

Laboratorio di Elettromagnetismo e Circuiti - canale M-Z

Relazione sulla terza esperienza di laboratorio

Gruppo 19: L. Pietropaoli, S. Scacco, A. Scarpa, F. Scipione

27 settembre 2024

Indice

1	Abstract	2
2	Formule utilizzate	2
3	Procedura sperimentale	3
3.1	Strumentazione	3
3.2	Set up sperimentale	3
3.3	Presa dati	4
4	Risultati sperimentali	4
5	Analisi dati	6
5.0.1	Discussione sulle incertezze	6
5.0.2	Calcolo dello sfasamento in radianti	7
5.0.3	Valori teorici frequenza risonanza e del fattore di merito	7
5.0.4	Discussione andamento di V_{in}	8
5.0.5	Metodo dell'interpolazione	8
5.1	Studio ai capi di R	9
5.2	Studio ai capi di C	12
6	Conclusioni	13

1 Abstract

Lo studio del **circuito RLC serie** è il tema attorno al quale si è sviluppata questa esperienza. In particolare, si è focalizzata l'attenzione sulla determinazione dei parametri caratterizzanti di un RLC serie in regime sinusoidale: *frequenza di risonanza* e *fattore di merito*. Tali stime si sono effettuate osservando il comportamento della tensione e dello sfasamento ai capi del condensatore e del resistore.

Nell'analisi dati, il problema è trattato in maniera sia grafica che analitica, quantificando i risultati e cercando di giustificare con precisione ogni discrepanza dai valori teorici attesi. Si ritiene essenziale evidenziare come da un lato sia necessario perseguire il rigore nella trattazione delle incertezze, dall'altro non va dimenticato qual è l'obiettivo primario di questa esperienza: una esemplificazione chiara e puntuale del fenomeno della risonanza, che non deve perdersi troppo nei meandri di calcoli e tecnicismi, ma mirando direttamente al cuore della fisica che soggiace alle osservazioni sperimentali.

2 Formule utilizzate

Il formulario di riferimento per l'elaborazione consiste nella seguente lista di formule utili:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (2.1)$$

$$Q = \frac{\nu_0}{|\nu_1 - \nu_2|} = \frac{2\pi\nu_0 L}{R} \quad (2.2)$$

$$\nu_{1,2} = \frac{\sqrt{((R + R_L)C)^2 + 4LC}}{2} \pm \frac{R + R_L}{2L} \quad (2.3)$$

Per il modulo della funzione $H(j\omega)$:

$$|H_R(j\omega)| = \frac{R}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad |H_C(j\omega)| = \frac{1/\omega C}{\sqrt{(R + R_L)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \quad (2.4)$$

Per la fase della funzione $H(j\omega)$:

$$\Delta\Phi_R = -\arctan \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R + R_L} \quad \Delta\Phi_C = -\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{(\omega L - 1/\omega C)}{R + R_L} \quad (2.5)$$

3 Procedura sperimentale

3.1 Strumentazione

Gli strumenti utilizzati durante questa esperienza sono stati i seguenti:

- multimetro Fluke 77, utilizzato come ohmetro per misurare le resistenze
- generatore di funzioni *Instek GFG-8216A*
- oscilloscopio digitale *Tetronix TDS 1002*
- cavi con connettori BNC, morsetti e raccordi a T



Figura 1: Foto della strumentazione utilizzata: l'oscilloscopio, il generatore di funzioni e il multimetro.

3.2 Set up sperimentale

Per svolgere le misure richieste in questa terza esperienza, il generatore di funzioni è stato collegato al canale 1 dell'oscilloscopio per mezzo di un connettore BNC, mentre al canale 2 è stato connesso l'elemento circuitale di cui si è voluta misurare la tensione, anch'esso tramite un cavo con connettore BNC e morsetti. Entrambi i canali dell'oscilloscopio sono stati settati con accoppiamento di tipo "DC" e attenuazione "1x".

Sono state realizzate due diverse configurazioni del circuito **RLC serie** per meglio adattarsi al tipo di misura che si è andato ad eseguire, come si può osservare nelle Figura 2 e Figura 3:

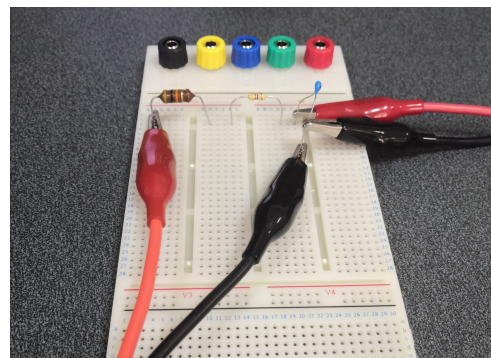
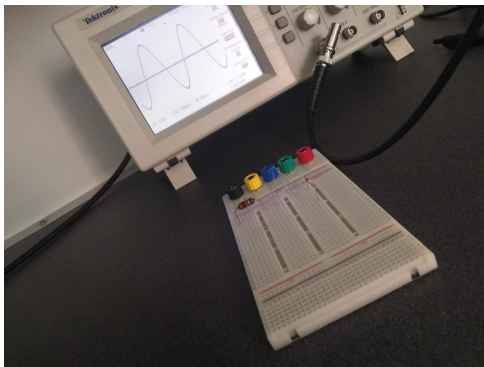


Figura 2: Si osservi come il collegamento in serie avviene tra tutti e tre i bipoli, mentre i morsetti del segnale in entrata vanno a completare il circuito. Particolare attenzione si è riposta nella collocazione dei morsetti, in quanto a volte il segnale in uscita si è mostrato "sporco".

E la loro schematizzazione è mostrata in Figura 3:

Le resistenze in gioco sono tre:

- La resistenza circuitale R , mostrata come un bipolo nella Figura 2
- La resistenza interna dell'induttore R_L , di cui si è tenuto conto nell'analisi dati.
- La resistenza interna del generatore stesso, che per il Teorema di Thevenin è schematizzabile come un generatore ideale in serie ad un resistore di resistenza R_S . Questa si è potuta tuttavia ignorare con una semplice accortezza, come spiegato in sottosezione 3.3.

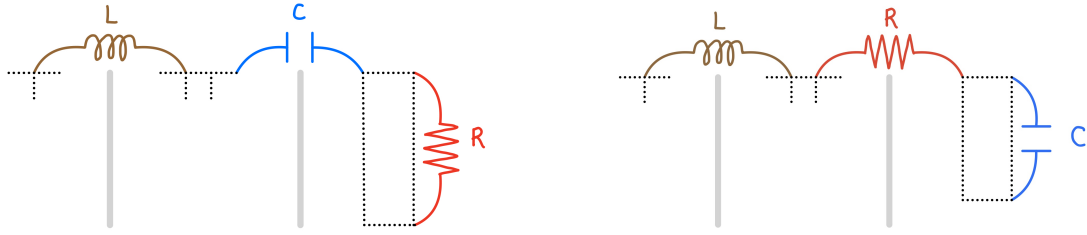


Figura 3: Circuito RLC schematizzato nelle due configurazioni studiate. Si tratta semplicemente di una riorganizzazione dei bipoli così da ottenere stime di tensione ai capi di R o di C.

3.3 Presa dati

Il processo di presa dati si è articolato in due momenti fondamentali: la ricezione del segnale in uscita ai capi del resistore, e la ricezione ai capi del condensatore. In ciascuna configurazione del circuito, si è osservata la variazione della risposta del circuito all'aumentare della frequenza del segnale di onda sinusoidale in ingresso, attraverso la misura delle seguenti grandezze:

- Misura delle resistenze R e R_L con il multimetro in modalità ohmetro.
- Misure di tensione di ingresso nel circuito V_i , che bypassano il problema della resistenza interna R_S del generatore di funzione, non avendo necessità di misurarla direttamente. Tali misure si sono effettuate attraverso cursori di tipo *tensione* sintonizzati sul canale in entrata al circuito.
- Misure di tensione in uscita dal circuito V_o , talora ai capi del resistore, talvolta ai capi del condensatore. Tali misure si sono effettuate attraverso cursori di tipo *tensione* sintonizzati sul canale in uscita dal circuito. A causa di alcune interferenze del segnale e del rumore dell'oscilloscopio, le misure di tensione più piccole sono risultate "sporche" e quindi più soggette ad errori, come illustrato in sottosezione 5.0.1
- Misure di sfasamento, attraverso la distanza temporale Δt dei picchi del segnale in entrata ed in uscita. Tali misure si sono realizzate con cursori di tipo *tempo*, sintonizzati con entrambi i canali e sottoposti allo stesso fondo scala orizzontale. Particolare difficoltà si è avvertita nel quantificare gli sfasamenti molto piccoli, che hanno portato inevitabilmente ad un errore relativo piuttosto grande per alcuni valori.
- A queste misure, si è prestato attenzione a riportare anche i valori di fondo scala per la visualizzazione delle tensioni in ingresso ed in uscita, così come il fondo scala sull'asse dei tempi: questi dati torneranno utili per assegnare le incertezze.

Al cluster di valori catturati nei pressi della frequenza di risonanza attesa, si aggiungono delle misure dei parametri sopra riportati a frequenze molto più basse (≈ 100 Hz) a frequenze molto più alte (≈ 100 kHz), per un totale di 15 punti sperimentali per configurazione circuitale.

4 Risultati sperimentali

Innanzitutto, i valori delle grandezze misurate che caratterizzano i vari sistemi circuitali sono riportate nella tabella Tabella 1:

Grandezza fisica	Valore misurato	Tolleranza
Resistenza	$R = 455 \Omega$	5%
Resist. interna	$R_L = 38.1 \Omega$	5%
Induttanza	$L = 10 \text{ mH}$	n.d.
Capacità	$L = 4.7 \text{ nF}$	n.d.

Tabella 1: n.d. = "non determinato". Per tale grandezza, il costruttore non fornisce alcuna incertezza.

A questo punto, si sono svolte le tre principali prese dati, i cui risultati sono illustrati¹. in Tabella 2 e Tabella 3²:

Frequenza	Ingresso	Scala CH 1	Uscita	Scala CH 2	Δt Picchi	Scala Δt
0.10 kHz	1920 mV	500 mV	2.88 mV	2.00 mV	2500 μ s	250 μ s
0.50 kHz	1940 mV	500 mV	14.4 mV	5.00 mV	520.0 μ s	250 μ s
1.00 kHz	1920 mV	500 mV	26.4 mV	10.0 mV	244.0 μ s	100 μ s
5.00 kHz	1920 mV	500 mV	128 mV	50.0 mV	49.00 μ s	25.0 μ s
12.00 kHz	1920 mV	500 mV	354 mV	50.0 mV	18.00 μ s	25.0 μ s
18.80 kHz	1900 mV	500 mV	904 mV	200 mV	8.000 μ s	10.0 μ s
20.00 kHz	1840 mV	500 mV	1070 mV	200 mV	6.400 μ s	10.0 μ s
22.00 kHz	1820 mV	500 mV	1400 mV	500 mV	3.200 μ s	5.00 μ s
23.00 kHz	1800 mV	500 mV	1500 mV	500 mV	2.000 μ s	5.00 μ s
23.60 kHz	1780 mV	500 mV	1520 mV	500 mV	-0.600 μ s	5.00 μ s
24.00 kHz	1780 mV	500 mV	1520 mV	500 mV	-0.400 μ s	5.00 μ s
26.00 kHz	1820 mV	500 mV	1400 mV	200 mV	-2.400 μ s	5.00 μ s
30.20 kHz	1880 mV	500 mV	1010 mV	200 mV	-5.500 μ s	5.00 μ s
50.00 kHz	1920 mV	500 mV	364 mV	100 mV	-4.500 μ s	2.50 μ s
100.00 kHz	1940 mV	500 mV	142 mV	20.0 mV	-2.360 μ s	1.00 μ s

Tabella 2: Dati relativi allo studio della resistenza in regime sinusoidale, insieme alla scala a cui i dati sono stati presi. Le tre sezioni dei dati rappresentano i dati a bassa frequenza, i dati nei pressi della risonanza e i dati ad alta frequenza.

Frequenza	Ingresso	Scala CH 1	Uscita	Scala CH 2	Δt Picchi	Scala Δt
0.10 kHz	2080 mV	500 mV	2080 mV	500 mV	-80.00 μ s	1000 μ s
0.50 kHz	2080 mV	500 mV	2100 mV	500 mV	-10.00 μ s	250 μ s
1.00 kHz	2100 mV	500 mV	2120 mV	500 mV	-8.000 μ s	100 μ s
5.00 kHz	2080 mV	500 mV	2180 mV	500 mV	-3.000 μ s	25.0 μ s
12.00 kHz	2080 mV	500 mV	2680 mV	500 mV	-2.800 μ s	10.0 μ s
19.00 kHz	2020 mV	500 mV	4440 mV	1000 mV	-6.000 μ s	10.0 μ s
20.00 kHz	2000 mV	500 mV	4760 mV	1000 mV	-6.600 μ s	10.0 μ s
22.00 kHz	1980 mV	500 mV	5360 mV	1000 mV	-8.600 μ s	5.00 μ s
23.00 kHz	1940 mV	500 mV	5400 mV	1000 mV	-10.20 μ s	5.00 μ s
23.20 kHz	1920 mV	500 mV	5400 mV	1000 mV	-10.40 μ s	5.00 μ s
23.60 kHz	1880 mV	500 mV	5360 mV	1000 mV	-10.60 μ s	5.00 μ s
25.00 kHz	1920 mV	500 mV	4840 mV	1000 mV	-11.80 μ s	5.00 μ s
28.00 kHz	2000 mV	500 mV	3560 mV	1000 mV	-13.00 μ s	5.00 μ s
40.00 kHz	2080 mV	500 mV	1100 mV	200 mV	-11.30 μ s	2.50 μ s
75.00 kHz	2100 mV	500 mV	248 mV	50.0 mV	-6.500 μ s	2.50 μ s
100.00 kHz	2100 mV	500 mV	134 mV	20.0 mV	-4.880 μ s	1.00 μ s

Tabella 3: Dati relativi allo studio della resistenza in regime sinusoidale, insieme alla scala a cui i dati sono stati presi. Le tre sezioni dei dati rappresentano i dati a bassa frequenza, i dati nei pressi della risonanza e i dati ad alta frequenza.

¹L'oscilloscopio mostra i segnali di tensione superiori al singolo volt direttamente in volt e non in millivolt. Sono stati convertiti tutti in millivolt per ragioni di uniformità e ordine.

²Si osservi che, pur non toccando il generatore, la tensione in ingresso si riduce nei pressi della risonanza: si tratta dell'effetto della resistenza interna del generatore che lo influenza

5 Analisi dati

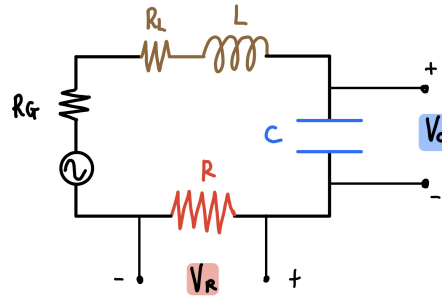


Figura 4: Schema circuitale composto da generatore di segnale, induttore reale in serie a un condensatore e un resistore. Si noti che il generatore di funzioni può essere schematizzato con il suo equivalente di Thevenin e ha una resistenza interna R_G , mentre l'induttore è reale e quindi è equivalente a un induttore ideale in serie a una resistenza R_L

5.0.1 Discussione sulle incertezze

In ogni misura, non essendoci oscillazione tra i valori del segnale riportate dai cursori, possiamo valutare le incertezze da assegnare ad ogni punto sperimentale nel seguente modo:

- Dal manuale dell'oscilloscopio si evince che ad ogni misura è assegnata una incertezza di lettura di tipo sistematico. Tale incertezza è di entità compresa tra lo 0% e il 3% della scala scelta per le misure. Non essendo note, e per motivi di tempo, queste incertezze non verranno considerate per la trattazione in sezione 5. In ogni caso, questo errore sistematico riguarda tutte le misure allo stesso modo, e pertanto provoca "solo" una dilatazione o un offset dei dati.
- Per poter fare un confronto tra i dati, ad ogni misura è stata assegnata un'incertezza pari a $1/\sqrt{12}$ della risoluzione del cursore: ad ogni scala scelta per le misure sull'oscilloscopio, la risoluzione del cursore (cioè la distanza tra ogni "tacca" su cui può essere posizionato) è $1/50$ della scala. Se tale incertezza viene interpretata come "digitale", essa corrisponde ad una distribuzione uniforme in cui il valore misurato (ammesso non sia affetto da sistematiche) è $1/50$ della tacca. A questa distribuzione assegniamo quindi $1/\sqrt{12}$ della tacca come incertezza sulle misure, sia sui tempi che sull'ampiezza. L'incertezza assegnata al singolo valore di lettura del cursore è pertanto $1/50\sqrt{12}$ della scala scelta per la misurazione. Poiché i cursori necessari alla determinazione di un Δ sono due, e di questi viene catturata la differenza, allora l'incertezza totale assegnata sul dato è la somma in quadratura delle due. In conclusione, l'incertezza che assegniamo ad ogni dato è $1/50\sqrt{6} \approx 1/120$ della scala scelta.

Poiché, per il calcolo del modulo della funzione di trasferimento, occorre fare il rapporto di due ampiezze, misurate a scale diverse (quindi con errori diversi), l'incertezza finale che otteniamo è, con la Equazione 5.1:

$$\frac{\sigma_{|H|}}{|H|} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \frac{\sigma_{x_i}^2}{\mu_i^2}} = \frac{\sigma[V_{out}]}{V_{out}} \oplus \frac{\sigma[V_{in}]}{V_{in}} \quad (5.1)$$

Infine, due parole sui segnali "rumorosi", che principalmente si sono visti a basse frequenze o ad alte frequenze. In prossimità della risonanza (che sono i valori che a noi interessano), il segnale in uscita è molto pulito, come si osserva nel confronto in Figura 5: Non ci preoccuperemo di trattare con un incertezza maggiore i punti per valori estremali della frequenza, perché essi non ci interessano nell'analisi dati.

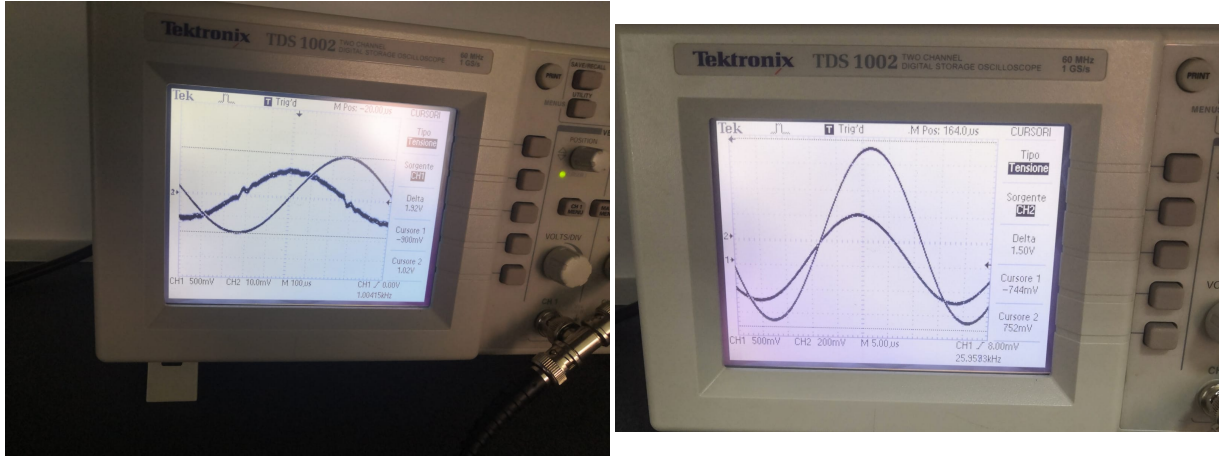


Figura 5: Confronto tra un segnale sporco e un segnale pulito in uscita a diverse frequenze: a sinistra, il segnale è preso in uscita dal resistore a 1 kHz. Il segnale a destra è preso con tensione di ingresso a 25 kHz, ed è molto più pulito e adatto per l'analisi dati che segue.

5.0.2 Calcolo dello sfasamento in radianti

Come si nota dalle tabelle relative ai dati sperimentali, lo sfasamento tra le tensioni è stato registrato in termini di *tempo*. Per passare alla sua espressione in radianti ci si serve della:

$$\Delta\Phi(t) = 2\pi \nu t$$

L'incertezza sulle misure di $\Delta\Phi$ [rad] si calcola propagando quelle su t secondo la seguente formula³:

$$\sigma[\Delta\Phi] = \Delta\Phi \sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2 \frac{\sigma_{x_i}^2}{\mu_i^2}} = \Delta\Phi \frac{\sigma[\Delta t]}{\Delta t} \quad (5.2)$$

$$= \Delta\Phi \frac{\sigma[t_2] \oplus \sigma[t_1]}{\Delta t} = \frac{\text{Scala}}{120} \frac{\Delta t}{\Delta t} \quad (5.3)$$

5.0.3 Valori teorici frequenza risonanza e del fattore di merito

Tramite l'ausilio delle formule (2.1), (2.2), (2.3) si calcolano i valori teorici per la frequenza di risonanza ν_0 e le frequenze ν_1 e ν_2 , per le quali l'ampiezza della funzione di trasferimento si riduce di un fattore $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Si calcolano, inoltre, i valori del fattore di merito e dell'ampiezza massima prevista per la funzione di trasferimento, con relative incertezze. Si ottengono i valori riportati nella seguente tabella:

Grandezza	Valore	Incertezza
$ H_{\text{MAX}} $	0.922	0.063
frequenza ν_0	23.15 kHz	n.d.
frequenza ν_1	19.60 kHz	0.89 kHz
frequenza ν_2	27.47 kHz	1.16 kHz
fattore di merito Q	2.96	0.14

Tabella 4: Valori teorici attesi. Si osservi che gli unici parametri misurati con una tolleranza assegnata (5%) sono le resistenze. Tutte le altre incertezze sono state assegnate tramite una opportuna propagazione delle incertezze

³Dove in questo caso $\Delta\Phi$ è la f , funzione di due sole x_i , le μ_i sono i valori attesi delle x_i e le β_i rappresentano gli eventuali esponenti a cui sono elevate le x_i .

5.0.4 Discussione andamento di V_{in}

A differenza delle esperienze precedenti, in questo caso il generatore di tensione non viene approssimato ad un generatore ideale, ma ad uno reale. Esso, infatti, possiede una resistenza interna, che modifica leggermente l'azione del generatore.

Per aggirare il problema, si utilizza la funzione di trasferimento del rapporto tra la tensione di output che si vuole misurare e la tensione definita V_{in} , ovvero la tensione ai capi del bipolo costituito dalla serie di resistenza, capacitore e induttore reale e quindi di impedenza totale pari alla somma delle impedenze di questi elementi. La tensione ai capi di questo bipolo può essere vista come la risposta in frequenza del segnale di un generatore ideale di tensione in serie ad un elemento resistivo. Studiando, pertanto, il fasore della tensione del bipolo, in modo del tutto analogo ai casi precedenti, si ottiene che la fase del segnale V_{in} non varia in maniera apprezzabile con la frequenza, avendo un ordine di $\simeq 10^{-5} \text{ rad}$. L'ampiezza del segnale, invece, viene modificata col variare della frequenza, fino a raggiungere un minimo, al valore della frequenza di risonanza, pari a 0.92 del valore massimo.

5.0.5 Metodo dell'interpolazione

Dai grafici che seguiranno nelle sottosezione 5.1 e sottosezione 5.2, emerge che il comportamento dei punti nei pressi delle frequenze che ci interessano (o meglio, dei loro logaritmi) è quello di allinearsi lungo una retta, di cui è possibile fare interpolazione.

Si è pertanto agito come segue:

- Si è trovata la coppia di dati adiacenti $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$, dove $x_{1,2}$ è il logaritmo della frequenza e $y_{1,2}$ è o un rapporto di tensioni o una fase, che più si avvicina al valore costante $|H(\omega_T)|$ o $\Delta\Phi(\omega_T)$, e si è calcolata la retta r passante per quei due punti (tenendo conto delle incertezze):

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} & \sigma_m &= \frac{\sigma[y_1] \oplus \sigma[y_2]}{x_2 - x_1} \\ c &= \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2 - x_1} & \sigma_c &= \frac{\sigma[y_1] x_2 \oplus \sigma[y_2] x_1}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

- Si è quindi calcolata l'intersezione analitica tra questa retta e il valore della ampiezza o della fase in corrispondenza della frequenza di taglio ($k = 1/\sqrt{2}$ o $k = \pi/4$ a seconda dei casi), con la relativa incertezza:

$$x_0 = \frac{k - c}{m} \quad \sigma[x_0] = x_0 \left(\frac{\sigma_c}{c} \oplus \frac{\sigma_m}{m} \right)$$

- Trovata l'ascissa di intersezione $x_0 = \ln(\nu_0)$ si è ritornati sul dominio delle frequenze:

$$\nu_0 = e^{x_0} \quad \sigma[\nu_0] = \sigma[x_0] e^{x_0}$$

5.1 Studio ai capi di R

Ai valori finali di $|H_R|$ e di $\Delta\Phi_R$, che riportiamo in tabella Tabella 5, si accompagnano le incertezze calcolate con Equazione 5.1 e Equazione 5.3:

Frequenza	$ H_R $	$\sigma[H_R]$	$\Delta\Phi_R$	$\sigma[\Delta\Phi_R]$
0.10 kHz	0.0015	0.0062	1.5708 rad	0.0013 rad
0.50 kHz	0.0074	0.0036	1.6336 rad	0.0065 rad
1.00 kHz	0.0138	0.0038	1.5331 rad	0.0052 rad
5.00 kHz	0.0667	0.0039	1.5394 rad	0.0065 rad
12.00 kHz	0.1844	0.0025	1.357 rad	0.016 rad
18.80 kHz	0.4758	0.0029	0.945 rad	0.010 rad
20.00 kHz	0.5815	0.0027	0.804 rad	0.010 rad
22.00 kHz	0.7692	0.0038	0.4423 rad	0.0058 rad
23.00 kHz	0.8333	0.0036	0.2890 rad	0.0060 rad
23.60 kHz	0.8539	0.0036	-0.08890 rad	0.0062 rad
24.00 kHz	0.8539	0.0036	-0.0603 rad	0.0063 rad
26.00 kHz	0.7692	0.0026	-0.3921 rad	0.0068 rad
30.20 kHz	0.5372	0.0028	-0.9488 rad	0.0079 rad
50.00 kHz	0.1896	0.0032	-1.4137 rad	0.0065 rad
100.00 kHz	0.0732	0.0024	-1.4828 rad	0.0052 rad

Tabella 5: Funzione di trasferimento e sfasamento relativi allo studio della resistenza in regime sinusoidale, insieme alle incertezze assegnate. Le tre sezioni dei dati rappresentano i dati a bassa frequenza, i dati nei pressi della risonanza e i dati ad alta frequenza.

Si osservi che le **incertezze sullo sfasamento** diminuiscono al diminuire del suo valore assoluto (evidentemente tale valore assoluto si rimpicciolisce, nella zona di media frequenza, più di quanto non diminuisca la misura di Δt - si veda Equazione 5.3).

Le **incertezze sul modulo** della funzione di trasferimento, invece, si mantengono approssimativamente costanti, in quanto il V_{in} contribuisce in maniera relativamente costante all'incertezza (non si varia infatti la scala ΔV nel misurarlo, perciò $\sigma[V_{in}]$ è costante).

Nelle seguenti figure si possono osservare i grafici relativi ai punti sperimentali (differenze di potenziale in input e in output ai capi di R) nonché ai punti calcolati delle funzioni $|H(j\omega)|$ e $\arg[H(j\omega)]$, dove gli effetti sulle incertezze poc'anzi descritti si rivelano chiaramente.

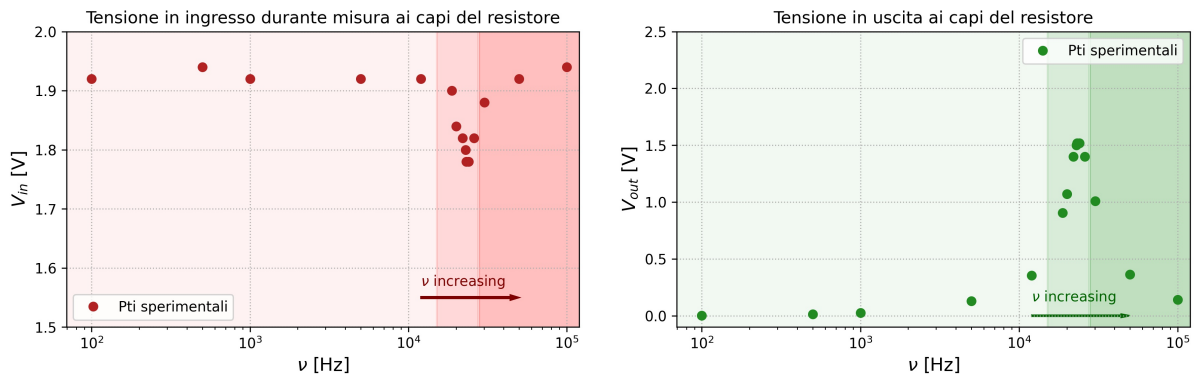


Figura 6: Andamento sperimentale delle differenze di potenziale in ingresso al circuito RLC e in uscita ai capi del resistore. La colorazione dello sfondo in tre fasce di intensità crescente riprende la convenzionale divisione tra zone di bassa, media, e alta frequenza del segnale generato, come si può vedere nelle tabelle relative ai dati.

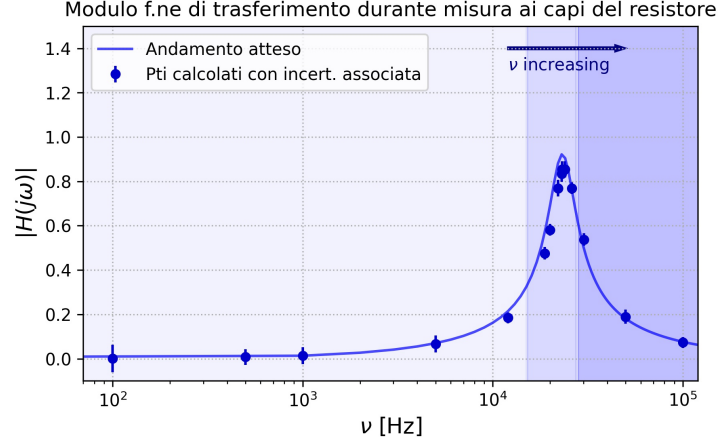


Figura 7: Modulo della funzione di trasferimento $H(j\omega)$, che come è noto si ottiene dal rapporto V_{out}/V_{in} . **N.B.:** Le incertezze associate, calcolate come già specificato in precedenza con la opportuna propagazione, sono state aumentate per incrementarne la visibilità.

Da una analisi grafica si ottiene il valore $\nu_0 = 23.8 \text{ kHz}$, che corrisponde a $|H(j\omega)| = 0.86$. Questo valore non è stato misurato direttamente, ma considerando l'approssimazione del grafico ad una parabola nell'intorno della frequenza di risonanza. Il valore del punto si è estratto per simmetria dalla tabella Tabella 5, in cui si è visto che per $\nu = 23.6 \text{ kHz}$ e $\nu = 24.0 \text{ kHz}$ $|H(j\omega)|$ assume lo stesso valore.

Per le frequenze per cui l'ampiezza è circa il 70% del valore massimo si ottiene:

$$\nu_1^{(R)} = 20.27 \text{ kHz} \pm 0.72 \text{ kHz}$$

$$\nu_2^{(R)} = 28.85 \text{ kHz} \pm 0.67 \text{ kHz}$$

Il valore misurato dell'ampiezza massima, corrispondente alla frequenza di risonanza non è compatibile con quello ottenuto, i valori calcolati per le frequenze ν_1 e ν_2 risultano compatibili con i valori teorici previsti.

In seguito, con i valori delle frequenze appena calcolate si ricava il valore del fattore di merito, tramite la Equazione 2.2:

$$Q^{(R)} = 2.77 \pm 0.31$$

Il valore del fattore di merito, in questo caso, è compatibile con il valore teorico atteso entro una sigma.

Osserviamo che, nonostante la compatibilità entro una sigma, i valori del fattore di merito e della frequenza di risonanza risultano diversi di una quantità non trascurabile dai valori teorici attesi. Le incertezze assegnate sono, seppur calcolate il più rigorosamente possibile, arbitrarie: pertanto appare opportuno tentare di giustificare tali discrasie tra valori teorici e sperimentali.

- Il valore della frequenza di risonanza (23.8 kHz) è sorprendentemente lontano dal valore teorico atteso (23.15 kHz). Questa discrepanza può essere spiegata se si considera l'alta densità di punti presi nel range tra 23 e 24 kHz, che impedisce una interpolazione precisa. Inoltre, si è trovata difficoltà nel misurare precisamente i valori forniti dai cursori di tipo tensione, che pertanto potrebbero essere, per fallacia dell'occhio umano, differenti di una o due tacche. Poiché si è deciso, per mancanza di tempo, di riportare uno solo valore per ciascun punto, si è esclusa una possibile incertezza sperimentale diretta sui vari valori di tensione. A tutto questo, si aggiunge che l'argomento che spiega come si arriva al valore di 23.8 kHz è rudimentale e molto approssimativo.
- Tutti i punti sperimentali sono leggermente al di sotto dei loro valori teorici attesi, suggerendo la presenza di un errore sistematico che soggiace alla presa dati. Il 3% sistematico sulle misure dato dall'oscilloscopio stesso non basta a giustificare un picco di modulo che invece d'essere 0.92 è 0.86. Una possibile spiegazione ulteriore potrebbe arrivare dall'utilizzo improprio dei valori assegnati per L e C , che non sono stati misurati ma dati per buoni, e che quindi avrebbero potuto alterare i valori riportati sul circuito. Le cause riportate concorrono spiegare come mai i valori vengano così tanto inferiori di quelli attesi.

- Infine, il valore trovato del fattore di merito è molto inferiore del valore atteso. Ma, logicamente, se tutti i punti sperimentali si sono "appiattiti" per i motivi sopra descritti, la dilatazione nella scala delle frequenze allontana i valori di ν_1 e ν_2 tra loro facendo aumentare il denominatore in Equazione 2.2 e riducendo Q .

Si riporta il grafico dell'andamento della fase:

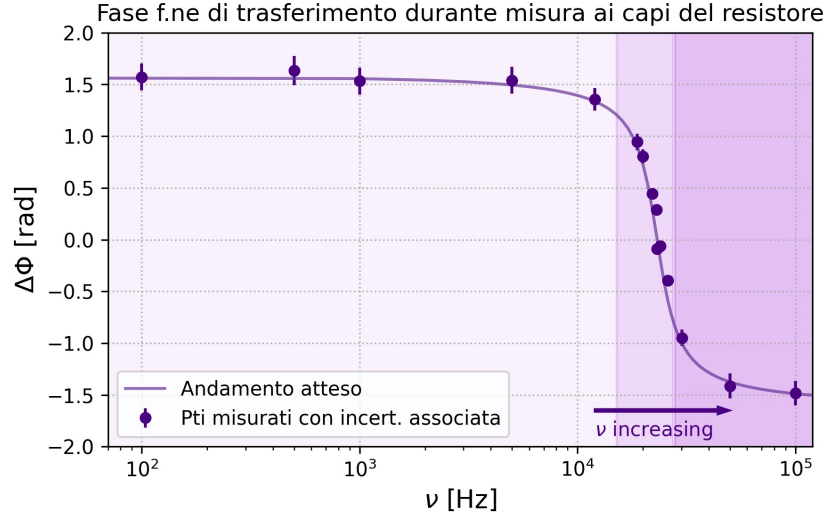


Figura 8: Fase della funzione di trasferimento $H(j\omega)$. **N.B.:** Le incertezze associate, calcolate come già specificato in precedenza con la opportuna propagazione, sono state aumentate per incrementarne la visibilità.

Effettuando gli stessi calcoli della parte precedente, si calcolano i valori delle frequenze richieste e del fattore di merito. Si ottiene:

$$\nu_1^{(\Phi)} = 20.10 \text{ kHz} \pm 0.31 \text{ kHz}$$

$$\nu_0^{(\Phi)} = 23.46 \text{ kHz} \pm 0.25 \text{ kHz}$$

$$\nu_2^{(\Phi)} = 28.90 \text{ kHz} \pm 0.79 \text{ kHz}$$

$$Q^{(\Phi)} = 2.67 \pm 0.27$$

Dai valori ottenuti si nota che essi risultano compatibili con quelli teorici previsti, e con quelli estraetti dal grafico dell'ampiezza. Il valore della frequenza di risonanza, in questo caso, è molto più a quello atteso, senza, tuttavia, essere compatibile entro una sigma. Le possibili spiegazioni di questo risultato sono le stesse del caso precedente.

5.2 Studio ai capi di C

Ai valori finali di $|H_C|$ e di $\Delta\Phi_C$, che riportiamo in tabella Tabella 6, si accompagnano le incertezze calcolate con Equazione 5.1 e Equazione 5.3:

Frequenza	$ H_C $	$\sigma[H_C]$	$\Delta\Phi_C$	$\sigma[\Delta\Phi_C]$
0.10 kHz	1.0000	0.0028	-0.0503 rad	0.0052 rad
0.50 kHz	1.0096	0.0028	-0.0314 rad	0.0065 rad
1.00 kHz	1.0095	0.0028	-0.0503 rad	0.0052 rad
5.00 kHz	1.0481	0.0028	-0.0942 rad	0.0065 rad
12.00 kHz	1.2885	0.0025	-0.2111 rad	0.0063 rad
19.00 kHz	2.1782	0.0028	-0.7163 rad	0.0099 rad
20.00 kHz	2.3800	0.0027	-0.8294 rad	0.0052 rad
22.00 kHz	2.7071	0.0026	-1.1888 rad	0.0058 rad
23.00 kHz	2.7835	0.0026	-1.4740 rad	0.0060 rad
23.20 kHz	2.8125	0.0027	-1.5160 rad	0.0061 rad
23.60 kHz	2.8511	0.0027	-1.5718 rad	0.0062 rad
25.00 kHz	0.8539	0.0036	-1.8535 rad	0.0065 rad
28.00 kHz	2.5208	0.0028	-2.2871 rad	0.0073 rad
40.00 kHz	1.7800	0.0031	-2.8400 rad	0.0052 rad
75.00 kHz	0.05288	0.0032	-3.0631 rad	0.0098 rad
100.00 kHz	0.1181	0.0026	-3.0662 rad	0.0052 rad

Tabella 6: Funzione di trasferimento e sfasamento relativi allo studio della resistenza in regime sinusoidale, insieme alle incertezze assegnate. Le tre sezioni dei dati rappresentano i dati a bassa frequenza, i dati nei pressi della risonanza e i dati ad alta frequenza.

Si osservi che le **incertezze sullo sfasamento** aumentano al crescere della frequenza ν , con un fattore di circa 10 tra i primi e gli ultimi punti calcolati. Questo andamento di $\sigma[\Delta\Phi]$ si può giustificare, guardando i dati e Equazione 5.3, con un aumento del modulo di $\Delta\Phi$ non bilanciato da un significativo incremento di Δt né da una diminuzione della scala Δt .

Le **incertezze sul modulo** della funzione di trasferimento si mantengono di nuovo approssimativamente costanti, in quanto il V_{in} contribuisce in maniera relativamente costante all'incertezza (come detto non si varia la scala ΔV nel misurarlo, perciò $\sigma[V_{in}]$ è costante).

Nelle seguenti figure si possono osservare i grafici relativi ai punti sperimentali (differenze di potenziale in input e in output ai capi di R) nonché ai punti calcolati delle funzioni $|H(j\omega)|$ e $\arg[H(j\omega)]$, dove gli effetti sulle incertezze poc'anzi descritti si rivelano chiaramente.

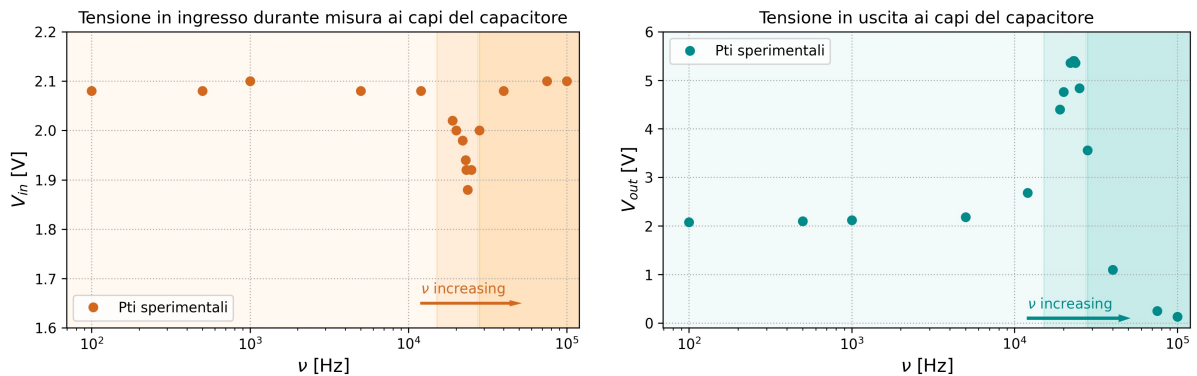


Figura 9: Andamento sperimentale delle differenze di potenziale in ingresso al circuito RLC e in uscita ai capi del resistore. La colorazione dello sfondo in tre fasce di intensità crescente riprende la convenzionale divisione tra zone di bassa, media, e alta frequenza del segnale generato, come si può vedere nelle tabelle relative ai dati.

Si osservi come il circuito si stia comportando, attraverso la risposta ai capi del capacitore, come un *passa basso*, ma con una extratensione in prossimità della risonanza. In particolare, $|H(j\omega_0)| = Q$: pos-

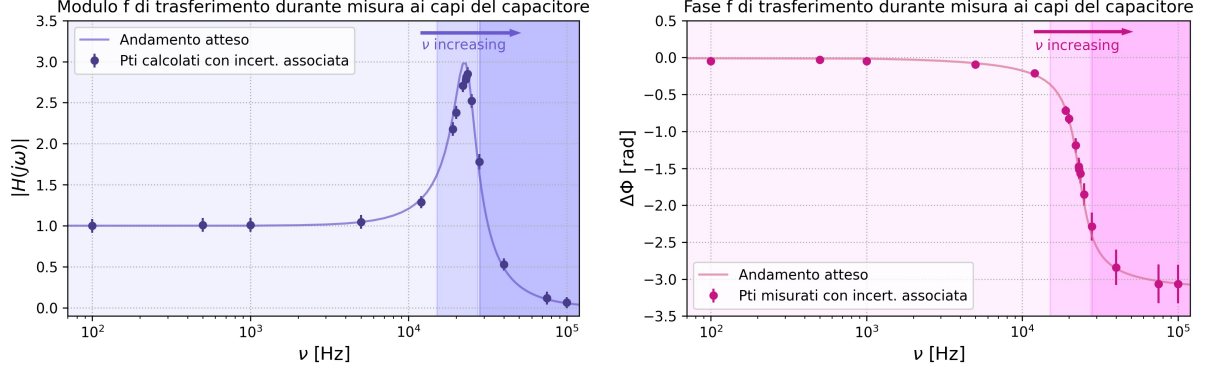


Figura 10: Modulo della funzione di trasferimento $H(j\omega)$, che come è noto si ottiene dal rapporto V_{out}/V_{in} , e fase della funzione di trasferimento $H(j\omega)$. **N.B.:** Le incertezze associate, calcolate come già specificato in precedenza con la opportuna propagazione, sono state aumentate per incrementarne la visibilità

siamo così calcolare il fattore di merito utilizzando la frequenza di risonanza calcolata in sottosezione 5.1 ($\nu_0 = 23.46$ kHz). SI ottiene il valore:

$$Q^C = 2.84 \pm 0.15$$

Anche in questo caso, quindi, si ottiene un valore che è pienamente compatibile, entro una sigma, con il valore teorico previsto, ma sempre minore del valore teorico atteso, probabilmente per lo stesso effetto sistematico dell'oscilloscopio e dell'ignoranza dei valori di L e C .

Infine, anche se non richiesto, si è calcolata la frequenza di risonanza e le frequenze che determinano il fattore di merito del circuito, utilizzando i valori mostrati in Figura 10

$$\nu_1^{(\Phi)} = 19.60 \text{ kHz} \pm 0.40 \text{ kHz}$$

$$\nu_0^{(\Phi)} = 23.60 \text{ kHz} \pm 0.53 \text{ kHz}$$

$$\nu_2^{(\Phi)} = 27.71 \text{ kHz} \pm 0.26 \text{ kHz}$$

$$Q^{(\Phi)} = 2.91 \pm 0.18$$

6 Conclusioni

In conclusione, potrebbe essere utile e stimolante ripetere l'esperienza, con una serie di accorgimenti che permettano di ridurre gli errori e le oscillazioni dei punti sperimentali presi:

- In primo luogo, sarebbe auspicabile ripetere le varie prese dati, per avere più set di dati per ciascun punto, al fine di avere anche delle incertezze sperimentali che permettano di ridurre l'oscillazioni e aumentare l'efficacia delle interpolazioni.
- Una misura sperimentale dell'induttanza e della capacità dei bipoli aiuterebbe a comprendere quanto l'ignoranza di tali valori abbia influito sui dati sperimentali.
- Si potrebbe, in secondo luogo, distribuire meglio i punti presi nell'intervallo tra 23 e 24 kHz, distanziandoli ulteriormente tra di loro. Questo permetterebbe, magari, di andare a ricercare manualmente il valore della frequenza di risonanza, restringendo via via il range di frequenze cui essa si può trovare, e ottenendo un risultato più preciso.
- Infine, con più tempo a disposizione, si potrebbe studiare l'effetto sistematico dell'oscilloscopio stesso sulla presa dati, cosa che non è stata fatta in questa trattazione.