

Dennis Sullivan, mathématicien des analogies  
Pré-conférence dans le cadre du cycle "Un texte, une aventure  
mathématique"

Pietro Piccione

Sorbonne Université

# Sur moi

Pietro Piccione, 25 ans  
Brésilien

Université de São Paulo

- ▶ 2017 License

Sorbonne Université

- ▶ 2021 - Master (M2)
- ▶ 2022 - Doctorant chercheur

São Paulo



Université de São Paulo (USP)



# Un texte, une aventure mathématique

Société mathématique de France  
Bibliothèque nationale de France

## un texte, une aventure mathématique

**2025**

mercredi 22 janvier 18h30  
**Bertrand Toën**  
Université de Toulouse  
Les mille et une pages mathématiques  
d'Alexandre Grothendieck

mercredi 5 février 18h30  
**Barbara Schapira**  
Université de Montpellier  
Dennis Sullivan,  
mathématicien  
des analogies

mercredi 19 mars 18h30  
**Pierre Pansu**  
Université Paris-Saclay  
Cartographie conforme,  
de Gérard Mercator  
à Jacqueline Ferrand

mercredi 2 avril 18h30  
**Patricia Reynaud-Bouret**  
Université Clermont Auvergne  
Ronald Fisher versus  
Jerzy Neyman  
ou le dilemme du statisticien

**(BnF**

Bibliothèque nationale de France | site François-Mitterrand – Grand auditorium  
Quai François-Mauriac 75013 Paris – métro : Quai de la Gare ou Bibliothèque François Mitterrand  
Entrée libre sur inscription | <https://smf.emath.fr/BNF/2025>

**Société  
Mathématique  
de France**

**SMF**



## Barbara Schapira

Université de Montpellier

**“Dennis Sullivan,  
mathématicien des analogies”**

Mercredi 5 février 18h30 à la BNF

# Qui est Dennis Sullivan ?



**Nationalité :** Américaine  
**Formation :** Université de Princeton



## Prix Abel (2022)

**Contributions :** *Topologie algébrique, topologie géométrique et systèmes dynamiques.*

# Un texte

## THE DENSITY AT INFINITY OF A DISCRETE GROUP OF HYPERBOLIC MOTIONS

by DENNIS SULLIVAN

*Dedicated to the memory of Rufus Bowen*

Imagine in the hyperbolic space  $\mathbf{H}^{d+1}$  an infinite completely symmetrical array of points. We study here the distribution of these points at large distances from an observation point  $p$ . One can define the density at  $\infty$  for the array viewed from  $p$ . For each  $p$  this density is a finite measure on  $S^d$  which is proportional to a certain power of the metric on  $S^d$  associated to  $p$  by radial projection. Thus denoting the measure by  $\mu_p$ ,

$$\frac{d\mu_p}{d\mu_q} = \left( \frac{\theta(p)}{\theta(q)} \right)^\delta, \quad \text{for } p, q \text{ in } \mathbf{H}^{d+1},$$

where  $\theta(p)$  is the spherical metric associated to  $p$ . So  $\mu$  behaves like a Lebesgue or Hausdorff measure of dimension  $\delta$ .

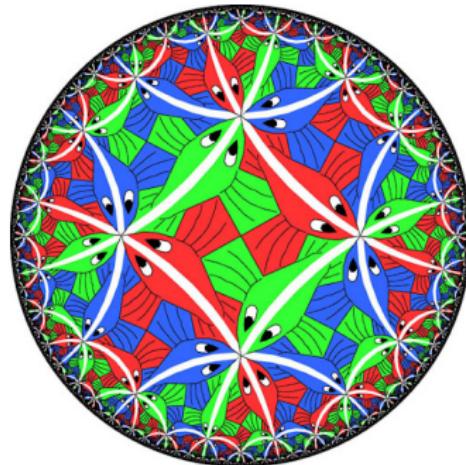
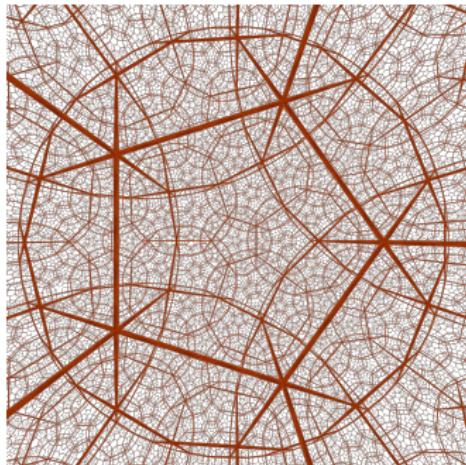
## Domaines

- ▶ Systèmes dynamiques
- ▶ Théorie de la mesure
- ▶ Géométrie hyperbolique

# Une aventure...

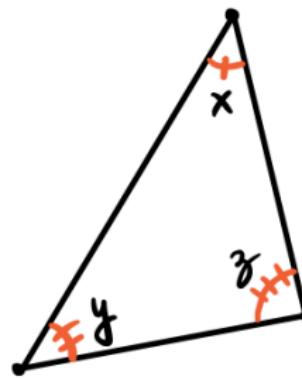
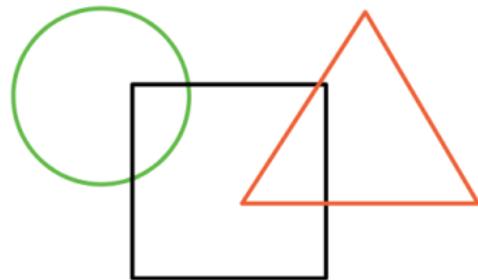
## Qu'est-ce que la géométrie hyperbolique ?

La géométrie hyperbolique est un exemple de *géométrie non euclidienne*, qui joue un rôle fondamental en mathématiques.



# Géométrie euclidienne

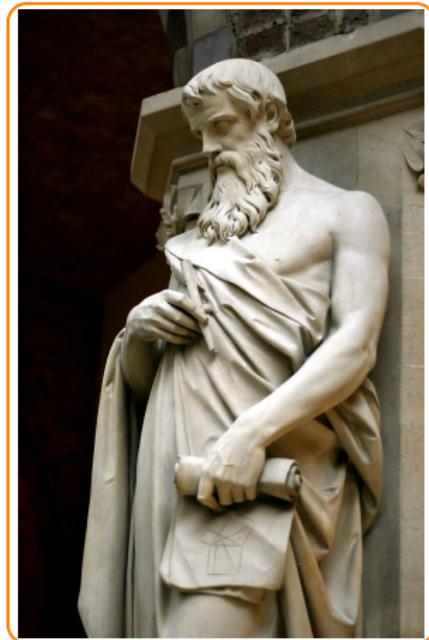
C'est la géométrie qu'on étudie à l'école.



$$x + y + z = 180^\circ$$

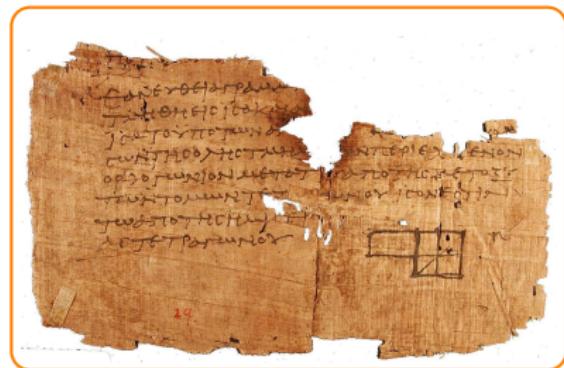
D'où vient-elle ?

# Géométrie euclidienne



**Euclide** était un  
mathématicien grec (env. 300  
av. J.-C.)

"Le père de la géométrie"



**Œuvre majeure : Les Éléments**

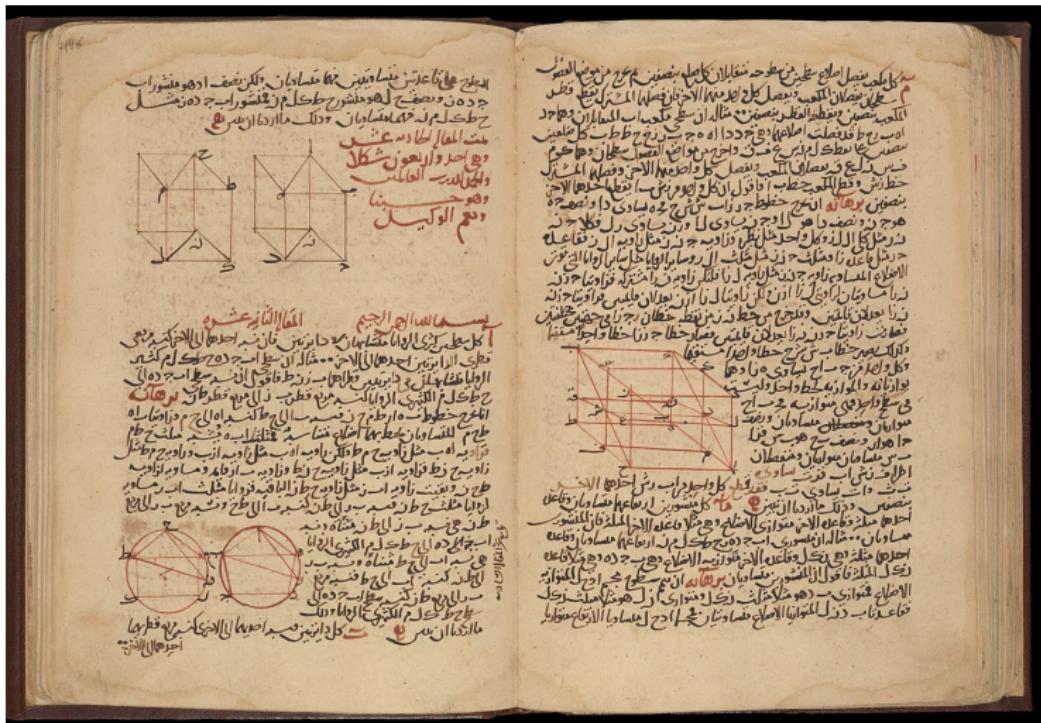
Axiomes, théorèmes et fondements  
de la géométrie.

# Les Éléments



Une preuve du théorème de Pythagore

# Les Éléments



## Traduction en arabe des Éléments. Irak, 1270.

# Les Éléments

Dans les éléments, Euclide énonce les cinq axiomes de la « géométrie ».

## Axiomes

1. Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques.
2. Un segment de droite peut être prolongé indéfiniment en une ligne droite.

3. Étant donné un segment de droite quelconque, un cercle peut être tracé en prenant ce segment comme rayon et l'une de ses extrémités comme centre.
4. Tous les angles droits sont congruents.
5. Axiome des parallèles.

## Axiomes



# Axiome des parallèles

## Controversé

Les mathématiciens pensait qu'il était impliqué par les quatre autres axiomes.

Des tentatives de démonstration de l'axiome du parallèle ont eu lieu jusqu'au **19ème siècle**.

Jusqu'à la découverte de la géométrie hyperbolique...



Carl Friedrich Gauss



Nikolai Lobachevsky



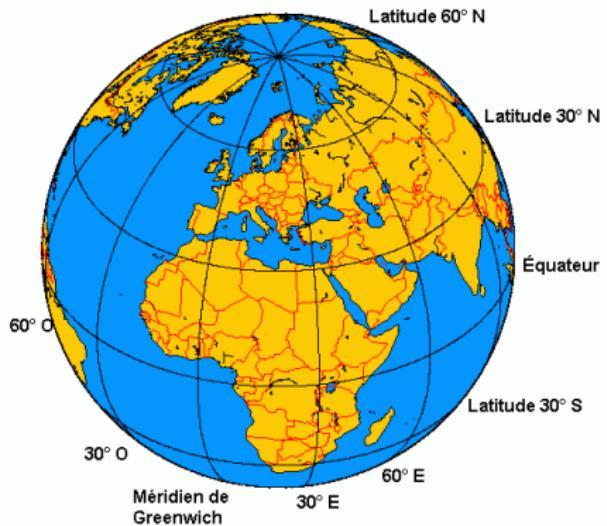
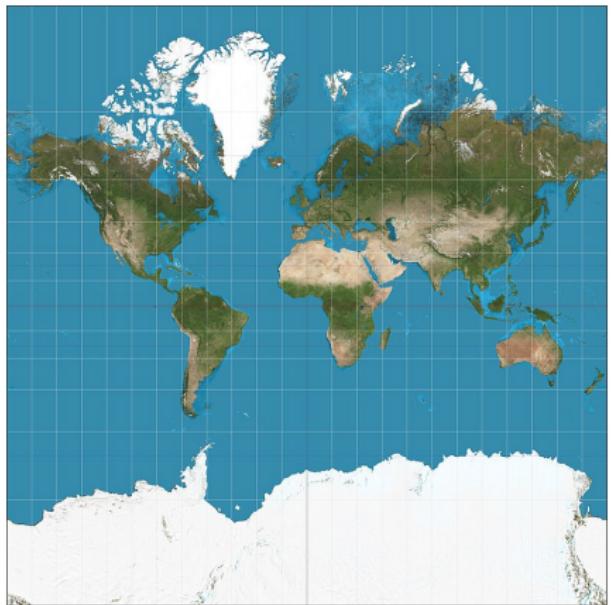
János Bolyai

## Question

Pouvez-vous trouver un exemple de « géométrie » où des lignes parallèles se rencontrent ?

Cartes du monde !!

Tous les méridiens se croisent aux pôles :



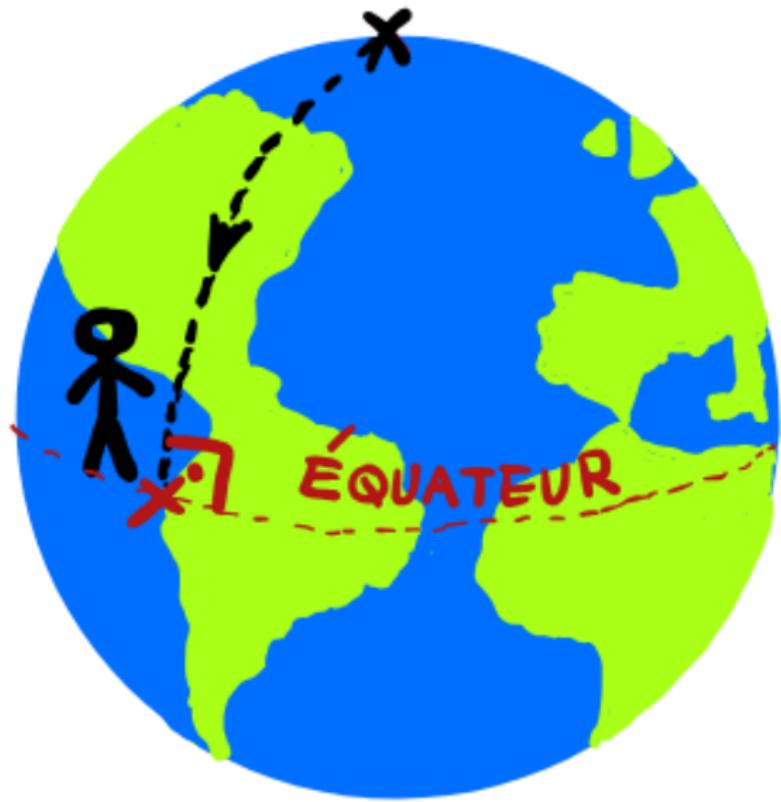
# Géométrie sphérique

## Géométrie sphérique

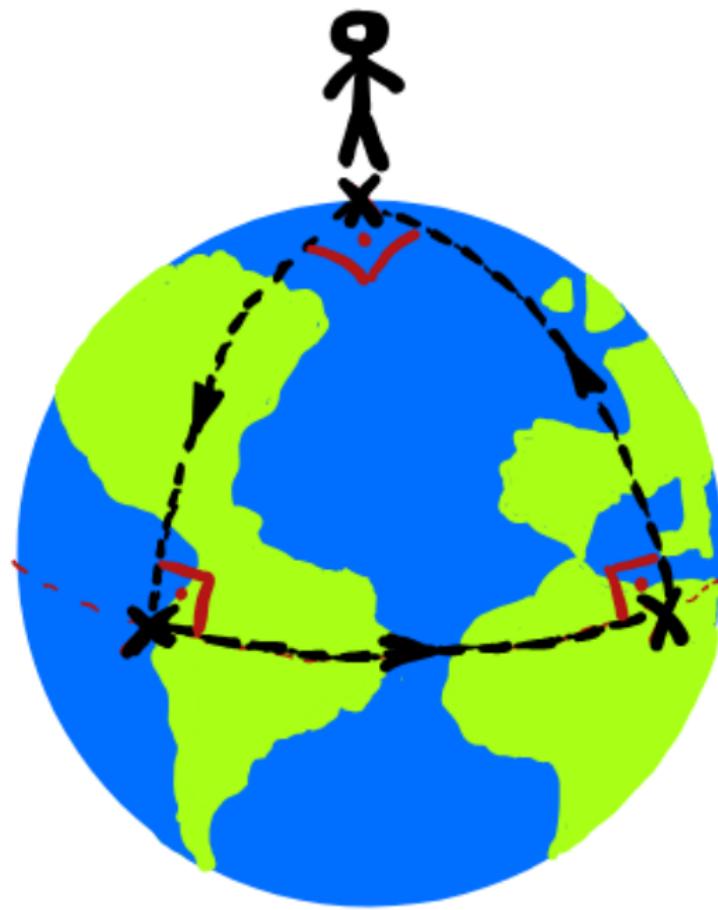
Il s'agit d'un autre type de géométrie. Dans la sphère, les quatre premiers axiomes d'Euclide sont satisfaits, mais pas le 5e.

La géométrie sphérique offre différents phénomènes géométriques :









# Géométrie sphérique

- ▶ La somme des angles internes d'un triangle est supérieure à  $180^\circ$ .
- ▶ Parfois, les lignes droites ne sont pas les chemins les plus courts !

# Les cartes peuvent encore nous aider

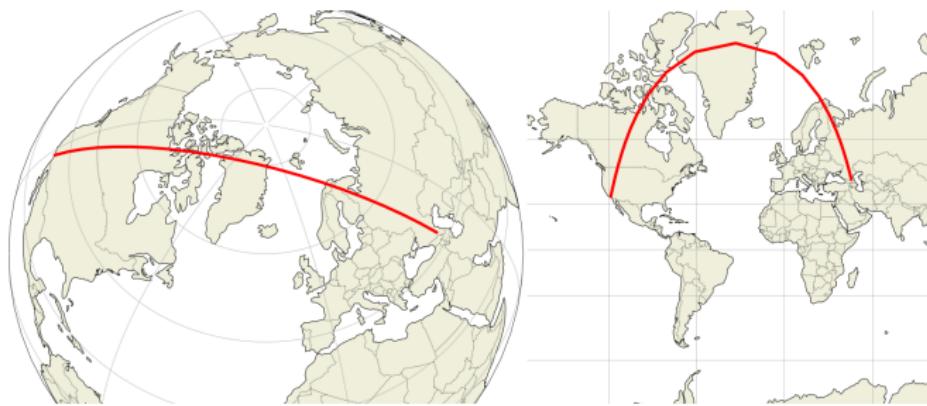
Les avions parcourent le chemin le plus court entre deux villes.  
Mais alors, comment expliquer cette image ?



# Géométrie sphérique

## Réponse

Sur les cartes, les chemins les plus courts ne sont pas toujours des droites.



On dit que le chemin le plus court entre deux points est une *géodésique*.



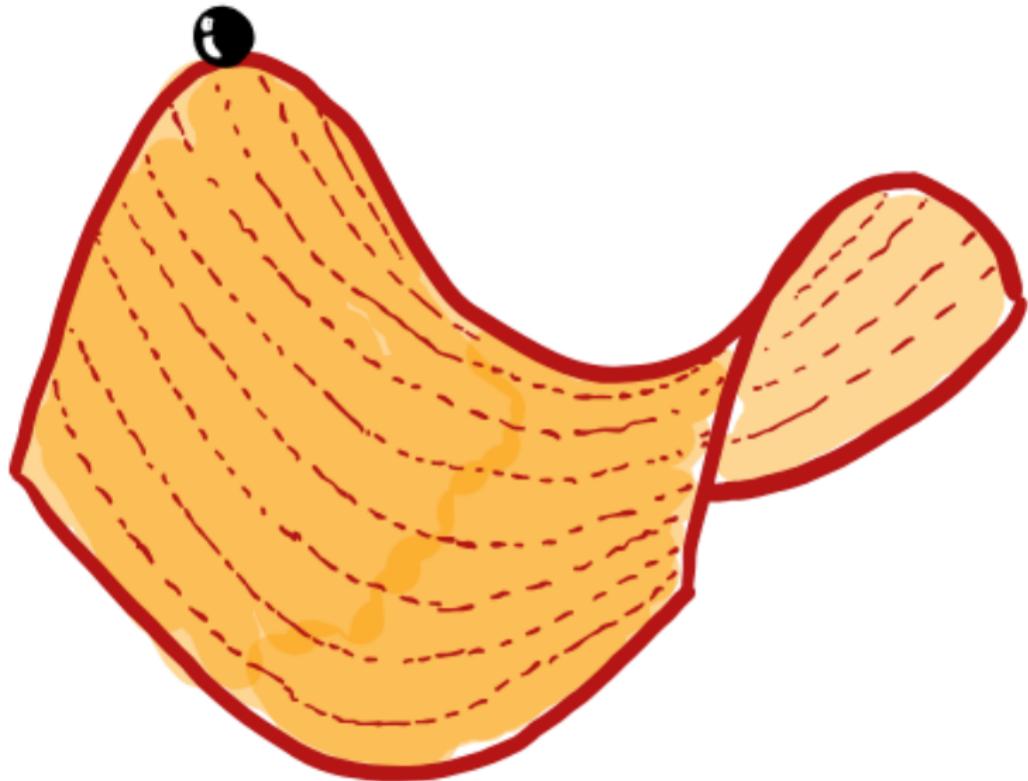
# Autres géométries ?

## Question

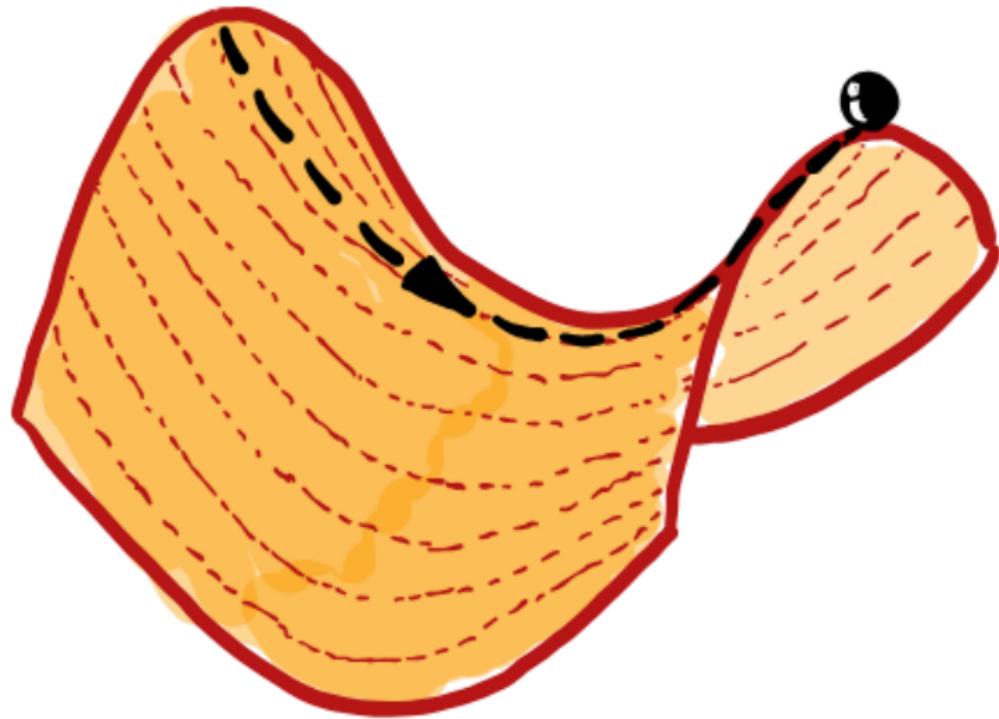
Existe-t-il d'autres géométries que les géométries euclidienne et sphérique ?

Oui,...

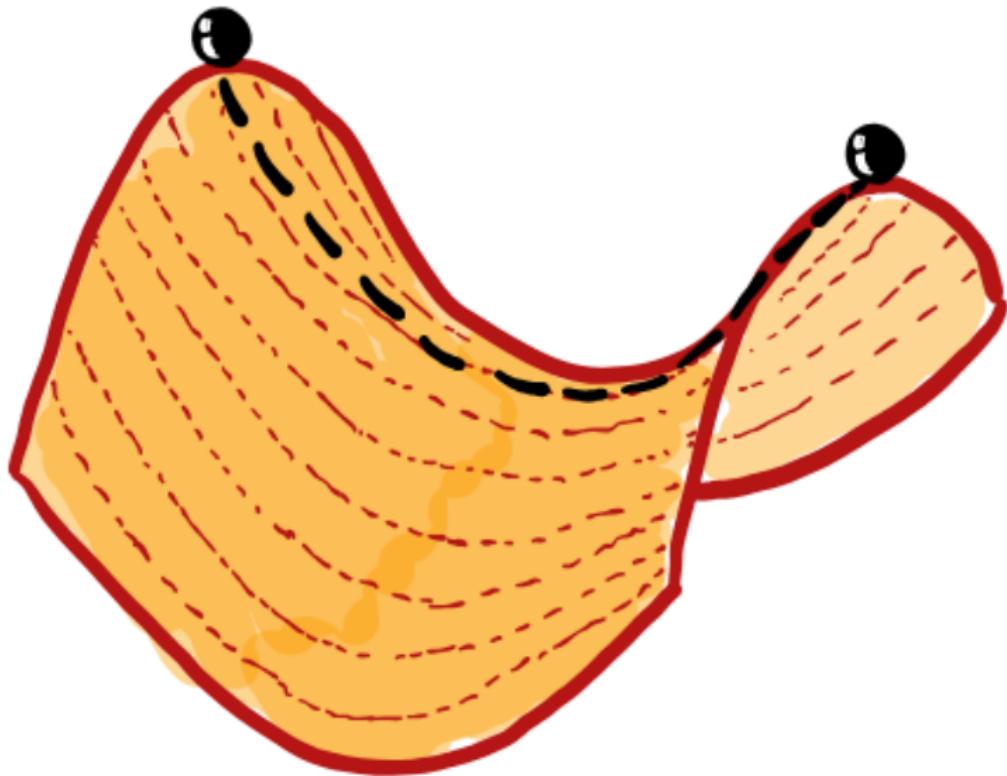
# Géométrie hyperbolique



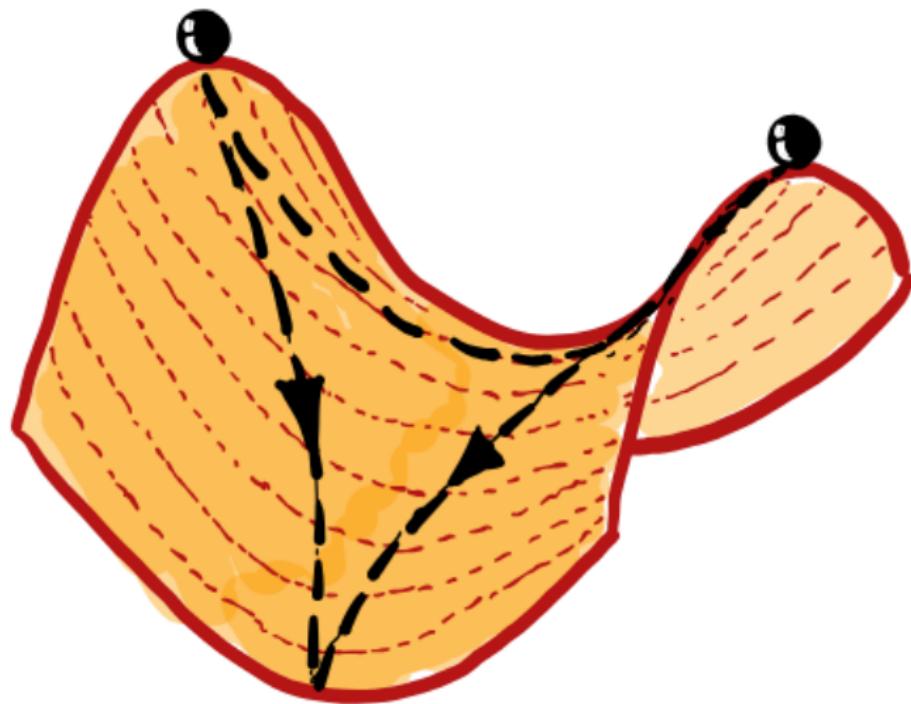
# Géometrie hyperbolique



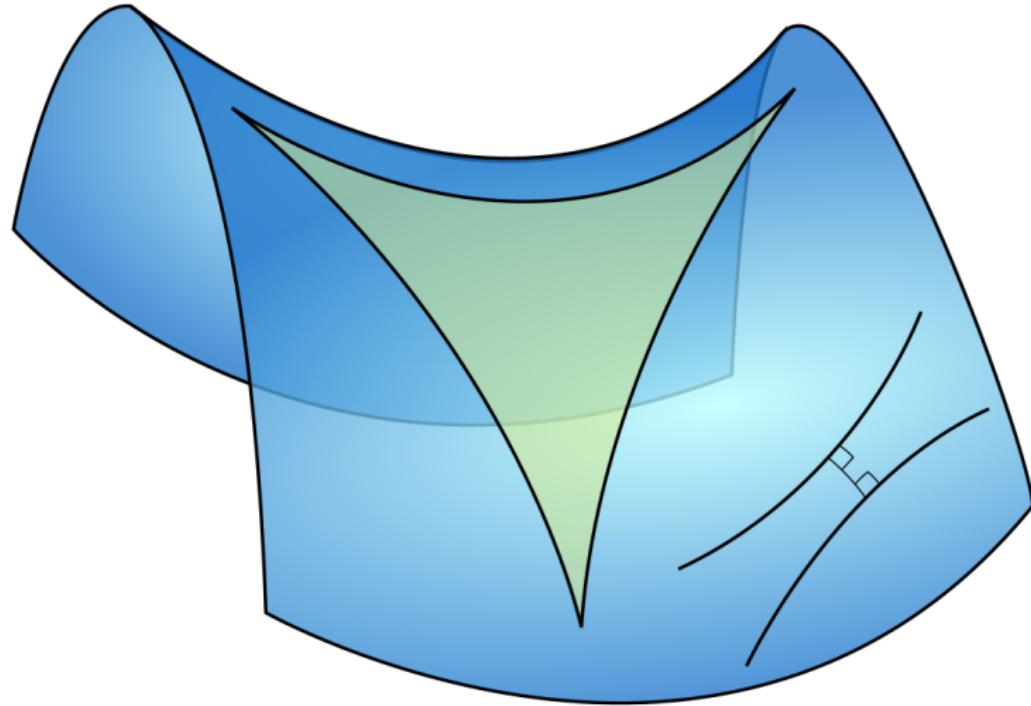
# Géométrie hyperbolique



# Géométrie hyperbolique



# Géométrie hyperbolique



# Géométrie hyperbolique

Ce dernier exemple correspond à la géométrie hyperbolique.  
L'objet le plus élémentaire de la géométrie hyperbolique est appelé *espace hyperbolique*.

Il s'agit d'un autre type de géométrie qui n'est pas euclidienne, puisqu'elle ne respecte pas le 5ème postulat d'eulide.

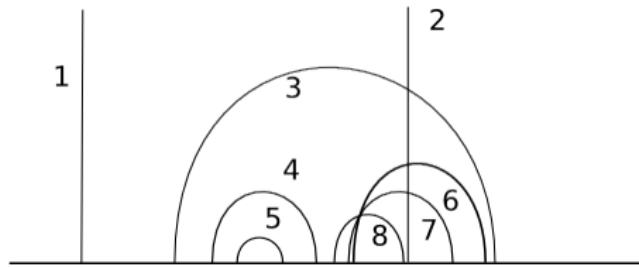
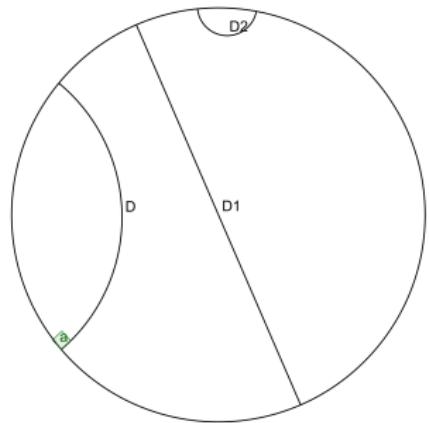
## Différences

- ▶ La somme des angles internes d'un triangle est inférieure à  $180^\circ$
- ▶ Comment sont les lignes parallèles ?

Pour répondre à cette question, il nous faut des cartes !

# Géometrie hyperbolique

L'espace hyperbolique, comme la sphère, admet différents types de cartes, dont deux principaux :

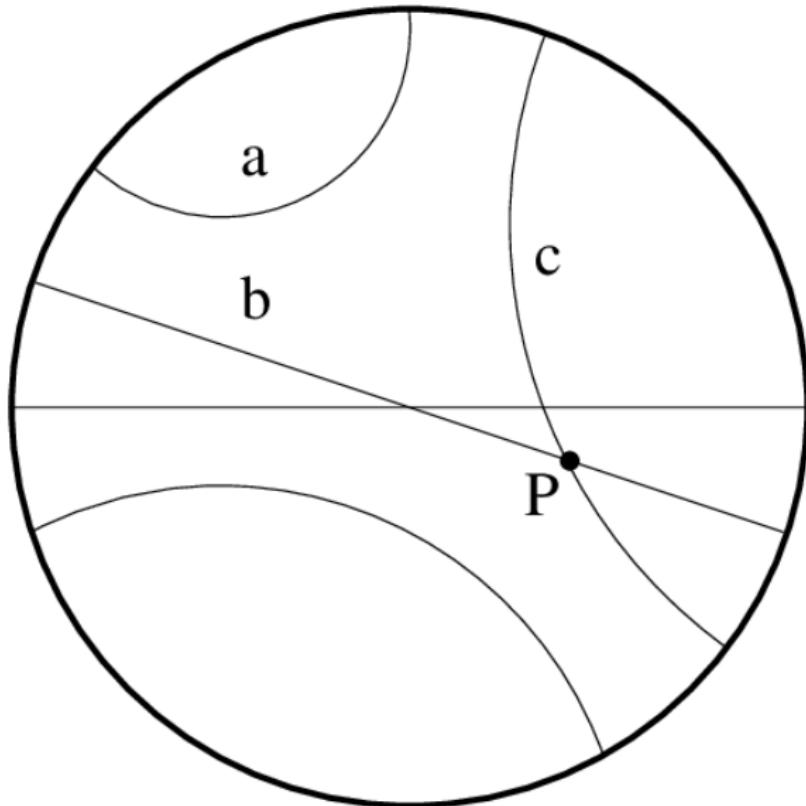


Au plus près de la frontière, les distances deviennent de plus en plus grandes.

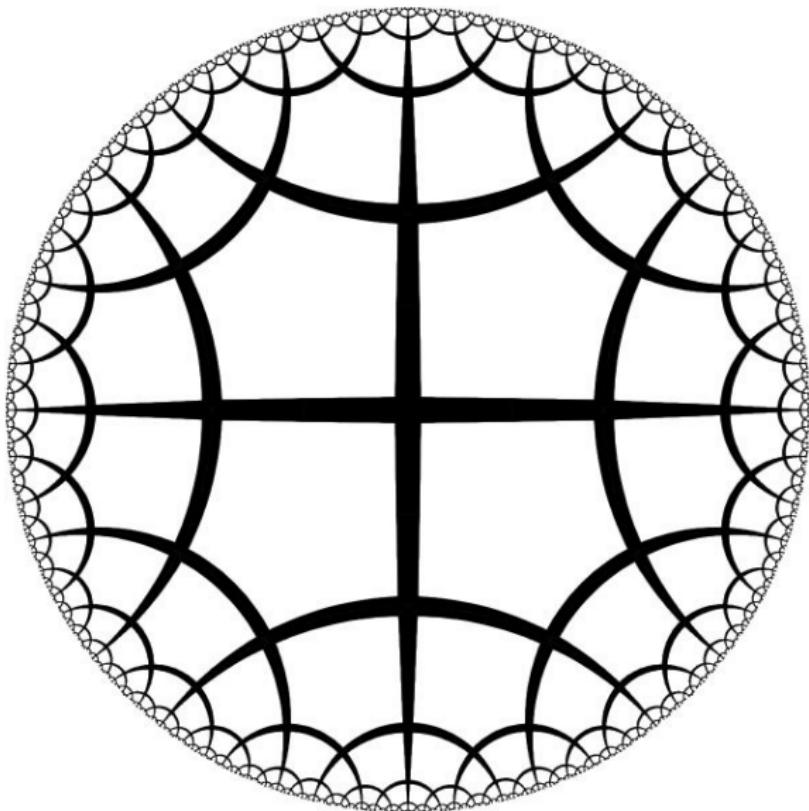
## Géometrie hyperbolique

- ▶ Lignes parallèles se distancient les unes des autres

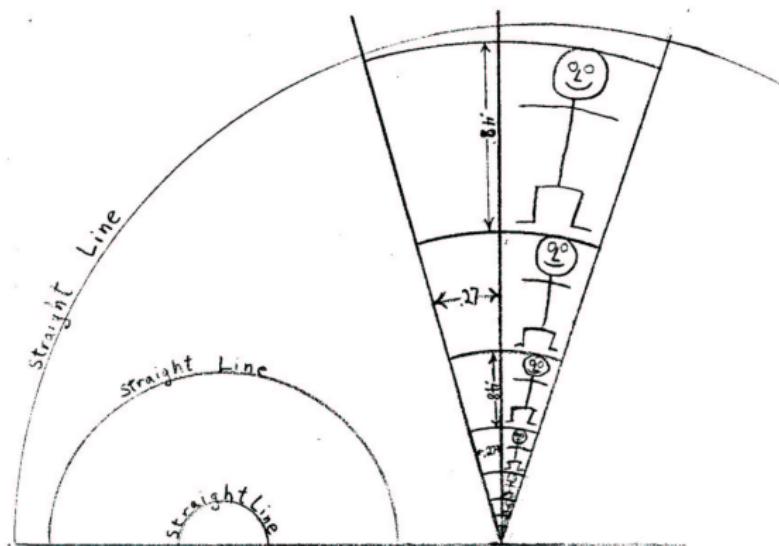
Quels sont les géodésiques dans le plan hyperbolique ?



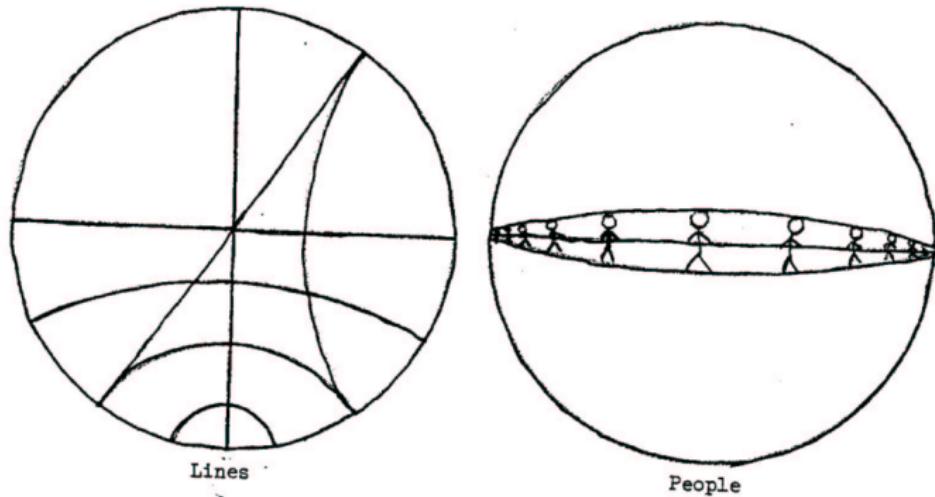
Quels sont les géodésiques dans le plan hyperbolique ?



# Quels sont les géodésiques dans le plan hyperbolique ?



# Quels sont les géodésiques dans le plan hyperbolique ?



Est-ce qu'il y a d'autres types de géométries ?

Théorème (uniformisation)

Ce sont toutes les géométries possibles en dimension 2.

# Examples

Géometrie sphérique

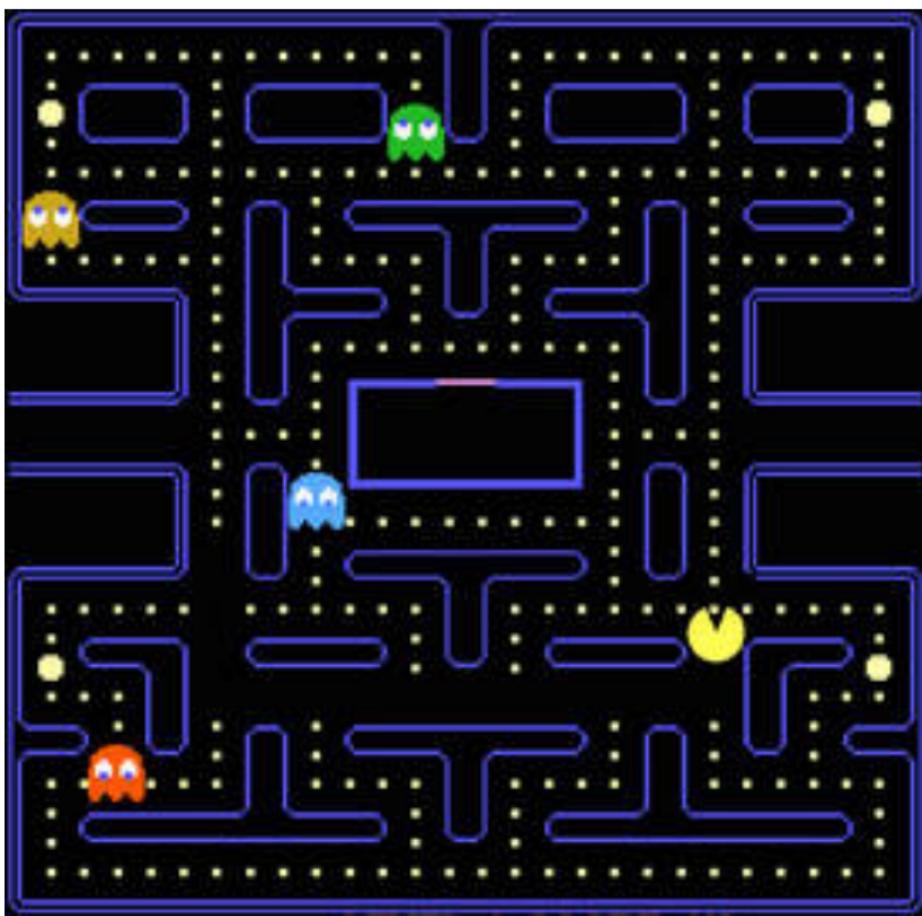
La sphère est le seul exemple.

Géometrie euclidienne

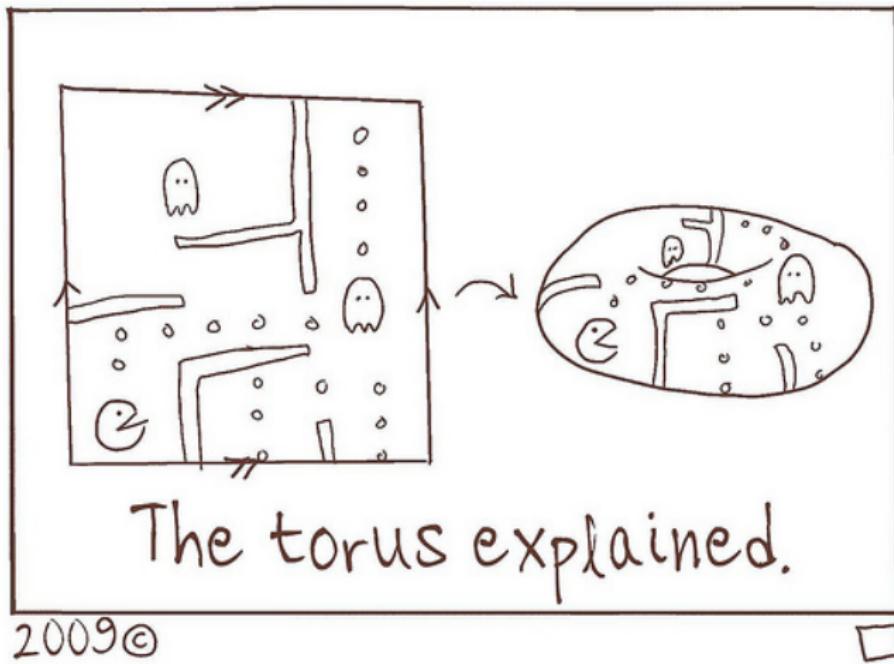
Le plan, et Pacman...

Pacman ?

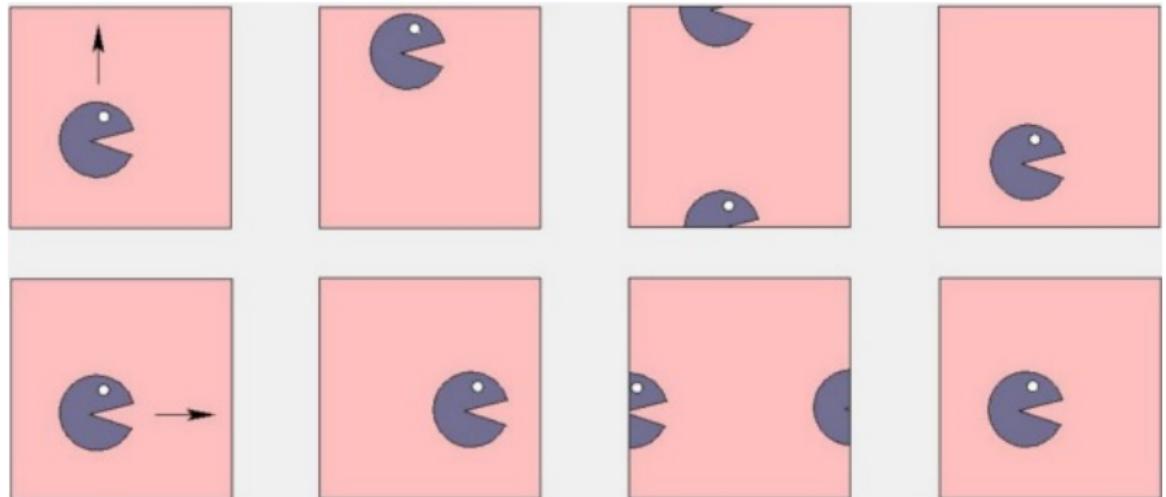
Pacman est un donut



Pacman est un donut



Un donut est plat



Le nom mathématique de cet objet est le *tore*.

# Examples

## Géometrie sphérique

La sphère est le seul exemple.

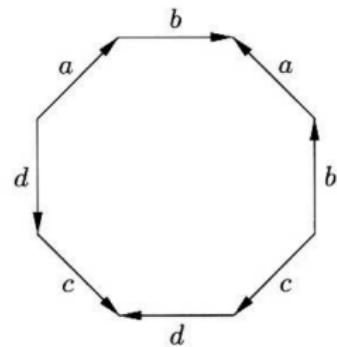
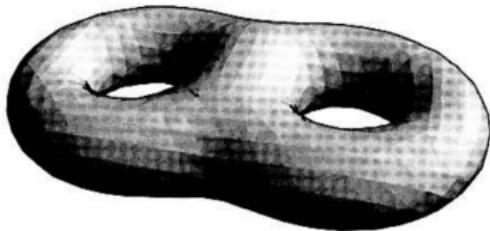
## Géometrie euclidienne

Le plan, et les tores.

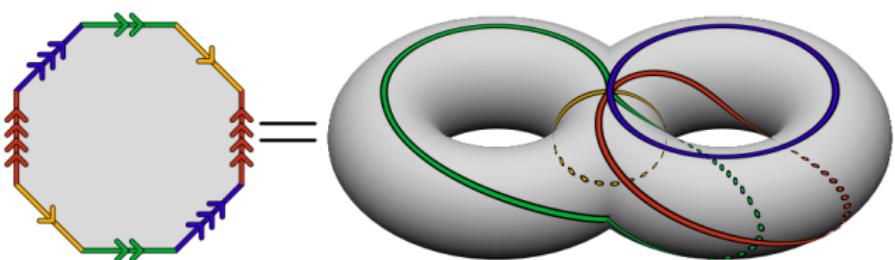
## Géometrie hyperbolique

L'espace hyperbolique et ses *quotients* (?!?)

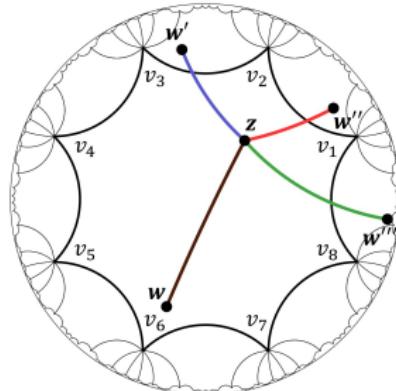
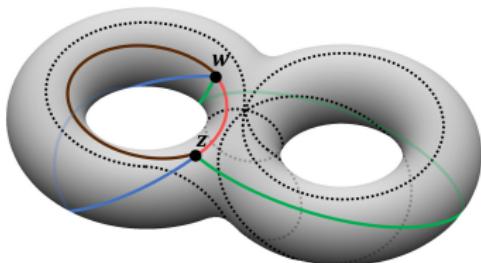
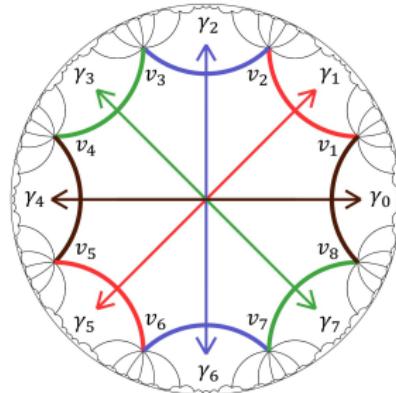
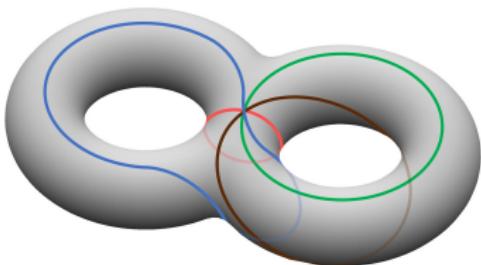
# Quotients



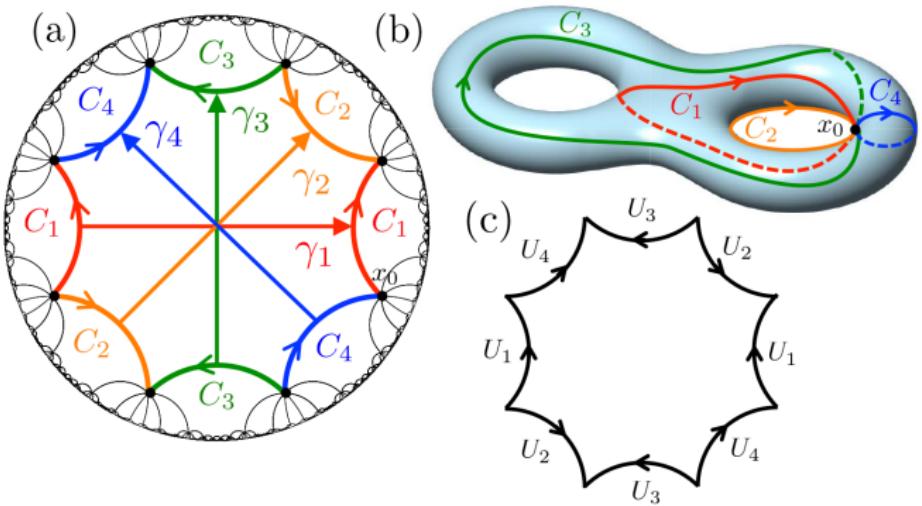
# Quotients



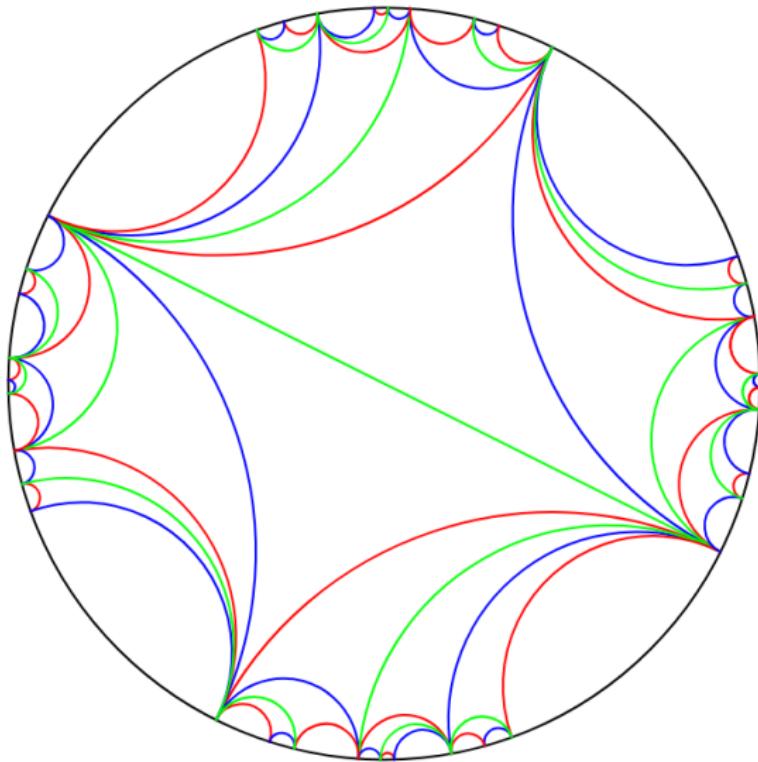
# Quotients



# Quotients



# Quotients



# Phénomènes insolites de la géométrie hyperbolique

Ces surfaces sont appelées *surfaces hyperboliques*.

## Question

Quelles sont les géodésiques d'une surface hyperbolique ?

## L'argument de Hopf

Sur une surface hyperbolique d'aire finie, une trajectoire géodésique choisie au hasard va, en général, parcourir toute la surface. De plus, elle passe plus de temps dans les régions plus grandes, en proportion de leur aire.

Merci beaucoup !

Muito obrigado !