

Laboratorio di Elettromagnetismo e Circuiti - canale M-Z

Relazione sulla prima esperienza di laboratorio

Gruppo 19: L. Pietropaoli, S. Scacco, A. Scarpa, F. Scipione

27 settembre 2024

Indice

1	Abstract	1
2	Formule utilizzate	2
3	Procedura sperimentale	2
3.1	Strumentazione	2
3.2	Costruzione	3
3.3	Presa dati	4
4	Risultati sperimentali	5
5	Analisi dati	7
5.0.1	Calcolo teorico della costante di tempo	7
5.0.2	Discussione sulle incertezze	7
5.1	Tensione ai capi del condensatore	8
5.2	Tensione ai capi della resistenza	10
5.3	Resistenza in parallelo al condensatore	10
6	Conclusioni	12

1 Abstract

La prima esperienza in laboratorio di circuiti è stata condotta con molteplici scopi. In primis, acquisire dimestichezza con strumenti di misura quali il generatore di funzioni, l'oscilloscopio e in generale la realizzazione di circuiti (si veda sottosezione 3.1).

L'obiettivo principale, tuttavia, è stato studiare un **circuito RC** e un **circuito CR**, e in particolare **verificare sperimentalmente l'andamento esponenziale della tensione** (ai capi prima del condensatore e della resistenza), con l'aiuto di regressioni esponenziali e semilogaritmiche (si veda sezione 2). In ultimo, si è ricavato sperimentalmente il valore del tempo caratteristico di carica (o scarica) del condensatore τ e lo si è confrontato con il suo valore atteso (si veda ancora sezione 2).

2 Formule utilizzate

La formula utilizzata per la propagazione delle incertezze è la seguente:

$$\sigma_{tot}^2[y] = \sum_{i,k}^{1,n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \bigg|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_k} \bigg|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \sigma_{ik}$$

mentre per la stima del coefficiente angolare del fit lineare e la relativa incertezza sono state utilizzate le formule:

$$m = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \quad \text{Var}[m] = \frac{1}{\text{Var}[X] \cdot \sum_i \frac{1}{\sigma_{Y_i}^2}}$$

Il modello che descrive l'andamento della tensione durante la carica e la scarica del condensatore è sintetizzato dalle Equazione 2.1 e Equazione 2.2, un'esponenziale crescente e una decrescente:

$$\text{Fase di carica:} \quad \Rightarrow \quad V_c(t) = V_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.1)$$

$$\text{Fase di scarica:} \quad \Rightarrow \quad V_c(t) = V_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.2)$$

mentre il valore atteso¹ della costante di tempo del condensatore è

$$\tau = RC \quad (2.3)$$

3 Procedura sperimentale

3.1 Strumentazione

La strumentazione utilizzata durante questa esperienza è la seguente:

- *multimetro* Fluke 77 in configurazione ohmetro per la misura delle resistenze adoperate;
- *oscilloscopio digitale* Tektronix TDS 1002B;
- *generatore di segnali* Instek GFG-8216A;
- *cavi* con connettori BNC e morsetti, *raccordi* a T;



Figura 1: Foto della strumentazione utilizzata: l'oscilloscopio, il generatore di funzioni e il multimetro.

¹Per incrementare la leggibilità delle formule e dei risultati, si è identificato il valore atteso di una grandezza con il simbolo usato per la grandezza stessa.

3.2 Costruzione

Al fine di effettuare le misure è stato necessario collegare il generatore di tensione al canale 1 dell'oscilloscopio, tramite dei connettori BNC.

In seguito, si è collegato l'elemento resistivo o capacitivo di cui si è voluta misurare la tensione al canale 2. Il collegamento è avvenuto tramite un cavo con connettore BNC per l'oscilloscopio e dei morsetti con terminali di riferimento collegati all'elemento del circuito.

Dopodiché, si è collegato tutto il circuito al canale 1 con lo stesso tipo di cavo e ponendo i morsetti a capi opposti del circuito. Infine, è stato necessario impostare alcune opzioni di rilevamento sull'oscilloscopio: per entrambi i canali si è selezionata un'attenuazione 1x e accoppiamento di tipo DC.

In Figura 2, Figura 3 e Figura 4 ci sono degli schemi e delle immagini dei circuiti realizzati sulle *breadboard*.

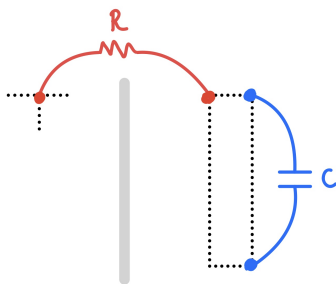
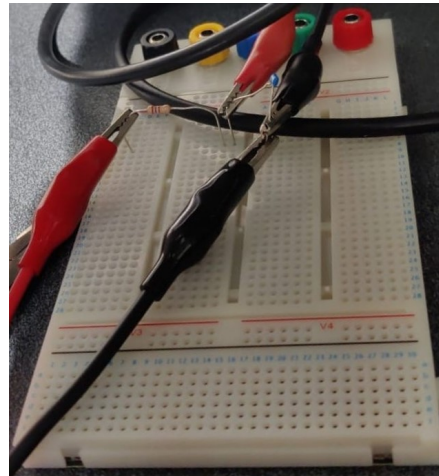


Figura 2: RC



Il circuito in Figura 2 è costituito dalla serie di resistenza e capacitore, con l'intenzione di misurare la tensione ai capi di C ; risulta, infatti, che entrambi i terminali negativi sono connessi al condensatore, mentre i terminali positivi si trovano uno sulla resistenza e uno sul condensatore.

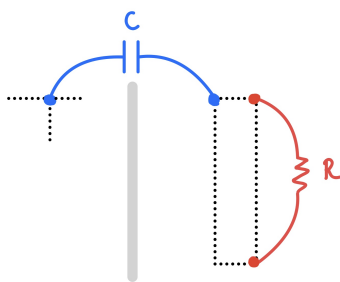
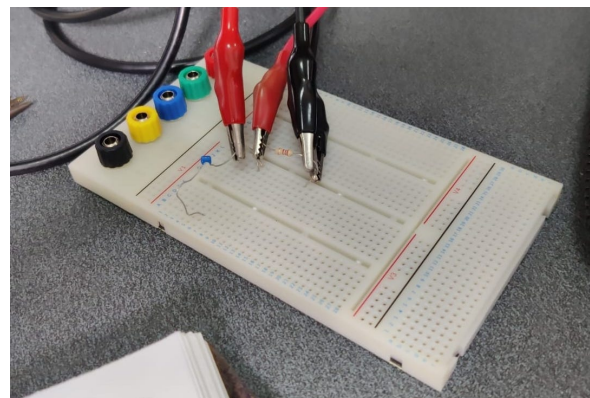


Figura 3: CR



Il circuito in Figura 3 presenta condensatore e resistenza invertiti rispetto alla situazione precedente. Si può, infatti, vedere i ground collegati entrambi alla resistenza, mentre i terminali positivi posti agli estremi del circuito.

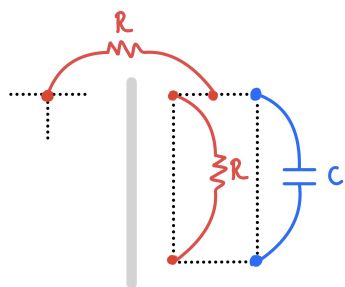
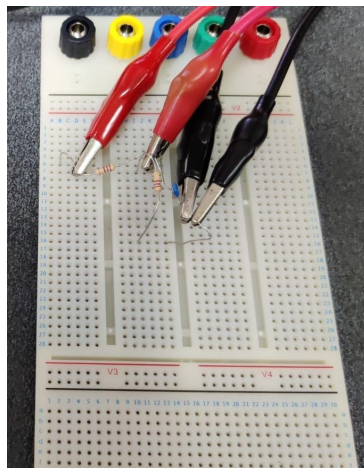


Figura 4: RRC



Il circuito in Figura 4 presenta, invece, una resistenza in parallelo al condensatore, con lo scopo di misurare la tensione ai capi del condensatore. I ground sono entrambi collegati al condensatore mentre i terminali positivi sono posti agli estremi del circuito.

3.3 Presa dati

Preliminarmente alla presa dati sono state misurate le resistenze tramite l'ohmetro, collegandone i terminali ai capi della resistenza.

Al fine di iniziare la presa dati è stato selezionato sul generatore di tensione un segnale di onda quadra, ed è stata scelta la frequenza di tale segnale. Si è selezionata, per tutte le misurazioni una frequenza $\nu = 2.516 \text{ kHz}$. Sono state impostate, inoltre, le scale verticali uguali per i canali 1 e 2 al fine di avere delle misure coerenti tra di loro.

Dopodiché sono state effettuate le misurazioni, utilizzando i cursori verticali di tipo *tempo* dell'oscilloscopio: il primo cursore è stato posizionato nel punto iniziale del segnale di carica, mentre il secondo è stato posizionato a valori diversi di tempo per poter misurare la differenza di potenziale tra i punti selezionati. Per la prima misurazione della fase di carica del condensatore la scala verticale dei segnali è stata posta a 100 mV e quella orizzontale sull'asse dei tempi a $500 \mu\text{s}$. Per tutte le altre misurazioni, avendo aumentato il voltaggio, è stata posta a 1 V per il potenziale e $600 \mu\text{s}$ per il tempo.

4 Risultati sperimentali

I valori misurati per le grandezze che determinano la τ del circuito:

Grandezza	Valore	Tolleranza
Resistenza (R)	2.679 k Ω	5%
Capacità (C)	22 nF	n.d.

Tabella 1: Il valore della capacità è stata fornita senza alcuna incertezza, pertanto si assegnerà incertezza solo alla resistenza R

Riassunti in tabelle, sono stati inoltre raccolti i punti sperimentali ΔV vs t , che si possono visualizzare anche in Figura 5, Figura 6, e Figura 7 assieme ai segnali mostrati dall'oscilloscopio. In particolare nella Figura 6 sono stati condensati i valori delle prese dati nelle due configurazioni RC e CR (interscambiando capacitore e resistore).

Grandezza	Valore misurato			
t [μ s]	52	100	200	300
ΔV [mV]	100	140	168	176

Tabella 2: Misura della tensione ai capi del **condensatore** durante la fase di **carica**. Voltaggio in input: 180 mV. Frequenza di campionamento: 2.516 kHz.

Grandezza	Valore misurato					
t [μ s]	24	76	124	200	252	300
ΔV [V]	1.2	0.56	0.24	0.08	0.04	0 - 0.04

Tabella 3: Misura della tensione ai capi del **condensatore** durante la fase di **scarica**. Voltaggio in input: 1800 mV. Frequenza di campionamento: 2.516 kHz.

Grandezza	Valore misurato					
t [μ s]	24	76	124	200	252	300
ΔV [V]	1.2	0.52	0.24	0.08	0.04	0 - 0.04

Tabella 4: Misura della tensione ai capi della **resistenza** durante la fase di **scarica**. Voltaggio in input: 1800 mV. Frequenza di campionamento: 2.516 kHz.

Grandezza	Valore misurato					
t [μ s]	20	36	52	80	100	148
ΔV [V]	0.44	0.64	0.72	0.84	0.88	0.90

Tabella 5: Misura della tensione ai capi del **condensatore** durante la fase di **carica** con una resistenza aggiunta in parallelo al condensatore. Voltaggio in input: 1800 mV. Frequenza di campionamento: 5.011 kHz.

Nella pagina di seguito, sono mostrate le immagini dello schermo dell'oscilloscopio, con accanto la loro trasposizione su grafico.

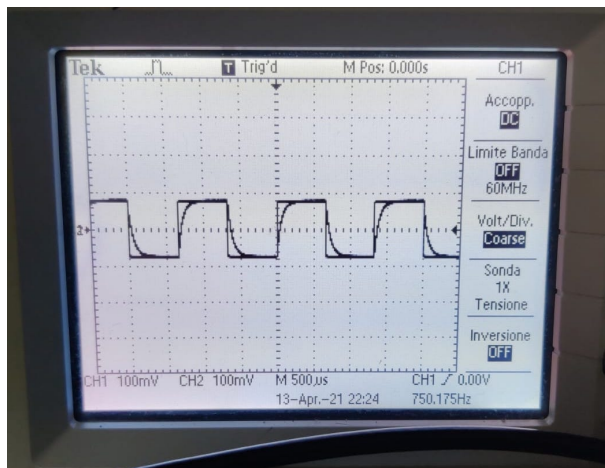


Figura 5: Prima presa dati con segnale di 180 mV. La sovrapposizione dell'esponenziale all'onda quadra è molto precisa.

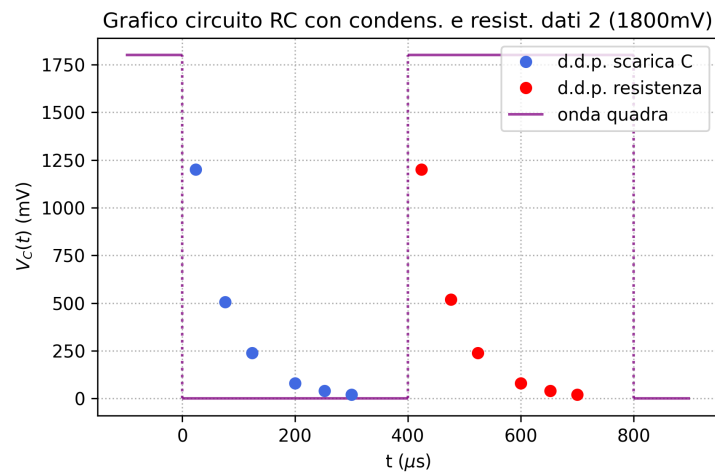
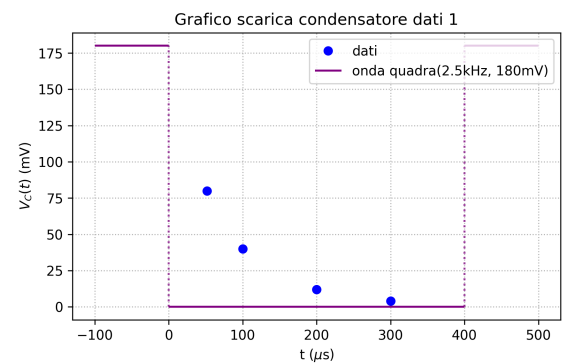


Figura 6: Si osservi che in questo grafico sono contenuti i punti sperimentali riferiti alle prese dati sul circuito RC (punti blu) e sul circuito CR (punti rossi).

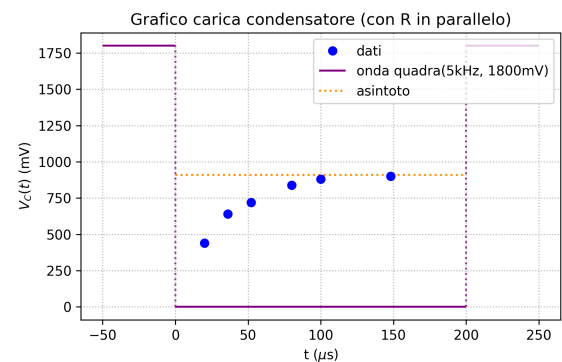
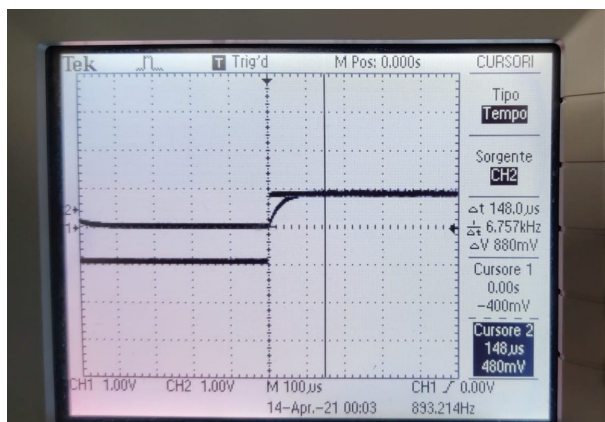


Figura 7: si osservi come la carica del condensatore avvenga spostata di circa 0.9 V (anziché partire da zero) a causa di una non impeccabile impostazione dell'offset sui due canali di lettura dell'oscilloscopio. Ciò tuttavia non costituisce alcun problema, ovviamente, per l'analisi dati.

5 Analisi dati

A partire dai risultati sperimentali, si è proceduto come segue:

- Dapprima, è stato effettuato un fit rudimentale con la funzione `curve-fit` di Python, che è capace di sovrapporre il migliore esponenziale ai dati rappresentati. Questa funzione lavora prendendo in input gli array dei dati e ritornando i migliori parametri di una curva esponenziale secondo il metodo dei minimi quadrati non lineare, e assegnando le incertezze secondo il metodo dei residui.
- In seguito, è stato ricalcolato il fit linearizzando l'entrata sulle ordinate, e confrontato il risultato con i valori ritornati da `curve-fit` ².

5.0.1 Calcolo teorico della costante di tempo

Dai dati di resistenza e capacità, è stato calcolato il valore atteso della costante di tempo del circuito. La capacità misurata è stata interpretata senza incertezza, mentre alla resistenza è stata assegnata l'incertezza data dal costruttore (tolleranza del 5%):

$$\hat{\tau} = RC \quad \sigma[\tau] = \hat{\tau} \sqrt{\frac{\sigma[R]^2}{R^2} + \frac{\sigma[C]^2}{C^2}} \quad (5.1)$$

Il valore atteso della costante di tempo è pari a $\tau = 58.7 \pm 2.9 \mu\text{s}$.

5.0.2 Discussione sulle incertezze

L'osservazione sperimentale dei valori di tensione ha evidenziato una non trascurabile variabilità del segnale in uscita. In particolare, tale variazione consiste di circa 60 mV. Si è quindi operato come segue:

- Il valore assegnato per il dato è stato preso come quel valore "centrale" all'interno di tale intervallo di oscillazione.
- La variabilità di 60 mV è stata interpretata come il dominio di una distribuzione uniforme, la cui incertezza è pari a: $\text{intervallo}/\sqrt{12} \approx 15 \text{ mV}$. Tale incertezza è casuale in quanto "casuale" è stata la lettura dell'oscilloscopio. Di conseguenza, è stata considerata come incertezza sulle tensioni nei vari fit semilog di seguito riportati.
- Oltre a questa incertezza, come illustrato nelle specifiche tecniche, la lettura stessa dell'oscilloscopio introduce un errore tra lo 0% e il 3% circa (considerando anche il fattore di attenuazione, che nel nostro caso è x1) per qualsiasi valore misurato. Tali incertezze non sono state considerate per l'elaborazione dati per i seguenti motivi:
 - L'errore è sistematico: riguarda tutte le incertezze allo stesso modo e pertanto non influisce sulle incertezze dei parametri del fit ³.
 - Si tratta comunque di un errore molto ridotto rispetto alle incertezze "casuali" già considerate.

²Entrambi questi procedimenti presuppongono la conoscenza a priori dell'esponenzialità della curva da fittare. Ciò è coerente con la trattazione teorica in sezione 2.

³influisce solo sui valori migliori dei parametri, tuttavia tale influenza è sconosciuta: sappiamo solo che essa impatta meno del 3% sul valore.

5.1 Tensione ai capi del condensatore

Con il circuito nella configurazione in Figura 2 dopo le due prese dati a diversi input di d.d.p. (si veda Tabella 2, Tabella 3, Figura 6 e Figura 5) sono stati fittati i dati, con **curve-fit** e con il fit semilog.

Per il fit semilog in particolare, il logaritmo delle tensioni è stato trattato come segue:

$$\ln V_c(t) = \ln \left(V_0 e^{-t/\tau} \right) = \ln V_0 - \frac{t}{\tau} \quad (5.2)$$

$$\sigma[Y] = \left[\frac{\partial(\ln X)}{\partial X} \right] \sigma[X] = \frac{\sigma[X]}{X} \quad (5.3)$$

Quindi il coefficiente angolare dei fit semilog è proprio $m = -1/\tau$.

Per le prime misure di tensione ai capi del condensatore, il fit con la funzione **curve-fit** e il fit lineare semilog riportano:

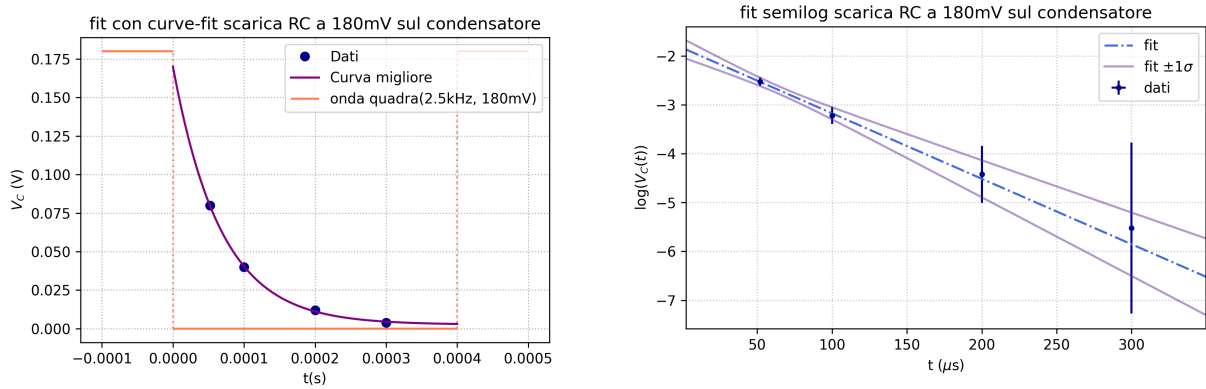


Figura 8: Confronto tra la curva migliore secondo **curve-fit** (incertezze calcolate dal software col metodo dei residui), e fit semilog. Le incertezze di quest'ultimo, per la formula 5.3, aumentano al calare della tensione misurata.

Il parametro $m = -1/\tau$ è proprio il coefficiente angolare della retta nel grafico a destra, e il parametro che caratterizza l'andamento della curva a sinistra. Li riportiamo in Tabella 6:

Parametro	Valore	Incert. rel. (%)
$b = -1/\tau$ per curve-fit	$-14.87 \pm 0.85 \text{ ks}^{-1}$	5.72
$m = -1/\tau$ per fit semilog	$-13.4 \pm 2.7 \text{ ks}^{-1}$	20.4
χ^2 per curve-fit (dof = 2)	2 (per costruz.)	—
χ^2 per fit semilog (dof = 2)	0.13	—
τ per curve-fit	$67.3 \pm 3.8 \mu\text{s}$	5.72
τ per fit semilog	$74 \pm 15 \mu\text{s}$	20.4

Tabella 6: Parametri utili a determinare la costante di tempo, e calcolo della stessa. Le relazioni $\tau = -1/m$ o $\tau = -1/b$ sono monomie: l'incertezza relativa tra b, m, τ è pertanto la stessa. Il χ^2 per il fit semilog è molto piccolo, sintomo di una probabile sovrastima delle incertezze. Il χ^2 riportato dalla funzione **curve-fit** è pari al numero di gradi di libertà per costruzione (statisticamente poco utile).

Le costanti di tempo ottenute sono molto poco precise, con errori sovrastimati e compatibilità a 2 sigma con il valore atteso della costante di tempo. Per questo, è stata ripetuta la misura con i valori della Tabella 3, aumentando il voltaggio così da ridurre le incertezze relative.

Riportiamo su grafici i fit realizzati:

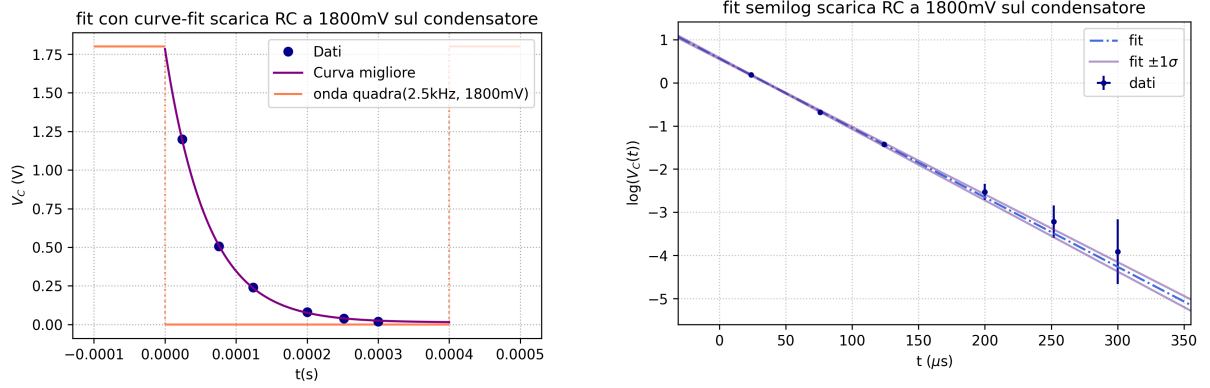


Figura 9: Confronto tra la curva migliore secondo **curve-fit**, e fit semilog. Le incertezze di quest'ultimo, per la Equazione 5.3, pur aumentando al calare della tensione misurata, sono molto inferiori a quelle della 8, complici i valori più elevati della tensione misurati.

Infine, ancora in Tabella 7, si illustrano i parametri rilevanti del fit.

Parametro	Valore	Incert. rel. (%)
$b = -1/\tau$ per curve-fit	$-16.71 \pm 0.22 \text{ ks}^{-1}$	1.32
$m = -1/\tau$ per fit semilog	$-16.11 \pm 0.41 \text{ ks}^{-1}$	2.54
χ^2 per curve-fit (dof = 4)	4 (per costruz.)	—
χ^2 per fit semilog (dof = 4)	2.3	—
τ per curve-fit	$59.85 \pm 0.79 \mu\text{s}$	1.32
τ per fit semilog	$62.1 \pm 1.5 \mu\text{s}$	2.54

Tabella 7: Parametri utili a determinare la costante di tempo, e calcolo della stessa. Il χ^2 del fit semilog mostra che le incertezze assegnate sono più plausibili. Il χ^2 riportato dalla funzione **curve-fit** è pari al numero di gradi di libertà per costruzione (statisticamente poco utile).

I valori di τ ottenuto sono entrambi perfettamente compatibili (entro 1σ) con il valore teorico atteso di $58.7 \pm 2.9 \mu\text{s}$. Aumentare il voltaggio ha pertanto dato i suoi frutti nella riduzione delle incertezze.

5.2 Tensione ai capi della resistenza

Utilizzando il circuito con configurazione rappresentata in Figura 3 sono stati acquisiti i dati visibili nella Tabella 4, a partire da essi sono stati eseguiti due fit: un **curve-fit** e un fit semilog; i grafici delle curve ottenute sono riportati in Figura 10.

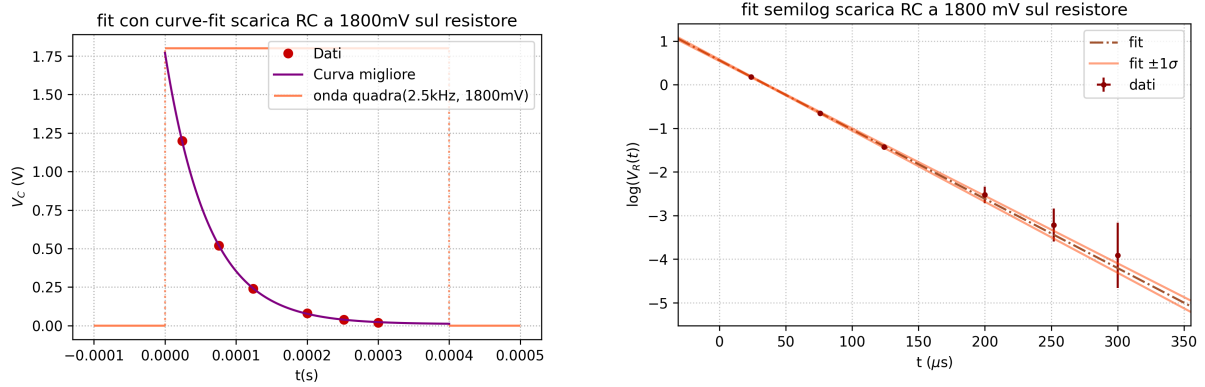


Figura 10: Fit ottenuti attraverso **curve-fit** e il fit semilog. Si noti come le incertezze dei punti del fit semilog aumentino al diminuire della tensione e ciò è coerente con Equazione 5.2.

Per ottenere la stima di τ sono stati utilizzati i parametri ottenuti dai fit e che sono riportati nella Tabella 8; in particolare il coefficiente angolare del fit semilog risulta essere l'antireciproco di τ come già discusso nella sezione 5.1.

Parametro	Valore	Incert. rel. (%)
$b = -1/\tau$ per curve-fit	$-16.32 \pm 0.12 \text{ ks}^{-1}$	0.76
$m = -1/\tau$ per fit semilog	$-15.90 \pm 0.41 \text{ ks}^{-1}$	2.56
χ^2 per curve-fit (dof = 4)	4 (per costruz.)	–
χ^2 per fit semilog (dof = 4)	1.33	–
τ per curve-fit	$61.28 \pm 0.47 \mu\text{s}$	0.76
τ per fit semilog	$62.90 \pm 1.63 \mu\text{s}$	2.59

Tabella 8: Stime delle costanti di tempo τ e dei parametri b e m , rispettivamente del **curve-fit** e del fit semilog.

Il valore teorico per $\tau = RC$ è di $58.7 \pm 2.9 \mu\text{s}$, i valori sperimentali ottenuti con i fit sono compatibili con quello teorico entro 1σ dal valore atteso.

5.3 Resistenza in parallelo al condensatore

Grazie al Teorema di Thevenin, la tensione ai capi del condensatore nella configurazione di Figura 11, immagine a sinistra, è esprimibile con una legge esponenziale del tipo:

$$V_c(t) = [V_c(0) - V_c(\infty)] e^{-t/\tau} + V_c(\infty) \quad (5.4)$$

Al fine di prevedere i possibili risultati ottenuti dalla misurazione nel circuito RRC, si è studiato brevemente quest'ultimo calcolando le quantità $V_c(0)$, $V_c(\infty)$ e la nuova costante di tempo τ , necessari per avere l'andamento della tensione nel condensatore stesso.

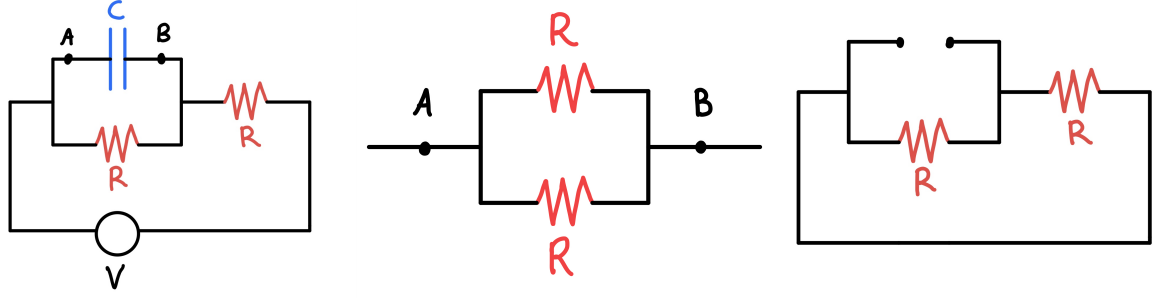


Figura 11: . Da sinistra verso destra: lo schema circuitale iniziale; la resistenza equivalente vista ai capi del condensatore; configurazione circuitale che permette di trovare $V_c(0)$.

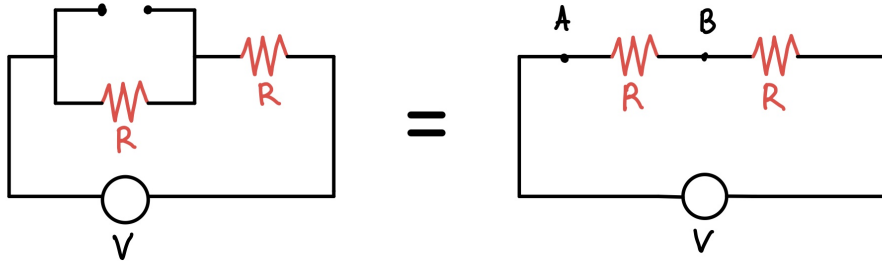


Figura 12: La configurazione circuitale che permette di trovare $V_c(\infty)$.

La resistenza equivalente vista dal condensatore è data dal parallelo di due resistenze uguali tra di loro e quindi $R_{eq} = R/2$ (si veda Figura 11, immagine centrale).

Per lo studio della quantità $V_c(0)$ si considera che all'inizio del processo di carica la tensione fornita dal generatore è pari a 0: si può, quindi, virtualmente, sostituire il generatore con un cortocircuito. Per la linearità del circuito si ha che, in assenza di generatori indipendenti, tutte le quantità risultano pari a zero, nello specifico anche $V_c(0) = 0$ (si veda Figura 11, immagine a destra).

La $V_c(\infty)$ viene calcolata sostituendo un circuito aperto al condensatore, in quanto ci si trova nel limite di correnti costanti. In questo caso, il circuito corrisponde ad un partitore di tensione con due resistenze uguali tra di loro e la V_c corrisponde alla tensione ai capi di una delle due resistenze. Si ha, quindi, $V_c = V_{gen}/2 = 900 \text{ mV}$ (si veda Figura 12).

Ci si aspetta che la tensione ai capi del condensatore sia la metà della tensione del generatore e la costante caratteristica τ sia dimezzata rispetto ai casi precedenti.

Con il circuito nella configurazione mostrata in Figura 4, dopo aver preso i dati che si possono visionare in Tabella 5 e Figura 7 sono stati eseguiti i fit, i cui risultati sono presentati di seguito.

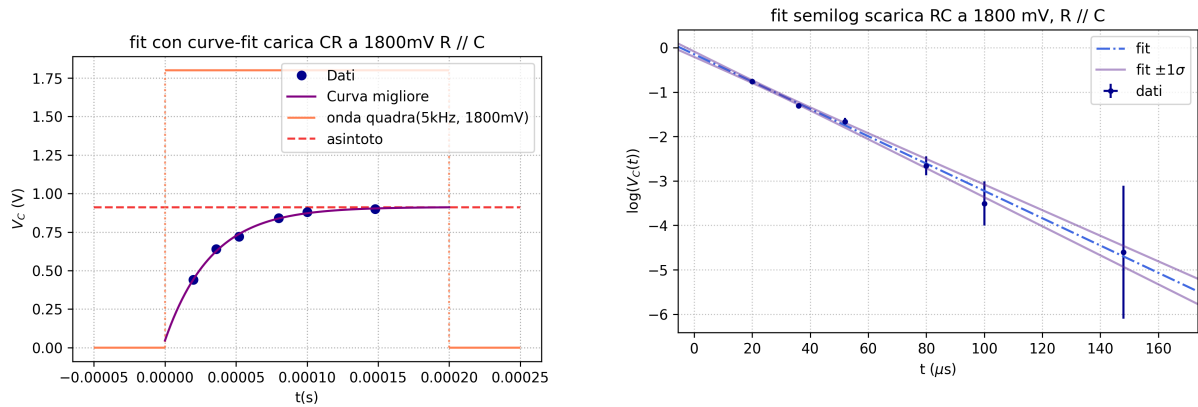


Figura 13: fit eseguiti col metodo **curve-fit** e lineare sul logaritmo dei dati di tensione. Gli archi di parabola ai margini della retta di miglior regressione rappresentano un intervallo di $\pm 1\sigma$.

Parametro	Valore	Incert. rel. (%)
$b = -1/\tau$ per curve-fit	$-30.66 \pm 0.30 \text{ ks}^{-1}$	9.76
$m = -1/\tau$ per fit semilog	$-30.77 \pm 0.20 \text{ ks}^{-1}$	6.35
χ^2 per curve-fit (dof = 4)	4 (per costruz.)	–
χ^2 per fit semilog (dof = 4)	2.59	–
τ per curve-fit	$32.6 \pm 3.2 \mu\text{s}$	9.76
τ per fit semilog	$32.5 \pm 2.1 \mu\text{s}$	6.35
$c = V_c(\infty)$ per curve-fit	$912.8 \pm 14.2 \text{ mV}$	1.56

Tabella 9: Parametri utili a determinare la costante di tempo, e calcolo della stessa. Il χ^2 del fit semilog mostra che le incertezze assegnate sono più plausibili. Il χ^2 riportato dalla funzione **curve-fit** è pari al numero di gradi di libertà per costruzione (statisticamente poco utile).

Come da previsione, la costante caratteristica τ è diminuita rispetto ai circuiti della parte 1 e della parte 2. I valori ottenuti sono, inoltre, compatibili con il valore teorico previsto di $\tau = 29.4 \pm 1.4 \mu\text{s}$.

Inoltre, è riportato nella tabella anche il valore di $V_c(\infty)$ trovato dal fit con **curve-fit**, che corrisponde proprio alla tensione a cui il condensatore asintoticamente tende. Esso è compatibile entro 1σ con il valore atteso di 0.9 V .

6 Conclusioni

Questa esperienza di laboratorio si è rivelata particolarmente interessante per varie ragioni. In primo luogo, si è avuto un primo contatto con strumenti mai adoperati prima d'ora, che sono strutturalmente e funzionalmente diversi da quelli utilizzati nei precedenti corsi di laboratorio; si può dire, inoltre, che essa sia stata un buon "banco di prova" per tutti i membri del gruppo, sia per quanto riguarda l'ormai consueta organizzazione da remoto della relazione sull'esperienza, sia per la modalità mista della presa dati (uno fisicamente in laboratorio, tre collegati in remoto).

Volendo riassumere le osservazioni e le riflessioni che sono sorte in una disamina dell'esperienza svolta, emergono alcune proposte per una futura esperienza con il circuito RC:

- è consigliabile effettuare una presa dati più ricca, o quantomeno su uno spettro più ampio di valori di frequenza di input, con lo scopo di osservare eventualmente una dipendenza nei dati;
- in alternativa all'uso dei cursori verticali si dovrebbero utilizzare anche i cursori di tipo ampiezza, che forse permetterebbero di aumentare la precisione dei valori di tensione, riducendo la fluttuazione casuale dei dati e migliorando la qualità dei fit.

L'analisi dati è stata effettuata interamente in Python.