

Laboratorio di Meccanica - canale Pb-Z

Relazione sulla seconda esperienza di laboratorio

Gruppo D1-01: L. Pietropaoli, R. F. Rosato, B. Russo, G. Vincenti

26 settembre 2024

L'obiettivo di questa esperienza sperimentale è stato la misura dell'*accelerazione di gravità* e della *costante elastica* di una molla tramite due procedimenti diversi.

Un **primo metodo** ha previsto, a partire da misure di massa, allungamento e periodo, il calcolo indiretto di k e g secondo le leggi fisiche che descrivono un oscillatore armonico. In particolare, come verrà trattato approfonditamente nella sezione dedicata, la misura del periodo è stata a sua volta articolata in *due tecniche*, ciascuna delle quali ha avuto implicazioni nell'inferenza statistica dei risultati che saranno accennate nell'introduzione alla sezione 2 e completamente trattate nel paragrafo 2.3.

Il **secondo metodo** è invece consistito nell'effettuare misure integrate¹ degli stessi misurandi, finalizzate tuttavia, non al calcolo immediato di k e g : dopo le misure si è proceduto ad inferire una *regressione lineare* delle leggi che legano, sempre per un oscillatore armonico, le grandezze misurate, per poi solo allora estrarre la costante elastica e l'accelerazione di gravità dai coefficienti delle rette di miglior *fit*.

Fissati questi procedimenti, si è posta attenzione sullo studio delle incertezze di misura. Inferendo sui vari contributi che di volta in volta entrano in gioco nella determinazione della confidenza di un risultato, si è valutato quali fossero i contributi dominanti e come, di conseguenza, ci si potesse regolare per rendere, quando possibile, la misura più precisa; dallo studio delle incertezze è stato possibile anche effettuare valutazioni "a posteriori" sull'utilità di effettuare misure ripetute o misure di più campioni contemporaneamente.

Scopo ultimo della sperimentazione è stato porre a confronto i risultati di questi due metodi di misura, per evidenziarne differenze ed effettuare considerazioni sulla loro compatibilità.

¹Per *misure integrate* si intende effettuate su somme progressive di campioni. Nel nostro caso si è trattato di dischetti supposti di massa uguale. Ulteriori delucidazioni sul secondo metodo di misura saranno fornite nella sezione 4.

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Definizione del misurando	3
1.2	Apparato sperimentale	3
	Primo metodo	4
2	Misure effettuate	4
2.1	Massa	6
2.2	Allungamento	7
2.3	Periodo	9
3	Calcolo di k e g	13
3.1	Valore sperimentale della costante elastica dell'oscillatore	13
3.1.1	Osservazioni sulle covarianze	14
3.2	Valore sperimentale dell'accelerazione di gravità	16
	Secondo metodo	19
4	Misure effettuate	19
4.1	Massa	19
4.2	Allungamento	20
4.3	Periodo	21
	Elaborazione propedeutica al calcolo di k e g	23
5	Regressione lineare	24
5.1	T^2 versus m_D	25
5.2	x_{eq} versus m_D	27
5.3	x_{eq} versus T^2	28
6	Elaborazione dati	30
6.1	Calcolo di k	30
6.2	Calcolo di m_0	30
6.3	Calcolo di g	31
6.4	Precisazioni sulla posizione di equilibrio	32
7	Conclusioni	34
7.1	Risultati ottenuti per k e g	34
7.2	Su quale corpo celeste ci troviamo?	37
	Suddivisione del lavoro	37

1 Introduzione

1.1 Definizione del misurando

Accelerazione gravitazionale su un corpo celeste del nostro sistema solare e costante di elasticità di una molla. I valori di riferimento per g e k sono stati preimpostati da un algoritmo di simulazione fisica, e la misurazione in sé è consistita nella computazione di valori selezionati pseudocasualmente attraverso lo stesso algoritmo, che è stato adoperato come una "scatola nera"².

1.2 Apparato sperimentale

L'apparato strumentale descritto in questa sezione è stato adoperato sia nel *primo metodo* che nel *secondo metodo* di misura.

A causa della tuttora grave situazione sanitaria, che ha reso impossibile l'esecuzione materiale di una sperimentazione sull'oscillatore armonico, non disponiamo di immagini del vero e proprio apparato strumentale impiegato durante questa esperienza. Trattandosi tuttavia di un simulatore, possiamo immaginare di aver disposto di:

- una **molla** appesa a un supporto³ dotato di **carta millimetrata** (misure di allungamento) con tacche distanti $1mm$;
- una **bilancia**, che supponiamo digitale, per la misura della massa dei dischetti con risoluzione di $0.1g$;
- un **cronometro** a lettura digitale per le misure di tempo con risoluzione pari a $0.01s$.

Si può immaginare di aver fatto uso anche di una **squadra** per ridurre l'errore di parallasse nella lettura su carta millimetrata.

²Sembra importante fare una precisazione a riguardo. L'unico blocco di codice del simulatore che è stato ritoccato è quello per l'estrazione di misure di tempo: un'*if clause*, infatti, impediva originariamente di effettuare più di 40 misure ripetute, quando nell'assegnazione del lavoro era stato esplicitamente richiesto, ad un certo punto, di eseguirne 50. Ci si è limitati pertanto a modificare esclusivamente questa restrizione per adattarla alle esigenze della sperimentazione.

³Si veda Figura 1 a pagina seguente.

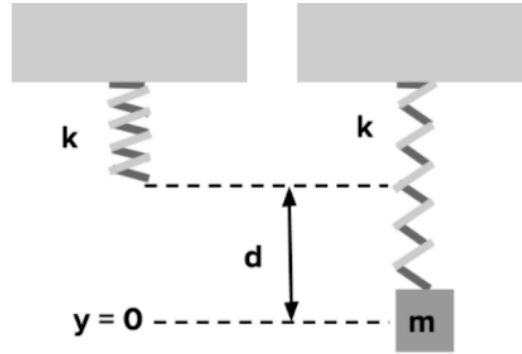


Figura 1: rappresentazione schematica di una massa m appesa alla molla fissata ad un supporto, insieme alla quale forma il sistema oscillatore. Come è evidente nell'immagine, non si dà per assunto che la molla abbia massa né allungamento iniziale trascurabili: rimandiamo alla sezione 4.3 la trattazione di queste grandezze (m_0 e x_0), così come quella del periodo di oscillazione T_0 sotto l'effetto della sola forza-peso della molla.

Primo metodo

2 Misure effettuate

Avendo scelto, come è uso comune, di esprimere i risultati delle nostre misure come

$$\mu = \hat{\mu} \pm u \quad (2.1)$$

dove $\hat{\mu}$ è la miglior stima del valore aspettato del misurando (ci si riferirà a $\hat{\mu}$ anche con $E[\mu]$) e u è l'*uncertainty* della misura, che verrà valutata tenendo conto delle incertezze di tipo A e di quelle di tipo B, secondo la formula⁴:

$$u = \sigma_{tot} = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_B^2} \quad (2.2)$$

Come si vede i contributi di tipo A e di tipo B si sommano in quadratura per dare l'incertezza totale, perciò l'obiettivo delle misure è stato, entro i limiti del possibile, rendere i due contributi almeno confrontabili. In questa esperienza, non potendo accedere alla calibrazione degli strumenti impiegati (si tratta, di fatto, di strumenti virtuali, presumibilmente generatori di numeri casuali), si è operato talvolta variando il numero di misure effettuate.

⁴Per comodità ci si riferirà ad u con σ_{tot} .

La componente di tipo A dell'incertezza totale, infatti, su N misure ripetute di una determinata grandezza fisica, è pari a:

$$\sigma_A = \frac{\sigma_R}{\sqrt{N}} \quad (2.3)$$

in cui σ_R (*random*) è la deviazione standard campionaria dei dati raccolti, a cui faremo riferimento anche solo con σ oppure con s_{n-1} . Si nota come, al crescere del numero di misurazioni, l'incertezza di tipo A scala di un fattore $\frac{1}{\sqrt{N}}$: allora effettuare misure ripetute è utile per abbassare il contributo di σ_A nella somma in quadratura. Chiaramente, questo ragionamento non ha senso ad oltranza: quando non è possibile abbattere il "muro" della σ_B (ad es. con strumenti a risoluzione molto bassa) può essere utile effettuare misure di k volte il misurando cercato. Infatti, senza considerare altre eventuali incertezze di tipo B se non quella strumentale (σ_{str}) si ha

$$\sigma_B = \frac{\sigma_{str}}{k} \quad (2.4)$$

In questa relazione, avendo determinati "limiti di tempo" fissati dal simulatore sperimentale, non è sempre stato possibile effettuare molte misure ripetute. Piuttosto, come già anticipato nell'abstract, si è cercato di valutare l'incidenza di ciascun contributo nell'incertezza totale delle misure, con lo scopo di poter dispensare di eventuali prese dati "in eccesso" laddove un aumento di N non favorisse l'abbattimento degli errori casuali. Come si è detto, inoltre, non si è potuto ottenere informazioni sulla calibrazione, né si è potuto effettuare tarature degli strumenti virtuali adoperati.

Un'altra quantità che verrà analizzata nello studio degli errori è l'incertezza relativa ν (o δ , come noi useremo chiamarla), che è molto utile per valutare, per esempio, i contributi percentuali nella propagazione delle incertezze di misure indirette:

$$\delta_\mu = \frac{u}{\hat{\mu}} \quad (2.5)$$

2.1 Massa

In basso sono riportati in tabelle i dati raccolti durante le misurazioni della massa di **5** e poi di **10 dischetti identici impilati**, con valor medio μ e deviazione standard campionaria σ .

	<i>massa (x5)[g]</i>	
	399.9	399.8
	400.4	399.7
	400.0	400.1
	400.1	400.0
	400.1	400.1
<i>media</i>	400.02	
<i>std</i>	0.18	

	<i>massa (x10)[g]</i>	
	799.8	800.0
	799.8	800.0
	799.9	800.2
	800.1	799.9
	800.1	799.9
<i>media</i>	799.96	
<i>std</i>	0.13	

Disponendo, idealmente, di una bilancia digitale con intervallo di discriminazione $I = 0.1g$, stimiamo una σ_{str} pari a $\frac{I}{\sqrt{12}}$, assumendo che la grandezza misurata si distribuisca uniformemente nell'intervallo. Non essendo possibile in alcun modo calibrare lo strumento né valutare fattori di scala o errori di zero, assumiamo σ_{str} come σ_B . Allora:

$$\sigma_{tot}(m) = \sqrt{\frac{\sigma_R^2(m)}{N} + \sigma_B^2} \quad (2.6)$$

Notiamo che i due termini della somma in quadratura differiscono di un ordine di grandezza: per la σ_A^2 , nel caso di 5 dischetti si ha $\frac{\sigma^2}{N} \approx 0.0032g^2$, mentre per 10 il valore è $\approx 0.0017g^2$; per quanto riguarda il contributo dovuto a incertezze sistematiche si ha $\sigma_B^2 \approx 0.028g^2$. Si nota chiaramente che l'influenza maggiore sull'incertezza finale è dovuta a incertezze di tipo B. Se supponessimo tuttavia di aver eseguito un numero inferiore di misure, assumendo una deviazione standard campionaria simile (≈ 0.2) il contributo delle incertezze di tipo A sarebbe stato dominante: si supponga un numero pari a 5 misurazioni, si avrebbe $\frac{\sigma^2}{N} \approx 0.008g^2$ e ancora $\sigma_B^2 \approx 8.3 \cdot 10^{-4}g^2$. Possiamo di conseguenza concludere in ogni caso che sia stato utile operare dieci misure ripetute. Dette m_5 e m_{10} le masse di 5 e 10 dischetti, abbiamo:

$$\begin{aligned} E[m_5] &= 400.02g; & \sigma_{tot}(m_5) &= 0.064g \\ E[m_{10}] &= 799.97g; & \sigma_{tot}(m_{10}) &= 0.050g \end{aligned}$$

Dunque, le incertezze relative per m_5 ed m_{10} risultano rispettivamente: $\delta_5 \approx 1.6 \cdot 10^{-4}$ e $\delta_{10} \approx 6.3 \cdot 10^{-5}$. Le incertezze totali risultano essere dunque poco rilevanti rispetto al valore aspettato.

Possiamo esprimere i risultati delle misure come:

$$m_5 = (400.020 \pm 0.064)g$$

$$m_{10} = (799.970 \pm 0.050)g$$

2.2 Allungamento

In basso sono riportati in tabelle i dati raccolti durante le misurazioni dell'allungamento della molla in seguito al collocamento di **5** e poi di **10 dischetti identici impilati** sul suo estremo non fissato, con valor medio μ e deviazione standard campionaria σ .

	$x_{eq} [mm]$	
	113	112
	112	111
	112	112
	111	111
	112	113
<i>media</i>	111.90	
<i>std</i>	0.70	

	$x_{eq} [mm]$	
	122	123
	122	122
	123	123
	122	123
	121	123
<i>media</i>	122.40	
<i>std</i>	0.66	

Disponendo di una molla e di un supporto con carta millimetrata con quadretti di $1mm \times 1mm$ al quale appendere la molla per misurarne l'allungamento sotto la forza-peso dei dischetti, stimiamo una σ_{str} pari a $\frac{1}{4}$ della distanza minima tra due tacche dello strumento ($tacca = 1mm$), immaginando di poter interpolare nella lettura dei valori. Si avrà pertanto $\sigma_{str} = 0.25mm$. Assumendo poi che la squadra ci permetta di eliminare l'errore di parallasse e non essendo possibile valutare eventuali errori di scala o di zero, assumiamo σ_{str} come σ_B . Si ha:

$$\sigma_{tot}(x_{eq}) = \sqrt{\frac{\sigma_R^2(x_{eq})}{N} + \sigma_B^2} \quad (2.7)$$

Soffermandosi sui singoli contributi delle incertezze, si ottiene: per quella di **tipo A** $\frac{\sigma^2}{N} \approx 0.049mm^2$ (5 dischetti), $0.044mm^2$ (per 10); nel caso dell'incertezza di **tipo B** $\sigma_B^2 \approx 0.063mm^2$. Il contributo dominante è chiaramente dovuto a σ_B .

Se supponessimo tuttavia di aver eseguito un numero inferiore di misure, assumendo una deviazione standard campionaria simile ($\approx 0.7mm$) il contributo delle incertezze di tipo A sarebbe stato dominante: con 5 misurazioni, si avrebbe $\frac{\sigma^2}{N} \approx 0.1mm^2$ e ancora

$\sigma_B^2 \approx 0.063 mm^2$. Possiamo di conseguenza concludere, in ogni caso, che sia stato utile effettuare 10 misure ripetute: condurne di meno avrebbe comportato una perdita di informazioni non giustificata dal vantaggio di eseguire 5 misure di allungamento in meno.

Come vedremo nel paragrafo successivo, quando effettuare una singola misura richiede condizioni particolari (ad esempio un tempo considerevole o un *setup* difficile da realizzare) è importante inferire attentamente su quali sono gli apporti più influenti sull'incertezza di misura, per poter fare a meno di prese dati non utili all'abbattimento dei contributi dominanti (come si è anticipato, ad esempio effettuando misure di più campioni del misurando contemporaneamente).

Dette $x_{eq,5}$ e $x_{eq,10}$ le nuove posizioni di equilibrio della molla nelle misurazioni con 5 e 10 dischetti, svolgendo i conti e tenendo conto della (2.7) si ottiene

$$\begin{aligned} E[x_{eq,5}] &= 111.90 mm; & \sigma_{tot}(x_{eq,5}) &= 0.33 mm \\ E[x_{eq,10}] &= 122.40 mm; & \sigma_{tot}(x_{eq,10}) &= 0.33 mm \end{aligned}$$

e quindi i risultati delle misure sono

$$\begin{aligned} x_{eq,5} &= (111.90 \pm 0.33) mm \\ x_{eq,10} &= (122.40 \pm 0.33) mm \end{aligned}$$

Notiamo che l'incertezza relativa sulla posizione di equilibrio per 5 e per 10 dischetti, calcolata come

$$\delta_x = \frac{\sigma_{tot}(x_{eq})}{E[x_{eq}]} \tag{2.8}$$

corrisponde, nei due casi, a $\delta_{x_5} \approx 0.29\%$ e $\delta_{x_{10}} \approx 0.27\%$.

2.3 Periodo

Nelle tabelle sottostanti sono riportati i dati relativi a **50 misurazioni di 5 oscillazioni** e **5 misurazioni di 50 oscillazioni** dell'oscillatore quando viene spostato dalla sua posizione di equilibrio esclusivamente dalla forza-peso, rispettivamente di **5 e 10 dischetti** (come se essi venissero appesi alla molla, verticale e fissata al soffitto, senza esercitare alcuna forza esterna). Le tabelle contengono anche medie e deviazioni standard.

	<i>tempo [s]</i>										
	<i>5 oscillazioni</i>										<i>50 oscillazioni</i>
	2.97	2.98	3.02	2.87	2.99	2.94	2.96	2.94	2.96	2.97	29.82
	3.01	2.97	3.03	3.11	2.98	3.08	2.94	3.01	3.00	3.02	29.81
	3.03	2.94	3.07	2.98	3.06	2.93	2.98	3.05	2.92	3.02	29.76
	2.91	2.96	3.04	3.00	3.02	2.94	2.99	2.94	2.86	2.91	29.86
	2.95	3.04	2.88	2.93	3.02	2.91	2.96	3.02	3.01	2.97	29.78
<i>media</i>	2.980										29.806
<i>std</i>	0.054										0.034

Tabella 1: misurazioni di due multipli del periodo dell'oscillatore con 5 dischetti appesi.

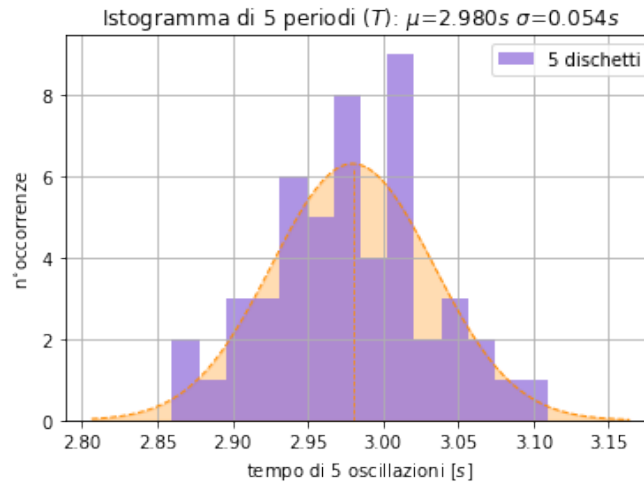
	<i>tempo [s]</i>										
	<i>5 oscillazioni</i>										<i>50 oscillazioni</i>
	4.13	4.16	4.07	4.12	4.09	4.09	4.08	4.08	4.12	4.13	40.89
	4.05	4.19	4.12	4.06	4.16	4.06	4.06	4.16	4.14	4.08	40.89
	4.11	4.10	4.13	4.13	4.13	4.17	4.07	4.10	4.17	4.01	40.97
	4.09	4.13	4.12	4.14	4.09	4.15	4.06	4.04	4.14	4.15	41.01
	4.10	4.02	4.22	4.10	4.08	4.19	4.20	4.14	4.11	4.13	40.98
<i>media</i>	4.113										40.950
<i>std</i>	0.045										0.049

Tabella 2: misurazioni di due multipli del periodo dell'oscillatore con 10 dischetti appesi.

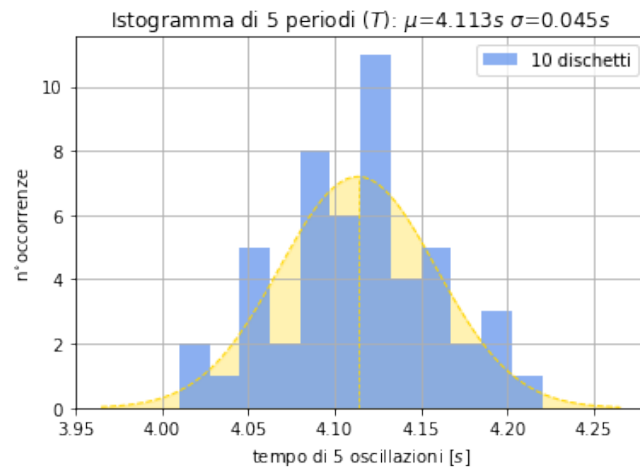
A pagina seguente sono riportati gli istogrammi dei dati collezionati durante le misurazioni. Osservando le tabelle, ci si aspetta già che i dati relativi a 50 misure ripetute, una volta *plottati*, diano molte più informazioni sotto forma di grafici a barre rispetto a quelli di 5 misure ripetute.

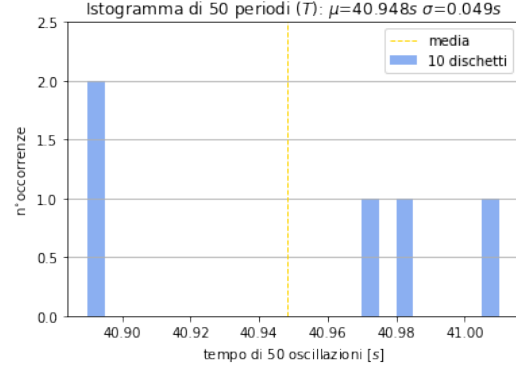
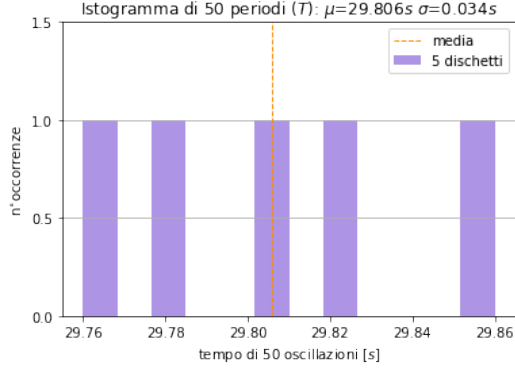
Ciò accade poiché, come intuitivamente comprensibile, all'aumentare del numero di misure ripetute effettuate l'istogramma assume una forma prossima a quella di una gaussiana.

L'andamento dei dati delle 50 misure ripetute di tempo (5 oscillazioni, a destra) graficati in istogrammi giustifica una *likelihood* che ha di per sé la forma di una gaussiana: il grafico *fitta* abbastanza bene una normale di parametri μ e σ (campionaria) pari a quelli del *dataframe* analizzato (Tabella 1).



Anche nel caso delle misure con 10 dischetti impilati (Tabella 2), il numero relativamente elevato di misure permette all'istogramma dei dati raccolti di seguire in modo piuttosto fedele il profilo della gaussiana normalizzata all'area totale delle colonne, centrata in μ e con deviazione standard pari a σ .





Provando a graficare un istogramma della misura di 50 periodi di oscillazione⁵ (si vedano Tabella 1, Tabella 2 e figura sopra) la distribuzione dei dati risulta piatta e l'istogramma in sé non risulta particolarmente leggibile. Come si tratterà in seguito, ciò potrebbe riflettersi sulle incertezze di misura nel fornire i risultati.

Ricordiamo infatti che la formula per l'incertezza complessiva σ_{tot} tiene conto della deviazione standard campionaria normalizzata a \sqrt{N} , con N numero di misure ripetute effettuate:

$$\sigma_{tot} = \sqrt{\frac{\sigma_R^2}{N} + \sigma_B^2} \quad (2.9)$$

Per fornire una stima ragionevole dei risultati ottenuti dalle misurazioni si è considerato per il cronometro, anch'esso digitale come la bilancia e quindi in grado di fornire esclusivamente *output* discreti, una σ_{str} pari a $\frac{1}{\sqrt{12}}$ del minimo intervallo di discriminazione dello strumento stesso ($I = 0.01s$).

Così facendo, assumiamo che all'interno di tale intervallo I la grandezza misurata si distribuisca in modo uniforme. Si è valutato infine, come per la misura della massa e dell'allungamento, la strumentale come unico contributo di tipo B all'incertezza di misurazione: $\sigma_B = \sigma_{str}$.

Nell'equazione (2.9) tuttavia non si tiene conto che sono state condotte misure di k periodi (kT). Come anticipato nella formula (2.4), bisogna allora scalare la σ_{str} di un fattore $\frac{1}{k}$; pure l'incertezza sistematica σ_A verrà scalata, oltre che dell'inverso di N , anche dell'inverso di k .

⁵La scelta del *binsize* è stata differenziata nei due istogrammi con l'obiettivo primario di isolare ogni valore assunto in un singolo *bin* e al contempo evidenziare il contenuto delle colonne.

Perciò si avrà

$$E[T] = \frac{E[kT]}{k}; \quad \sigma_{tot}(T) = \sqrt{\frac{\sigma_R^2(kT)}{Nk^2} + \frac{\sigma_B^2}{k^2}} \quad (2.10)$$

con $N = \{50, 5\}$ e $k = \{5, 50\}$. Distinguiamo, per poi confrontarli più facilmente, i risultati ottenuti con le due modalità di misura: diremo **prima** la misura di T effettuata a partire dalle 50 misurazioni di **5 oscillazioni** e **seconda** quella condotta sulla base di 5 misurazioni di **50 oscillazioni**. Chiamando, ogni volta, T_5 e T_{10} i periodi di oscillazione rispettivamente di 5 e 10 massette impilate, per la formula (2.10) si ottiene

prima misura (5 osc)	seconda misura (50 osc)
$E[T'_5] = 0.5960s; \quad \sigma_{tot}(T'_5) = 0.0016s;$	$E[T''_5] = 0.59612s; \quad \sigma_{tot}(T''_5) = 0.00031s$
$E[T'_{10}] = 0.8227s; \quad \sigma_{tot}(T'_{10}) = 0.0014s;$	$E[T''_{10}] = 0.81896s; \quad \sigma_{tot}(T''_{10}) = 0.00044s$

e quindi i risultati delle misure sono:

prima misura (5 osc)	seconda misura (50 osc)
$T'_5 = (0.5960 \pm 0.0016)s;$	$T''_5 = (0.59612 \pm 0.00031)s$
$T'_{10} = (0.8227 \pm 0.0014)s;$	$T''_{10} = (0.81896 \pm 0.00044)s$

Confrontando le misure di T'_k e T''_k si osserva come la seconda misura sia più precisa. Per indagare sul perché, confrontiamo i contributi di tipo A (già opportunamente scalati per i corretti valori di \sqrt{N}) e di tipo B, ad esempio sulle misure da 5 dischetti:

$$\begin{aligned} \sigma_A(T') &= 7.6 \cdot 10^{-3}s; \\ \sigma_A(T'') &= 1.5 \cdot 10^{-2}s; \quad \sigma_B = 2.9 \cdot 10^{-3}s; \end{aligned}$$

Si può notare chiaramente che nel primo caso l'incertezza di tipo A e l'incertezza di tipo B risultano del medesimo ordine di grandezza, mentre nel secondo l'incertezza di tipo A è di un ordine di grandezza maggiore rispetto al contributo di tipo B. Questa differenza è chiaramente dovuta al fatto che $\sigma_A \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$, ove N è il numero di misure⁶. Notando tuttavia che la prima misura si riferisce al periodo di 5 oscillazioni, mentre la seconda

⁶Nel primo caso 50, nel secondo 5.

al periodo di 50 oscillazioni e l'incertezza riferita al periodo di una singola oscillazione è $\propto \frac{1}{k}$ ⁷, risulta evidente che:

- 1) intervenire sul numero di campioni k misurati contemporaneamente è stato più efficace, ai fini della precisione del risultato, rispetto ad agire sul numero di misure ripetute N .
- 2) se avessimo voluto ridurre ulteriormente l'incertezza sulla misura, la cosa più conveniente da fare sarebbe stata aumentare ulteriormente k piuttosto che N (che sarebbe risultato comunque impossibile visti i limiti di tempo).

Per gli stessi valori di k , oltretutto, si osserva come la prima e la seconda misura dei 5 dischetti siano perfettamente compatibili entro le incertezze stimate, mentre le misure su 10 dischetti non risultino totalmente compatibili entro le σ_{tot} ma siano comunque relativamente vicine.

3 Calcolo di k e g

3.1 Valore sperimentale della costante elastica dell'oscillatore

Per un oscillatore armonico di massa m_0 risulta

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{(m_0 + m)}{k} \quad (3.1)$$

Non conoscendo la massa m_0 dell'oscillatore ma avendo a disposizione due misure di massa m_1 e m_2 e due misure T_1 e T_2 ⁸ del periodo di oscillazione delle stesse masse (si consultino le sezioni 2.1 e 2.3), per ricavare la costante elastica dell'oscillatore si può sottrarre due espressioni analoghe alla (3.1) e isolare k :

$$k = 4\pi^2 \frac{(m_2 - m_1)}{(T_2^2 - T_1^2)} \quad (m_2 > m_1, T_2 > T_1) \quad (3.2)$$

Prima di dedicarsi a valutare la miglior stima per k , vale la pena soffermarsi brevemente su come si procederà nel calcolo della propagazione delle incertezze sul suo valore aspettato.

⁷Come è chiaro dalla (2.10)

⁸Ci riferiremo, per alleggerire la notazione, con indice 1 alle quantità relative a 5 dischetti impilati e con 2 a quelle relative a 10 dischetti: $m_5 \rightarrow m_1$, $m_{10} \rightarrow m_2$, $T_5 \rightarrow T_1$, $T_{10} \rightarrow T_2$.

Per una funzione $y \equiv y(x_1, \dots, x_n)$:

$$\sigma_{tot}^2(y) = \sum_{i,j}^{1,n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \sigma_{ij} \quad (3.3)$$

dove $\sigma_{ij} = cov(x_i, x_j)$.

3.1.1 Osservazioni sulle covarianze

Si è scelto di assumere le covarianze tra le **grandezze non omogenee** (massa e tempo) nulle, in quanto pur essendo legate da una legge fisica sono state misurate con strumenti differenti: ci si è posti nell'ipotesi in cui gli strumenti "virtuali" di cui si dispone siano diversi tra loro, come nella realtà (una bilancia, un cronometro, ecc.), nonostante siano in effetti riprodotti tramite lo stesso codice in Python che genera numeri randomici. Non si sono considerate eventuali correlazioni imputabili all'utilizzo dello stesso programma di simulazione in quanto non è stato possibile quantificarle. Per quanto riguarda le **grandezze omogenee** non si possono invece considerare nulle le covarianze in quanto, avendo misurato masse e tempi con strumenti di cui non è stato possibile stimare errori strumentali di zero o fattori di scala né effettuare calibrazioni in tal senso, è necessario tenere conto della correlazione nella natura di tali misure.

I coefficienti di correlazione tra le misure di massa e tra le misure di tempo sono riportati nelle matrici seguenti.

$$\rho(m_i, m_j) \quad \forall i, j = 1, 2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.10 \\ -0.10 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(T'_i, T'_j) \quad \forall i, j = 1, 2$$

prima misura (k=5)

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.38 \\ -0.38 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rho(T''_i, T''_j) \quad \forall i, j = 1, 2$$

seconda misura (k=50)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.054 \\ 0.054 & 1 \end{pmatrix}$$

Tornando al calcolo dell'incertezza su k , considerando la formula (3.3) possiamo valutare le derivate parziali nei loro valori attesi come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial k}{\partial m_2} = \frac{4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \\ \frac{\partial k}{\partial T_2} = -\frac{4\pi^2(m_2 - m_1)}{(T_2^2 - T_1^2)^2} \cdot 2T_2 \\ \frac{\partial k}{\partial m_1} = -\frac{4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \\ \frac{\partial k}{\partial T_1} = \frac{4\pi^2(m_2 - m_1)}{(T_2^2 - T_1^2)^2} \cdot 2T_1 \end{array} \right.$$

Ci aspettiamo, come verificheremo a breve, di ottenere **due diversi valori** per k , a seconda che si impieghi la prima misura del periodo o la seconda. Per ora, notiamo che il valore aspettato di k sarà

$$E[k] = 4\pi^2 \frac{E[m_2] - E[m_1]}{E[T_2]^2 - E[T_1]^2} \quad (3.4)$$

Svolgendo i calcoli si giunge a

$$\begin{aligned} E[k'] &= 49.09 N/m; & \sigma_{tot}(k') &= 0.53 N/m \\ E[k''] &= 50.07 N/m; & \sigma_{tot}(k'') &= 0.11 N/m \end{aligned}$$

pertanto i **due risultati** sono

$$\begin{aligned} k' &= (49.09 \pm 0.53) N/m \\ k'' &= (50.07 \pm 0.15) N/m \end{aligned}$$

Osserviamo che k' e k'' risultano compatibili entro le loro sigma. Considerando l'incertezza relativa su k , data da

$$\delta_k = \frac{\sigma_{tot}(k)}{E[k]} \quad (3.5)$$

è chiaro come nei due casi considerati ci sia un'incertezza relativa su k (δ_k) piuttosto diversa ($\delta_{k'} \approx 1.1\%$, $\delta_{k''} \approx 0.30\%$). Ciò è da imputare alla diversa precisione delle misure di tempo, che risultano per le due misure (ad esempio con 5 dischetti) rispettivamente con una $\delta'_T \approx 0.27\%$ e $\delta''_T \approx 0.052\%$: questa differenza pesa chiaramente nel calcolo di $\sigma_{tot}(k)$, che è stato possibile infatti stimare con più precisione a partire dalla seconda misura, e mostra evidentemente come il contributo della misura di periodo sia stato, nel calcolo della propagazione delle incertezze, dominante rispetto a quello della misura di massa.

3.2 Valore sperimentale dell'accelerazione di gravità

L'accelerazione gravitazionale g può essere ricavata da più misure della posizione di equilibrio x_{eq} dello stesso oscillatore armonico (cfr. 3.1) di massa m_0 e lunghezza a riposo x_0 fissato per un estremo, in verticale, al soffitto, al cui estremo libero è appesa una massa m (che subisce la sola forza-peso $P = mg$). Dalla formula generale

$$x_{eq} = x_0 + \frac{(m_0 + m)g}{k} \quad (3.6)$$

è immediato ricavare, con un procedimento per sottrazione analogo a quello mostrato nel par. 3.1, un'espressione che permette di isolare facilmente g . Note infatti le stesse masse m_1 e m_2 e le posizioni di equilibrio x_1 e x_2 ⁹ dell'oscillatore sotto l'azione dei pesi P_1 e P_2 , si trova facilmente

$$g = \frac{k(x_2 - x_1)}{(m_2 - m_1)} \quad (3.7)$$

da cui usando l'espressione di k della formula (3.2):

$$g = 4\pi^2 \frac{(x_2 - x_1)}{(T_2^2 - T_1^2)} \quad (3.8)$$

Per calcolare la propagazione dell'incertezza consideriamo nuovamente la formula (3.3). Come più ampiamente giustificato in precedenza (rimandiamo al paragrafo 3.1.1 per una

⁹Analogamente al paragrafo precedente, alleggeriamo la notazione: $x_{eq,5} \rightarrow x_1$, $x_{eq,10} \rightarrow x_2$. Si noti che con $x_{eq,5}$ e $x_{eq,10}$ ci si è riferiti, nel par. 2.2, alle posizioni di equilibrio della molla sotto la forza-peso rispettivamente di 5 e 10 dischetti impilati e ad essa appesi.

spiegazione dettagliata), supponiamo le covarianze tra grandezze non omogenee (massa e posizione di equilibrio) nulle, essendo state misurate con strumenti differenti. Per quanto riguarda invece $cov(T_1, T_2)$ e $cov(x_1, x_2)$, non possono essere supposte nulle trattandosi di grandezze misurate col medesimo strumento (che potrebbe presentare errori di scala o di zero).

Essendo la correlazione lineare tra le misure di allungamento completamente descritta dalla matrice

$$\rho(x_i, x_j) = \begin{pmatrix} 1 & 0.086 \\ 0.086 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall i, j = 1, 2$$

possiamo considerare i coefficienti di correlazione tra le due grandezze, $\rho(T'_1, T'_2) = -0.38$ per il primo metodo di misurazione del periodo, mentre per il secondo $\rho(T''_1, T''_2) = 0.054$, e $\rho(x_1, x_2) = 0.086$ ¹⁰. Se valutiamo le derivate parziali nei loro valori attesi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x_2} = \frac{4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \\ \frac{\partial g}{\partial T_2} = -\frac{4\pi^2(x_2 - x_1)}{(T_2^2 - T_1^2)^2} \cdot 2T_2 \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} = -\frac{4\pi^2}{T_2^2 - T_1^2} \\ \frac{\partial g}{\partial T_1} = \frac{4\pi^2(x_2 - x_1)}{(T_2^2 - T_1^2)^2} \cdot 2T_1 \end{array} \right.$$

Considerando che $\sigma_{i,j} = \rho(x_i, x_j) \sigma_i \sigma_j$ si calcola, rispettivamente per il primo e per il secondo metodo di misurazione del periodo:

$$\begin{aligned} E[g'] &= 1.341 m/s^2; & \sigma_{tot}(g') &= 0.057 m/s^2 \\ E[g''] &= 1.364 m/s^2; & \sigma_{tot}(g'') &= 0.056 m/s^2 \end{aligned}$$

I **due risultati** della misura sono pertanto

$$\begin{aligned} g' &= (1.341 \pm 0.057) m/s^2 \\ g'' &= (1.364 \pm 0.056) m/s^2 \end{aligned}$$

¹⁰Già esplicitati nel paragrafo 3.1.1

Volendo operare un confronto tra i risultati della misura indiretta di g a partire dai due metodi di misurazione del periodo, si ha che l'incertezza relativa è $\delta_{g'} \approx 4.2\%$ e $\delta_{g''} \approx 4.1\%$. Notiamo che per i due metodi l'incertezza relativa sul risultato finale è completamente comparabile.

Questa osservazione ci porta a concludere che nonostante per il secondo metodo di misurazione del periodo si avesse un'incertezza minore rispetto al primo, nella propagazione delle incertezze il termine dominante sia stato quello legato all'incertezza sulla misura della posizione di equilibrio, tanto da non poter notare sensibili differenze nell'incertezza totale ricavata a partire dai due metodi.

Per riflessioni e osservazioni sui valori di costante elastica e accelerazione di gravità ottenuti con questo primo metodo rimandiamo alla sezione 7.1, in cui sarà approfondito l'argomento e verrà effettuato un vero e proprio confronto tra le due procedure di misura.

Secondo metodo

4 Misure effettuate

Nei paragrafi sottostanti sono riportati i dati relativi a diverse configurazioni ottenute con un numero progressivo di dischetti appesi alla molla. La misura è stata eseguita in maniera integrata; dunque la prima misurazione corrisponde ai dati raccolti con un solo dischetto appeso, la seconda con due, la N -esima con N dischetti.

4.1 Massa

Sono state effettuate 10 misure ripetute per ogni configurazione. Nella tabella sottostante sono riportati i dati raccolti.

$N. \text{ dischetti}$	$massa [g]$										$media[g]$	$std[g]$
1	80.2	80.2	80.1	79.4	79.9	80.2	79.8	80.0	80.1	80.1	80.00	0.24
2	159.8	159.7	160.1	160.1	159.8	159.8	160.5	159.5	160.0	160.0	159.93	0.26
3	240.0	240.1	239.6	240.3	240.2	239.8	240.2	239.8	239.7	239.8	239.95	0.23
4	319.6	320.2	320.0	320.8	320.0	320.0	319.9	320.0	320.1	320.5	320.11	0.31
5	400.2	399.6	400.0	399.9	400.0	400.1	399.9	400.2	400.1	400.0	400.00	0.16
6	479.8	479.6	479.7	480.0	480.5	480.2	480.0	480.0	480.2	480.0	480.00	0.25
7	559.8	560.0	559.9	559.9	560.0	559.9	560.3	560.3	560.0	560.1	560.02	0.16
8	640.1	639.9	640.1	640.3	639.8	640.0	639.9	640.2	639.7	639.9	639.99	0.18
9	719.9	719.9	720.1	720.0	719.9	720.2	719.9	720.1	720.2	719.9	720.01	0.12
10	799.7	800.2	799.7	799.9	799.8	799.8	799.8	799.8	799.8	799.7	799.82	0.14

Tabella 3: misure ripetute della massa di un numero crescente di dischetti impilati.

Così come per il primo metodo, l'incertezza totale è stata ricavata sommando in quadratura il contributo relativo alla deviazione standard campionaria, $\sigma_{(m)}$, opportunamente scalata per il numero di misure effettuate (N) e il contributo relativo all'incertezza sistematica corrispondente, come per il metodo precedente, alla sola incertezza strumentale per mancata possibilità di stima di eventuali fattori di scala o errori di zero. Così come nel paragrafo 2.1, stimiamo σ_B pari a $\frac{I}{\sqrt{12}}$ ⁽¹¹⁾

$$\sigma_{tot}(m) = \sqrt{\frac{\sigma_R^2(m)}{N} + \sigma_B^2} \quad (4.1)$$

¹¹Ricordiamo che I è l'intervallo di discriminazione della bilancia digitale e vale $I = 0.01g$

I risultati finali di questa misurazione sono dunque i seguenti:

$$\begin{aligned}
m_1 &= (80.000 \pm 0.080)g; & m_6 &= (480.000 \pm 0.084)g \\
m_2 &= (159.930 \pm 0.087)g; & m_7 &= (560.020 \pm 0.058)g \\
m_3 &= (239.950 \pm 0.078)g; & m_8 &= (639.990 \pm 0.062)g \\
m_4 &= (320.110 \pm 0.100)g; & m_9 &= (720.010 \pm 0.048)g \\
m_5 &= (400.000 \pm 0.060)g; & m_{10} &= (799.820 \pm 0.052)g
\end{aligned}$$

4.2 Allungamento

In tabella sono riportati i valori dell'allungamento; per ogni configurazione sono state effettuate 10 misure.

<i>N. dischetti</i>	$x_{eq}[mm]$										<i>media[mm]</i>	<i>std[mm]</i>
1	104	103	103	104	103	103	103	103	104	104	103.40	0.49
2	104	105	105	107	106	105	105	105	106	105	105.30	0.78
3	107	109	107	108	107	108	108	107	107	107	107.50	0.67
4	110	109	110	109	109	109	111	111	111	110	109.90	0.83
5	112	111	111	113	112	112	112	112	112	112	111.90	0.54
6	114	113	113	115	115	113	114	114	114	114	113.90	0.70
7	116	116	117	116	116	116	116	116	117	116	116.20	0.40
8	119	117	119	117	118	118	118	118	118	119	118.10	0.70
9	120	120	120	121	121	121	120	121	120	120	120.40	0.49
10	123	122	122	123	122	123	122	122	122	122	122.30	0.46

Tabella 4: misure ripetute dell'allungamento della molla all'equilibrio, con un numero crescente di dischetti appesi.

Così come per il primo metodo, l'incertezza totale è stata ricavata sommando in quadratura il contributo relativo alla deviazione standard campionaria s_{N-1} , opportunamente scalata per il numero di misure effettuate (N), e il contributo relativo all'incertezza sistematica che, come illustrato nel paragrafo 2.2, stimiamo pari a $\frac{1}{4}$ della distanza minima tra due tacche¹² dello strumento, dunque $\sigma_{str} = 0.25mm$.

$$\sigma_{tot}(x_{eq}) = \sqrt{\frac{\sigma_R^2(x_{eq})}{N} + \sigma_B^2} \quad (4.2)$$

¹²Dimensione *tacca* = 1mm

Possiamo dunque esprimere i risultati delle misure come:

$$\begin{aligned}
x_1 &= (103.40 \pm 0.29)mm; & x_6 &= (113.90 \pm 0.33)mm \\
x_2 &= (105.30 \pm 0.35)mm; & x_7 &= (116.20 \pm 0.28)mm \\
x_3 &= (107.50 \pm 0.33)mm; & x_8 &= (118.10 \pm 0.33)mm \\
x_4 &= (109.90 \pm 0.36)mm; & x_9 &= (120.40 \pm 0.29)mm \\
x_5 &= (111.90 \pm 0.30)mm; & x_{10} &= (122.30 \pm 0.29)mm
\end{aligned}$$

4.3 Periodo

In tabella sono riportati i dati relativi al periodo di 10 oscillazioni. In questo caso sono state effettuate 20 misure per ogni configurazione.

<i>N. dischetti</i>	<i>periodo (x10) [s]</i>										<i>media[s]</i>	<i>std[s]</i>
1	3.16	3.17	3.15	3.25	3.15	3.15	3.25	3.17	3.21	3.20	3.203	0.041
	3.18	3.23	3.18	3.25	3.24	3.25	3.15	3.19	3.27	3.25		
2	4.11	4.04	4.09	4.05	4.12	4.1	4.12	4.1	4.07	4.04	4.085	0.043
	4.08	4.14	4.02	4.07	4.06	4.07	4.06	4.22	4.07	4.07		
3	4.83	4.84	4.81	4.73	4.81	4.81	4.77	4.82	4.85	4.90	4.816	0.046
	4.80	4.81	4.88	4.82	4.77	4.89	4.74	4.76	4.82	4.86		
4	5.40	5.42	5.45	5.45	5.39	5.30	5.43	5.39	5.41	5.41	5.401	0.047
	5.26	5.36	5.44	5.40	5.43	5.38	5.40	5.46	5.42	5.41		
5	5.94	5.96	6.05	5.97	5.97	5.85	6.02	5.91	5.97	5.93	5.961	0.048
	5.96	6.03	5.99	5.99	6.01	5.95	5.96	5.94	5.87	5.95		
6	6.49	6.42	6.51	6.52	6.47	6.51	6.48	6.50	6.47	6.42	6.464	0.051
	6.46	6.51	6.42	6.44	6.34	6.51	6.48	6.5	6.34	6.49		
7	6.91	7.03	6.85	6.88	6.97	6.94	6.95	6.92	6.95	6.83	6.926	0.047
	6.88	7.00	6.93	6.95	6.94	6.92	6.90	6.93	6.96	6.88		
8	7.41	7.35	7.34	7.35	7.32	7.44	7.28	7.35	7.36	7.33	6.927	0.053
	7.53	7.36	7.32	7.38	7.40	7.35	7.37	7.41	7.31	7.37		
9	7.78	7.79	7.89	7.80	7.82	7.81	7.74	7.88	7.74	7.76	7.796	0.047
	7.75	7.85	7.81	7.76	7.84	7.76	7.85	7.81	7.72	7.76		
10	8.18	8.11	8.18	8.17	8.23	8.29	8.25	8.21	8.16	8.21	8.206	0.047
	8.15	8.23	8.20	8.14	8.27	8.27	8.19	8.22	8.20	8.26		

Tabella 5: misure ripetute di 10 periodi dello stesso oscillatore con un numero crescente di dischetti appesi.

Dalla misura del periodo di $k = 10$ oscillazioni, per riferirci al periodo di una singola oscillazione si avrà che

$$E[T] = \frac{E[kT]}{k} \quad (4.3)$$

Per quanto riguarda invece l'incertezza totale sulla misura, indicando con N il numero di misurazioni e stimando, come nel paragrafo 2.3, $\sigma_B = \frac{I}{\sqrt{12}}$ ⁽¹³⁾, si ottiene

$$\sigma_{tot}(T) = \sqrt{\frac{\sigma^2(T)}{Nk^2} + \frac{\sigma_B^2}{k^2}} \quad (4.4)$$

Volendo dunque riportare i risultati relativi alle 10 misure del periodo di un'oscillazione:

$$\begin{aligned} T_1 &= (0.3203 \pm 0.0029)s; & T_6 &= (0.6464 \pm 0.0037)s \\ T_2 &= (0.4085 \pm 0.0030)s; & T_7 &= (0.6926 \pm 0.0033)s \\ T_3 &= (0.4816 \pm 0.0032)s; & T_8 &= (0.6927 \pm 0.0037)s \\ T_4 &= (0.5401 \pm 0.0034)s; & T_9 &= (0.7796 \pm 0.0033)s \\ T_5 &= (0.5961 \pm 0.0034)s; & T_{10} &= (0.8206 \pm 0.0033)s \end{aligned}$$

¹³con I intervallo di discriminazione del cronometro, pari a $0.01s$

Elaborazione propedeutica al calcolo di k e g

Come introdotto in precedenza, è di nostro interesse calcolare la costante elastica della molla e l'accelerazione di gravità anche a partire da misure integrate (cfr. par. 4.1, 4.2 e 4.3), per mezzo di una regressione lineare sulle leggi che legano massa, periodo di oscillazione al quadrato e allungamento. Di seguito sono raccolti i dati su cui baseremo la trattazione dei seguenti paragrafi.

<i>N. dischetti</i>	$T^2[s^2]$		$x_{eq}[m]$		$m[kg]$	
	<i>media</i>	σ_{tot}	<i>media</i>	σ_{tot}	<i>media</i>	σ_{tot}
1	0.1026	0.0020	0.10340	0.00029	0.080000	0.000080
2	0.1669	0.0033	0.10530	0.00035	0.159930	0.000087
3	0.2319	0.0050	0.10750	0.00033	0.239950	0.000078
4	0.2917	0.0064	0.10990	0.00036	0.320110	0.000103
5	0.3553	0.0079	0.11190	0.00030	0.400000	0.000060
6	0.4178	0.0100	0.11390	0.00033	0.480000	0.000084
7	0.4797	0.0105	0.11620	0.00028	0.560020	0.000058
8	0.5427	0.0132	0.11810	0.00033	0.639990	0.000062
9	0.6078	0.0133	0.12040	0.00029	0.720010	0.000048
10	0.6734	0.0146	0.12230	0.00029	0.799820	0.000052

Tabella 6: media e incertezza totale dei dati raccolti

Si precisa che in Tabella 6 sono riportati i dati relativi a al periodo al quadrato di 10 oscillazioni. Per quanto riguarda le σ_{tot} relative a T^2 esse sono state ricavate dalle $\sigma_{tot}(T)$ con la propagazione delle incertezze secondo la formula

$$\sigma_{tot}(T^2) = 2 T \sigma_{tot}(T) \quad (4.5)$$

Sapendo che per un oscillatore armonico valgono le seguenti formule:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{(m_0 + m)}{k} \quad x_{eq} = x_0 + \frac{(m_0 + m)g}{k} \quad x_{eq} = x_0 + \left(\frac{g}{4\pi^2}\right) T^2 \quad (4.6)$$

ci si aspetta che gli andamenti di T^2 in funzione di m , x_{eq} in funzione di m e T^2 in funzione di x_{eq} siano lineari.

Per tali ragioni si può pensare di procedere, tramite le formule dei minimi quadrati, ad un *fit lineare*, per poi confrontare i parametri inferiti della retta con i dati effettivamente raccolti.

5 Regressione lineare

A partire dai dati raccolti si possono inferire i parametri della legge fisica che li lega mediante le **formule dei minimi quadrati** (o di *massima verosimiglianza*). Segue una breve spiegazione delle formule e della notazione che adotteremo nel trattare questa sezione.

Consideriamo due variabili x ed y che supponiamo legate da una legge lineare. Volendo stimare il coefficiente angolare e l'intercetta della miglior retta che lega le due variabili, è comodo assumere come non rilevanti le incertezze sulle x (ossia σ_x). Questa approssimazione non è tuttavia sempre valida: bisogna infatti verificare che $m\sigma_x \ll \sigma_y$, in cui m è il coefficiente angolare ¹⁴.

Introduciamo ora una notazione: date le nostre variabili x_i e y_i , per una qualunque variabile w_i (con $0 \leq i \leq N$ riferito a una corrispondente coppia x_i, y_i), indichiamo con \bar{w} una media pesata di tale variabile, con pesi gli inversi delle incertezze sulle y al quadrato. In formule:¹⁵

$$\bar{w} = \frac{\sum_i \frac{w_i}{\sigma_{y_i}^2}}{\sum_i \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}} \quad (5.1)$$

Data la legge $y \equiv y(x | m, c) = mx + c$, possiamo esprimere la miglior stima dei parametri m e c come

$$\hat{m} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \hat{c} = \frac{\overline{x^2} \cdot \bar{y} - \bar{x} \cdot \overline{xy}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad (16) \quad (5.2)$$

¹⁴Si precisa che questa condizione può essere verificata a posteriori, oppure con una stima a priori di m a partire dai punti considerati ($m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$)

¹⁵Le sommatorie nelle formule (5.1) e (5.3) sono chiaramente su $i = 0, \dots, N$ ma, per non appesantire la notazione, ne abbiamo omissso gli estremi.

¹⁶Le medie sono intese come sono state appena definite in (5.1).

con relative incertezze e coefficiente di correlazione:

$$\sigma_{\hat{m}}^2 = \frac{1}{(\overline{x^2} - \bar{x}^2) \sum_i \frac{1}{\sigma_{y_i}^2}} \quad \sigma_{\hat{c}}^2 = \sigma_{\hat{m}}^2 \cdot \bar{x}^2 \quad \rho(\hat{m}, \hat{c}) = -\frac{\bar{x}}{\sqrt{\overline{x^2}}} \quad (5.3)$$

5.1 T^2 versus m_D

Possiamo rappresentare i dati raccolti con le relative barre di errore calcolate punto per punto in confronto con la retta che rappresenta la legge lineare tra le due grandezze fisiche (*periodo quadrato* e *massa*):

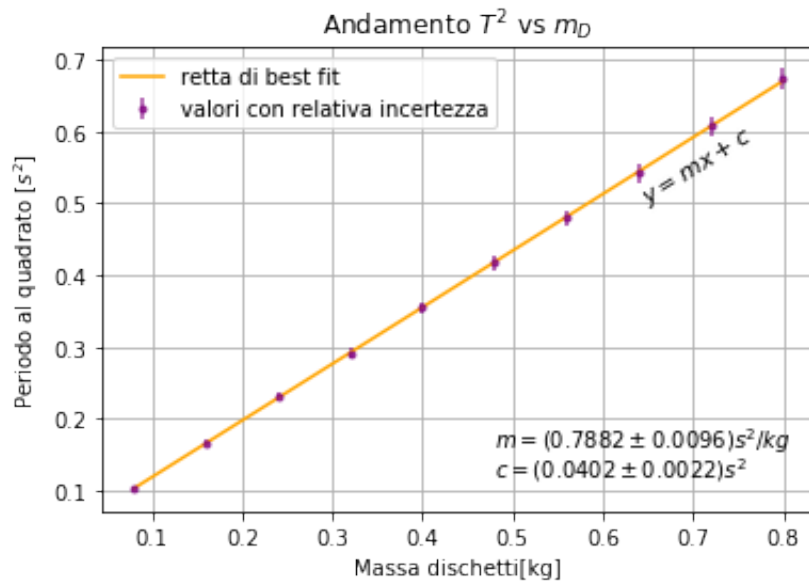


Figura 2: retta di *best fit* per la correlazione lineare tra 10 misure di massa e 10 misure di periodo di oscillazione della massa m_D corrispondente.

Attraverso le formule chiarite nell'introduzione al paragrafo 5, considerando come intercetta c e coefficiente angolare m otteniamo

<i>parametro</i>	<i>media</i>	<i>incertezza</i>
<i>c</i>	$0.0402s^2$	$0.0022s^2$
<i>m</i>	$0.7881s^2/kg$	$0.0096s^2/kg$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.75 \\ -0.75 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice coefficienti di correlazione lineare

Consideriamo dunque la legge:

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{(m_0 + m_D)}{k} = 4\pi^2 \frac{m_0}{k} + 4\pi^2 \frac{m_D}{k} = T_0^2 + \alpha_1 m_D \quad (5.4)$$

Abbiamo di conseguenza che il coefficiente angolare da noi calcolato corrisponde ad α_1 mentre l'intercetta a T_0^2 .

Si noti che l'approssimazione $\sigma_x \rightarrow 0$ è valida poiché è verificata la condizione $m \sigma_x \ll \sigma_y$, come segue dai dati riportati in Tabella 6: infatti le incertezze sulle misure della massa sono dell'ordine di $10^{-5}kg$, le incertezze su T^2 sono al più dell'ordine di $10^{-2}s^2$, mentre dal *fit* notiamo che m è dell'ordine di $10^{-1}kg/s^2$. Segue che $m \sigma_x \sim o(10^{-6})$, conseguentemente di almeno 4 ordini di grandezza in meno rispetto alle incertezze su T_0^2 .

5.2 x_{eq} versus m_D

Possiamo rappresentare i dati raccolti con le relative barre di errore calcolate punto per punto in confronto con la retta che rappresenta la legge lineare tra le due grandezze fisiche (*posizione di equilibrio e massa*):

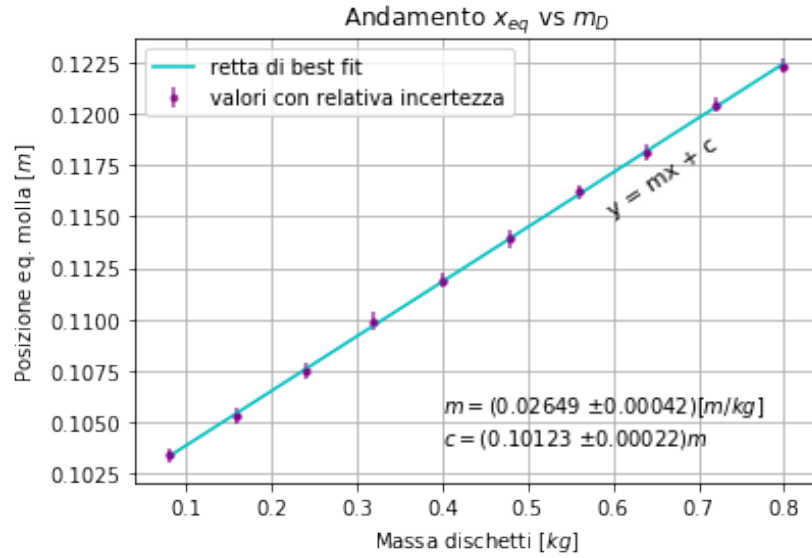


Figura 3: retta di *best fit* per la correlazione lineare tra 10 misure di massa e 10 misure di allungamento della molla sotto la sollecitazione delle stesse masse.

Possiamo esprimere i parametri del *fit* come segue, seguendo ancora le formule del paragrafo 5.

parametro	media	incertezza
c	$0.10123m$	$0.00022m$
m	$0.02649m/kg$	$0.00042m/kg$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.89 \\ -0.89 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice coefficienti di correlazione lineare

Se ora consideriamo la legge che lega allungamento e massa:

$$x_{eq} = x_0 + \frac{(m_o + m_D)g}{k} = \bar{x}_0 + g \frac{m_D}{k} = \bar{x}_0 + \alpha_2 m_D \quad (5.5)$$

Risulta che il coefficiente angolare del *fit* corrisponde ad α_2 , mentre l'intercetta a \bar{x}_0 . Si noti che l'approssimazione $\sigma_x \rightarrow 0$ è valida poiché è verificata la condizione $m \sigma_x \ll \sigma_y$,

come segue dai dati riportati in Tabella 6: infatti le incertezze sulle misure della massa sono dell'ordine di $10^{-5}kg$, le incertezze su x_{eq} sono dell'ordine di $10^{-4}s^2$, mentre dal *fit* notiamo che m è dell'ordine di $10^{-2}kg/s^2$. Segue che $m\sigma_x \sim o(10^{-7})$, conseguentemente di 3 ordini di grandezza in meno rispetto alle incertezze su x_{eq} .

5.3 x_{eq} versus T^2

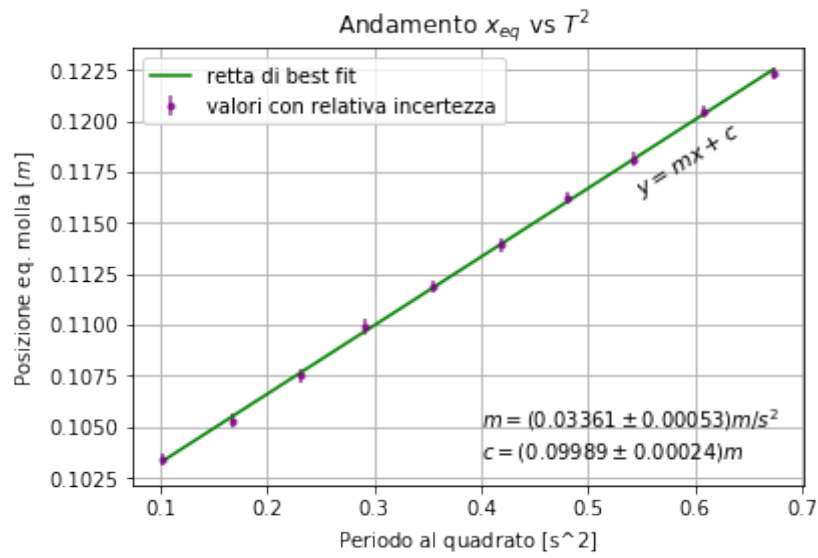


Figura 4: retta di *best fit* per mostrare la dipendenza lineare 10 misure di T^2 e 10 misure di x_{eq} .

Possiamo esprimere i parametri del fit secondo le formule del paragrafo 5, come segue:

parametro	media	incertezza
c	$0.09989m$	$0.00024m$
m	$0.03361m/s^2$	$0.00053m/s^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.91 \\ -0.91 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice coefficienti di correlazione lineare

Sappiamo che:

$$x_{eq} = x_0 + \frac{gT^2}{4\pi^2} = x_0 + \alpha_3 T^2 \quad (5.6)$$

dove dunque il coefficiente angolare del *fit* è α_3 , mentre l'intercetta x_0 .

Si noti che in questo caso l'approssimazione $\sigma_x \rightarrow 0$ non è del tutto valida poiché non è completamente verificata la condizione $m\sigma_x \rightarrow \sigma_y$, come segue dai dati riportati in Tabella 6: infatti le incertezze sulle misure di T^2 sono almeno dell'ordine di $10^{-2}s^2$, le incertezze su x_{eq} sono dell'ordine di $10^{-3}m$, mentre dal *fit* notiamo che m è dell'ordine di $10^{-2}m/s^2$. Segue che $m\sigma_x \sim o(10^{-4})$, dunque solo di un ordine di grandezza in meno rispetto alle incertezze su x_{eq} . Nella maggior parte dei casi tuttavia $\sigma_{T^2} \sim o(10^{-3})$, vi sono quindi due ordini di grandezza di differenza.

Possiamo dunque assumere che l'inferenza attraverso le formule viste in apertura del paragrafo 5 sia valida anche in questo caso.

6 Elaborazione dati

Avendo ricavato diverse misure di periodo e di posizione di equilibrio ottenute con valori di massa progressivamente incrementati, nonché confrontato di volta in volta i dati raccolti e le relative incertezze con la retta rappresentante la legge lineare tra le due grandezze fisiche coinvolte (vedi par. 5), è possibile ora ricavare la costante di elasticità della molla, la sua massa m_0 e l'accelerazione gravitazionale da tali risultati ottenuti. Effettueremo anche alcune precisazioni sulla posizione di equilibrio della molla.

6.1 Calcolo di k

Poiché sappiamo che $\alpha_1 = \frac{4\pi^2}{k}$, possiamo estrarre k come segue:

$$k = \frac{4\pi^2}{\alpha_1} \quad (6.1)$$

Considerandola come una funzione monomia¹⁷ abbiamo, se δ_{α_1} è l'incertezza relativa su α_1 :

$$\sigma_{tot}(k) = k \delta_{\alpha_1} \quad (6.2)$$

otteniamo:

$$k = (50.08 \pm 0.61) N/m \quad (6.3)$$

6.2 Calcolo di m_0

Considerando invece che $T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m_0}{k}$, possiamo ricavare m_0 come segue:

$$m_0 = \frac{k T_0^2}{4\pi^2} = \frac{T_0^2}{\alpha_1} \quad (18) \quad (6.4)$$

¹⁷Una funzione del tipo $f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ con gli x_i stocasticamente indipendenti $\forall i$. Allora il quadrato dell'incertezza relativa su f si propaga come: $\left(\frac{\sigma_{tot}(f)}{f(\mu_1, \dots, \mu_n)} \right)^2 = \sum_i \alpha_i^2 \left(\frac{\sigma_{tot}(x_i)}{x_i} \right)^2$.

¹⁸Si veda la formula (6.1) per la sostituzione.

In base ancora una volta alla formula (3.3), e conoscendo dal paragrafo 5.1 il coefficiente di correlazione tra α_1 e T_0^2 , ossia $\rho(T_0^2, \alpha_1)$, nonché i valori assunti dalle due variabili con le relative incertezze, calcoliamo le derivate parziali e la covarianza:

$$\frac{\partial m_0}{\partial T_0^2} = \frac{1}{\alpha_1} \quad \frac{\partial m_0}{\partial \alpha_1} = -\frac{T_0^2}{\alpha_1^2} \quad cov(\alpha_1, T_0^2) = \rho(\alpha_1, T_0^2) \sigma_{\alpha_1} \sigma_{T_0^2} \quad (6.5)$$

Il risultato che si ottiene è

$$m_0 = (0.05100 \pm 0.00012)kg = (51.00 \pm 0.12)g$$

con una precisione relativa pari a $\delta_{m_0} \approx 0.24\%$.

6.3 Calcolo di g

Possiamo risalire al valore dell'accelerazione di gravità in due modi.

Considerando che $\alpha_3 = \frac{g}{4\pi^2}$ (come visto in formula (5.6)), possiamo ricavare una **prima formula** per g :

$$g = 4\pi^2 \alpha_3 \quad (6.6)$$

L'incertezza sulla misura dovrà essere moltiplicata per un fattore $4\pi^2$. Il risultato sarà allora

$$g = (1.327 \pm 0.021)m/s^2$$

In più, avendo a disposizione i valori di α_1 e α_2 così come espressi nei paragrafi 5.1 e 5.2, è possibile risalire al valore di g dal rapporto fra i due coefficienti.

Considerando che $\alpha_1 = \frac{4\pi^2}{k}$ e $\alpha_2 = \frac{g}{k}$, infatti, ricaviamo

$$g = 4\pi^2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \quad (6.7)$$

Per cui $E[g] = 1.322m/s^2$ Considerando la formula 3.3 e le derivate parziali si ha

$$\frac{\partial g}{\partial \alpha_2} = \frac{4\pi^2}{\alpha_1} \quad \frac{\partial g}{\partial \alpha_1} = -\frac{4\pi^2 \alpha_2}{\alpha_1^2} \quad (6.8)$$

Inoltre, per calcolare $cov(\alpha_1, \alpha_2)$, consideriamo la formula per la covarianza tra due funzioni $y_1 \equiv y_1(x_1, \dots, x_n)$ e $y_2 \equiv y_2(x_1, \dots, x_n)$ vale

$$cov(y_1, y_2) = \sum_{i,j}^n \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_j} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \quad (6.9)$$

Di conseguenza:

$$cov(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial k} \frac{\partial \alpha_2}{\partial k} \sigma^2(k) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial k} \frac{\partial \alpha_2}{\partial g} cov(k, g) + \frac{\partial \alpha_1}{\partial g} \frac{\partial \alpha_2}{\partial k} cov(g, k) \quad (6.10)$$

in cui il secondo termine è nullo essendo k e g due variabili fisiche scorrelate (con covarianza nulla) mentre il terzo è nullo poiché $\frac{\partial \alpha_1}{\partial g} = 0$. Dunque la stima si riduce a

$$cov(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4\pi^2 g \sigma_k^2}{k^4} \quad (19) \quad (6.11)$$

Si calcola quindi

$g = (1.322 \pm 0.010)m/s^2$ Si nota chiaramente come l'incertezza relativa su g estratta da α_1 e α_2 ($\approx 0.8\%$) sia minore rispetto a quella su g calcolata a partire da α_3 ($\approx 1.6\%$).

6.4 Precisazioni sulla posizione di equilibrio

Ci sembra doveroso puntualizzare la differenza tra gli x_0 e \bar{x}_0 calcolati nei paragrafi 5.3 e 5.2. Il loro significato fisico è profondamente differente, in quanto:

- \bar{x}_0 , il cui valore è stato ottenuto dalla regressione lineare di T_0^2 vs m_D , è la posizione di equilibrio della molla quando non vi sono appese masse aggiuntive, dunque esclusivamente sotto la sollecitazione della sua stessa massa m_0 ;

¹⁹Dove k e σ_k sono state stimate nel paragrafo 6.1.

- x_0 , che è stato calcolato a partire dal *fit* tra x_{eq} e T^2 , indica invece la posizione di equilibrio della molla considerata come priva di massa. Infatti nell'equazione (5.6) la massa non figura, mentre nella (5.5) è particolarmente apprezzabile la differenza tra le due posizioni di equilibrio in quanto compaiono entrambe nella formula. In particolare è facile vedere che la differenza tra \bar{x}_0 e x_0 (evidentemente positiva) è

$$\Delta x = \bar{x}_0 - x_0 = \frac{m_0 g}{k} \quad (6.12)$$

Possiamo confrontare quindi i valori di Δx che si ottengono sia come differenza tra $\bar{x}_0 - x_0$, prendendo tali valori dai risultati delle regressioni lineari, sia da $\frac{m_0 g}{k}$, a partire dai risultati ottenuti nei paragrafi precedenti. Si ha:

- 1) Per il valore atteso $E[\Delta x] = E[\bar{x}_0] - E[x_0]$ ($\approx 1.34mm$).

Possiamo invece valutare l'incertezza come:

$$\sigma_{tot}(\Delta x) = \sqrt{\sigma_{tot}^2(\bar{x}_0) + \sigma_{tot}^2(x_0)} \quad (6.13)$$

Di conseguenza calcoliamo

$$\Delta x = (1.34 \pm 0.33)mm$$

- 2) Per il valore atteso $E[\Delta x] = \frac{E[m_0] E[g]}{E[k]}$ ($\approx 1.35mm$).

Considerando le grandezze fisicamente scorrelate, le incertezze si propagano come per una funzione monomia. Segue:

$$\frac{\sigma_{tot}(\Delta x)}{\Delta x} = \frac{\sigma_{tot}(m_0)}{m_0} \oplus \frac{\sigma_{tot}(g)}{g} \oplus \frac{\sigma_{tot}(k)}{k} \quad (20) \quad (6.14)$$

Svolgendo i calcoli si ottiene

$$\Delta x = (1.35 \pm 0.03)mm$$

Segue che i due risultati sono perfettamente compatibili entro le incertezze di misura.

²⁰Si noti che il simbolo \oplus indica la sommatoria in quadratura sotto radice.

7 Conclusioni

7.1 Risultati ottenuti per k e g

	<i>primo metodo</i>	<i>secondo metodo</i>
gravità $g[m/s^2]$	1.341 ± 0.057 1.364 ± 0.056	1.327 ± 0.021 1.322 ± 0.010
costante elastica $k[N/m]$	49.09 ± 0.53 50.07 ± 0.15	50.08 ± 0.61

Tabella 7: Confronto tra i valori di k e g ottenuti con i vari metodi

Avendo ottenuto con metodi indipendenti più valori di k e g possiamo pensare di combinare i risultati. Possiamo infatti considerare che esse siano in ogni caso funzioni di variabili casuali che provengono dalla media di un numero elevato di dati raccolti; considerando la media come una funzione di N variabili casuali²¹, avendo effettuato un numero comunque alto di misurazioni possiamo assumere che per il Teorema del Limite Centrale abbia tendenza normale.

Di conseguenza k e g sono funzioni di variabili che si distribuiscono secondo una normale di Gauss, e combinare i risultati risulta lecito secondo le seguenti formule²²:

$$\mu = \frac{\sum_k \frac{\hat{x}_k}{\sigma_k^2}}{\sum_k \frac{1}{\sigma_k^2}}; \quad \frac{1}{\sigma^2} = \sum_k \frac{1}{\sigma_k^2} \quad (7.1)$$

che esprimono evidentemente il valore atteso come una media dei valori attesi pesata con gli inversi delle varianze, e per l'inverso della σ^2 la somma degli inversi delle varianze.

Si trova di conseguenza:

$$\begin{cases} k = (50.00 \pm 0.14)N/m \\ g = (1.324 \pm 0.009)m/s^2 \end{cases}$$

A pagina seguente è possibile visualizzare i risultati ottenuti sotto forma di *plot*.

²¹Ove N è il numero di misurazioni.

²²Le sommatorie si intendono per $k = 0, \dots, M$, dove M indica il numero di risultati differenti, \hat{x}_k e σ_k i risultati con le relative incertezze.

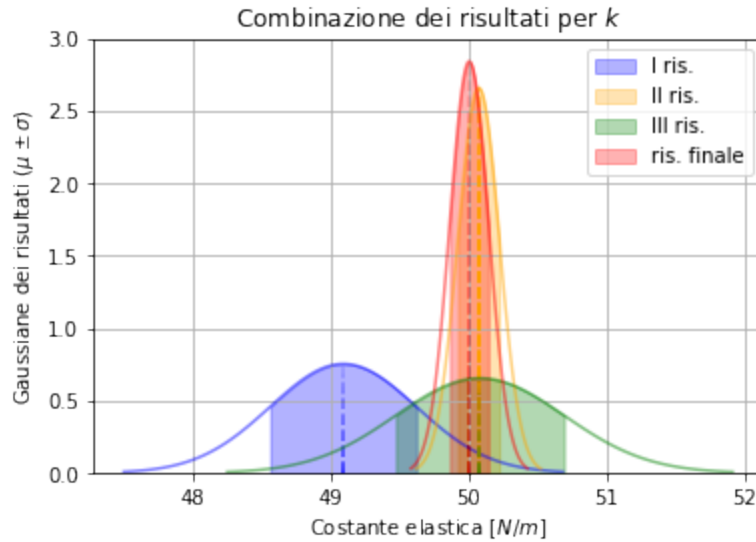


Figura 5: grafico riassuntivo della combinazione per i risultati della misura di k (l'ordine è irrilevante). Il risultato finale è rappresentato dalla gaussiana in rosso.

Le gaussiane dei risultati appaiono globalmente **piuttosto omogenee**. Si osserva in particolare come, eccetto il I risultato che risulta non particolarmente preciso né accurato, il II e il III pur differenziandosi sostanzialmente da esso nella dispersione dei dati (la campana appare molto più piatta nel III) sono molto accurati in confronto al valore di k preimpostato nel simulatore sperimentale (purtroppo abbiamo ceduto alla tentazione di curiosare).

Di conseguenza, concordemente con quanto lasciano intendere le formule (7.1), il risultato finale presenta una dispersione piuttosto bassa (incertezza relativa $\delta = 0.28\%$); inoltre, grazie alla complessiva omogeneità dei tre valori misurati nei due metodi, le gaussiane risultano se non tutte compatibili entro un *confidence level* corrispondente a una σ , molto vicine tra loro.

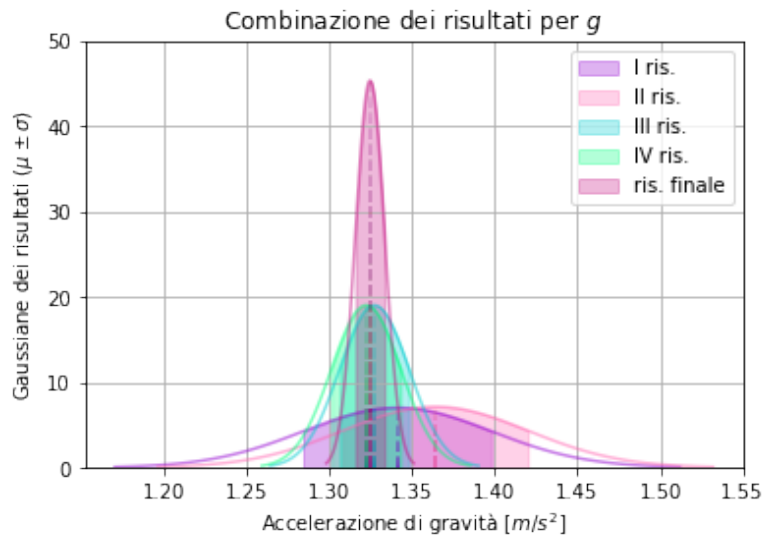


Figura 6: grafico riassuntivo della combinazione per i risultati della misura di g (l'ordine è irrilevante). Il risultato finale è rappresentato dalla gaussiana in fucsia.

Si vede come, a differenza di k , le distribuzioni dei risultati per g sono **meno omogenee**. Quelle che nel grafico sono riportate sotto forma di I e II risultato sono misure meno accurate, possiedono infatti un'incertezza relativa maggiore; III e IV misura sono invece più accurate (e anche più precise se consideriamo come "valor vero" della gravità quella relativa ad Europa (cfr. par. 7.2)).

Ciò si riflette naturalmente sulla forma delle campane, che appaiono più strette (e, di conseguenza, alte) per il terzo e il quarto risultato, più piatte e larghe per i primi due.

7.2 Su quale corpo celeste ci troviamo?

Il valore di accelerazione gravitazionale da noi ricavato, $g = (1.324 \pm 0.009)m/s^2$, è perfettamente confrontabile con il valore dell'accelerazione gravitazionale di Europa, uno dei satelliti naturali che orbitano attorno a Giove ($\approx 1.315m/s^2$). Il nostro *confidence level* corrispondente a 1σ è infatti: $1.315m/s^2 < g < 1.333m/s^2$.



Figura 7: storica immagine del satellite Europa scattata dalla Voyager 1 nel 1979

Suddivisione del lavoro

<i>matricola n°</i>	<i>cognome</i>	<i>nome</i>	<i>compito</i>
1917791	Pietropaoli	Lorenzo	Misure, elaborazione ed analisi dati, redazione del documento in \LaTeX
1900174	Rosato	Romeo Felice	
1914359	Russo	Benedetta	
1918873	Vincenti	Giovanni	

L'analisi dati è stata effettuata interamente in Python.