

Laboratorio di Segnali e Sistemi - canale M-Z
Relazione sulla quinta esperienza di laboratorio

Gruppo 29: L. Pietropaoli, S. Scacco, A. Scarpa

27 settembre 2024

Indice

1 Abstract	2
2 Strumentazione	2
3 Discussione sulle incertezze	2
4 Filtro VCVS	3
4.1 Diagrammi di Bode	5
4.1.1 Frequenza di taglio	8
4.1.2 Pendenza di discesa	10
5 Misure con il rumore	11
5.1 Il generatore di rumore	11
5.2 Il generatore di rumore e il filtro Butterworth	12
5.3 Il generatore di rumore, il sommatore e il filtro Butterworth	14
6 Conclusioni	16

1 Abstract

In questa esperienza di laboratorio è stato costruito un **filtro attivo VCVS** di cui si è studiato il comportamento in frequenza. Si è inoltre studiata la capacità del filtro di abbassare il noise proveniente da un circuito generatore di rumore "bianco".

2 Strumentazione

- i. Generatore di funzioni *GW Insteek AFG-2225*.
- ii. Generatore di tensione continua *GW Insteek GPE-4323*.
- iii. Oscilloscopio digitale *Keysight DSOX1102G*.
- iv. Multimetro *Keysight 34460A*.
- v. OP-AMP mod. TL082 (*Texas Instruments*) per la realizzazione del filtro VCVS.
- vi. OP-AMP mod. LM358AN (*Fairchild*), per la realizzazione del sommatore.¹
- vii. Transistor a giunzione bipolare NPN mod. 2N222A.
- viii. Componenti circuitali vari, breadboard, resistenze, condensatori, cavi, snodi a T e connettori BNC.

3 Discussione sulle incertezze

Gli strumenti di laboratorio non godono di precisione infinita e sono soggetti ad errori casuali e sistematici. Si utilizzeranno per i calcoli le seguenti stime delle incertezze:

i. **Generatore** di tensione continua: si associa un errore sistematico di circa 0.03 V.

ii. **Oscilloscopio**:

– per le misure di tensione, il datasheet indica che l'incertezza dipende dalla scala delle misure realizzate. Per le scale usate sull'oscilloscopio, l'incertezza associata per le misure di tensione è, per le scale utilizzate in questa esperienza, pari al 3%. Si sottolinea inoltre che le misure all'oscilloscopio risentono di una sistematica ogni volta che si usa lo strumento *measure* per rilevare segnali picco-picco. Questo effetto sistematico riguarda lo spessore *S* della linea che rappresenta il segnale sullo schermo, che è una aggiunta ineliminabile alla misura automatica. Tuttavia, questo errore è trascurabile: sia *a/b* un rapporto di tensioni, e sia scala 1/scala 2 $\approx a/b$ il rapporto delle scale che le visualizzano sull'oscilloscopio. Allora:

$$A_{mis} = \frac{a + S \cdot \text{scala 1}}{b + S \cdot \text{scala 2}} \approx \frac{a}{b} \frac{1 + S \cdot \text{scala 2}/b}{1 + S \cdot \text{scala 2}/b} = \frac{a}{b} = A_{reale}$$

– per le misure di fase si è utilizzata la funzione *measure-phase* dell'oscilloscopio. Si tratta, a differenza della misura picco-picco, di una misura che non è affetta da errori sistematici manifesti, ma soltanto da errori casuali.

Secondo il manuale di uso dell'oscilloscopio, alle letture di tempo si deve associare il seguente errore:

$$\Delta t \simeq 0.005\% + 200 \text{ ps} + 0.0016 \times \text{screen width} \approx 0.0016 \times \text{screen width}$$

La larghezza dello schermo era tale da visualizzare circa due o tre periodi delle onde sinusoidali che inviavamo. Perciò la fissiamo pari a 2-3 *T*. Questo significa che:

$$\Delta\phi = 360 \times \frac{\Delta t}{T} = 360 \times \frac{0.0016}{T} (2 \div 3) T = 1.1 \div 1.7^\circ \quad (3.1)$$

D'altronde, abbiamo osservato durante le misure una variabilità complessiva di qualche grado, perciò appare naturale assumere le incertezze sulla fase sempre costanti e pari a 1.5°.

¹Durante tutta l'esperienza, si è alimentato entrambi gli operazionali con $V_{CC} = 12 \text{ V}$ e ground = -12 V .

iii. **Multimetro Keysight 34460A**: dal manuale dell'utente, si associa l'incertezza di lettura pari allo 0.018% per le misure di resistenza e 0.0115% per le misure di tensione continua.

iv. **Multimetro GW Insteck**: si dovrebbe associare una accuratezza dello 0.5%, tuttavia le fluttuazioni delle misure erano così grandi che si è ritenuto più pertinente assegnarle di volta in volta in base alla variabilità delle stesse. Assegniamo quindi 10 nF di incertezza ai condensatori elettronitici e 0.2 nF su quelli non elettronitici.

Inoltre, in ogni calcolo effettuato si è eseguita la propagazione delle incertezze.

4 Filtro VCVS

Il VCVS (voltage controlled voltage source filter) è un filtro attivo passa-basso di II ordine (pendenza di discesa attesa: -40 dB/decade - schema circuitale visibile in [Figura 1](#)):

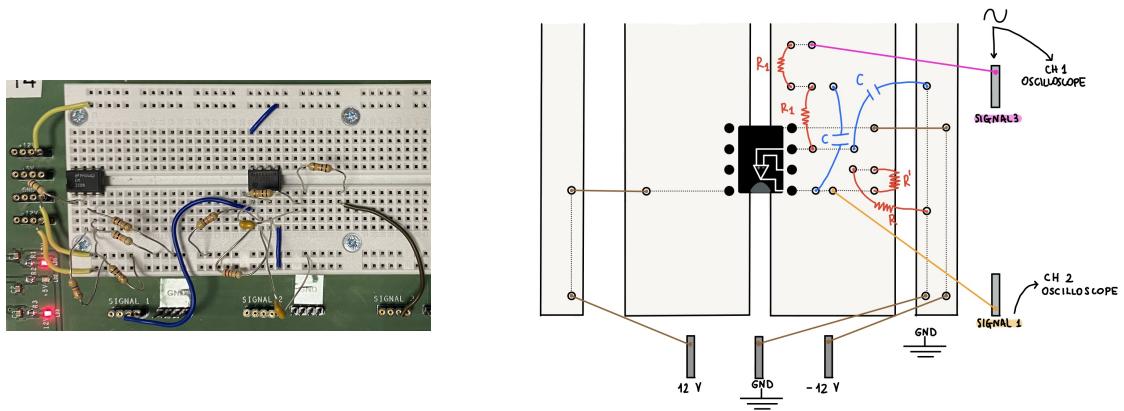


Figura 1: Circuito e schema del VCVS. Si è tentato un montaggio che fosse il più compatto possibile per ridurre dissipazione del segnale lungo la linea.

Per realizzarlo si sono adoperati componenti i cui valori sono riassunti in [Tabella 1](#).

L'amplificazione in tensione attesa del circuito, una volta fissati i valori di R e R' , è data da:

$$A = K = 1 + \frac{R'}{R}. \quad (4.1)$$

pertanto riportiamo in [Tabella 2](#) i valori attesi delle grandezze importanti in gioco: ampiezza e frequenza di taglio:

Osserviamo che:

- Il progetto prevedeva $C = 15 \text{ nF}$, $R = 10 \text{ k}\Omega$, $f_T = 1.06 \text{ kHz}$. Tuttavia, poiché i condensatori usati hanno valori differenti tra loro e dal valore progettato, si hanno due valori distinti della frequenza di taglio. Pertanto, confronderemo la frequenza di taglio calcolata attraverso l'analisi dati con la media tra queste due frequenze attese, pari a $1.171 \pm 0.012 \text{ kHz}$.
- Al di sopra di un certo valore di K la funzione di trasferimento del circuito presenta, alla frequenza di taglio, un *ripple* verso l'alto (fenomeno di **overshooting**). Si studierà pertanto il comportamento del filtro sia in questo caso (variante di Chebyshev), mirando a un $K \approx 2.5$, che nella sua migliore regione di lavoro in termini di banda, che però conservi il regolare comportamento di un passa-basso (variante di Butterworth), con $K \approx 1.586^2$. Si studieranno i diagrammi di Bode dei circuiti (per l'ampiezza e per la fase) e si darà poi una stima della frequenza di taglio (con metodi che verranno chiariti nell'apposita [sottosezione 4.1.1](#)). Si verificherà infine la pendenza attesa per la regione di attenuazione e si faranno di tutte queste stime un confronto con le previsioni teoriche.

²Superfluo dire che non si pretende di ottenere precisamente questi valori: ci si avvicinerà il più possibile, ignorando sempre le sistematiche al di sotto di un certo confidence level.

componente	resistenza (kΩ)	capacità (nF)	slew rate (dichiarato) (V/μs)
R ₁	9.887 ± 0.0018	-	-
R ₁	9.878 ± 0.0018	-	-
R	46.920 ± 0.084	-	-
R' = (K-1) R	[Che] 67.19 ± 0.01 [But] 22.05 ± 0.01	-	-
C	-	14.32 ± 0.20	-
C	-	13.22 ± 0.20	-
TL0182	-	-	13
LM358	-	-	0.3

Tabella 1: Valori misurati per i componenti scelti e adoperati nel VCVS. La notazione è ripetuta se usiamo due componenti distinte di valore atteso uguale.

Amplificazioni	
Componente	Valore
$R' = 22 \text{ k}\Omega$	$K = 1.470 \pm 0.010$
$R' = 67 \text{ k}\Omega$	$K = 2.432 \pm 0.014$
Frequenze di taglio	
Componente	Valore
$C = 14.32 \text{ nF}$	$f_{T1} = 1.124 \pm 0.015 \text{ kHz}$
$C = 13.22 \text{ nF}$	$f_{T2} = 1.218 \pm 0.018 \text{ kHz}$

Tabella 2: Valori attesi della frequenza di taglio e delle amplificazioni a seconda dei valori di R' e C .

4.1 Diagrammi di Bode

Riportiamo in [Tabella 3](#) e [Tabella 4](#) i dati ottenuti per le due misure delle resistenze scelte (e conseguenti valori di K):

Filtro Chebyshev

Frequenza	Ingresso	Uscita	Amplificazione	Gain	Fase
0.010 kHz	0.229 V	0.535 V	2.34 ± 0.10	7.37 ± 0.37 dB	-1.5 ± 1.5 °
0.018 kHz	0.229 V	0.530 V	2.31 ± 0.10	7.29 ± 0.37 dB	-2.0 ± 1.5 °
0.030 kHz	0.231 V	0.535 V	2.32 ± 0.10	7.29 ± 0.37 dB	-2.5 ± 1.5 °
0.050 kHz	0.231 V	0.530 V	2.29 ± 0.10	7.21 ± 0.37 dB	-3.0 ± 1.5 °
0.070 kHz	0.231 V	0.530 V	2.29 ± 0.10	7.21 ± 0.37 dB	-3.3 ± 1.5 °
0.100 kHz	0.231 V	0.535 V	2.32 ± 0.10	7.29 ± 0.37 dB	-3.6 ± 1.5 °
0.180 kHz	0.233 V	0.545 V	2.34 ± 0.10	7.38 ± 0.37 dB	-5.0 ± 1.5 °
0.300 kHz	0.231 V	0.560 V	2.42 ± 0.10	7.69 ± 0.37 dB	-8.0 ± 1.5 °
0.500 kHz	0.229 V	0.630 V	2.75 ± 0.12	8.79 ± 0.37 dB	-14.0 ± 1.5 °
0.700 kHz	0.231 V	0.755 V	3.27 ± 0.14	10.29 ± 0.37 dB	-22.0 ± 1.5 °
0.800 kHz	0.233 V	0.950 V	4.08 ± 0.17	12.21 ± 0.37 dB	-28.0 ± 1.5 °
0.900 kHz	0.233 V	1.09 V	4.68 ± 0.20	13.40 ± 0.37 dB	-38.0 ± 1.5 °
1.000 kHz	0.231 V	1.21 V	5.24 ± 0.22	14.38 ± 0.37 dB	-54.0 ± 1.5 °
1.100 kHz	0.233 V	1.33 V	5.71 ± 0.24	15.13 ± 0.37 dB	-73.0 ± 1.5 °
1.200 kHz	0.233 V	1.25 V	5.36 ± 0.23	14.59 ± 0.37 dB	-95.0 ± 1.5 °
1.300 kHz	0.231 V	1.09 V	4.72 ± 0.20	13.48 ± 0.37 dB	-116.0 ± 1.5 °
1.400 kHz	0.227 V	0.880 V	3.88 ± 0.16	11.77 ± 0.37 dB	-128.0 ± 1.5 °
1.600 kHz	0.233 V	0.610 V	2.62 ± 0.11	8.36 ± 0.37 dB	-144.0 ± 1.5 °
1.800 kHz	0.231 V	0.362 V	1.57 ± 0.07	3.90 ± 0.37 dB	-152.0 ± 1.5 °
3.000 kHz	0.231 V	0.095 V	0.41 ± 0.02	-7.72 ± 0.37 dB	-167.0 ± 1.5 °
5.000 kHz	0.550 V	0.078 V	0.14 ± 0.01	-16.97 ± 0.37 dB	-172.0 ± 1.5 °
7.000 kHz	0.550 V	0.040 V	0.07 ± 0.00	-22.66 ± 0.37 dB	-175.0 ± 1.5 °
10.00 kHz	2.23 V	0.081 V	0.04 ± 0.00	-28.80 ± 0.37 dB	-178.0 ± 1.5 °
15.00 kHz	2.19 V	0.035 V	0.02 ± 0.00	-35.93 ± 0.37 dB	-179.0 ± 1.5 °
30.00 kHz	11.0 V	0.043 V	0.00 ± 0.00	-48.16 ± 0.37 dB	-180.0 ± 1.5 °

Tabella 3: Gli errori relativi assegnati alle misure di tensione sono pari al 4% mentre l'errore relativo assegnato all'amplificazione è il 5%. I punti in marroncino chiaro sono stati impiegati per il calcolo della massima amplificazione media (e quindi della frequenza di taglio). I punti in celestino sono invece quelli per cui viene eseguito il fit lineare in attenuazione.

Filtro Butterworth

Frequenza	Ingresso	Uscita	Amplificazione	Gain	Fase
0.010 kHz	0.229 V	0.340 V	1.48 ± 0.06	3.43 ± 0.37 dB	$-1.5 \pm 1.5^\circ$
0.018 kHz	0.233 V	0.340 V	1.46 ± 0.06	3.28 ± 0.37 dB	$-2.0 \pm 1.5^\circ$
0.030 kHz	0.233 V	0.335 V	1.44 ± 0.06	3.15 ± 0.37 dB	$-3.0 \pm 1.5^\circ$
0.050 kHz	0.229 V	0.340 V	1.48 ± 0.06	3.43 ± 0.37 dB	$-4.0 \pm 1.5^\circ$
0.070 kHz	0.233 V	0.340 V	1.46 ± 0.06	3.28 ± 0.37 dB	$-6.0 \pm 1.5^\circ$
0.100 kHz	0.229 V	0.340 V	1.48 ± 0.06	3.43 ± 0.37 dB	$-8.0 \pm 1.5^\circ$
0.180 kHz	0.231 V	0.340 V	1.47 ± 0.06	3.36 ± 0.37 dB	$-13.0 \pm 1.5^\circ$
0.300 kHz	0.231 V	0.335 V	1.45 ± 0.06	3.23 ± 0.37 dB	$-22.0 \pm 1.5^\circ$
0.500 kHz	0.229 V	0.330 V	1.44 ± 0.06	3.17 ± 0.37 dB	$-37.0 \pm 1.5^\circ$
0.700 kHz	0.229 V	0.304 V	1.33 ± 0.06	2.46 ± 0.37 dB	$-53.0 \pm 1.5^\circ$
0.800 kHz	0.231 V	0.293 V	1.27 ± 0.05	2.07 ± 0.37 dB	$-61.0 \pm 1.5^\circ$
0.900 kHz	0.231 V	0.281 V	1.22 ± 0.05	1.70 ± 0.37 dB	$-68.0 \pm 1.5^\circ$
1.000 kHz	0.229 V	0.263 V	1.15 ± 0.05	1.20 ± 0.37 dB	$-76.0 \pm 1.5^\circ$
1.100 kHz	0.233 V	0.245 V	1.05 ± 0.04	0.44 ± 0.37 dB	$-85.0 \pm 1.5^\circ$
1.200 kHz	0.231 V	0.231 V	1.00 ± 0.04	0.00 ± 0.37 dB	$-91.0 \pm 1.5^\circ$
1.300 kHz	0.231 V	0.211 V	0.91 ± 0.04	-0.79 ± 0.37 dB	$-97.0 \pm 1.5^\circ$
1.400 kHz	0.229 V	0.197 V	0.86 ± 0.04	-1.31 ± 0.37 dB	$-104.0 \pm 1.5^\circ$
1.600 kHz	0.231 V	0.167 V	0.72 ± 0.03	-2.82 ± 0.37 dB	$-113.0 \pm 1.5^\circ$
1.800 kHz	0.231 V	0.143 V	0.62 ± 0.03	-4.17 ± 0.37 dB	$-121.0 \pm 1.5^\circ$
3.000 kHz	2.23 V	0.495 V	0.22 ± 0.01	-13.07 ± 0.37 dB	$-146.0 \pm 1.5^\circ$
5.000 kHz	2.23 V	0.205 V	0.09 ± 0.00	-20.73 ± 0.37 dB	$-162.0 \pm 1.5^\circ$
7.000 kHz	2.23 V	0.091 V	0.04 ± 0.00	-27.79 ± 0.37 dB	$-166.0 \pm 1.5^\circ$
10.00 kHz	2.23 V	0.047 V	0.02 ± 0.00	-33.52 ± 0.37 dB	$-170.0 \pm 1.5^\circ$
15.00 kHz	2.23 V	0.022 V	0.01 ± 0.00	-40.24 ± 0.37 dB	$-174.0 \pm 1.5^\circ$
30.00 kHz	11.1 V	0.026 V	0.00 ± 0.00	-52.61 ± 0.37 dB	$-180.0 \pm 1.5^\circ$

Tabella 4: Gli errori relativi assegnati alle misure di tensione sono pari al 4% mentre l'errore relativo assegnato all'amplificazione è il 4.2%. I punti in marroncino chiaro sono stati impiegati per il calcolo della massima amplificazione media (e quindi della frequenza di taglio). I punti in celestino sono invece quelli per cui viene eseguito il fit lineare in attenuazione.

Ed infine, i diagrammi di Bode per il guadagno e per la fase della funzione di trasferimento del circuito in [Figura 2](#) e [Figura 3](#).

Mediando le righe di tabella evidenziate in marroncino, si ottengono i seguenti due valori per l'amplificazione massima:

$$\begin{array}{ll} \text{Butterworth} & K = 1.467 \pm 0.022 \\ \text{Chebyshev} & K = 2.316 \pm 0.037 \end{array}$$

Mentre il filtro Butterworth ha amplificazione perfettamente compatibile con il valore atteso dalla misura delle componenti, lo stesso non di può dire per il filtro Chebyshev, che ha amplificazione distanti quasi 3σ dal valore atteso in [Tabella 2](#). Si possono addurre diverse ragioni alla discrasia:

- L'errore è sottostimato, perché affetto da sistematiche che non sono state considerate nella misura.
- L'errore è sottostimato perché si è mediato su troppe amplificazioni in un regime in cui l'amplificazione potrebbe non essere veramente piatta, e ciò ha ridotto l'errore al punto da non rendere il tutto compatibile con l'amplificazione attesa.

Tuttavia, nonostante il tempo ridotto per problemi in fase di montaggio del circuito, la presa dati è risultata abbastanza pulita.

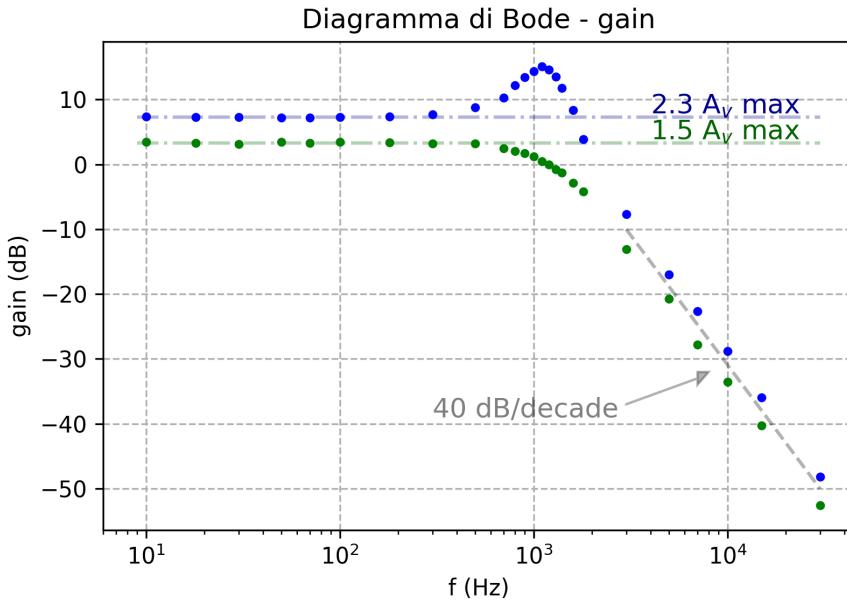


Figura 2: Semplice rendizione del diagramma di Bode per i due circuiti con annessi errori sul guadagno - in legenda è indicato il variare della amplificazione attesa nel caso **Chebyshev** ($K_{att} \simeq 2.5$) e **Butterworth** ($K_{att} \simeq 1.586$), da confrontare con le medie sull'amplicazione massima ottenute nella regione di migliore amplificazione (si intende quindi escluso il ripple del Chebyshev). Gli errori sul gain sono molto piccoli perché frutto della propagazione logaritmica degli errori sulle misure di ampiezza, che sono il 3% della lettura all'oscilloscopio.

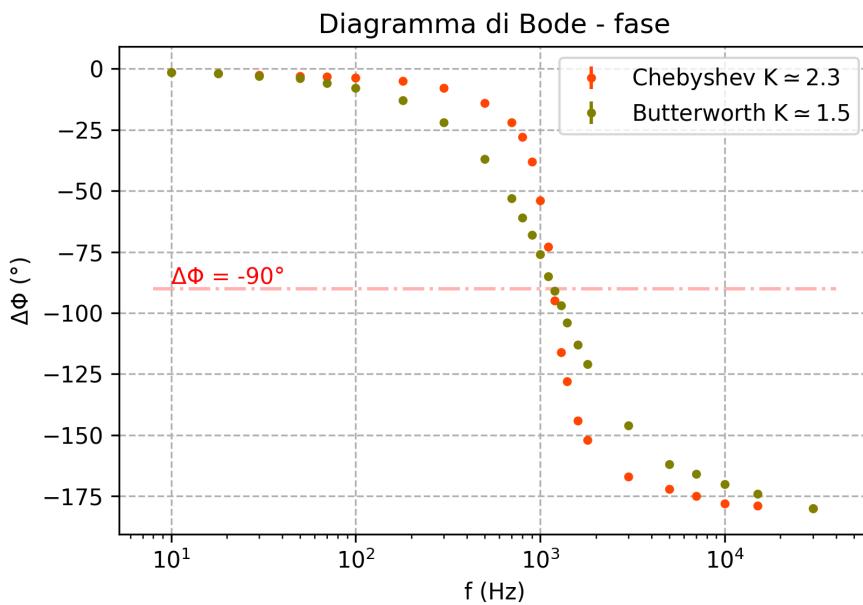


Figura 3: Diagramma di Bode della fase per i due circuiti Chebyshev e Butterworth.

4.1.1 Frequenza di taglio

Dal gain: La frequenza di taglio del filtro Butterworth è stata inferita con il metodo dell'interpolazione lineare, intersecando cioè la retta $A_v^{max} - 3\text{dB}$ con una retta passante per i due punti ad essa più vicini - il tutto con annessa stima dell'errore. L'intersezione $x = (k - c)/m$ fornisce il logaritmo della frequenza di taglio.

Per il Chebyshev il metodo è stato più raffinato: la frequenza di taglio si è interpretata essere in corrispondenza del picco stazionario del *ripple* in fase di amplificazione. Si è pertanto eseguita un'approssimazione di ordine superiore: invece di un'interpolazione lineare con due punti, si è usufruito di un'interpolazione parabolica scegliendo i tre punti del grafico prossimi al picco. Anche in questo caso, le incertezze di misura sono state propagate nell'inferenza dei coefficienti della parabola. Inferiti i coefficienti a, b, c , il punto di massimo è quindi dato da $x_M = -b/2a$, e corrisponde anch'esso al logaritmo della frequenza di taglio.

Si può vedere tutto in [Figura 4](#):

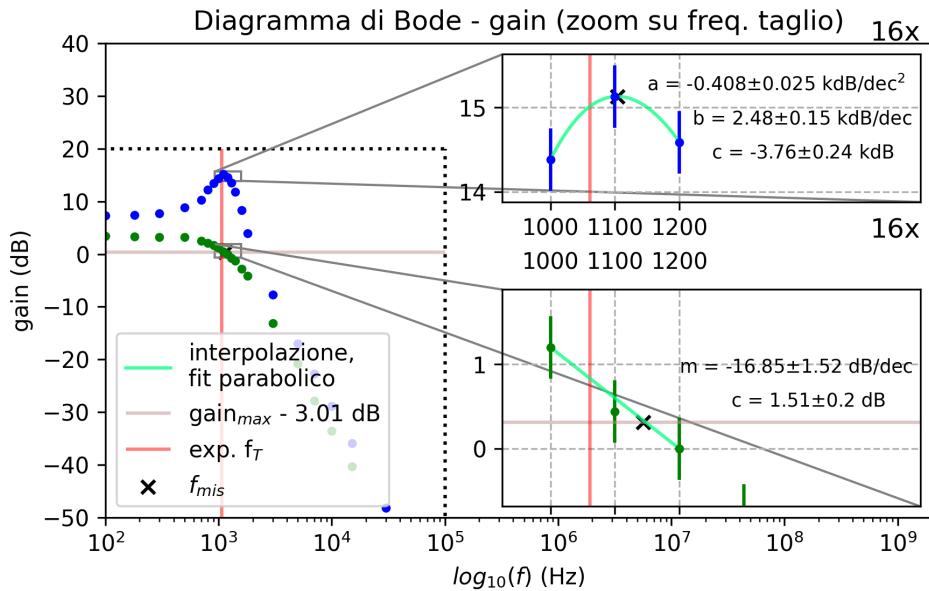


Figura 4: Ingrandimento del diagramma di Bode per la fase per i filtri [Chebyshev](#) e [Butterworth](#). Zoom in particolare sulle regioni di interpolazione Butterworth e di fit parabolico Chebyshev.

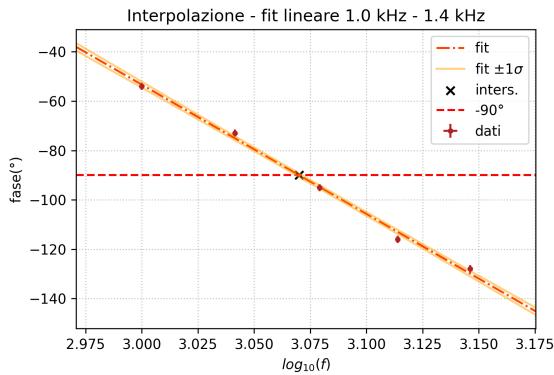


Figura 5: Filtro Chebyshev:
pendenza = $-523.9 \pm 13.0 \text{ } ^\circ/\text{dec}$
intercetta = $262.1 \pm 8.8 \text{ } ^\circ$

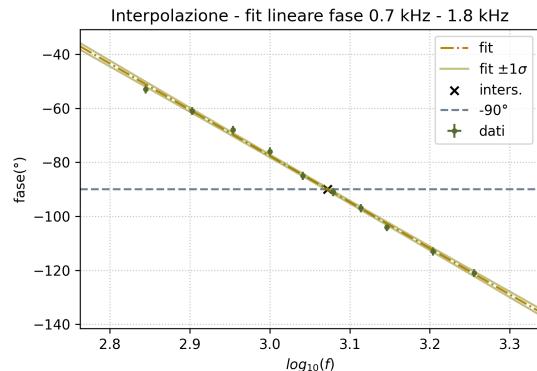


Figura 6: Filtro Butterworth:
pendenza = $-171.1 \pm 3.8 \text{ } ^\circ/\text{dec}$
intercetta = $-26.11 \pm 1.43 \text{ } ^\circ$

Dalla fase: Alternativamente, si è proceduto con dei fit lineari sulla regione di discesa lineare del diagramma della fase per entrambi i filtri, e poi si è intersecato la retta di miglior regressione con quella orizzontale $\Delta\Phi = -90^\circ$, valore per cui nella previsione teorica avviene l'inversione della velocità di discesa della fase. Grafici visibili in [Figura 5](#) e [Figura 6](#).

Si osserva come, per entrambi i grafici, l'andamento non è esattamente lineare ma percorre una "S" attorno alla retta media. Questo è dovuto, osservando la [Figura 3](#), al fatto che il diagramma della fase rappresenta una sorta di sigmoide simmetrica attorno alla fase di -90 gradi. L'approssimazione di andamento lineare, tuttavia, ci sembra sufficientemente compatibile con i punti sperimentali.

Si presentano, infine, in [Tabella 5](#), i risultati ottenuti dai due metodi adoperati per le quattro misure di frequenza di taglio (due metodi per l'ampiezza, uno per la fase). Si nota come tutte e quattro le misure siano compatibili a una σ con i valori (indicati sul plot con f_1 e f_2) della frequenza di taglio calcolata come

$$f_i = \frac{1}{2\pi R_1 C_i} \quad i = \{1, 2\}$$

dove con C_1 e C_2 si indicano i due condensatori dal valore teorico uguale pari a 15 nF ma di valore misurato differente. Una rappresentazione visiva è in [Figura 7](#).

	interp. ampiezza	fit fase
taglio Chebyshev (K $\simeq 2.3$)	1.104 ± 0.075 kHz	1.175 ± 0.027 kHz
taglio Butterworth (K $\simeq 1.5$)	1.145 ± 0.085 kHz	1.181 ± 0.022 kHz
taglio atteso		1.171 ± 0.012 kHz

Tabella 5: Risultati delle frequenze di taglio ottenute usando i due metodi sopra descritti. Si ottiene la perfetta compatibilità con il valore atteso entro una sigma per tutti e quattro i calcoli.

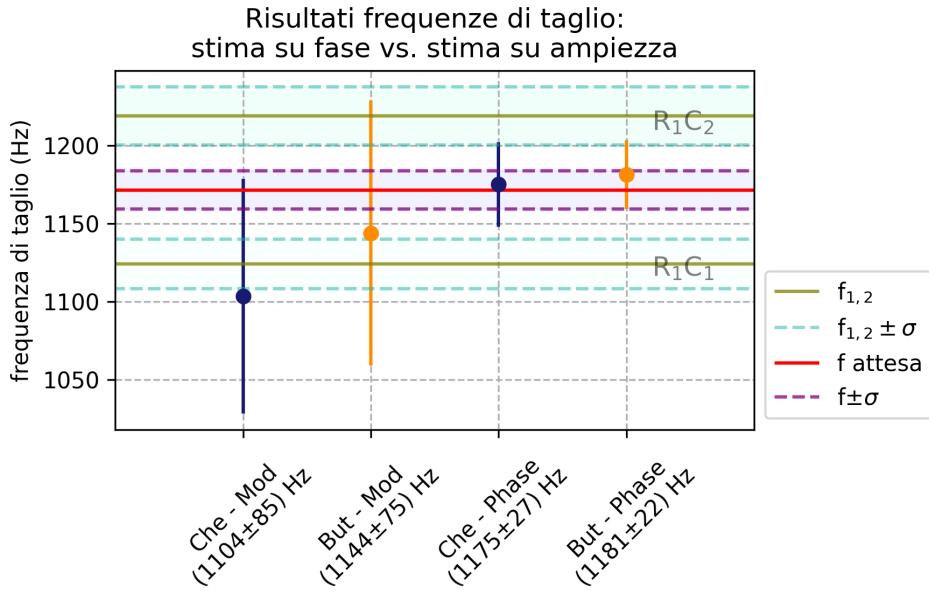


Figura 7: Presentazione grafica dei risultati per la stima della frequenza di taglio del VCVS in configurazione Butterworth (punti arancioni) e Chebyshev (punti blu). La linea rossa rappresenta la media tra le frequenze di taglio f_1 e f_2 .

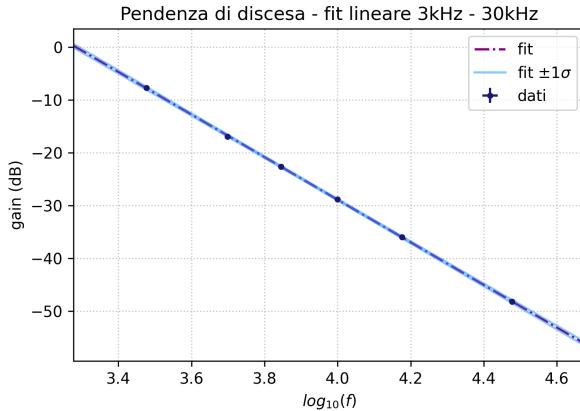
Le misure sono tutte compatibili, entro una sigma di incertezza, col valore teorico di 1.171 kHz, tuttavia è evidente che il metodo di fit in fase fornisce una stima molto più accurata della frequenza di taglio attesa, sia perché da un lato le incertezze sono notevolmente ridotte, sia perché dall'altro il valore atteso coincide quasi perfettamente con la media delle frequenze di taglio attese.

Ciò è probabilmente dovuto al fatto che mentre i fit sulla fase sono stati realizzati utilizzando tanti punti, e ciò ha permesso una riduzione dell'incertezza, le interpolazioni sono procedimenti utilizzati invece su pochi punti, molto vicini, e produce risultati con un notevole errore.

Per questo, concludiamo che le stime della frequenza di taglio fatte usando un fit lineare sulla fase sono molto più accurate e precise delle stime grossolane fatte usando i diagrammi dell'amplificazione.

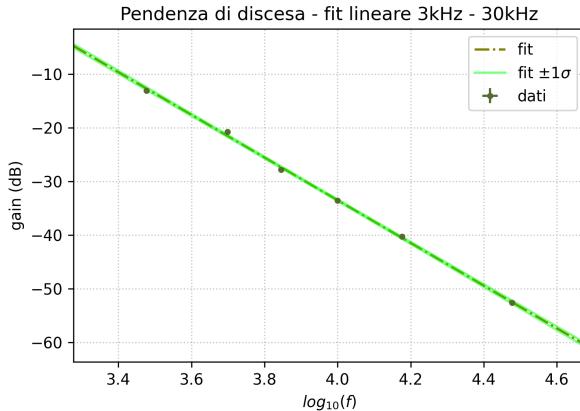
4.1.2 Pendenza di discesa

Come filtri Sallen-Key del secondo ordine, ci si aspetta che i VCVS costruiti abbiano una pendenza di discesa di 40 dB/decade - e dalla Figura 2 si può già apprezzare qualitativamente un comportamento che sembra corretto.



Filtro Chebyshev	
Punti utilizzati	
Frequenza	Gain
3.000 kHz	-7.72 ± 0.37 dB
5.000 kHz	-16.97 ± 0.37 dB
7.000 kHz	-22.66 ± 0.37 dB
10.000 kHz	-28.80 ± 0.37 dB
15.000 kHz	-35.95 ± 0.37 dB
30.000 kHz	-48.16 ± 0.37 dB
Pendenza	Intercetta
-40.29 ± 0.48 dB/dec	132.3 ± 2.1 dB

Figura 8: Sulla sinistra, il fit lineare realizzato con i punti in tabella a destra. Si è scelto di operare nell'intervallo di punti allineati 3.000 kHz - 30.000 kHz.



Filtro Butterworth	
Punti utilizzati	
Frequenza	Gain
3.000 kHz	-13.07 ± 0.37 dB
5.000 kHz	-20.73 ± 0.37 dB
7.000 kHz	-27.79 ± 0.37 dB
10.000 kHz	-33.52 ± 0.37 dB
15.000 kHz	-40.24 ± 0.37 dB
30.000 kHz	-52.61 ± 0.37 dB
Pendenza	Intercetta
-39.75 ± 0.46 dB/dec	125 ± 1.8 dB

Figura 9: Sulla sinistra, il fit lineare realizzato con i punti in tabella a destra. Si è scelto di operare nell'intervallo di punti allineati 3.000 kHz - 30.000 kHz.

La discesa dei due grafici entra perfettamente in regime di attenuazione (complici i numerosi punti sperimentali presi al di là della frequenza di taglio), per questo la pendenza è perfettamente compatibile con il valore atteso di -40 dB/decade in entrambi i casi. Il filtro Chebyshev risulta solo leggermente più attenuato, a causa del ripple in corrispondenza del taglio, che però si ripercuote sulla discesa, aumentandola fino a -70 dB/decade solo fino a circa 2 kHz.

Le incertezze risultano quasi invisibili sul grafico, complici la loro estensione di oltre 50 decibel, che non permette di apprezzare lo scarto di 0.4 decibel.

5 Misure con il rumore

In questa seconda parte si è studiato il rumore bianco "prodotto" da un generatore di rumore, che corrisponde ad un circuito CE con capacità di emettitore deliberatamente mal montato. Avendo lasciato montato il filtro Butterworth della precedente parte dell'esperienza, si è fornita una stima del noise (che verrà approfondita in [sottosezione 5.2](#)). Si è infine aggiunto un segnale sinusoidale tra il generatore di rumore e il filtro (impiegando un sommatore che si era già parzialmente montato in un'esperienza precedente) per studiare l'effetto del rumore sulla forma dell'onda in uscita.

5.1 Il generatore di rumore

Riportiamo in [Figura 10](#) il circuito CE con capacità di emettitore utilizzato per produrre il rumore:

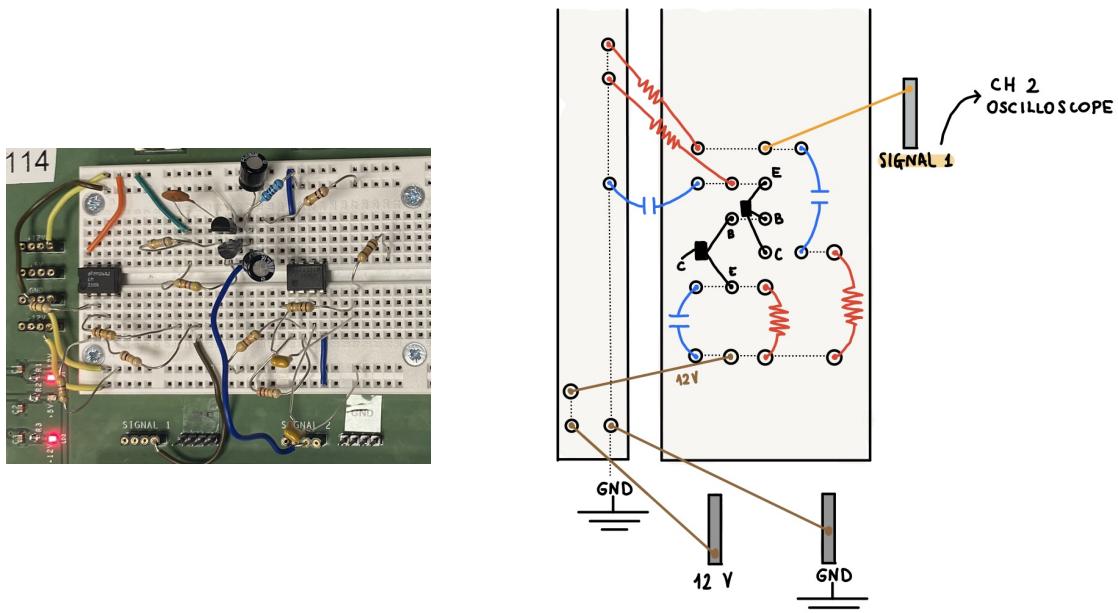


Figura 10: Circuito e schema circuitale del generatore di rumore. Si è tentato un montaggio che fosse il più compatto possibile e che non occupasse molto spazio nella metà inferiore della breadboard. La regione di basetta compresa tra il VCVS e il generatore di rumore è stata lasciata libera per il montaggio del sommatore (cfr [sezione 5](#)).

I valori elencati in [Tabella 6](#) si riferiscono al generatore di rumore che si è progettato per questa esperienza (schema e circuito montato sulla basetta: [Figura 10](#)). Essendo basato su un circuito CE, con capacità di emettitore, ma a due transistori, si è verificato brevemente che i parametri di lavoro di entrambi i BJT fossero rispettati (uno in regione attiva, l'altro montato in interdizione e con il collettore scollegato - a mo' di diodo - così che il collettore stesso agisse da pick-up per segnali esterni provenienti dal laboratorio).

Purtroppo, si osserva come il circuito CE con capacità montato ha alcuni condensatori con valore piuttosto lontano da quello richiesto. Questo è dovuto al fatto che, a causa di errore di montaggio nella prima fase, il nostro gruppo si è trovato in ritardo rispetto agli altri, e pertanto si è dovuto accontentare degli ultimi condensatori rimasti nei cassetti.

Per lo stesso motivo, mancando circa venti minuti al termine dell'esperienza, non è stato possibile neanche prendere i valori di tensione relativi al transistor Q_2 , mal montato e quindi non in polarizzazione. Tuttavia, supponiamo che per esso, in caso di corretto funzionamento, si avrebbero i seguenti valori di tensione:

$$V_B^{Q_1} \simeq V_B^{Q_2}$$

$$V_C^{Q_1} \simeq V_E^{Q_2}$$

poiché l'emettitore del secondo transistor si trova dove dovrebbe stare invece il collettore.

Grandezza	Valore atteso	Valore misurato
R_1	680 kΩ	694.80 ± 0.13 kΩ
R_2	100 kΩ	100.40 ± 0.018 kΩ
R_3	10 kΩ	0.9992 ± 0.002 kΩ
R_4	4.7 kΩ	4.6540 ± 0.0008 kΩ
C_1	10 µF	8.650 ± 0.010 µF
C_2	10 µF	8.530 ± 0.010 µF
C_3	100 nF	105.4 ± 2 nF

Polarizzazione Q_1	Valore misurato	Incertezza
V_{CC}	12 V	-
V_B	1.104 V	-
V_{BE}	0.615 V	-
V_C	9.543 V	-
V_{CE}	8.926 V	-

Tabella 6: Dati di montaggio relativi al generatore di rumore.

In ogni caso, nonostante questa discrepanza tra i valori richiesti dei componenti e quelli trovati, il transistor Q_1 si trova in polarizzazione diretta (con un cuscinetto di circa 3 V per generare il segnale, che è più che sufficiente) ed è pertanto pronto alla generazione del rumore:

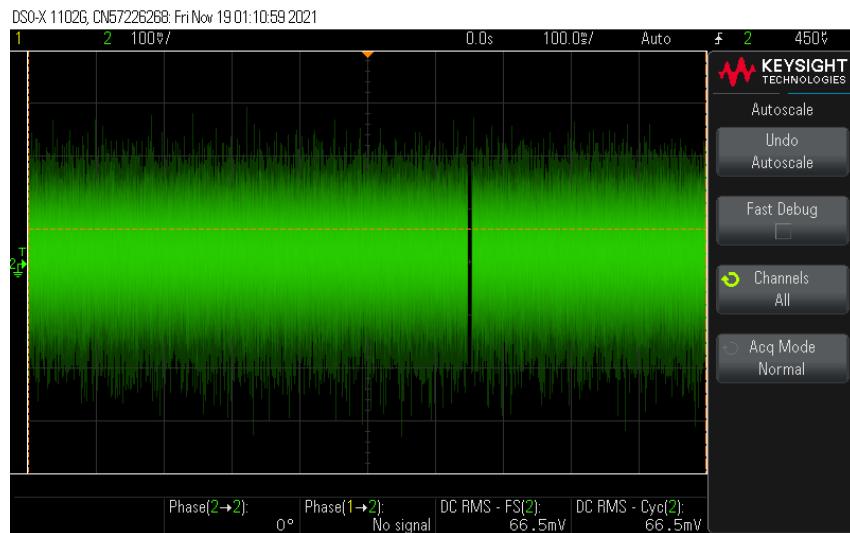


Figura 11: Produzione del rumore bianco grazie al generatore di rumore. Si legge anche, in basso a destra, la misura di RMS del segnale, pari a 66.5 mV.

La misura del rumore è stata ottenuta direttamente dall'oscilloscopio che fornisce una stima per il RMS cioè lo scarto quadratico medio del rumore misurato su un tempo finito. L'RMS del segnale rappresenta quindi il valore medio del segnale di rumore, che risulta pertanto correttamente compreso tra i 60 e i 100 millivolt, come richiesto.

Vediamo ora come attenuarlo.

5.2 Il generatore di rumore e il filtro Butterworth

Il generatore di rumore è stato ora collegato al filtro Butterworth precedentemente costruito per osservare l'azione di riduzione del rumore compiuta dal filtro stesso. Lo schema circuitale è visibile in Figura 12:

Il risultato in uscita dall'oscilloscopio è invece visibile in Figura 13:

Ora, è evidente che l'RMS non è attendibile, a causa del decentramento del segnale di circa 20 mV che aggiunge un effetto sistematico al calcolo dell'RMS. Nella frenesia degli ultimi minuti dell'esperienza, non è stato possibile capire le ragioni di questo decentramento, pertanto occorre fare una stima conservativa a posteriori del reale RMS confrontando la Figura 11 e la Figura 13:

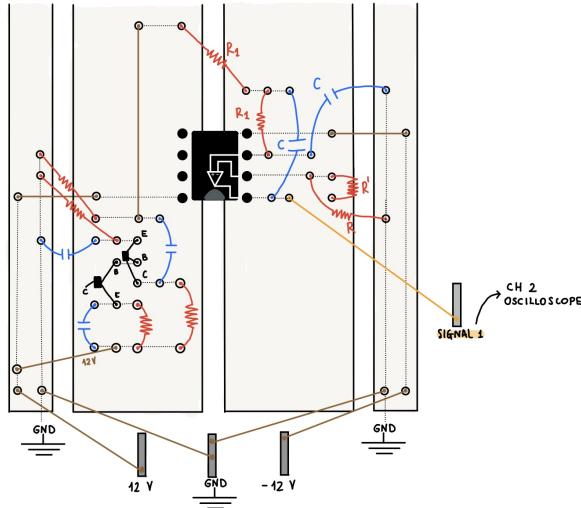


Figura 12: Schema circuitale del generatore di rumore (in basso a sinistra) e del filtro VCVS (in alto a destra) montato in serie ad esso.

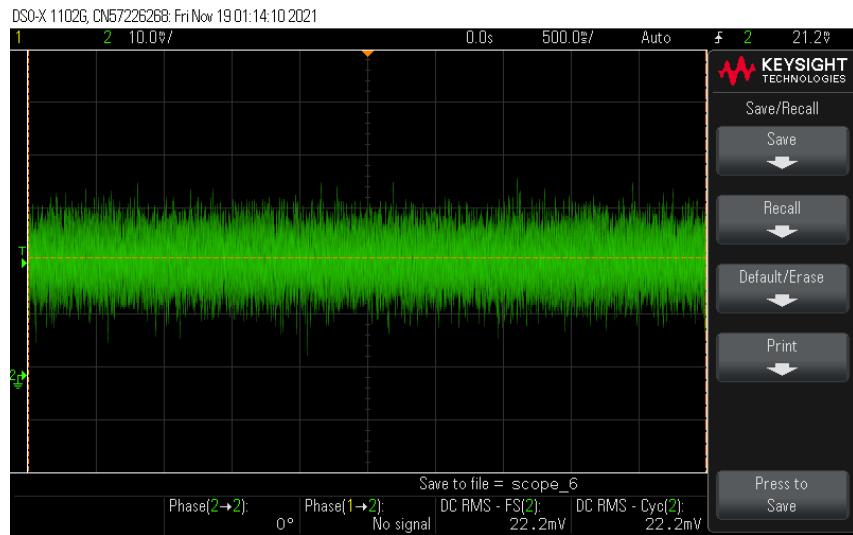


Figura 13: Produzione del rumore bianco grazie al generatore di rumore. Si legge anche, in basso a destra, la misura di RMS del segnale, pari a 22.2 mV.

- Osservando la scala dell'uscita, si vede che essa è passata da 100 mV a 10 mV. Inoltre, l'ampiezza relativa allo schermo pare dimezzata rispetto al rumore non filtrato.
- l'RMS è una misura della media del rumore, quindi supponiamo debba scalare linearmente con l'ampiezza osservata a schermo. Questo ci fa concludere l'RMS filtrato debba essere ridotto di circa 20 volte rispetto all'RMS del rumore filtrato. Stimiamo pertanto esso valga 3 ± 1 mV.

Come aspettato, il rumore è diminuito proprio grazie all'aggiunta del VCVS, e la riduzione è stata di circa 1/20 del valore di partenza. Questo è dovuto al fatto che, nel regime delle frequenze, il filtro VCVS attenua le frequenze superiori alla sua frequenza di taglio (1 kHz), e quindi incide con una notevole riduzione dello spettro del rumore.

Il rumore attenuato alle alte frequenze, pertanto, non è più "bianco", ma "rosso", cioè preponderante solo a basse frequenze. Ovviamente, ciò è visibile solo nello spazio di Fourier. Nello spazio dei tempi, invece, quello che vediamo è una riduzione della tensione di rumore.

5.3 Il generatore di rumore, il sommatore e il filtro Butterworth

Infine è stato utilizzato un sommatore invertente per sommare il rumore a una sinusode in modo da osservare l'effetto del filtro VCVS in questa configurazione (Figura 12). Il montaggio del circuito è mostrato in Figura 14 ed è esattamente la serie del generatore di tensione, sommatore e filtro Butterworth:

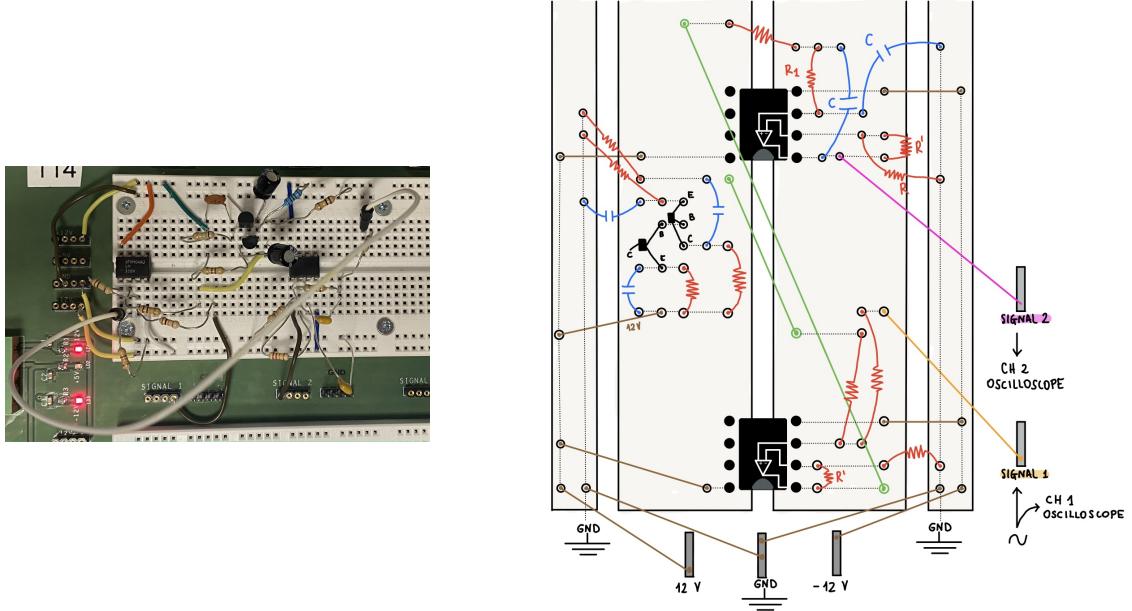


Figura 14: Circuito e schema della serie circuitale composta da generatore di rumore, sommatore non invertente e filtro VCVS. Il collegamento fra i circuiti è raffigurato nel disegno a destra con le linee in verde.

Riportiamo i dati (visibili anche nella relazione precedente GR29-Esp4.pdf), delle componenti che costituiscono il sommatore in Tabella 7: L'amplificazione misurata del sommatore nella scorsa esperienza

Resistenze	Valore	Incertezza
R'	97.92 k Ω	0.018 k Ω
R	46.50 k Ω	0.010 k Ω
R_A	9.894 k Ω	0.002 k Ω
R_B	9.868 k Ω	0.002 k Ω

Tabella 7: Componenti costitutive del sommatore, realizzato con l'OP-AMP LM358AN.

era pari a circa 1.03 nel caso delle tre entrate R_A , R_B , R_C identiche.

Si osservi come si è scollegata, tuttavia, la resistenza R_C , pertanto adesso l'amplificazione del sommatore non è più pari a 1, ma a 1.5, dato che ora non si vede più il partitore con all'interno R_C :

$$A_1 = \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \frac{R_x}{R_A + R_B}, \quad x = A, B$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R'}{R}\right) \simeq 1.5$$

A questo punto, si è collegato il generatore di rumore all'entrata R_A del sommatore, mentre l'entrata R_B è stata sollecitata con un'onda sinusoidale di frequenza 0.5 kHz (cosicché non venga filtrata essa stessa dal filtro VCVS, che ha taglio ad 1 kilohertz), e di ampiezza 600 mV. Il risultato è visibile in Figura 15, figura a sinistra.

In questo caso, avendo sommato in serie un filtro VCVS Butterworth che amplifica anch'esso 1.5, l'amplificazione totale del segnale (trascurando la partizione delle resistenze in uscita ed entrata ai vari circuiti, che stimiamo essere grandi in entrata e piccole in uscita), è circa pari a $1.5 \times 1.5 \approx 2.3$.

Successivamente, si è scollegato il filtro VCVS, per osservare il segnale rumoroso e confrontarlo con quello filtrato. Adesso, avendo tolto l'amplificazione del filtro VCVS, il segnale dovrebbe essere amplificato soltanto 1.5 volte grazie al sommatore.

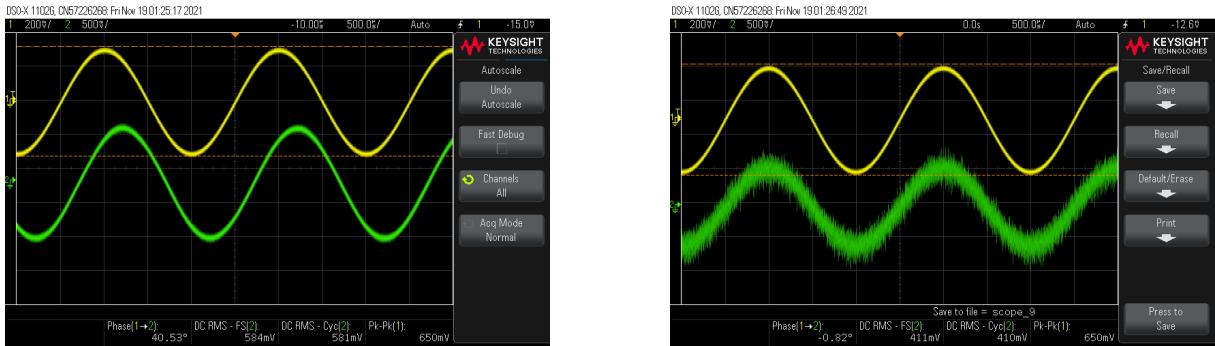


Figura 15: A sinistra il comportamento del sommatore in serie al filtro VCVS, mentre a destra è ben visibile l'azione del filtro VCVS sul rumore bianco generato dal generatore di rumore e mandato nel sommatore.

I risultati sono visibili in [Figura 15](#).

Osserviamo che:

- Il segnale non filtrato, sommato alla sinusode, è visibile e sovrapposto all'onda di partenza (figura a destra).
- Proprio come aspettato il rumore filtrato viene sommato alla sinusode (principio di sovrapposizione), ma essendo molto ridotto grazie al VCVS, esso è quasi invisibile (figura di sinistra).
- L'ampiezza del segnale filtrato in uscita è, misurato picco-picco assieme allo spessore della linea, pari a 1.5 V (si osservi che la scala è aumentata, e il segnale occupa 3 tacche da 500 mV), il che verifica che il sommatore amplifica 2.3 volte il segnale in entrata (sono i 650 mV misurati picco in basso a destra).
- L'ampiezza del segnale non filtrato in uscita è, misurato al centro del rumore sovrapposto, pari a circa 1 V, che dimostra che in assenza del VCVS, il sommatore correttamente amplifica 1.5 volte.

Un parametro utile per quantificare la diminuzione di rumore dopo l'aggiunta del filtro è il "rapporto segnale/rumore" (SNR) che stima quanto il segnale di ingresso sia più potente del rumore nel circuito e che è definito come:

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{V_s^2}{V_n^2} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{|V_s|}{|V_n|} \right) \quad (5.1)$$

cioè è il gain del segnale sul rumore a tutti gli effetti (pertanto ha la sua medesima incertezza sulle misure dell'oscilloscopio).

Se decidiamo di utilizzare le stime dell'RMS come valore per V_n , la stima dell'SNR prima dell'aggiunta del filtro risulta essere:

$$\text{SNR}^{\text{iniz}} = 19.09 \pm 0.37 \quad (5.2)$$

Mentre dopo l'aggiunta del filtro:

$$\text{SNR}^{\text{fin}} \simeq 45 \pm 3 \quad (5.3)$$

Proprio come aspettato, otteniamo un rapporto segnale/rumore molto maggiore, cioè un segnale molto più "pulito", e ciò è diretta conseguenza di una diminuzione del rumore.

Purtroppo, però, non avendo risolto la causa del decentramento nei pochi minuti restanti, non è stato possibile fornire una stima migliore per il gain del segnale, e quindi l'incertezza è stata assegnata molto conservativamente.

6 Conclusioni

Riassumendo i risultati ottenuti, si evince che:

1. Le stime ottenute per le frequenze di taglio, per le pendenze di discesa, e i diagrammi di Bode ottenuti sono perfettamente compatibili con i valori attesi.
2. Non si ottiene un valore estremamente preciso per il valore di K atteso nel filtro Chebyshev, tuttavia non si è riusciti, nel tentare di giustificare l'errore, ad affermare oltre la sottostima di effetti sistematici in fase di misura. Potrebbe darsi che per qualche ragione a noi oscura il regime di amplificazione entro cui si sono mediati i valori di massima amplificazione non fosse effettivamente quello di amplificazione massima. Nuovamente, a causa di qualche inconveniente durante il montaggio del circuito, è stato impossibile prendere altre misure.
3. Purtroppo, per mancanza di tempo non è stato possibile prendere misure più accurate per le stime del rumore, né le tensioni fondamentali del transistor Q_2 . Non si è potuta stimare con maggiore precisione l'amplificazione del circuito sommatore e soprattutto non si è risolto il decentramento del segnale filtrato. L'inattendibilità dell'RMS visto dall'oscilloscopio è stato soppresso da stime ad occhio, corrette ma molto vaghe. L'SNR finale, pertanto, ne risulta con incertezza molto grande.