

Laboratorio di Meccanica - canale Pb-Z

Relazione sulla prima esperienza

Gruppo D1-01: B. Russo, G. Vincenti, L. Pietropaoli, R. F. Rosato

26 settembre 2024

1 Misurazione accelerazione di gravità

1.1 Introduzione

Definizione del misurando: accelerazione di gravità ad un'altitudine di $180m$ s.l.m. nei pressi di Roma.

Descrizione dell'apparato sperimentale:

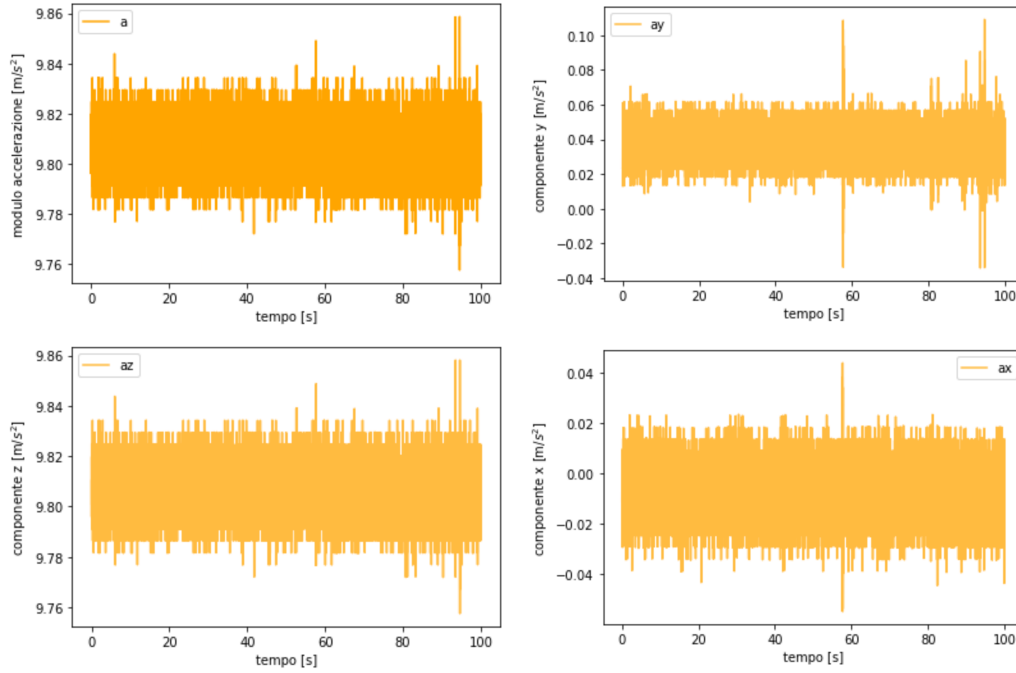
- 1) accelerometro su 3 assi installato su smartphone, intervallo misurazione $0.002471s$, modello dispositivo: Google Pixel 4XL (STMicroelectronics);
- 2) squadra con angolo a 30° per effettuare la misurazione inclinata;
- 3) livella a bolla per verificare l'orizzontalità del piano.

Procedura di misura: dopo aver individuato una superficie orizzontale attraverso una livella a bolla vi abbiamo posto lo smartphone ed abbiamo effettuato 10 misurazioni dell'accelerazione di gravità sfruttando l'accelerometro del dispositivo tramite l'app Phyphox, impostando un delay di $3s$ per l'avvio della misura, per ridurre disturbi esterni sulla misurazione. I dati sono stati raccolti per un intervallo di $100s$ ed è stata ripetuta la misurazione per 10 volte. Per le misurazioni con inclinazione lo smartphone è stato appoggiato sullo spigolo inclinato di 30° di una squadra. Le misure sono state effettuate

in sequenza durante un ristretto arco temporale, sempre sul medesimo piano, utilizzando lo stesso strumento, ed in condizioni ambientali pressoché immutate nel tempo, così da poterle considerare effettuate in condizioni di ripetibilità.

1.2 Misure con $\theta = 0^\circ$ (smartphone orizzontale)

Si possono osservare i grafici che rappresentano le misurazioni di g , g_x , g_y , g_z rispetto al sistema di riferimento dello smartphone.



La grandezza misurata è aleatoria, siamo in stato di incertezza sul suo valore. Essa presenta un andamento pressoché costante, con il modulo delle componenti g_x e g_y , che saranno d'ora in poi denominate rispettivamente a_x e a_y , prossime a 0 (ca. orizzontali) e componente g_z (a_z) prossima, in valore assoluto, a g (a). Notiamo la presenza di alcuni picchi un *primo* ($t \approx 58s$) in a_x e a_y in maniera pronunciata, mentre in maniera meno evidente in a_z e a ; un *secondo* a $t \approx 95s$ in a_y e a_z e di conseguenza su a , considerato che a_z determina quasi completamente il modulo a .

Essi sono probabilmente dovuti a fattori esterni (vibrazioni del piano di misura o variazioni del segnale elettrico del telefono) che provocano scarti di $0.2m/s^2$.

Nella tabella seguente sono riportate alcune grandezze statisticamente rilevanti per confrontare i dati raccolti:

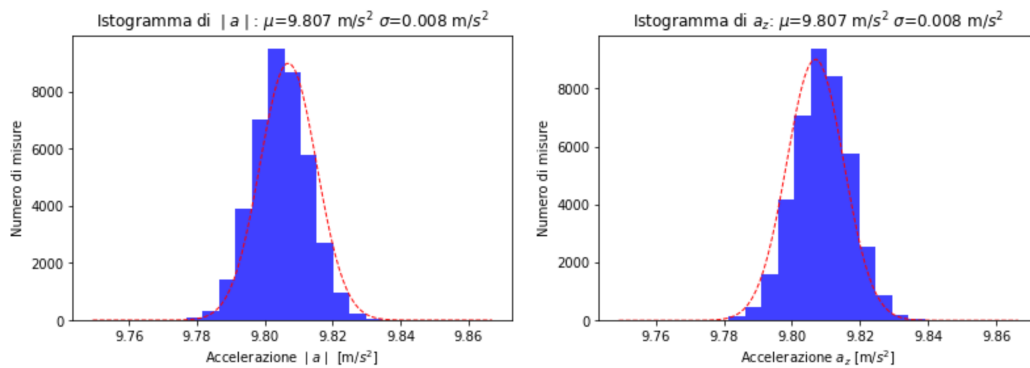
<i>variabili statistiche</i>	a_x [m/s^2]	a_y [m/s^2]	a_z [m/s^2]	a [m/s^2]
Media	-0.007211	0.037687	9.806869	9.806952
Deviazione standard	0.008735	0.008345	0.008348	0.008350
Varianza	0.000076	0.000070	0.000070	0.000070
Incertezza relativa (σ/μ)	121,1%	22,1%	0,085%	0,085%
Moda	-0.007988	0.035097	9.807823	9.803348
Mediana	-0.005806	0.037564	9.805573	9.805661
Min	-0.055045	-0.034125	9.757539	9.757643
Max	0.044022	0.109093	9.858107	9.858675

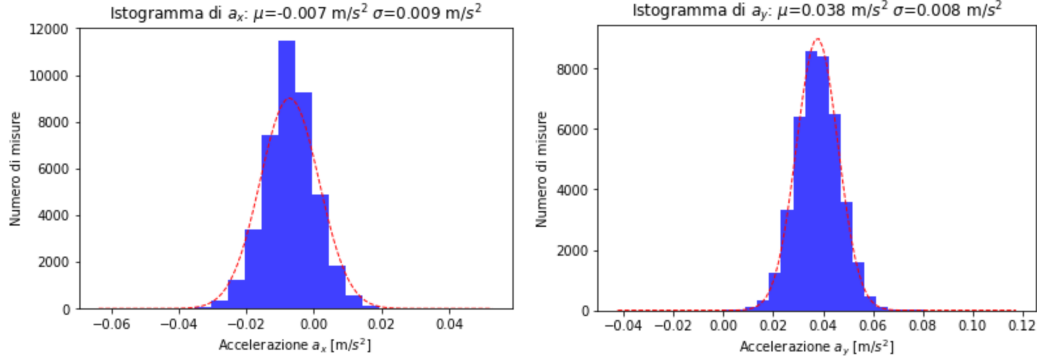
Tabella 1: I dati si riferiscono alla prima misurazione dell'accelerazione di gravità con $\theta=0^\circ$.

Confrontando i risultati notiamo che:

- i valori delle σ non sono esattamente gli stessi poiché le misure sono dell'ordine di 10^4 (con $\lim N \rightarrow \infty$ i valori sarebbero stati ancora più prossimi);
- l'incertezza relativa su a_x e a_y è alta poiché i loro valori medi tendono a 0; l'incertezza relativa su a_z è molto più bassa in confronto. Vista invece la prossimità a 0 di a_x e a_y l'incertezza relativa su a rimane la medesima di a_z .

Abbiamo raccolto in istogrammi i dati relativi alla misurazione.





Per gli istogrammi delle componenti e del modulo, la dimensione scelta in modo uniforme per tutti i bin è $\sigma/1.8$ (rispettivamente, σ_{a_x} , σ_{a_y} , σ_{a_z} , σ_a) poiché evidenzia l'andamento globale dei dati e allo stesso tempo non fa perdere eccessive informazioni sul dato originale.

Gli istogrammi sono messi a confronto con una distribuzione gaussiana (in rosso) di parametri μ pari alla media e σ pari alla deviazione standard campionaria di ogni variabile, normalizzata al numero di misure ($n = 40667$). Notiamo che la gaussiana e l'istogramma hanno andamenti simili, e con un numero di misure maggiore gli andamenti sarebbero stati ancora più prossimi.

Per valutare i risultati della misura bisogna considerare il valore medio delle misurazioni con una relativa incertezza. Possiamo stimare tale incertezza come $\sigma_{tot} = \sqrt{\frac{s_{n-1}^2}{N} + \sigma_B^2}$, con N numero delle misure e σ_B fattore che tiene conto delle incertezze di tipo B. Poiché la soglia di discriminazione dell'accelerometro è $10^{-6} m/s^2$ ed è legittimo assumere che la grandezza misurata si distribuisca in modo uniforme nell'intervallo I corrispondente a tale soglia, possiamo stimare $\sigma_B = \frac{10^{-6} m/s^2}{\sqrt{12}} = 2,88 \cdot 10^{-7} m/s^2$, fattore di poca influenza nella somma in quadratura rispetto a $\frac{s_{n-1}}{\sqrt{N}}$ dell'ordine di 10^{-5} .

La stima dell'incertezza σ_{tot} rimane comunque non sufficientemente precisa, in quanto risultano ignorati fattori d'influenza dovuti alla calibrazione dello strumento. Come si vedrà nelle sezioni 2.3 e 2.7, ciò risulterà nell'incompatibilità tra misure effettuate in condizioni di riproducibilità.

La stima dell'incertezza sarà dunque

$$\sigma_{a_x} = 0.00004331$$

$$\sigma_{a_y} = 0.00004141$$

$$\sigma_{a_z} = 0.00004141$$

$$\sigma_a = 0.00004141$$

Possiamo di conseguenza riassumere i risultati come:

$$a_x = (-0.007211 \pm 0.000043) m/s^2$$

$$a_y = (0.037687 \pm 0.000041) m/s^2$$

$$a_z = (9.806869 \pm 0.000041)m/s^2$$

$$a = (9.806952 \pm 0.000041)m/s^2$$

2 Misura indiretta dell'accelerazione di gravità

2.1 Misure indirette di g con relativa incertezza (con formula di propagazione di incertezze)

Il valore del modulo dell'accelerazione a può essere ottenuto con una misura indiretta a partire dalle componenti dell'accelerazione a_x , a_y e a_z , secondo la funzione in tre variabili casuali:

$$a(a_x, a_y, a_z) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1)$$

Sapendo che:

$$\begin{aligned} E[a_x] &= g_x = -0.007m/s^2; & \sigma_x &= 0.009m/s^2 \\ E[a_y] &= g_y = 0.038m/s^2; & \sigma_y &= 0.008m/s^2 \\ E[a_z] &= g_z = 9.807m/s^2; & \sigma_z &= 0.008m/s^2 \end{aligned}$$

Evinciamo che:

$$E[a] = g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2 + g_z^2} = 9.8069440m/s^2$$

Trattandosi di una funzione in tre variabili, bisogna applicare la *formula di propagazione delle incertezze*¹:

$$\sigma_a^2 = \sum_{i,j}^{1,3} \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial a}{\partial x_j} \sigma_{i,j} \quad (2)$$

Considerando le derivate valutate nei valori aspettati:

$$\frac{\partial a}{\partial x_1} = \frac{g_x}{g}; \quad \frac{\partial a}{\partial x_2} = \frac{g_y}{g}; \quad \frac{\partial a}{\partial x_3} = \frac{g_z}{g}; \quad (3)$$

E la matrice delle covarianze σ_{ij} , che opportunamente scalata per $\frac{1}{N}$ diventa:

$$\begin{pmatrix} 1.869 & 0.007 & 0.005 \\ 0.007 & 1.721 & 0.123 \\ 0.005 & 0.123 & 1.721 \end{pmatrix} \cdot 10^{-9} m^2/s^4$$

¹Per incrementare la leggibilità della formula, rinominiamo $a_x \rightarrow x_1$, $a_y \rightarrow x_2$ e $a_z \rightarrow x_3$.
Con a continueremo a riferirci al modulo dell'accelerazione.

Si calcola che $\sigma_a = 0.00004153m/s^2$.

Di conseguenza il risultato della misura indiretta è $g = (9.806944 \pm 0.000042)m/s^2$.

Il valore rilevato con Phyphox risulta perfettamente compatibile con quello ottenuto con il procedimento indiretto.

2.2 Confronto con valore BGI

Il valore BGI è $9.804m/s^2$ per Roma.

Il risultato delle nostre misure è $g = (9.806944 \pm 0.000042)m/s^2$

Il nostro intervallo di confidenza è $9.806902m/s^2 \leq g \leq 9.806986m/s^2$.

Di conseguenza il risultato della nostra misura non risulta compatibile con il valore BGI, tuttavia tale discrepanza è probabilmente dovuta ad incertezze di tipo B, imputabili ad esempio alla calibrazione, che non è stato possibile valutare.

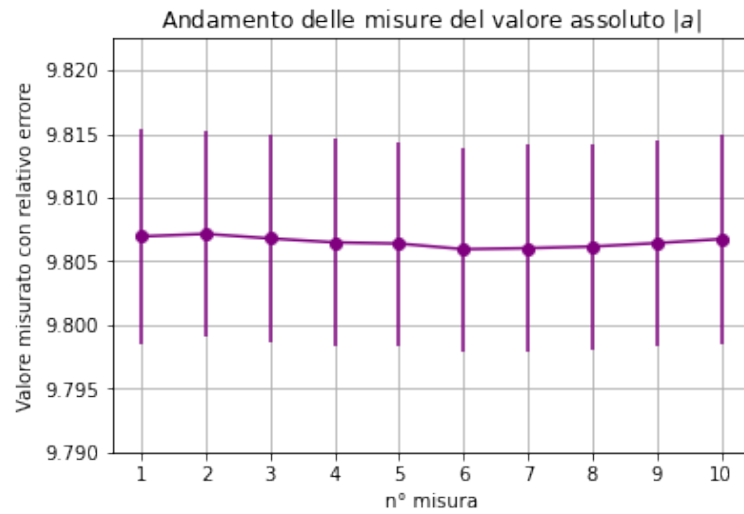
2.3 Confronto dei risultati delle 10 misurazioni

Abbiamo riportato i risultati delle misurazioni, senza approssimazioni, nella seguente tabella.

	valore medio $[m/s^2]$	incertezza $[m/s^2]$
1	9.806952	0.008350
2	9.807150	0.008140
3	9.806789	0.008098
4	9.806483	0.008053
5	9.806389	0.008043
6	9.805947	0.008048
7	9.806028	0.008065
8	9.806156	0.008076
9	9.806427	0.008111
10	9.806742	0.008162

Tabella 2: La tabella riporta i risultati di 10 misurazioni dell'accelerazione di gravità effettuate ciascuna in un intervallo di 100s e con $\theta = 0^\circ$.

Tutti i valori sono compatibili entro i limiti di incertezza. Possiamo quindi riassumere i dati raccolti come segue, considerando σ_{media} , che chiameremo anche σ_R per eviden-



ziarne il carattere campionario, pari a $\frac{s_{n-1}}{\sqrt{N}}$.

- | | |
|---|--|
| 1)(9.806952 \pm 0.000041)m/s ² | 6)(9.805947 \pm 0.000040)m/s ² |
| 2)(9.807150 \pm 0.000040)m/s ² | 7)(9.806028 \pm 0.000040)m/s ² |
| 3)(9.806789 \pm 0.000040)m/s ² | 8)(9.806156 \pm 0.000040)m/s ² |
| 4)(9.806483 \pm 0.000040)m/s ² | 9)(9.806427 \pm 0.000040)m/s ² |
| 5)(9.806389 \pm 0.000040)m/s ² | 10)(9.806742 \pm 0.000041)m/s ² |

2.4 Studio di a_z in 100 vettori

Consideriamo tutti i dati raccolti su a_z :

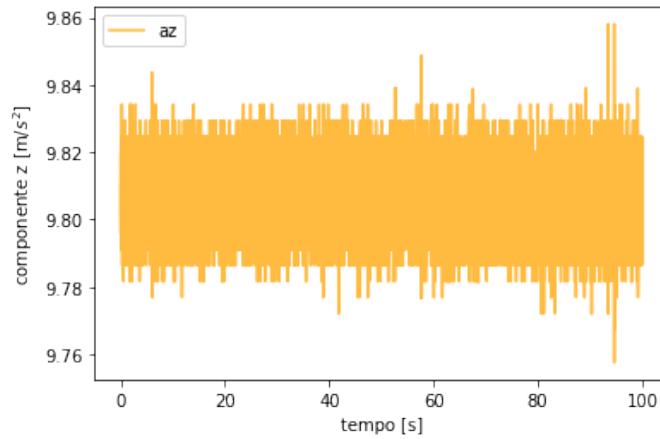


Figura 1: Figura 1

L'andamento risulta pressoché costante. Sono quindi stati creati 100 vettori di 406 misure ciascuno, di essi è calcolata la media e la standard deviation. Di seguito è riportato l'andamento delle medie dei 100 vettori.

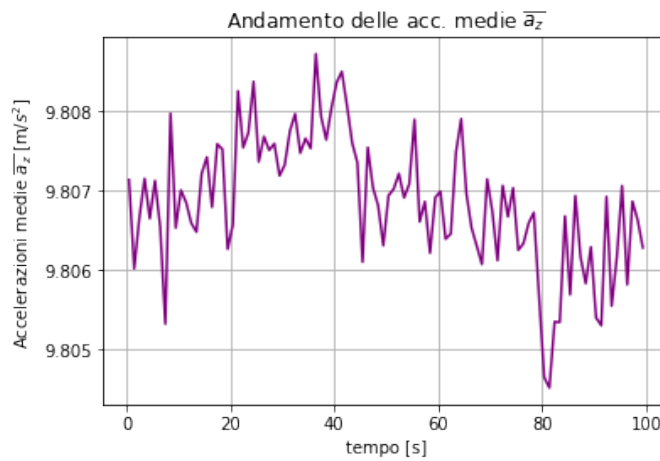


Figura 2: Figura 2

Confrontando le due figure notiamo che: in Figura 1 l'andamento sembra essere più costante che in Figura 2. Quest'ultimo grafico evidenzia infatti un andamento variabile nel

tempo del dato riportato dall'accelerometro, che invece nella prima era meno facilmente intuibile. Tale irregolarità è probabilmente dovuta a fattori esterni o variazioni nello strumento utilizzato. I valori in Figura 1 in ogni caso tendono ad assestarsi attorno al valore medio $\approx 9.807\text{m/s}^2$, come ci si aspetta.

Di seguito è riportato un grafico che rappresenta l'andamento delle standard deviation dei vari vettori.

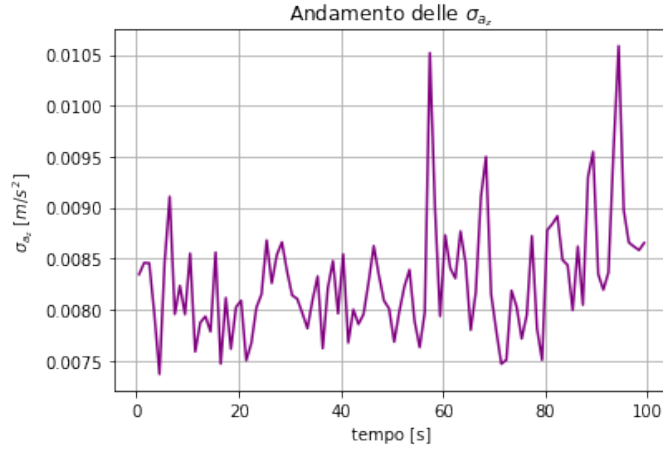


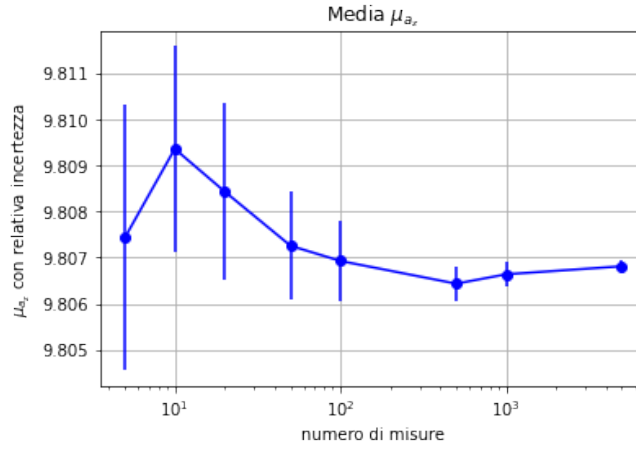
Figura 3: Figura 3

Dal grafico si nota che i valori della *standard deviation* sono comparabili nel tempo, con una distribuzione attorno a $E[\sigma_z]$ delle considerazioni dei paragrafi precedenti ($\approx 0.0083\text{m/s}^2$) nei limiti dell'incertezza su essa. Vi sono tuttavia almeno due casi in cui la dispersione dei dati è più marcata, in corrispondenza degli spikes nella rilevazione dei valori di a_z (cfr 1.2).

Consideriamo invece la *standard deviation* successivamente al raggruppamento in 100 vettori da n misure: $\sigma_{media} \approx 0.00082\text{m/s}^2$. Come ci si aspetta essa risulta essere notevolmente inferiore rispetto al valore precedente σ_z . Tuttavia la standard deviation della variabile casuale media dovrebbe ridursi di un fattore \sqrt{n} , mentre in questo caso si riduce di un fattore minore. Questa discrepanza dal modello teorico è dovuta all'incertezza sulla deviazione standard ($\approx 0.00003\text{m/s}^2$) e a dispersioni dei dati imputabili alla strumentazione e alle condizioni di misura.

2.5 Studio di a_z in vettori di dimensione variabile

Confronto su pacchetti di n misure ($n= 5, 10, 20, 50, 100, 500, 1000, 5000$).



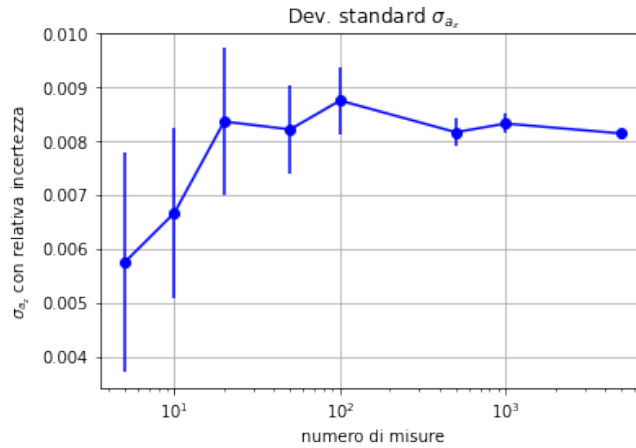
Nel grafico è riportata la σ per ogni gruppo.

Come si nota, al crescere del numero di dati del gruppo il valore dell'incertezza su sigma diminuisce e il suo valore atteso si assesta intorno al valore $0.008m/s^2$.

La seguente equazione indica l'incertezza sulla deviazione standard:

$$\sigma[s_{n-1}] = \frac{\sigma_{gruppo}}{\sqrt{2(n-1)}} \quad (4)$$

Allora l'incertezza sulla deviazione standard si comporta $\propto \frac{1}{\sqrt{(n-1)}}$, al crescere del numero di misure diminuisce fortemente.



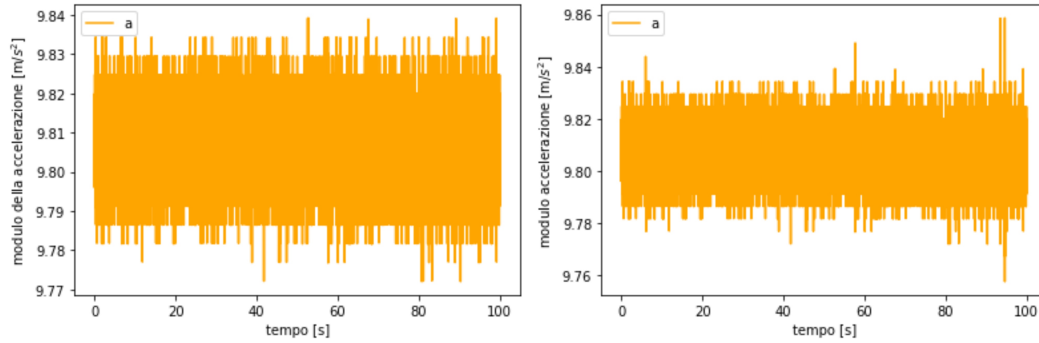
Confronto su media. Come si nota l'errore sulla media diminuisce al crescere del numero di dati considerati. Essa infatti scala $\propto \frac{1}{\sqrt{n}}$ dove n è il numero di misure.

2.6 Pulizia dei dati su a

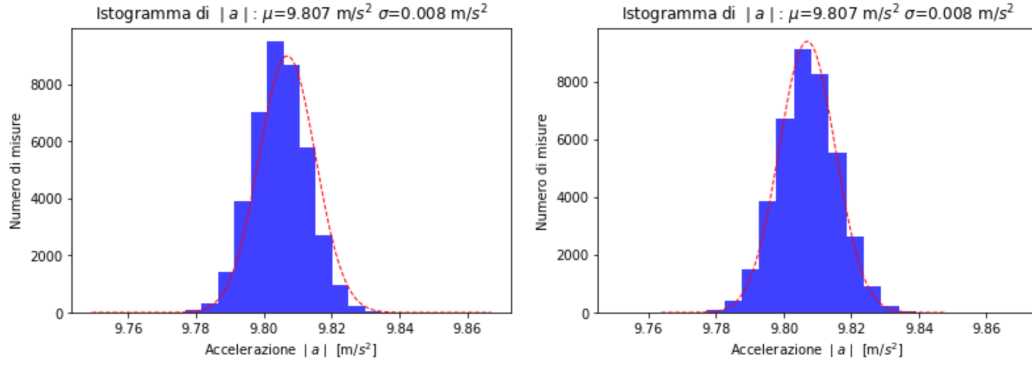
Essendo presenti dei dati spuri (dovuti a variazioni nel segnale elettrico del telefono), che si manifestano come *spikes* nel grafico originale, osserviamo alcune differenze che si presentano rimuovendo tali anomalie.

	Dati puliti	Dati originali
Media	9.806944	9.806952
Deviazione standard	0.008299	0.008350
Min	9.772014	9.757643
Max	9.839183	9.858675

Con l'eliminazione dei picchi la deviazione standard subisce un lieve decremento, in quanto dipende dalla dispersione dei dati che è chiaramente minore. La media risulta invece pressoché inalterata, poiché gli scarti negativi e positivi rispetto al valore medio si compensano a vicenda. Notiamo che *min* e *max* sono molto più vicini alla media dopo l'eliminazione degli *spikes* dovuti ad anomalie. Il risultato delle misure rimane comunque compatibile con il precedente, essendo $g = (9.806944 \pm 0.000041) \text{m/s}^2$.



Ponendo a confronto (a pag. successiva) gli istogrammi di $|a|$ prima e dopo la pulizia dei dati si nota come l'eliminazione dei picchi renda ancora più verosimile l'approssimazione ad una gaussiana di parametri μ_a e σ_a .



2.7 Misure con $\theta \approx 30^\circ$ (smartphone inclinato)

I dati raccolti con le misurazioni in questa configurazione sono i seguenti:

	$a_x[m/s^2]$	$a_y[m/s^2]$	$a_z[m/s^2]$	$a[m/s^2]$
Media	0.120051	4.928972	8.482957	9.811723
Standard deviation	0.009742	0.009043	0.008950	0.008943
Min	0.066270	4.887398	8.449752	9.771168
Max	0.171600	4.969223	8.516914	9.847548

Per valutare i risultati della misura a partire dall'analisi dati riportiamo ancora una volta il valore medio delle misurazioni con la relativa incertezza. Possiamo stimare tale incertezza come $\sigma_{tot} = \sqrt{\frac{s_{n-1}^2}{N} + \sigma_B^2}$ dove ancora una volta, essendo invariato l'apparato strumentale, possiamo stimare $\sigma_B = \frac{10^{-6}m/s^2}{\sqrt{12}} = 2,88 \cdot 10^{-7}m/s^2$, che di nuovo si nota essere un fattore di poca influenza nella somma in quadratura rispetto a $\frac{s_{n-1}}{\sqrt{N}}$, che è dell'ordine di 10^{-5} .

Per calcolare l'angolo formato dal dispositivo con il piano orizzontale a partire dai dati raccolti abbiamo usato la seguente formula:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{a_y}{a}\right) \quad (5)$$

da cui il valore aspettato per α risulta:

$$E[\alpha] = 30.155\,203\,88^\circ (= 0.526307596rad).$$

Perciò, per calcolare la propagazione delle incertezze sull'angolo α , abbiamo applicato ancora una volta un'equazione analoga² alla 2:

²Anche in questo caso effettuiamo per semplicità un cambio di variabili: $a \rightarrow x_1$, $a_y \rightarrow x_2$.

$$\sigma_\alpha^2 = \sum_{i,j}^{1,2} \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \sigma_{i,j} \quad (6)$$

che diventa:

$$\sigma^2 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a_y} \right)^2 \sigma_y^2 + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + 2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a_y} \right) \left(\frac{\partial \alpha}{\partial a} \right) \cdot cov(a_y, a) \quad (7)$$

Considerando le derivate parziali:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial a_y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a_y^2}{a_x^2}}} \cdot \frac{1}{a}; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial a} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{a_y^2}{a_x^2}}} \cdot \frac{1}{a_x}; \quad (8)$$

E la matrice delle covarianze opportunamente scalata per $\frac{1}{N}$, considerando a_y prima variabile e a seconda:

$$\begin{pmatrix} 2.011 & 1.000 \\ 1.000 & 1.967 \end{pmatrix} \cdot 10^{-9} m^2/s^4$$

Si evince che $\sigma_\alpha = 0.0000057^\circ (= 0.000000099 rad)$.

Il risultato della misura sarà allora, rispettivamente in gradi e in radianti:

$$\alpha = (30.155204 \pm 0.001)^\circ$$

$$\alpha = (0.526307596 \pm 0.000000099) rad.$$