

Laboratorio di Meccanica - canale Pb-Z

Relazione sulla terza esperienza di laboratorio

Gruppo D1-01: L. Pietropaoli, R. F. Rosato, B. Russo, G. Vincenti

26 settembre 2024

Questa esperienza di sperimentazione è divisa in due parti.

- I. nella **prima parte** ci si è posti l'obiettivo di misurare i conteggi per unità di tempo di emissioni radioattive dovute a diverse fonti (rumore ambientale, raggi cosmici, un blocco di tufo) tramite un contatore Geiger-Müller. Oltretutto si è studiato il comportamento poissoniano delle distribuzioni dei conteggi e dei tempi di attesa per k conteggi, come sarà approfondito nelle sezioni 2.1.1 e 2.1.2;
- II. nella **seconda parte** ci si è invece proposti di studiare il comportamento del pallinometro fisico (o *quinconce di Galton*), un oggetto particolarmente interessante nell'ambito nell'inferenza binomiale. In questa parte, anche con l'ausilio di test d'ipotesi sui χ^2 degli istogrammi, si è pure discussa la tendenza della distribuzione degli "arrivi" delle palline a gaussiana, giustificando dal punto di vista teorico la validità dell'ipotesi.

Si noti che, come verrà descritto nella sezione 1.1, il pallinometro e il contatore G.M. non sono stati a nostra disposizione come strumenti fisici (a causa della situazione di emergenza sanitaria) ma come algoritmi: il primo di libero accesso tramite una simulazione web (cfr. par. 3), il secondo sotto forma di codice in Python, che si è avuto cura di adoperare come "scatola nera".

Indice

1	Introduzione	3
1.1	Apparato sperimentale	3
2	Misure di radioattività	4
2.1	Misura del tasso di conteggi del fondo di radioattività ambientale	4
2.1.1	Istogrammi e test del χ^2	6
2.1.2	Frazioni di conteggi	8
2.1.3	Note su pdf e cumulative	10
2.2	Misura del tasso di conteggi del blocco di tufo	11
3	Inferenza binomiale con il pallinometro	14
3.1	Discussione e formule utilizzate	14
3.2	Istogrammi dei dati raccolti con binomiale sovrapposta	15
3.2.1	$p = 5\%$	15
3.2.2	$p = 25\%$	17
3.2.3	$p = 50\%$	18
	Ulteriori riflessioni	19
3.3	Tendenza normale	20



Figura 1: blocco di tufo



Figura 2: pallinometro

1 Introduzione

1.1 Apparato sperimentale

L'apparato descritto in questa sezione è stato completamente simulato con uno *script python*.

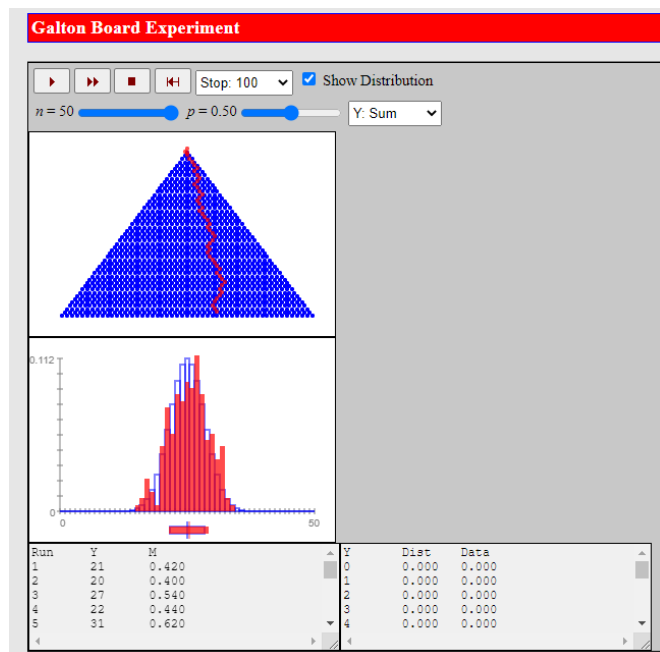
L'unico strumento utilizzato è stato un **Contatore Geiger-Müller**.

Si tratta di un rivelatore di particelle sensibile alle radiazioni alfa, beta e gamma, e a particelle cariche ionizzanti. Quando una particella ionizzante attraversa l'area sensibile del rivelatore e rilascia un'energia superiore a quella di soglia, allora è misurato un conteggio.

Il contatore è stato utilizzato in varie configurazioni per stimare le *rate* (frequenze) di conteggio delle varie fonti di radiazioni:

- Orizzontale per stimare le radiazioni ambientali e quelle dovute ai raggi cosmici, lontano dal blocco di tufo (configurazione "O");
- Orizzontale vicino al blocco di tufo per stimarne il contributo (conf. "S");
- Verticale lontano dal blocco di tufo per stimare il contributo dovuto ai raggi cosmici (conf. "V");

Per la seconda parte della misura si è avuto a disposizione un **Pallino-metro**, costituito da N file di chiodi, disposte in modo tale che la k -esima fila sia costituita da k chiodi spostati di mezzo passo rispetto ai $k - 1$ chiodi della fila immediatamente superiore. Partendo dalla sommità superiore la pallina urta N volte i chiodi ed ogni volta può cadere con una probabilità p a destra e $(1 - p)$ di andare a sinistra. La pallina infine finisce in una delle $N + 1$ celle e viene conteggiata.



2 Misure di radioattività

2.1 Misura del tasso di conteggi del fondo di radioattività ambientale

Posizionando il contatore sul piano del tavolo in posizione orizzontale e lontano dal blocco di tufo, sono state effettuate 50 misure ripetute del numero di conteggi per ciascuno dei seguenti intervalli di tempo $\Delta t_1 = 1s, \Delta t_2 = 2s, \Delta t_3 = 2s, \Delta t_4 = 3s, \Delta t_5 = 5s, \Delta t_{10} = 10s$.

Considerando il fenomeno come poissoniano si è inferito sui parametri λ_i riferiti ai tipi di intervalli Δt_i secondo le seguenti formule per combinazioni di conteggi poissoniani con tempi di osservazione uguali:

$$E[\lambda] = \frac{\sum_i x_i + 1}{n}; \quad \sigma_\lambda = \sqrt{\frac{\sum_i x_i + 1}{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \quad (1) \quad (2.1)$$

Si sono ottenuti i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0.94 \pm 0.14; & \lambda_4 &= 3.88 \pm 0.28 \\ \lambda_2 &= 2.46 \pm 0.22; & \lambda_5 &= 4.96 \pm 0.31 \\ \lambda_3 &= 2.74 \pm 0.23; & \lambda_{10} &= 9.62 \pm 0.44 \end{aligned}$$

Sono di conseguenza state derivate le rate secondo le seguenti formule:

$$r_i = \frac{\lambda_i}{\Delta t_i} \quad \forall i = \{1, 2, 3, 4, 5, 10\} \quad (2.2)$$

Le rate possono essere espresse come

$$\begin{aligned} r_1 &= (0.94 \pm 0.14)s^{-1}; & r_4 &= (0.97 \pm 0.07)s^{-1}; \\ r_2 &= (1.23 \pm 0.11)s^{-1}; & r_5 &= (0.99 \pm 0.06)s^{-1}; \\ r_3 &= (0.91 \pm 0.07)s^{-1}; & r_{10} &= (0.96 \pm 0.04)s^{-1}; \end{aligned}$$

Per determinare in maniera quantitativa la compatibilità dei risultati sono stati operati dei rapporti tra le varie rate ottenute, secondo le formule:

$$R = \frac{r_i}{r_j}; \quad \frac{\sigma[R]}{R} = \frac{\sigma[r_i]}{r_i} \oplus \frac{\sigma[r_j]}{r_j} \quad (2.3)$$

¹Le sommatorie si intendono su $i = 1, \dots, n$.

Nella seguente tabella sono riportati dunque i rapporti con le relative incertezze:

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_{10}
r_1	-	0.76 ± 0.13	1.03 ± 0.17	0.97 ± 0.16	0.98 ± 0.15	0.98 ± 0.15
r_2	-	-	1.35 ± 0.11	1.27 ± 0.11	1.24 ± 0.11	1.28 ± 0.10
r_3	-	-	-	0.94 ± 0.11	0.92 ± 0.10	0.95 ± 0.09
r_4	-	-	-	-	0.98 ± 0.09	1.01 ± 0.08
r_5	-	-	-	-	-	1.03 ± 0.08
r_{10}	-	-	-	-	-	-

Tabella 1: Rapporti delle *rate*.

Si può notare che tutti i risultati, fatta eccezione per r_2 che appare l'unico dato anomalo, sono completamente comparabili: i loro rapporti sono infatti confrontabili con 1 entro 1 σ .

Possiamo inoltre combinare i risultati ottenuti secondo le seguenti formule di combinazione di conteggi poissoniani con tempi diversi:

$$E[r_{best}] = \frac{\sum_i x_i + 1}{\sum_i \Delta t_i}; \quad \sigma_{r_{best}} = \sqrt{\frac{\sum_i x_i + 1}{\sum_i \Delta t_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_i \Delta t_i}} \quad (2.4)$$

Si ottiene pertanto: $r_{best} = (0.984 \pm 0.028)s^{-1}$. Possiamo graficare i risultati ottenuti per stimarne la confrontabilità.

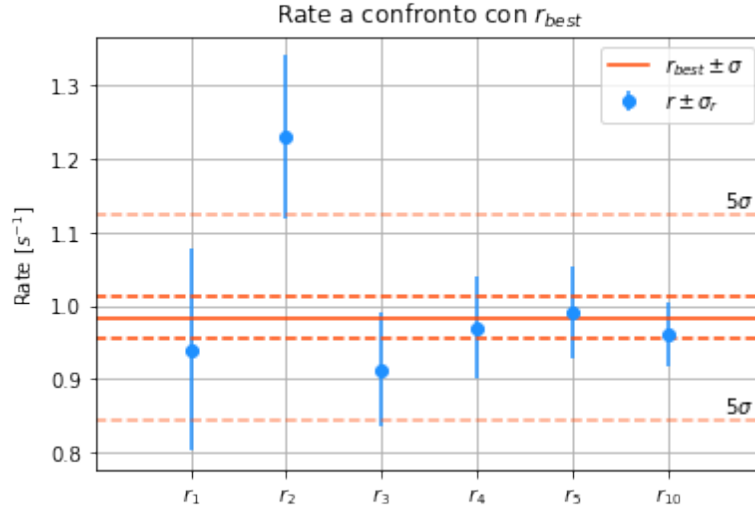
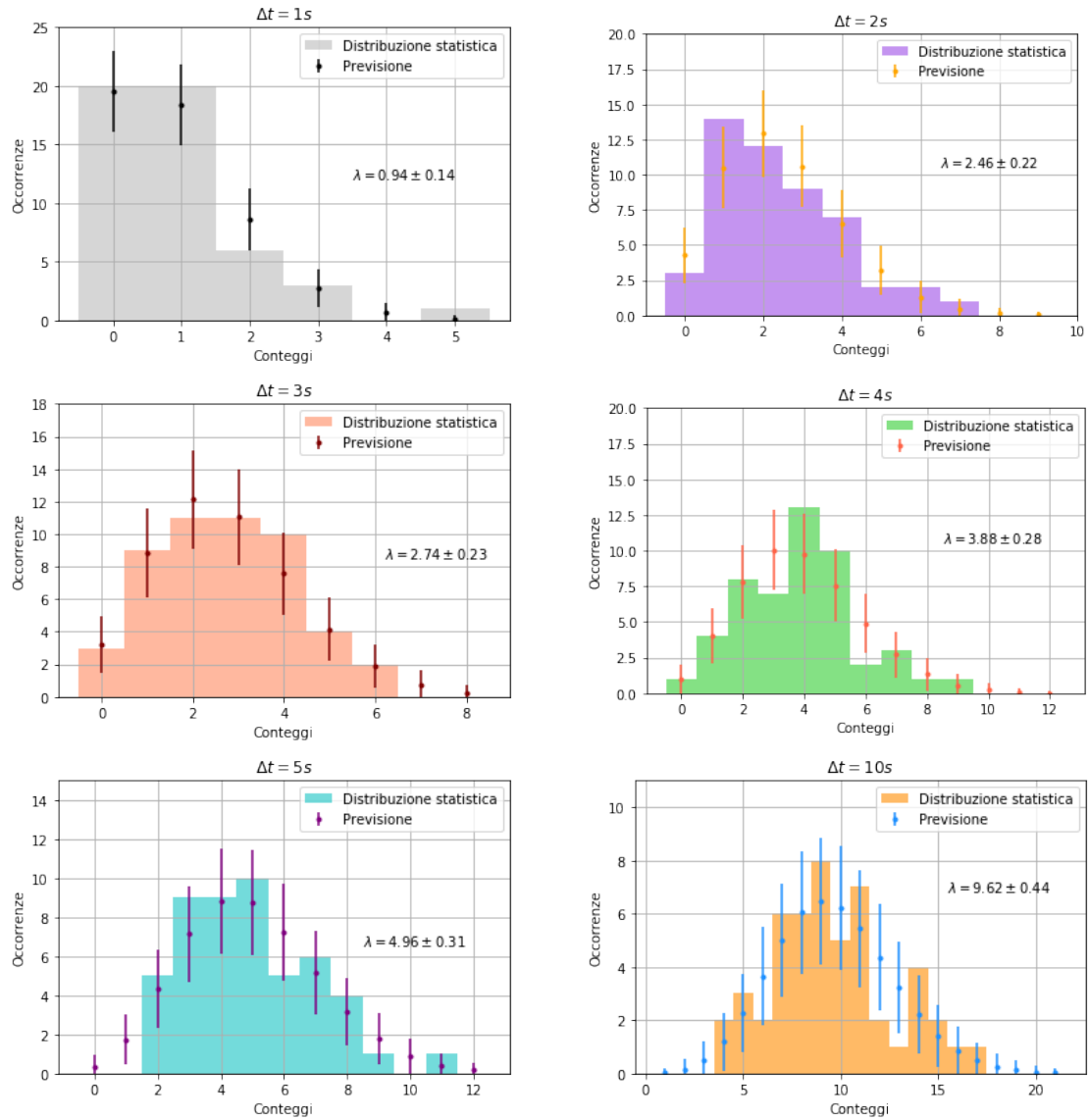


Figura 3: Caption

Notiamo chiaramente che le stime provenienti da misure differenti risultano nella quasi completezza confrontabili sia tra di esse sia con la stima r_{best} entro una sigma; bisogna tuttavia nuovamente fare eccezione per r_2 che appare ancora l'unico dato anomalo rispetto agli altri e alla combinazione dei conteggi.

2.1.1 Istogrammi e test del χ^2

Sono di seguito riportati gli istogrammi relativi alle misure con gli intervalli di tempo già citati, messi a confronto con una poissoniana di parametro λ_i . L'incertezza sui singoli bin è stata calcolata come un'incertezza binomiale come $\sqrt{Np(1-p)}$, come in tutti gli istogrammi che verranno presentati successivamente; in generale infatti non è valida l'approssimazione poissoniana poiché i valori di p non sono successivamente basse. L'utilizzo dell'incertezza binomiale appare corretto perché si considera una marginalizzazione della funzione di probabilità del singolo bin con p probabilità associata al bin e 1-p probabilità associata all'evento opposto, ossia l'insieme degli altri bin.



Sugli istogrammi è stato operato un test del χ^2 , definendo la variabile χ^2 come segue²:

$$\chi^2 = \sum_i^{1,n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} \quad (2.5)$$

Dal χ^2 così misurato si calcola il *p-value* del χ^2 con $n - 1$ gradi di libertà, in quanto sono considerati n bin, ma il valore aspettato dei bin si calcola tramite una poissoniana di parametro λ_i che viene inferita dai dati. I bin considerati per il test del χ^2 non sono tuttavia tutti i bin riportati negli istogrammi. Infatti purché si possa operare un test del χ^2 il numero di occorrenze in un bin non può essere minore di $5 \div 10$; alcuni bin sono stati dunque accorpati per rientrare nelle ipotesi di una distribuzione χ^2 , considerando per questi bin il valore atteso come la somma dei valori attesi dei bin che raccoglie e l'incertezza come un'incertezza binomiale.

I risultati del test si possono riassumere in tabella, come di seguito.

	χ^2	ν (dof)	<i>p-value</i>
$\Delta t = 1s$	1.61	3	65.8%
$\Delta t = 2s$	4.00	6	67.7%
$\Delta t = 3s$	2.59	5	76.3%
$\Delta t = 4s$	3.11	6	79.5%
$\Delta t = 5s$	6.59	8	58.1%
$\Delta t = 10s$	9.54	12	65.6%

Tabella 2: test del χ^2 .

N.B.: Si è calcolato il *p-value* tramite un'applicazione web³, il cui algoritmo si basa sul calcolo dell'integrale

$$p(\theta_m) = \int_{\theta_m}^{\infty} f(\theta | H) d\theta \quad (2.6)$$

dove, secondo la teoria dei test d'ipotesi, θ_m è l'osservabile misurato e l'integrale rappresenta la probabilità di trovare un valore θ dell'osservabile in una regione di eguale o minore compatibilità con l'ipotesi H di quanto non si sia realmente osservato. Nel nostro caso il test è stato effettuato sul χ^2 nell'ipotesi H in cui i conteggi di particelle si distribuivano in forma poissoniana, dunque

$$p(\chi_m^2) = \int_{\chi_m^2}^{\infty} f(\chi^2 | H) d\chi^2 \quad (2.7)$$

Si nota che tutti e sei i test effettuati forniscono una soglia massima di significanza piuttosto alta, molto superiore al 50%, che ci fa perciò essere soddisfatti dei risultati.

²Ove n è il numero di *bin* dell'istogramma, x_i il valore aspettato per il conteggio di ciascun *bin* calcolato con $N p_i$, dove p_i è calcolata con una poissoniana di parametro λ_i e σ_i incertezza loro associata.

³Fonte: <https://www.socscistatistics.com/pvalues/chidistribution.aspx>.

2.1.2 Frazioni di conteggi

Per i primi 5 gruppi di misure si sono calcolate le frazioni di "0 conteggi" e di "0 conteggi" + "1 conteggio"; si è poi proceduto con il comparare i risultati ottenuti, espressi con le relative incertezze, con la previsione teorica dei conteggi aspettati assumendo un *rate* pari a r_{best} . I valori misurati sono stati calcolati come segue:

$$E[f_{(0)}] = \frac{\# \text{ mis. con 0 conteggi}}{n}; \quad E[f_{(0+1)}] = \frac{\# \text{ 0 conteggi} + \# \text{ 1 conteggio}}{n} \quad (2.8)$$

La previsione teorica contro cui sono stati *plottati* i valori misurati è, rispettivamente per i due casi esaminati, la probabilità di non ottenere conteggi e quella di non ottenerne oppure ottenerne uno fino a $t = \Delta t_i$ in un decadimento con *rate* $= r_{best}$: in altri termini, $1 -$ la cumulativa del tempo di attesa per uno e per due conteggi. Le formule adoperate sono le seguenti:

$$E[p_{(0)}] = 1 - [1 - P(0|\lambda)] = e^{-r_{best}\Delta t} \quad (2.9)$$

$$E[p_{(0+1)}] = 1 - [1 - P(0|\lambda) - P(1|\lambda)] = e^{-r_{best}\Delta t} (r_{best}\Delta t + 1) \quad (2.10)$$

L'incertezza σ associata sia ai punti sperimentali che a quelli previsti è di tipo binomiale, in quanto il fenomeno poissoniano ne è un caso particolare⁴, ed è stata calcolata come

$$\sigma_{(0)} = \sqrt{\frac{p_{(0)}(1 - p_{(0)})}{n}}; \quad \sigma_{(0+1)} = \sqrt{\frac{p_{(0+1)}(1 - p_{(0+1)})}{n}} \quad (5) \quad (2.11)$$

A pagina seguente sono stati riportati gli andamenti in funzione del tempo a confronto con i risultati ottenuti dalle misure. Si noti come i punti sperimentali sono sempre confrontabili con la loro previsione entro 1σ , quindi si può concludere che il modello considerato, come ci si aspetta, descrive bene il fenomeno di decadimento. Si vedano Figura 4 e Figura 5.

⁴Si ricorda che $\mathcal{B}_{n,p} \rightarrow \mathcal{P}_\lambda$, ($\lambda = np$) nel caso in cui $n \rightarrow \infty$ e $p \rightarrow 0$, con n numero di misure e p probabilità dell'evento.

⁵Dove $n = 50$ misure ripetute. I pedici $_{(0)}$ e $_{(0+1)}$ indicano ancora una volta i rispettivi conteggi considerati.

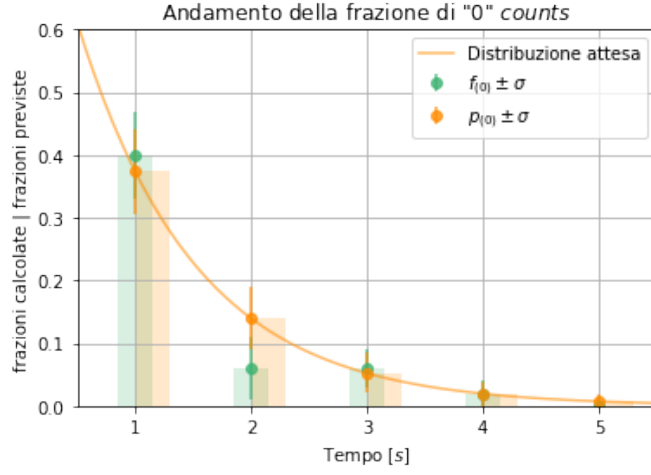


Figura 4: Confronto tra andamento previsto per la probabilità di ottenere "0 conteggi" in funzione del tempo di attesa Δt e frazioni misurate.

$\Delta t \backslash f$	$mis.$	$prev.$	$std.$
1s	0.40	0.374	0.068
2s	0.06	0.140	0.049
3s	0.06	0.052	0.031
4s	0.02	0.020	0.020
5s	0	0.007	0.012

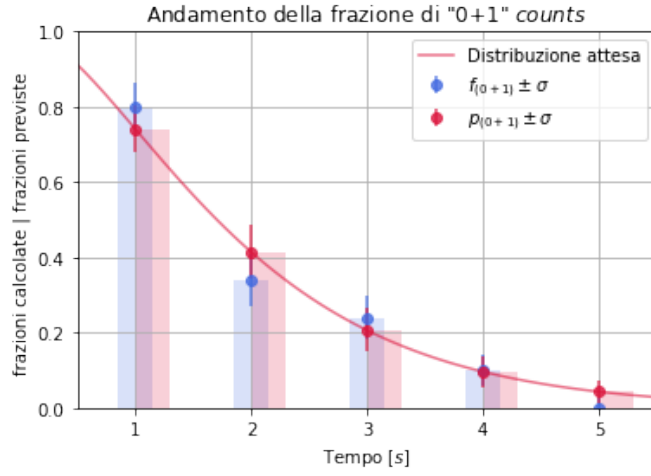


Figura 5: Confronto tra andamento previsto per la probabilità di ottenere "0+1 conteggi" in funzione del tempo di attesa Δt e frazioni misurate.

$\Delta t \backslash f$	$mis.$	$prev.$	$std.$
1s	0.80	0.742	0.062
2s	0.34	0.415	0.070
3s	0.24	0.206	0.057
4s	0.10	0.096	0.042
5s	0	0.043	0.029

Per verificare ulteriormente la fedeltà dei valori sperimentali al modello teorico effettuiamo un test del χ^2 . A tale proposito facciamo una specifica sulle incertezze fornite sui valori osservati: come precedentemente osservato non si è proceduto a calcolare sigma come $\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}$, bensì come $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$ in quanto la prima formulazione avrebbe previsto incertezze per i valori di f misurati a $\Delta t = 5s$ pari a 0, che sarebbero perciò risultati problematici nel calcolo del χ^2 (si sarebbe dovuto tralasciare tali punti).

I valori ottenuti impiegando i punti con relativa incertezza poc'anzi illustrati sono

$$\chi_{(0)}^2 = 3.22; \quad \chi_{(0+1)}^2 = 4.65 \quad (2.12)$$

Considerando $\nu = n \text{ bins} - 1 = 4^6$ gradi di libertà (si possono infatti trattare i dati sotto forma di istogramma) si calcola un valore aspettato per le variabili chi quadro pari a $\nu - 2$, ossia $E[\chi^2] = 2$.

Sempre con l'ausilio del [sito web](#) precedentemente citato si sono calcolati $p\text{-value}$ pari, nei due casi, rispettivamente a 52.2% e 32.5%. Entro i consueti livelli di significanza **i risultati ottenuti sono pienamente compatibili con l'ipotesi**.

Si può notare, per completezza, che se avessimo calcolato i chi quadro considerando le incertezze binomiali definite a partire dalle f osservate, avremmo ottenuto valori rispettivamente di 5.83 (compatibile con l'ipotesi entro un *significance level* molto basso, $\approx 1.6\%$) e 2.62 (non significativo ad un $p\text{-value} < 10.6\%$).

2.1.3 Note su pdf e cumulative

Sappiamo che, detta P_1 la probabilità di osservare il primo conteggio dopo un tempo $t \geq T$, si ha:

$$P_1 = P(0|\lambda) = e^{-\frac{T}{\tau}} \quad (2.13)$$

Mentre, detta P_2 la probabilità di osservare il secondo conteggio dopo un tempo $t \geq T$, si ha:

$$P_2 = P(0|\lambda) + P(1|\lambda) = e^{-\frac{T}{\tau}} + \frac{T}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}} \quad (2.14)$$

Avendo $\tau = \frac{1}{R}$. Dalla P_2 si può di conseguenza risalire alla cumulativa e da quest'ultima alla funzione densità di probabilità (*pdf*) del secondo conteggio. Detta P la cumulativa, dunque la probabilità di avere il secondo conteggio in un tempo $t \leq T$, si ha:

$$P = 1 - P_2 = 1 - e^{-\frac{T}{\tau}} - \frac{T}{\tau} e^{-\frac{T}{\tau}} = \int_0^T pdf(t) dt \quad (2.15)$$

Da qui la pdf $p(t)$, derivando, è:

$$p(t) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{t}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.16)$$

⁶Sono stati considerati $n-1$ gradi di libertà poiché il valore aspettato è stato calcolato sulla base di r_{best} , parametro inferito a partire dai dati.

2.2 Misura del tasso di conteggi del blocco di tufo

Come anticipato, si sono effettuate anche misure di emissioni radioattive di un campione "immaginario" costituito da un blocco di tufo.

Sono state condotte 3 misure di conteggio, una per ogni configurazione del rivelatore ($\{"O", "V", "S"\}$, si veda par. 1.1), in un intervallo $\Delta t = 600s$ (la cui misura è stata assunta priva di incertezza) per ciascun *set-up*. Di seguito sono riportati i risultati delle misure con incertezza fornita secondo il modello poissoniano (sempre adatto per misure di eventi rari come i decadimenti radioattivi), che prevede $\mu \pm \sigma = \hat{\lambda} \pm \sqrt{\hat{\lambda}}$.

<i>counts</i> \ <i>conf.</i>	"O"	"V"	"S"
$\mu \pm \sigma$	605 ± 25	500 ± 22	1150 ± 34

Schematizzando il fenomeno di rilevazione delle particelle che passano nel rivelatore, detto N il numero di particelle contate in Δt e definiti i pedici "A" (radiazione ambientale), "C" (raggi cosmici, di cui è considerato dato a priori che nella posizione "V" si registri un passaggio di particelle cosmiche pari alla metà di quelle intercettate in posizione "O") e "T" (radiazione del blocco di tufo), con semplici considerazioni si vede che

$$\begin{cases} N_A + N_C = N_O \\ N_A + \frac{1}{2}N_C = N_V \\ N_T = N_S - N_O \end{cases}$$

Poiché interessati ad inferire le *rate* a cui avviene il passaggio di radiazione ambientale (r_A), raggi cosmici (r_C) e nuclei di ^{222}Rn emesse dal blocco di tufo (r_T), abbiamo calcolato i valori attesi a partire dal sistema appena ricavato secondo la formula $r = \frac{N}{\Delta t}$ (osservando, come tornerà utile per i calcoli, che vale $\sigma_r^2 = \frac{\sigma_N^2}{\Delta t^2}$, in quanto è stata considerata non influente l'incertezza sull'intervallo di tempo) perciò:

$$\begin{cases} E[r_C] = \frac{2}{\Delta t} (E[N_O] - E[N_V]) \\ E[r_A] = \frac{1}{\Delta t} (E[N_O] - E[N_C]) \\ E[r_T] = \frac{1}{\Delta t} (E[N_S] - E[N_O]) \end{cases}$$

Le incertezze fornite sulle misure sono state elaborate secondo la propagazione delle incertezze, la cui formula generale per una funzione di n variabili è

$$\sigma_{tot}^2[y] = \sum_{i,j}^{1,n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial x_j} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \sigma_{ij} \quad (2.17)$$

Si noti che, avendo stimato la misura di tempo priva di incertezza, se si considerano le funzioni *rate* i cui valori attesi sono espressi nell'ultimo sistema di equazioni, i termini misti tra Δt e i conteggi N della (2.17) sono nulli in quanto sono nulle le covarianze σ_{ij} ($\sigma_{\Delta t} = 0$). I termini misti tra i diversi conteggi, invece, contengono covarianze a priori non nulle per almeno due motivazioni:

- I. le diverse misure potrebbero essere affette da errori strumentali legati alla sensibilità del contatore;
- II. i valori aspettati dei conteggi nelle tre diverse configurazioni sono combinazioni lineari di N_A , N_C e N_T , perciò funzioni delle stesse variabili.

Essendo impossibilitati a quantificare il primo tipo di incertezze come sistematiche, per stimare il secondo tipo abbiamo calcolato le covarianze secondo la formula

$$cov(y_1, y_2) = \sum_{i,j}^{1,n} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_i} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_j} \Big|_{\mu_1, \dots, \mu_n} \right) \sigma_{ij} \quad (2.18)$$

valida per due funzioni $y_1 \equiv y_1(x_1, \dots, x_n)$ e $y_2 \equiv y_2(x_1, \dots, x_n)$. Le covarianze risultano:

$$\begin{bmatrix} cov(r_O, r_V) = \sigma^2[r_A] + \frac{1}{2}\sigma^2[r_C] \\ cov(r_S, r_O) = \sigma^2[r_O] \\ cov(r_O, r_C) = \sigma^2[r_C] \end{bmatrix}$$

Effettuando qualche elaborazione algebrica⁷ si calcola

$$\begin{aligned} \sigma^2[r_C] &= 2(\sigma^2[r_O] + \sigma^2[r_V] - 2cov(r_O, r_V)) = \\ &= 2(\sigma^2[r_O] + \sigma^2[r_V] - 2(\sigma^2[r_A] + \frac{1}{2}\sigma^2[r_C])) = \\ &= 2\sigma^2[r_O] + 2\sigma^2[r_V] - 4\sigma^2[r_A] - 2\sigma^2[r_C] \implies \\ \implies 3\sigma^2[r_C] &= 2\sigma^2[r_O] + 2\sigma^2[r_V] - 4\sigma^2[r_A] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2[r_A] &= \sigma^2[r_O] + \sigma^2[r_C] - 2cov(r_O, r_C) = \\ &= \sigma^2[r_O] + \sigma^2[r_C] - 2\sigma^2[r_C] = \\ &= \sigma^2[r_O] - \sigma^2[r_C] \end{aligned} \quad (2.20)$$

⁷A scapito della sinteticità di questa sezione abbiamo preferito esplicitare i calcoli, a beneficio della comprensione delle formule finali.

$$\begin{aligned}
\sigma^2[r_T] &= \sigma^2[r_S] + \sigma^2[r_O] - 2cov(r_S, r_O) = \\
&= \sigma^2[r_S] + \sigma^2[r_O] - 2\sigma^2[r_O] = \\
&= \sigma^2[r_S] - \sigma^2[r_O]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Dunque, note $\sigma^2[r_O]$, $\sigma^2[r_V]$, $\sigma^2[r_S]$ si possono estrarre le incertezze sulle *rate* A, C e T.

$$\begin{cases} \sigma^2[r_C] = 2\sigma^2[r_O] - 2\sigma^2[r_V] \\ \sigma^2[r_A] = 2\sigma^2[r_V] - \sigma^2[r_O] \\ \sigma^2[r_T] = \sigma^2[r_S] - \sigma^2[r_O] \end{cases}$$

Si sono elaborati pertanto i seguenti risultati:

	<i>risultato</i> [s^{-1}]
r_C	0.350 ± 0.024
r_A	0.658 ± 0.033
r_T	0.908 ± 0.039

3 Inferenza binomiale con il pallinometro

Mediante una piattaforma online⁸ è stata simulata la caduta di $M = 200$ palline in un *quinconce di Galton* (runnando due sequenze di fila da 100 palline a causa delle limitazioni imposte dal simulatore) in **9 configurazioni** differenti: sia il numero N di file di chiodi ($N = \{5, 25, 50\}$), sia la probabilità p della pallina di cadere a destra del chiodo (identificabile in un processo di Bernoulli con la "probabilità di successo", $p = \{5, 25, 50\}$) sono state variate al fine di confrontare gli andamenti complessivi dei processi.

Al termine di ogni processo, il simulatore ha registrato il numero totale di palline cadute in ciascuna delle $N + 1$ cellette poste alla base del pallinometro.

3.1 Discussione e formule utilizzate

Date N file di chiodi (dunque $N + 1$ cellette), indichiamo con k l'indice di ciascuna celletta, con m_k il numero di palline che finiscono nella k -esima celletta; definendo successo "la pallina va verso destra" e insuccesso l'evento complementare, verifichiamo che la celletta k -esima si ottiene se si sono verificati i successi k , indipendentemente dall'ordine. L'evento è quindi ben descritto da una distribuzione binomiale:

$$P_k = f(k | \mathcal{B}_{N,p}) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \quad (3.1)$$

Poiché siamo interessati al numero di palline m_k che terminano in ciascuna celletta dopo la caduta di M palline totali, la variabile casuale di interesse M_k (con k indice di celletta) è descritta da una binomiale avente parametri M e $p = P_k$:

$$M_k \sim \mathcal{B}_{M,P_k} \quad (3.2)$$

Pertanto:

$$E[M_k] = MP_k; \quad \sigma[M_k] = \sqrt{MP_k(1-P_k)} \quad (3.3)$$

L'interesse dell'inferenza sul pallinometro è tuttavia determinare la probabilità che le palline hanno di andare a destra ad ogni urto con i chiodi. L'inferenza è stata operata secondo le seguenti formule⁹, ottenute a partire dal metodo di massima verosimiglianza e assumendo di conseguenza una *likelihood* gaussiana¹⁰:

$$p = \frac{1}{N} \sum_k^{0,N} f_k \cdot k \quad \sigma[p] = \frac{1}{\sqrt{M \sum_k f_k \left(\frac{k}{p^2} + \frac{N-k}{(1-p)^2} \right)}} \quad (11) \quad (3.4)$$

⁸Fonte: <https://www.randomservices.org/random/apps/GaltonBoardExperiment.html>.

⁹Ove $f_k = \frac{M_k}{M}$ è la frazione di palline che arriva in ciascuna celletta.

¹⁰Come verrà chiarito nel paragrafo 3.3.

¹¹La sommatoria si intende per $k = 0, \dots, N$.

3.2 Istogrammi dei dati raccolti con binomiale sovrapposta

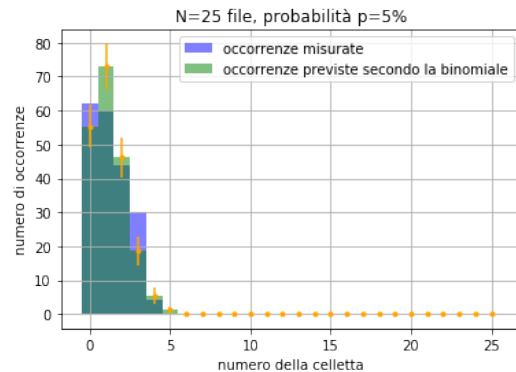
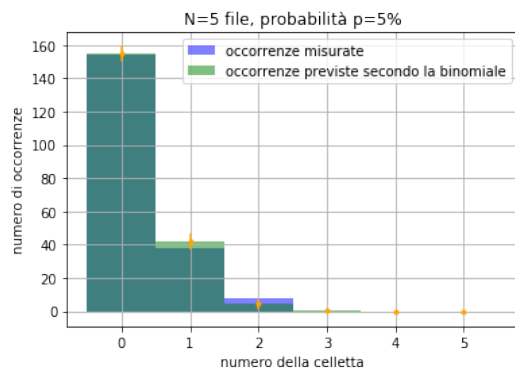
Gli istogrammi riportati rappresentano la distribuzione binomiale ottenuta successivamente all'osservazione della caduta di 200 palline su $N = 5, 25, 50$ file di chiodi, con probabilità p crescente di 5%, 25%, 50%.

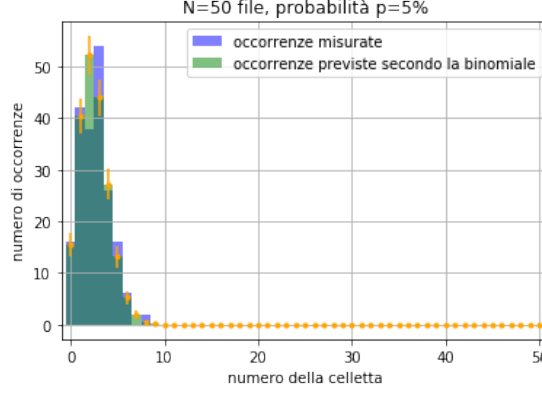
A ciascun istogramma è stata sovrapposta la appropriata previsione della binomiale teorica con la sua incertezza.

I grafici dei dati sono stati raggruppati in base a p così da evidenziare come al variare del parametro N la distribuzione di probabilità tenda progressivamente ad una gaussiana. D'altra parte si può notare che fissando il numero di file, all'aumentare della probabilità l'istogramma si mostra sempre più spostato verso valori centrali delle cellette fino a presentarsi pressoché simmetrico nell'ultimo grafico di ciascuna terna in cui $p \approx 1/2$; infatti, in quest'ultimo caso, la pallina possiede eguale probabilità di cadere a destra e a sinistra del chiodo.

3.2.1 $p = 5\%$

Sono di seguito riportati gli istogrammi relativi alle prove con $p = 5\%$ di probabilità con numeri differenti di file.





Con le formule precedentemente illustrate si è inferito il valore di p , ottenendo i seguenti risultati¹²:

$$\begin{aligned} p_5 &= 0.0540 \pm 0.0071 & \delta_5 &\approx 13\% \\ p_{25} &= 0.0508 \pm 0.0032 & \delta_{25} &\approx 6\% \\ p_{50} &= 0.0516 \pm 0.0022 & \delta_{50} &\approx 4\% \end{aligned}$$

Considerato il fatto che il pallinometro studiato non è reale ma simulato online, siamo effettivamente a conoscenza del "valore vero" della probabilità ($p = 0.05$), e tutti i risultati sono compatibili con il valore vero entro 1σ . Notiamo inoltre che l'incertezza relativa diminuisce notevolmente all'aumentare del numero di file; dalla formula (3.4) non risulta subito evidente, tuttavia questo andamento verrà chiarito nella sezione 3.2.3, dove è oltretutto maggiormente marcato.

Sugli istogrammi è stato operato un test del χ^2 per verificare la concordanza del modello teorico binomiale con le osservazioni effettivamente eseguite; i risultati dei test sono riportati in tabella.¹³

N	χ^2	ν (dof)	p -value
5	2.26	3	52.1%
25	10.78	5	5.6%
50	9.57	9	38.6%

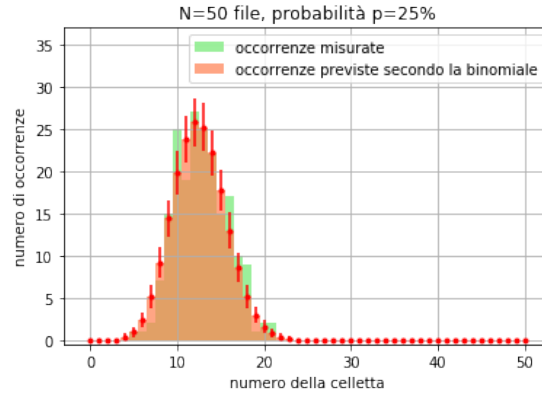
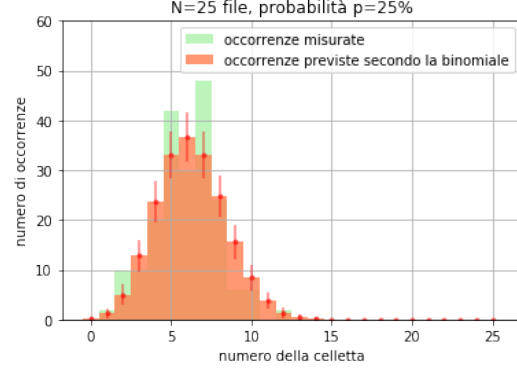
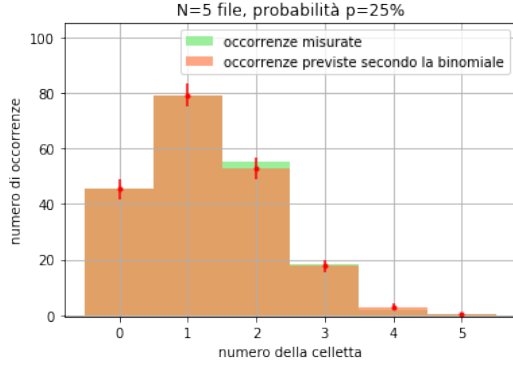
Tabella 3: test del χ^2 per gli istogrammi a pagina precedente.

¹²Il pedice nella notazione della probabilità indica da ora in poi il numero di file considerato.

¹³I gradi di libertà sono stati determinati sulla base delle considerazioni espresse al paragrafo 2.5, infatti si è dovuto procedere con l'accorpamento di alcuni bin.

3.2.2 $p = 25\%$

Sono di seguito riportati gli istogrammi relativi alle prove con $p = 25\%$ di probabilità con differenti numeri di file.



Con le formule precedentemente illustrate si è inferito il valore di p , ottenendo i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} p_5 &= 0.252 \pm 0.013; & \delta_5 &\approx 5\% \\ p_{25} &= 0.2475 \pm 0.0062; & \delta_{25} &\approx 2.5\% \\ p_{50} &= 0.2544 \pm 0.0044; & \delta_{50} &\approx 1.5\% \end{aligned}$$

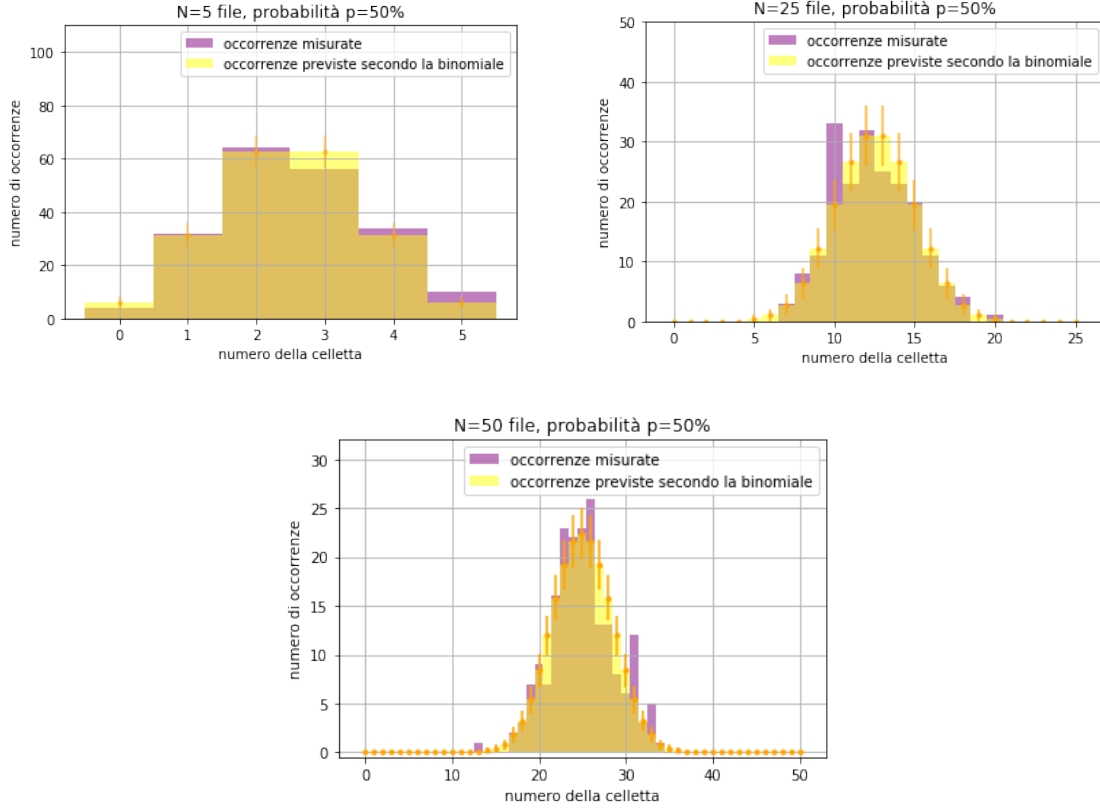
Così come per il caso precedente, tenendo conto di aver disposto di un simulatore online, siamo a conoscenza del "valor vero" della probabilità ($p = 0.25$) e possiamo dedurre che tutti i valori osservati siano compatibili con tale valore entro 1σ .
di seguito riportiamo anche qui i test del χ^2 relativo ad ogni istogramma.

$N \backslash$	χ^2	ν (dof)	p -value
5	1.77	5	88.0%
25	11.68	14	63.2%
50	18.26	19	50.5%

Tabella 4: test del χ^2 per gli istogrammi a pagina precedente.

3.2.3 $p = 50\%$

Sono di seguito riportati gli istogrammi relativi alle prove con $p = 5\%$ di probabilità con numeri differenti di file.



I valori di p inferiti nei tre casi sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
 p_5 &= 0.474 \pm 0.016; & \delta_5 &\approx 3\% \\
 p_{25} &= 0.4936 \pm 0.0071; & \delta_{25} &\approx 1.5\% \\
 p_{50} &= 0.5015 \pm 0.0050; & \delta_{50} &\approx 1\%
 \end{aligned}$$

I risultati sono compatibili sempre entro 2σ con il "valor vero" (noto) $p = 0.5$, ed anche entro 1σ per p_{50} . Come ci si aspetta, l'incertezza relativa diminuisce all'aumentare del numero di file.

Infatti la formula (3.4) per $p \approx 1 - p$, diventa:

$$\sigma[p] = \frac{p}{\sqrt{N}\sqrt{M}} \quad (3.5)$$

pertanto $\sigma[p] \propto \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Anche in questo caso è stato effettuato il test del χ^2 per ciascun istogramma. I p -value calcolati sono riportati nella tabella di seguito.

$N \backslash$	χ^2	ν (dof)	p -value
5	4.2	5	52.3%
25	16.5	11	12.3%
50	26.6	24	32.1%

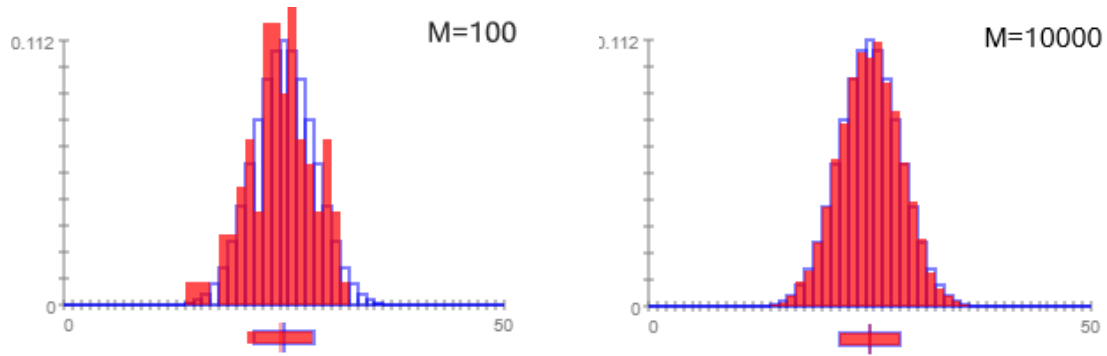
Tabella 5: test del χ^2 per gli istogrammi a pagina precedente.

Perché fossero rispettate le condizioni per il test del χ^2 , come è stato precedentemente spiegato, sono stati accorpati alcuni *bin* degli istogrammi riportati sopra. Non deve stupire pertanto che in alcuni casi $dof < n \text{ bins} - 1$.

Ulteriori riflessioni

Notiamo, in generale per tutte e tre i valori di probabilità, che per un numero N di file basso si hanno test con un p -value più alto, quindi una maggiore aderenza all'ipotesi binomiale, aderenza che diminuisce al crescere di N . Questo comportamento è da imputare al fatto che, disponendo di un numero fisso di palline (200), per valori di $N \ll 200$, avendo un numero di palline molto maggiore del numero di file, la distribuzione osservata tende più facilmente alla distribuzione teorica.

Si è pertanto deciso di operare due prove differenti per confermare qualitativamente l'andamento ipotizzato, con $N = 50$ file, prima con 100 palline, successivamente con 10000. I risultati ottenuti sono riportati in figura, con in blu la distribuzione attesa secondo la binomiale, mentre in rosso la distribuzione ottenuta.



Si nota chiaramente che, per un numero di palline molto maggiore, l'andamento previsto secondo la binomiale è maggiormente rispettato.

3.3 Tendenza normale

In generale, una distribuzione binomiale gode della *proprietà riproduttiva* rispetto alla somma per cui, se X_1, X_2, \dots, X_m sono m variabili casuali indipendenti, ciascuna descritta da una distribuzione di probabilità binomiale di parametri p ed n_i , la variabile casuale $Y = \sum_i X_i$ segue ancora una distribuzione di probabilità binomiale con parametri p e $n = \sum_i n_i$.

Sappiamo inoltre che se $m \gg 1$ ($\implies n \gg 1$) e al tempo stesso $0 \ll Y \ll n$, per il Teorema del limite centrale tale verosimiglianza binomiale $X \sim \mathcal{B}_{n,p}$ tende ad una gaussiana di parametri

$$X \sim \approx \mathcal{N}\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right) \quad (3.6)$$

a condizione che le m binomiali non siano dominanti ($\alpha_i^2 \sigma_i^2 \ll \sigma^2$, si noti che $\alpha_i = 1 \forall i$) nella combinazione.

La probabilità P_k che una pallina arrivi nella celletta k -esima è data da una binomiale $\mathcal{B}_{N,p}$, con N numero di file e p probabilità di andare a destra (successo); con N molto grande dunque siamo in tendenza gaussiana¹⁴. Tali riflessioni teoriche sono altresì giustificate dai grafici sopra riportati, dove è chiaramente visibile la tendenza della distribuzione ad una gaussiana al crescere del numero di file dei chiodi.

Si è di conseguenza voluto verificare questa tendenza gaussiana in uno dei casi analizzati, in particolare $N = 50$ file e $p = 25\%$. Graficando la binomiale $\mathcal{B}_{N,p}$, le frequenze effettivamente misurate e la gaussiana $\mathcal{N}\left(Np, \sqrt{Np(1-p)}\right)$, si ottiene il seguente *plot*.

¹⁴Si osservi che la tendenza gaussiana è seguita anche nel caso in cui il numero M di palline sia molto grande, considerando la binomiale \mathcal{B}_{M,P_k} della probabilità con cui le palline cadano nella k -esima tasca.

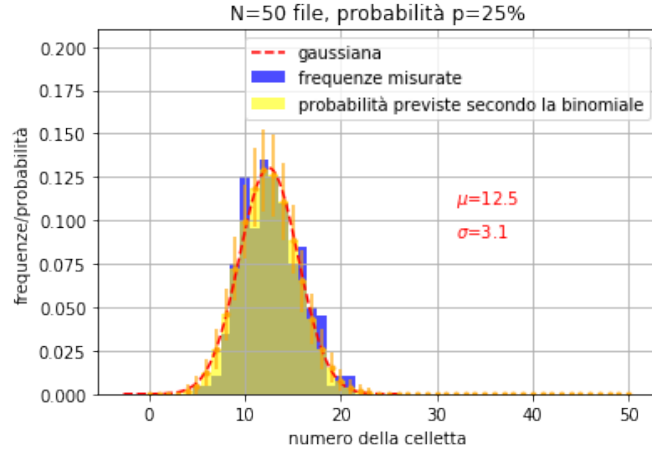


Figura 6: Confronto tra dati, previsione binomiale e previsione gaussiana a partire dai parametri N e p .

Dal grafico si nota chiaramente come la binomiale, in giallo, sia quasi coincidente con la gaussiana, in rosso; volendo operare un test di ipotesi del χ^2 per confrontare l'ipotesi gaussiana con le frequenze misurate, in blu, si sono considerati solo i valori non nulli delle frequenze misurate, per un totale di $n = 20$ variabili sommate come esplicitato della formula (2.5), dunque da confrontare con un χ^2 con $\nu = 20$, dato che la gaussiana è stata realizzata sulla base del valore vero della probabilità ($p = 25\%$) e non del valore di p inferito.

Si è ottenuto un $\chi_m^2 = 19.79$, per un $p\text{-value} = 47\%$. Per i livelli di significanza a cui ci si riferisce comunemente ($s.l. \approx 5 \div 10\%$) l'ipotesi gaussiana è di conseguenza concordante con i dati ottenuti.

L'analisi dati è stata effettuata interamente in Python.