegnate ai periodi come descritto nella sottosottosezione 5.0.1 e l'incertezza finale è esattamente l'incertezza sulla media delle n misure.

$$T = 42.70 \mu s \pm 0.12 \mu s$$

Si ottiene quindi la stima per la pseudo-pulsazione β che risulta essere:

$$\beta = 147.14 \text{ krad s}^{-1} \pm 0.82 \text{ krad s}^{-1}$$

Il risultato è compatibile entro due sigma dal valore atteso in tabella Tabella 4. Il periodo, al contrario, non risulta essere compatibile con il valore teorico. Guardando, però la tabella delle misurazioni effettuate si nota come le prime misurazioni riportino un valore di T molto vicino a quello teorico, mentre nelle misurazioni successive questo valore tenda a scendere ed allontanarsi dall'andamento previsto. Questo effetto potrebbe essere dovuto a dei fenomeni di smorzamento non considerati all'interno dell'analisi dati che potrebbero portare il circuito a diminuire anche il suo periodo di oscillazione. Questi effetti sarebbero subiti, infatti, anche dal generatore di tensione che, durante la presa dati, non ha prodotto una onda quadra perfetta, ma una forma d'onda che presenta una piccola oscillazione in un intorno di V_s .

5.1.1 Fit per α

Per il calcolo di α , la questione si fa più delicata. Innanzitutto, si osservi che dalla Figura 4, i due segnali mostrati (che pure sono uno lo speculare dell'altro) non oscillano perfettamente attorno allo zero, ma leggermente sopra (in corrispondenza dell'impulso positivo dell'onda quadra) e uno leggermente sotto (per l'impulso negativo).

Per i primi punti presi per il fit esponenziale, questo non modifica i dati. Tuttavia, quando le oscillazioni si iniziano a fare piccole, un piccolo offset può influenzare molto i parametri del fit. Per questo, si è agito nel modo seguente:

- Si è misurata la posizione dei minimi, che si è stimato essere esattamente nel punto temporale medio tra due massimi adiacenti, e il valore di tensione in loro corrispondenza.

- Si è inferito il valore di tensione atteso dei minimi, sfruttando la serie geometrica secondo cui si distribuiscono i massimi: poiché i minimi stanno a metà strada, il potenziale a cui si trovano risolve la seguente proporzione: $V_n^{\max} : V_n^{\min} = V_n^{\min} : V_{n+1}^{\max}$, da cui:

$$V^{\min} = \sqrt{V_n^{\max} \cdot V_{n+1}^{\max}}$$

- L'offset stimato corrisponde alla semidifferenza tra il valore atteso e il valore misurato dei minimi. Su più minimi, si è eseguita la media e si è assegnato l'incertezza sulla media: offset = $-1.18 \text{ mV} \pm 0.17 \text{ mV}$.

Esso ammonta a più del 10% del valore di tensione nell'ultima misura: il suo effetto di certo avrebbe influenzato in maniera rilevante il risultato del fit.

Pertanto, assegnando le incertezze come in sottosottosezione 5.0.1, e propagandole nel logaritmo, il risultato è il seguente:

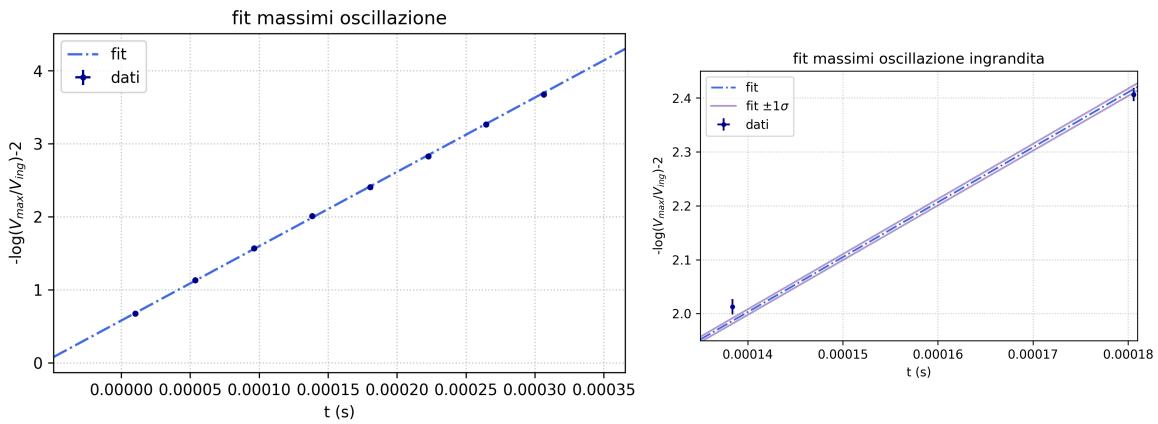


Figura 5: Fit realizzato linearizzando il rapporto V_{out}/V_{ing} usando il logaritmo (cambiato di segno per maggiore visibilità), e a destra lo stesso fit ingrandito, per mostrare le incertezze finali. I punti risultano ben allineati con la retta di fit.

I parametri del fit sono:

Parametro	Valore	Unità di misura
Coeff. angolare (m)	10185 ± 53	rad/s
Intercetta (c)	0.5769 ± 0.0056	—
χ_S^2 (dof = 6)	7.59	—

Tabella 5: I parametri del fit lineare tabulati.

Riportiamo in Figura 6 un grafico riassuntivo molto esplicativo:

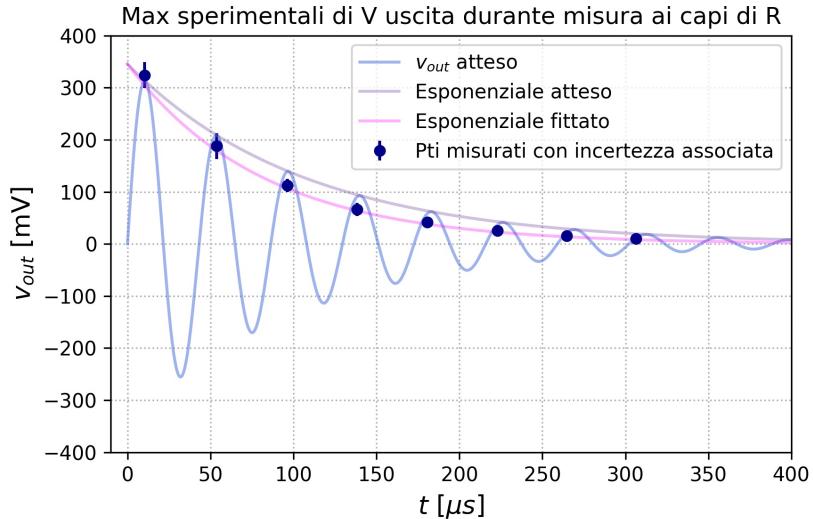


Figura 6: In blu, con le incertezze ingrandite, sono stati plottati i massimi misurati (si è tenuto conto solo dell'incertezza lungo le y). In azzurro e in violetto sono stati invece accennati rispettivamente l'andamento atteso per la tensione in uscita (si veda Equazione 2.2) e per l'esponenziale relativo a tale andamento (funzione sulla quale - per essere precisi, sul suo logaritmo - è stato effettuato il fit lineare). L'esponenziale di parametro α inferito dal fit è stato graficato in rosa.

Il valore finale di α :

$$\alpha_F = 10186 \pm 53 \text{ rad s}^{-1}$$

Si tratta proprio del coefficiente angolare della retta di fit. Si osserva che la compatibilità tra il valore teorico ed il valore sperimentale è "solo" a due sigma.

I motivi per questa discrasia potrebbero essere molteplici:

- Primo fra tutti, il fatto di non aver misurato il valore di L e C . Una piccolissima discrepanza nel valore misurato di L (per esempio, se invece di essere 0.01 H fosse 0.095 H) avrebbe reso le α_F perfettamente compatibili entro una sigma, o avvicinandole, oppure aumentando le incertezze (mediante un qualche tipo di processo di misura).
- Posizione del cursore per gli ultimi punti di presa dati potrebbe essere non molto precisa in seguito al rumore di fondo e alla piccolezza dell'oscillazione.

5.2 Studio ai capi di C

E' riportata in Figura 7 la foto del segnale di tensione in uscita ai capi del condensatore del circuito RLC (Figura 2). E' ben visibile dalla Figura 7 che il segnale in uscita v_{out} ha esattamente lo stesso andamento

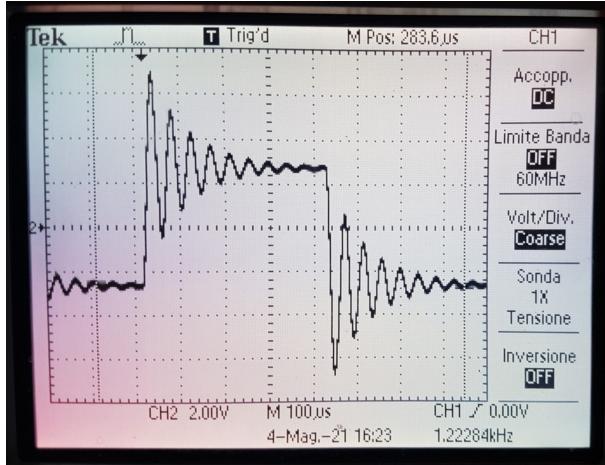


Figura 7: Foto del profilo della tensione in uscita ai capi del condensatore.

della tensione ai capi del condensatore in regime sottosmorzato ($\alpha < \omega_0$) quando la sollecitazione v_{in} è costante, che nel caso in analisi è un'onda quadra. Il segnale ha quindi la tipica forma di un'oscillazione smorzata e in particolare si nota che l'inviluppo va come $e^{-\alpha t}$.

La funzione teorica rappresentata è quella riportata in sezione 2:

$$v_{out}^C(t) = v_S - A e^{-\alpha t} \sin(\beta t) = v_S \left[1 - \frac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} \sin(\beta t) \right]$$

5.3 Passaggio dal regime sottosmorzato a quello sovrasmorzato

L'obiettivo di questa parte dell'esperienza è quello di analizzare il passaggio dell'andamento di $V_{out}(t)$ dal regime sottosmorzato delle parti precedenti, al regime sovrasmorzato, ponendo particolare attenzione allo smorzamento critico.

Per effettuare il cambio di regime, è necessario far variare la resistenza R del circuito. questo viene fatto sostituendo un potenziometro alla resistenza R precedentemente presente nel circuito. Il resistore più aumentare fino ad un massimo di $5\text{k}\Omega$.

In seguito si analizza qualitativamente l'andamento della tensione ai capi del condensatore al variare della resistenza. Si riportano, di seguito, gli andamenti per diversi valori della resistenza:

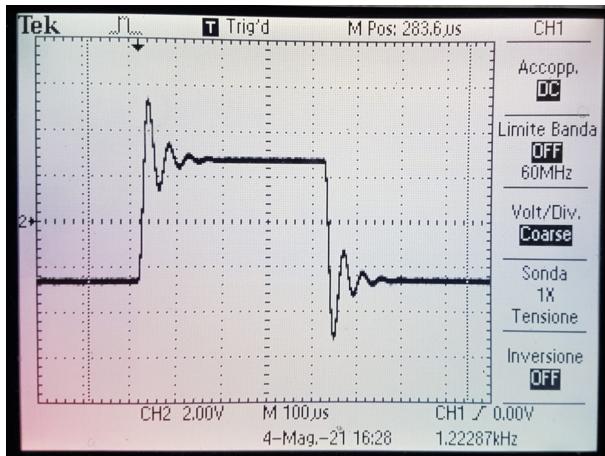


Figura 8: Foto del profilo della tensione in uscita ai capi del condensatore dove, nel circuito RLC, R è stato sostituito da un potenziometro da $5\text{k}\Omega$ settato a 609Ω .

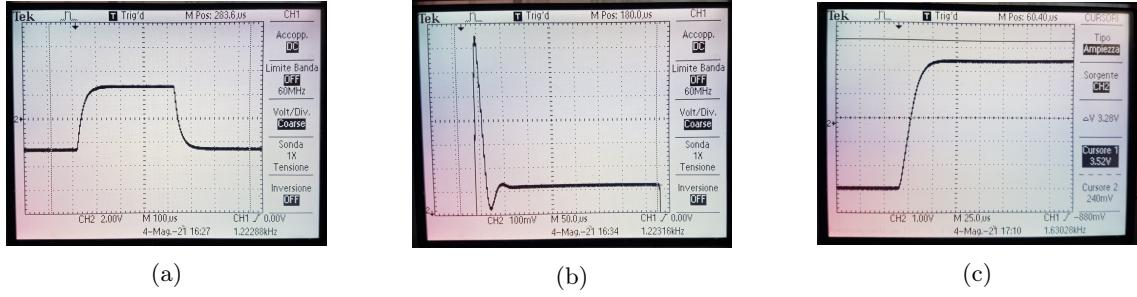


Figura 9: Andamento di v_{out} con potenziometro, da sinistra a destra, rispettivamente a 5000Ω , 1461Ω e 2560Ω .

Nelle figure soprastanti si possono ben visualizzare i tre tipi di andamenti possibili per la tensione ai capi del condensatore. Infatti, con il potenziometro a $5 k\Omega$ (Figura 9a), valore ben al di sopra di quello previsto per $R_p^{critico}$, la tensione non presenta un andamento oscillante in un intorno della tensione del generatore V_{in} , ma esponenziale ; si trova, quindi, in regime sovrasmorzato.

- Con il potenziometro a $1.461 k\Omega$, invece (Figura 9b), come aspettato, il valore della tensione oscilla in un intorno di V_{in} , tendendo comunque rapidamente a tale valore. Il circuito si trova, quindi, in regime sottosmorzato.
- Quando il potenziometro è a $2.560 k\Omega$ (Figura 9c), si ha infine che l'andamento è quello tipico dello smorzamento critico: non vi sono, infatti, oscillazioni in un intorno di V_{in} , ma l'andamento negli istanti iniziali, non è perfettamente esponenziale. Si ritiene, quindi, che $R_p^{critico} = 2.56 k\Omega$, contariamente al valore teorico atteso $\hat{R} = 2.89 k\Omega$, calcolato teoricamente tramite (2.3), in cui si è posto la condizione $\alpha = \omega_0$, tipica dello smorzamento critico.
- Questa discrepanza tra i due valori può essere dovuta al fatto che C e L sono stati forniti senza incertezza. Inoltre, l'impossibilità di misurare tali grandezze attraverso gli strumenti forniti in laboratorio, non ha permesso di quantificare piccole oscillazioni nel valore di capacità ed induttanza, che possono produrre grandi variazioni nel calcolo delle grandezze caratteristiche come la pulsazione ω_0 o la costante di smorzamento α .

6 Conclusioni

Per concludere, la realizzazione sperimentale ha peccato nel confermare i nostri risultati teorici, sia per l'impossibilità di misurare alcune componenti e sia per effetti sistematici la cui entità risulta ancora sconosciuta.

Si propone quindi di ripetere l'esperimento con le seguenti prescrizioni:

- Si consiglia una accurata misurazione dei valori di induttanza e capacità con rispettive incertezze (magari attraverso il ponte d'impedenze)
- Particolare attenzione va riposta nel considerare gli errori sistematici dovuti agli strumenti: in particolare all'oscilloscopio stesso e al generatore di funzione.
- Si suggerisce di eseguire misure ripetute con i cursori e di evitare segnali rumorosi che impediscono la corretta lettura del valore dell'oscilloscopio.
- Evitare di prendere dati molto in là con lo smorzamento, pena eventuale perdita di accuratezza e maggiore influenza degli errori sistematici.