

基于计算几何的海域地形分析及多波束测深优化模型

摘要

针对多波束测线测深问题，本文从相关理论知识入手，详细分析了在**三维和二维上的几何特征**。针对问题一建立了**二维等距测线测深模型**、针对问题二建立了**三维等距测线测深模型**、针对问题三建立了**最优测线长度模型**、针对问题四建立了**复杂海底地形测深模型**。同时，本文提供了两种在不同目标下的测线分布规划设计方案，其中一种有较高的测量完整度；另一种效率高，对各种海底地形有良好的普适性。设计方案成功在一些实际问题上取得较好成果。

针对问题一，首先根据沿测线方向的**测深剖面图**入手，深入发掘其几何性质。再利用**计算几何**的知识建立相关量的函数关系式，建立**二维等距测线测深模型**。最后结合 matlab 对相关数据进行精确求解。

针对问题二，首先根据测线在实际情况可以为任意方向，建立**三维测线实际方位示意图**。再以测线垂直面进行剖切处理，建立**三维等距测线测深模型**。讨论发现，问题一的模型是问题二的特殊情况。所以，我们对一些特征量结合几何关系进行转换，将特殊变一般，能成功把问题一的模型普遍化，从而建立问题二的模型。最后结合 matlab 对降维化的问题二进行求解。此外，我们通过对结果的分析，设计出了**两种测线规划**，对解决实际问题有较大帮助。

针对问题三，对于测量长度这一优化目标，我们分别通过查阅文献、建立**测线方向分析模型**，对测线方向的选择进行分析和证明。得出了最优测线的选择方向，将问题降为**二维处理**。最后建立**最优测线长度模型**，通过**迭代算法**设计最小重叠率的间距，使测量长度最短。

针对问题四，首先根据海域深度图进行可视化分析，建立**复杂海底地形测深模型**，分析出一些地形特点。再对海域进行分割。经过这样的简化，使其降维为模型三。最后对分割后的海域进行测线布设求解。

关键字： 多波束测深 迭代算法 计算几何

目录

一、 问题重述	4
1.1 问题背景	4
1.2 问题的提出	4
二、 模型的假设	4
三、 符号说明	5
四、 问题分析	5
4.1 问题一的分析	5
4.2 问题二的分析	5
4.3 问题三的分析	6
4.4 问题四的分析	6
五、 模型的建立与解决	6
5.1 修正定义情况说明	6
5.1.1 关于覆盖宽度 W 的解释说明	6
5.1.2 关于覆盖率 η 解释说明	6
5.2 问题一模型	7
5.2.1 几何关系分析	7
5.2.2 二维等距测线测深模型建立	8
5.2.3 模型求解	8
5.2.4 结果分析	9
5.3 问题二模型	9
5.3.1 几何关系分析	9
5.3.2 三维等距测线测深模型建立	9
5.3.3 模型求解	11
5.3.4 结果分析	11
5.4 问题三模型	13
5.4.1 基于国家标准的测线形状和方向分析	13
5.4.2 基于几何的测线方向分析	14
5.4.3 最优测线长度模型建立	16
5.4.4 模型求解	17
5.4.5 结果分析	17

5.5 问题四模型.....	18
5.5.1 数据分析与几何关系分析	18
5.5.2 复杂海底地形测深模型建立	19
5.5.3 模型求解	20
5.5.4 结果分析	21
六、 模型的改进	21
七、 模型的优缺点	22
7.1 模型的优点	22
7.2 模型的缺点	22
7.3 模型的推广	22
附录 A 问题一代码–matlab 源程序	24
附录 B 问题二代码–matlab 源程序.....	24
附录 C 问题三中心线左侧代码–matlab 源程序	25
附录 D 问题三中心线右侧–matlab 源程序	26
附录 E 问题四部分代码（详细见支撑材料）–matlab 源程序	27
附录 F 构建三维立体图–python 源程序.....	28

一、问题重述

1.1 问题背景

单波束测深是一项通过声波在水中传播特性来测量水体深度的技术。原理如下：声波在均匀介质中作匀速直线传播。当遇到海底平面时，声波发生反射，测量船可接受到反射波信号，并记录声波发射到接受的传播时间。通过声波在海水中的传播速度和传播时间，即可测出海水深度。但由于单波束测量过程中使用的是单点连续的测量方法，使得沿航迹的数据密集，且在测线间时没有数据的。

多波束探测系统相比于单波束系统，该系统在于航迹垂直的平面内一次发射出多个波束，再由接收机接收从海底返回的声波。多波束测深系统克服了单波束测深的缺点，在海底平坦的海域内，能够测量出以测量船为轴线且具有一定宽度的全覆盖水深条带。

多波束测深条带的覆盖宽度 W 随换能器开角 θ 和水深 D 的变化而变化。若测线相互平行且海底地形平坦，则相邻条带之间的重叠率定义为 $\eta = 1 - \frac{d}{W}$ ，其中 d 为相邻两条测线的间距， W 为条带的覆盖宽度。若 $\eta < 0$ ，则表示漏测，为保证测量的便利性和数据的完整性，相邻条带之间应有 10% ~ 20% 的重叠率。

1.2 问题的提出

问题一：当测线方向与坡面法线投影垂直且坡度为 α 时。请建立多波束测深的覆盖宽度 W 及相邻条带 η 之间重叠率的数学模型。同时，带入给一些设计好的数值，解出目标函数的结果，并保存在文件中。

问题二：当测线方向与坡面法线投影夹角为 β 且坡度为 α 时。请建立多波束测深的覆盖宽度 W 的数学模型。同时带入给一些设计好的数值，解出目标函数的结果，并保存在文件中。

问题三：在一个数据已知的矩形海域内，设计一组测量长度最短、可完全覆盖整个待测海域的测线，并且相邻条带之间的重叠率可满足 10% ~ 20% 的要求。

问题四：在一个用单波束测量深度的实际海域内，设计多波束测量船的测量布线。

二、模型的假设

- 海平面与地面平行
- 声波在海水中匀速直线传播

三、符号说明

表 1 本文所用符号的相关说明与解释

符号	意义	符号	意义
W_i	覆盖宽度	D_i	当前位置 i 的水深
η_i	在第 i 条航线上的重叠率	d_i	第 i 条航线与中心点的距离
w_{il}	在第 i 条航线左半部海底坡面长度	l_{sum}	测线总长度
w_{rl}	在第 i 条航线右半部海底坡面长度	l_i	第 i 条测线长度
α	坡度	WE	东西方向海域长度
α'	测线方向上的坡度	NS	南北方向海域长度
θ	换能器开角	n	测线数量
β	测线方向与坡面法相投影的夹角		

四、问题分析

4.1 问题一的分析

该问的本质是一个运用方程对几何问题的求解。通过建立三维示意图可知，当航行方向与坡面法线垂直时，覆盖宽度 W 大小始终不变。考虑到这一特殊性质，我们将模型进行降维处理，可以画出模型二维示意简图。通过固定一些已知参数，并运用几何关系、正弦定理等算术方法，解出我们所需要的目标函数方程，从而建立目标函数覆盖宽度 W 及相邻条带之间重叠率 η 的数学模型。此后，带入题目中所给的特殊值，最终可计算出结果。

4.2 问题二的分析

该问的本质是问题一的复杂化。通过建立三维示意图可知，发现当航线方向与坡面发现存在夹角 β 时，覆盖宽度 W 会随着移动位置的变化而变化。基于此规律，我们沿航线方向进行剖切处理，发现其剖面图与问题一构建的模型图类似，但坡度 α' 、水深 D 未知。因此，我们可以利用立体几何关系，解出需要的未知量，并将其带入问题一建立的数学模型，即可构建出问题二的数学模型。此后，带入题目中所给的特殊值，最终可计算出结果。

4.3 问题三的分析

该问的本质是如何确定测线的方向和测距。首先应该寻找使测量长度最短时的测线的方向。我们可以找出测量长度与测线方向的函数关系，通过寻找函数极值来计算测线的最优方向，将问题降维为问题二，再根据测线的重叠率使用迭代算法规划每条测线与其相邻测线的间距，最后解得最优的测线布设情况和最短测量长度。

4.4 问题四的分析

该问的本质是对复杂海域的分析与简化。由于实际海域的海底坡面不再是斜平面，需要对海域进行可视化处理。找出其水深在几何上的分布规律与对称性，将海域划分为几个具有共同性质的不同海域。再将其海底近似为斜平面，将问题四降维为问题三。最后通过问题三模型求出测线布设情况、最小测线长度等。

五、模型的建立与解决

5.1 修正定义情况说明

5.1.1 关于覆盖宽度 W 的解释说明

题目中仅对测线相互平行且海底地形平坦情况下的覆盖宽度 W 进行解释，若海底平面于地面存在一定夹角时，则会对 W 产生一定误解，即：一为海底坡面的长度，二为海底坡面于地面投影的长度。由于在假设中说明海平面平行于地面，所以，本模型对覆盖宽度 W 的定义确定为第二种，即海底坡面于地面投影的长度。如图1所示，公式为：

$$W_i = (w_{il} + w_{ir}) * \cos \alpha \quad (1)$$

5.1.2 关于覆盖率 η 解释说明

题目中仅对测线相互平行且海底地形平坦情况下的覆盖宽度 η 进行解释，当海底平面于地面存在坡度时，处于不同海底深度测探船扫描出的覆盖宽度 W 不同。当 $w_{(i-1)l} + w_{ir} > d_i$ 时，出现覆盖宽度重叠的现象，重叠率 $\eta_i > 0$ ；当 $w_{(i-1)l} + w_{ir} < d_i$ 时则会出现漏测现象， $\eta_i < 0$ ，如图1所示。因此 η_i 可以改进为以下定义：

$$\eta_i = 1 - \frac{d}{w_{(i-1)r} + w_{il}} \quad (2)$$

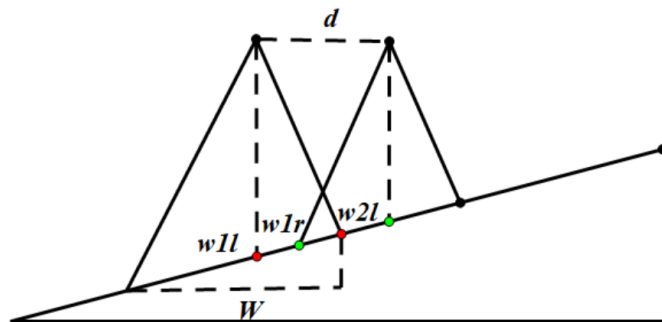


图 1 修正定义

5.2 问题一模型

5.2.1 几何关系分析

根据题意可知，测线的方向与海底坡面、平面均平行。每条测线上的船只均在海底坡面上形成一个扇区的探测范围，探测范围与海底坡面相交形成探测区域。由此，我们在测线的垂直面上进行剖视降维处理，得到一个简化的剖面图，将二维的探测区域简化为了一维的覆盖宽度 W ，如图2所示。其中 θ 为多波束换能器的开角， α 为坡度， d 为两船之间的距离， D_i 、为第 i 条船所处海水深度， w_{il} 、 w_{ir} 分别为船左右扫描的边界到中心点的坡面距离。

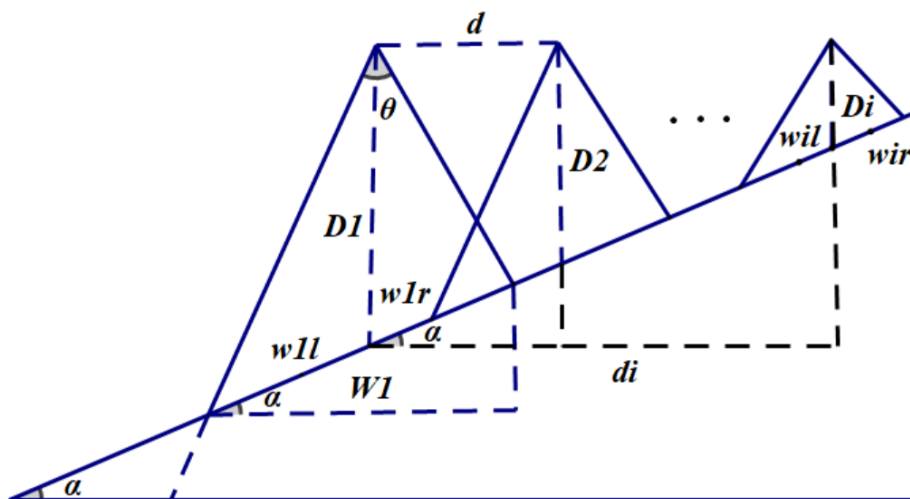


图 2 问题一简化剖面图

通过对剖面图的分析可知，相邻两条测线的覆盖宽度 W 和测线间的相对位置会对海底的探测效率有一定的影响。测线间的相对位置可以转化为每条测线 i 距离海域中心

点的距离 d_i 。当相邻测线的覆盖宽度有重叠时，会导致重复测量，重叠部分越多，探测效率就越低，如图4；而覆盖宽度无重叠时，会导致有部分区域未被测量，称为漏测，如图4。覆盖宽度 W_i 与测线 i 处的海水深度 D_i 有关：当 D_i 越深时， W_i 越大；测线间的相对位置 d_i 越大，则重复测量的部分就越少。

5.2.2 二维等距测线测深模型建立

首先, 通过几何关系可知, 第 i 条测线的水深 D_i 与距离海域中心点的距离 d_i 和坡度 α 有如下关系, 其中 D_0 为海域中心点水深:

$$D_i = D_0 - d_i * \tan \alpha \quad (3)$$

通过几何分析, 由正弦定理易知 w_{il} 、 w_{ir} 与 D_i 的几何关系:

$$\begin{cases} \frac{D_i}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} = \frac{w_{il}}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\ \frac{D_i}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} = \frac{w_{ir}}{\sin(\frac{\theta}{2})} \end{cases} \quad (4)$$

在前文中对模型中进行了定义修正, 所以覆盖宽度 W_i 、重叠率 η_i 两个求解公式如等式(1)、等式(2)所示。

5.2.3 模型求解

将等式(1), (2), (3)带入, 可解得覆盖宽度 W_i 关于 α 、 θ 的函数关系式为:

$$W_i = \frac{D_i \sin \theta \cos^2 \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) \cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \quad (5)$$

将等式(1), (2), (4)带入, 可解得重叠率 η_i 关于 α 、 θ 的函数为:

$$\begin{cases} D_i = D_0 - d_i * \tan \alpha \\ \frac{D_i}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} - \alpha)} = \frac{w_{il}}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\ \frac{D_i}{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} + \alpha)} = \frac{w_{ir}}{\sin(\frac{\theta}{2})} \\ \eta_i = 1 - \frac{d}{w_{(i-1)r} + w_{il}} \end{cases} \quad (6)$$

上述分别为距离海域中心 i 处水深 D_i , 覆盖宽度 W_i , 重叠率 η_i 的计算公式。通过几何上分析: 当水深越深时, 覆盖宽度越大; 在侧线间距离 d 一定时, 重叠率也越大。所以在水深处容易出现重叠率过高的情况, 而在水浅处容易出现漏测。

5.2.4 结果分析

将已知参数带入公式中，使用 matlab 求解，即可求得各类结果，并填入 excel 表中。结果如下：

表 2 问题 1 的计算结果

测线距中心点处的距离/m	-800	-600	-400	-200	0
海水深度/m	90.9487	85.7116	80.4744	75.2372	70
覆盖宽度/m	315.7051	297.5256	279.3460	261.1665	242.9870
与前一条测线的重叠率/%	——	34.68	30.56	25.88	20.53

测线距中心点处的距离/m	200	400	600	800
海水深度/m	64.7628	59.5256	54.2884	49.0513
覆盖宽度/m	224.8074	206.6279	188.4484	170.2688
与前一条测线的重叠率/%	14.34	7.11	-1.46	-11.77

我们可以发现，在该条件下：当海水深度越大时，覆盖宽度越大，与前一条测线的也重叠率越大，整体呈现正相关趋势。

5.3 问题二模型

5.3.1 几何关系分析

根据题意，船只不再仅仅沿与海底坡面的法向在水平面上投影垂直的方向移动。所以，沿测线垂直面做剖面图时，其角度将不再与模型一中的 α 相同，如图4。针对不同的测线方向与海底坡面的法向在水平面上投影的夹角 β ，有不同的 $\alpha' = f(\beta)$ 。此时沿测线垂直面做剖面图，如图3。可以发现与模型一相同，即可转化为对模型一的求解。在模型一中覆盖宽度 W 由 α' 和水深 D 决定，所以我们可以利用测量船距海域中心点处的距离 $Distan_i$ 计算出水深 D_i 的改变量 ΔD_i ，综上所述即可得出覆盖宽度 W 的取值。

5.3.2 三维等距测线测深模型建立

首先我们计算 α' 与 β 的关系。通过几何关系转化，我们对三维图进行化简，得到图4. 我们可以发现，航线与水平面之间的夹角 α' 之间的关系为：

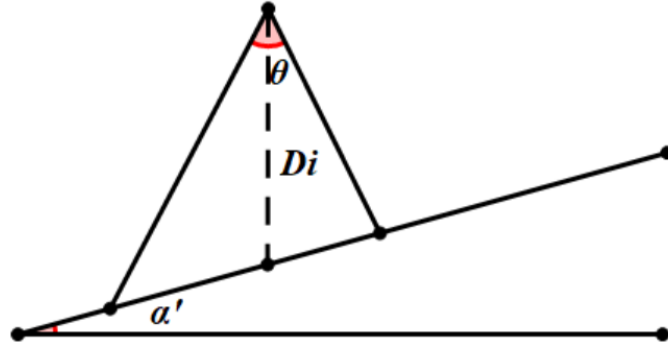


图3 模型二剖面图

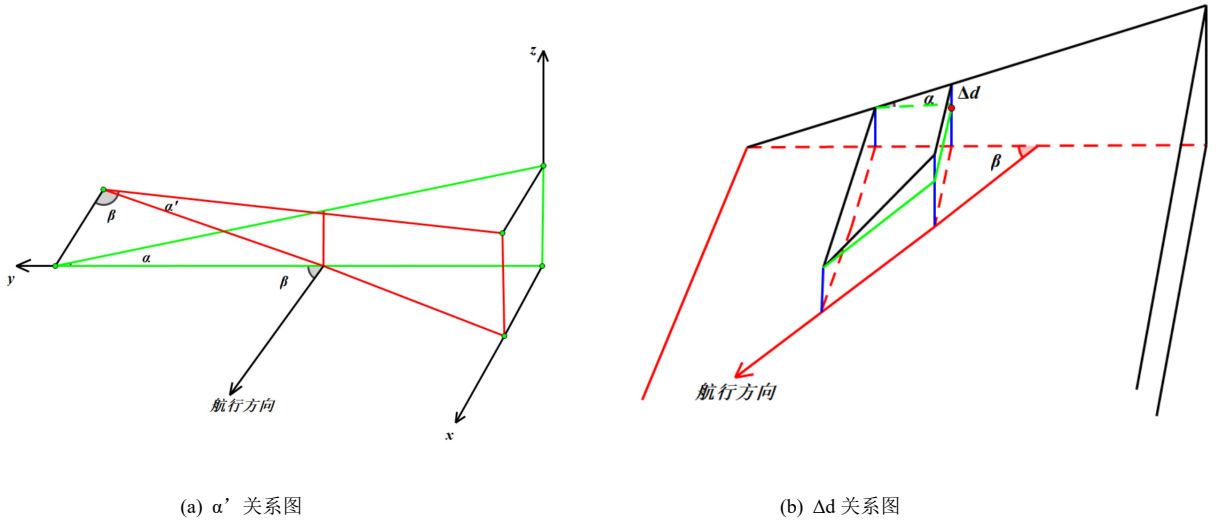


图4 关系对照图

$$\alpha' = \arctan(\tan \alpha \sin \beta) \quad (7)$$

我们对公式进行分析可知：由于 $\sin \beta < 1$, 所以 $\alpha' < \alpha$ 。

水深的改变量 ΔD_i 与海面坡度 α 、测线角度 β 的关系为：

$$\Delta D_i = \tan \alpha \cos \beta \text{Distan}_i \quad (8)$$

则水深 D_i 的关系式为：

$$D_i = D_0 + \tan \alpha \cos \beta \text{Distan}_i \quad (9)$$

5.3.3 模型求解

经过处理之后的模型二可以转化为模型一求解，将等式(7)，(9)，带入模型一的等式(5)，即可求得模型解为：

$$\begin{cases} \alpha' = \arctan(\tan \alpha \sin \beta) \\ D_i = D + \tan \alpha \cos \beta \text{Distan}_i \\ W_i = \frac{D_i \sin \theta \cos^2 \alpha'}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha') \cos(\frac{\theta}{2} - \alpha')} \end{cases} \quad (10)$$

特殊情况当 $\beta = \pi/2$ 时， $\alpha' = \alpha$ ，则完全与模型一相同，所以模型一是模型二的特例，与图3中表现一致。

5.3.4 结果分析

将参数带入公式中，可得出问题二的求解。计算结果如下图5所示，并将其将其制成可视化图片，如图所示6。

覆盖宽度/m		测量船距海域中心点处的距离/海里							
		0	0.3	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8	2.1
测线 方向 夹角 β°	0	415.69	466.9	516.49	566.89	617.29	677.69	718.09	768.48
	45	416.12	451.79	487.47	523.14	558.81	594.50	630.16	665.84
	90	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	135	416.12	380.45	344.77	309.10	273.42	237.75	202.08	166.40
	180	415.69	365.29	314.89	264.50	214.10	163.70	113.30	62.90
	225	416.12	380.44	344.77	309.10	273.42	237.75	202.08	166.40
	270	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55	416.55
	315	416.12	451.79	487.47	523.14	558.81	594.50	630.16	665.84

图 5 问题 2 的计算结果

我们可以发现该表格在测线方向夹角 β 上表现出了周期性，在对离海域中心点距离 Distance_i 上表现出了一致性。

- 当 Distance_i 等于 0 时，对于四个分别相差 90° 角度 β ： 45° 、 135° 、 225° 、 315° ，它们的覆盖宽度 W 相同，这是由于它们沿测线的截屏面相同，与图表现一致。其中：
 - 当 β 为 45° 和 315° 时， W 随着 Distance_i 的增大而增大

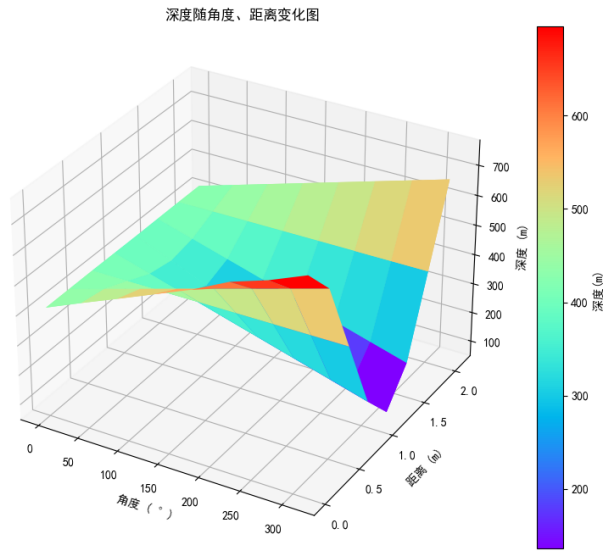


图 6 深度随角度、距离变化图

(2) 当 β 为 135° 和 225° 时, W 随着 $Distance_i$ 的增大而减小

- 当 β 为 0° 和 180° 时, 它们沿测线的截屏面相同, 所以覆盖宽度 W 相同, 其中:
 - (1) 当 β 为 0° 时, W 随着 $Distance_i$ 的增大而增大
 - (2) 当 β 为 180° 时, W 随着 $Distance_i$ 的增大而减小, 与图表现一致。
- 当 β 为 0° 和 90° 时, 它们沿测线的截屏面相同, 所以覆盖宽度 W 相同, 并且由模型二退化为模型一, W 不随 $Distance_i$ 的改变而改变, 与图表现一致。

这对我们在测线间距 d 的选择上提供较大帮助。假设测探线为相互平行的直线情况下, 面对不同的任务, 我们设计测线的方式也不同:

如果我们以海区平均水深来设计测线间隔, 条带之间的平均重叠率可以满足题目要求, 但在水深较浅处会出现漏测的情况, 具体俯视图, 剖视图如图7所示. 数据缺失, 则无法满足海域全覆盖的要求。

如果我们以海区最浅处进行测线间距设计, 虽然能成功满足覆盖海域设计, 但在水深较深处会出现重叠过多的情况, 如图8。数据冗余量大, 影响测量效率。

综上, 由第二问的分析可知, 当我们要设计测线时, 需要对目标任务进行解析: 如果题目中要求全覆盖权重大于重叠率的权重, 则必须选择浅海区进行测线间距设计; 否则, 最好以海区平均水深进行测线间距设计。

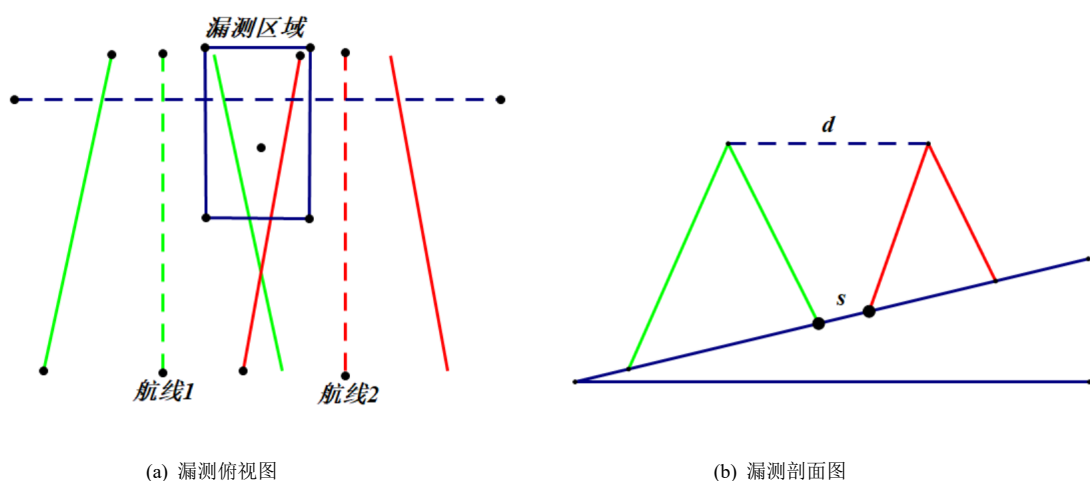


图 7 漏测图

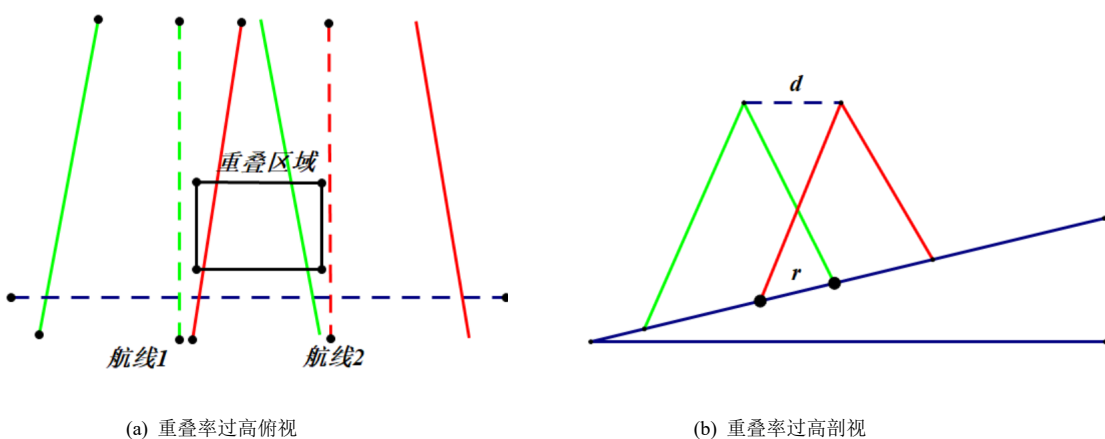


图 8 重叠率过高图

5.4 问题三模型

此模型对测线形状和方向的分析基于了国家标准、几何计算两个方面进行，与模型一和二联系紧密。

5.4.1 基于国家标准的测线形状和方向分析

对于测线形状的规定，根据《中华人民共和国交通运输行业标准》中的《多波束探测系统测量技术要求》中的表述，测线应尽量为直线。因为这时垂直切面为一平面，所反映的海底构造形态比较真实；主测线布设方向应按工程的需要选择平行于等深线的走向、潮流的流向、航道轴线方向或测区的最长边等其中之一走向布设。问题三的海域为南北长 2 海里、东西宽 4 海里的矩形海域，西深东浅，坡度为 1.5° ，其等深线为一组平行于南北方向的位于海底坡面上的平行线，如图9，所以根据以上分析测线应为一组平行于南北方向的直线。

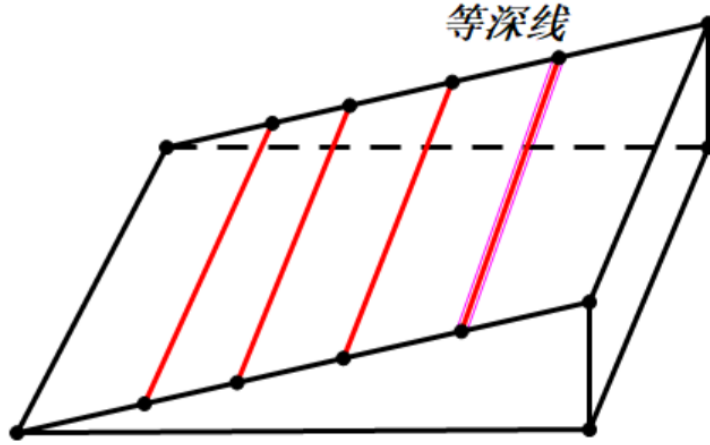


图 9 等深线

5.4.2 基于几何的测线方向分析

假设测线不平行于南北方向，根据模型二的解(6)可得，当测线向浅水区即东边移动时，水深 D_i 会逐渐减小，随之覆盖宽度 W_i 也会逐渐减小，覆盖区域形成的条带的俯视图整体呈梯形，如图10。假设测线 k 有一条平行的相邻测线 l ，它们的覆盖宽度如图10所示。根据模型一的结果分析表2所示，当 W_i 越小时 η_i 越小，而水深越小则 W_i 越小。所以 η_i 有最小值 η_k ， k 为测线水深最浅的点。

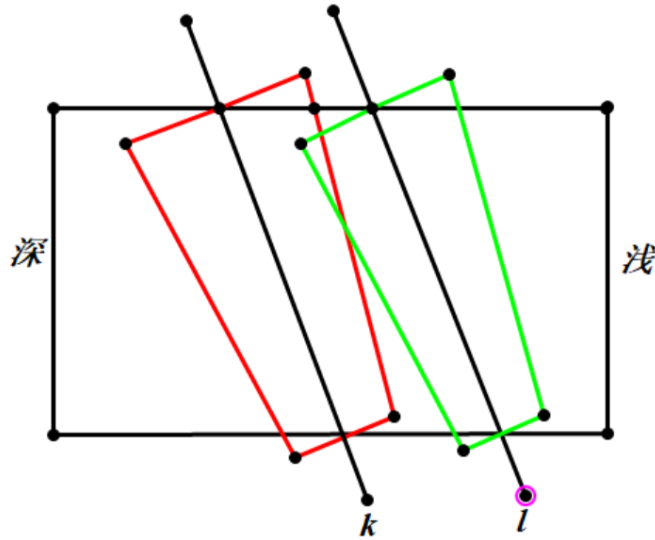


图 10 梯形扫描区域

$$\eta_k < \eta_i \quad (i < k) \quad (11)$$

由于要求对整个待测海域完全覆盖，所以测线的任意位置均有 $\eta_i > 0$ ，则要求

$\eta_k > 0$ 。

根据题意要求测线长度 l_{sum} 最短，测线总长度可简化为单条测线长度 l 与测线 i 和其左邻测线 $i-1$ 间距 dl_i 的关系，则有如下两种测线分布方式：

分布方式一如图11，其中 n 为测线条数， WE 为海域东西方向宽度， NS 为海域南北方向宽度：

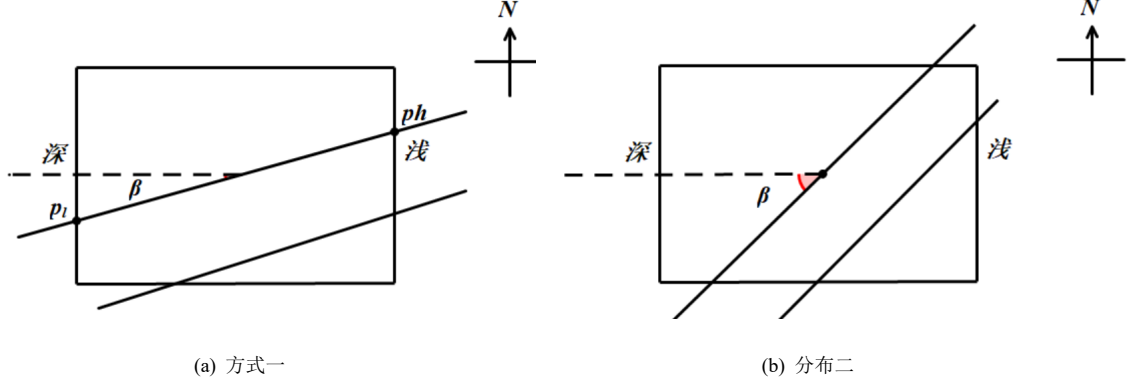


图 11 测线分布图

若 $\beta < \arctan(NS/WE)$ ：

$$\begin{cases} l_{sum} = l * n \\ l = WE / \cos \beta \quad (\beta < \arctan(NS/WE)) \\ \sum_{i=1}^n dl_i = NS \end{cases} \quad (12)$$

该分布方式在海底坡面最低点 p_l 和海底坡面最高点 p_h 均需要满足 $10\% < \eta < 20\%$ 首先计算 p_l 的海水深度 D_{max} 和 p_h 的海水深度 D_{min} ，根据公式(3)：

$$\begin{cases} D_{max} = D_0 + (WE/2) \tan \alpha \\ D_{min} = D_0 - (WE/2) \tan \alpha \end{cases} \quad (13)$$

根据公式(5)，可得 p_l 的覆盖宽度 W_{max} 和 p_h 的覆盖宽度 W_{min} ：

$$\begin{cases} W_{max} = \frac{D_{max} \sin \theta \cos^2 \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) \cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \\ W_{min} = \frac{D_{min} \sin \theta \cos^2 \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) \cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \end{cases} \quad (14)$$

由模型一结果分析可知：海水深度越深，重叠率越大。所以 p_l 的重叠率 η_{max} 最大， p_h 的重叠率 η_{min} 最小。根据重叠率计算公式， η_{max} 和 η_{min} 需满足以下不等式，其中 d 为测线间距：

$$\begin{cases} \eta_{max} = 1 - d/W_{max} < 20\% \\ \eta_{min} = 1 - d/W_{min} > 10\% \end{cases} \quad (15)$$

则 d 的取值范围为:

$$0.8W_{max} < d < 0.9W_{min} \quad (16)$$

联立公式(13)、公式(14)、公式(16), 通过 `matlab` 求解, 解得 d 的取值范围为, 其左端点大于右端点, 说明此分布方式不合理。

分布方式二如图20:

若 $\beta > \arctan(NS/WE)$:

$$\begin{cases} l_{sum} = l * n \\ l = WE / \cos \beta \quad (\beta > \arctan(NS/WE)) \\ \sum_{i=1}^n dl_i = WE \end{cases} \quad (17)$$

根据该等式可得: 若 l_{sum} 要更短, 则 l 要更短, dl_i 要更大。

假设 β 减小且 $\beta > \pi/2$, 则 l 减小, dl_i 增大。所以 l_{sum} 一定更短, 当 $\beta = \pi/2$ 时 l_{sum} 达到最小值。

综合上述分析可得测线为一组平行于南北方向的直线。

5.4.3 最优测线长度模型建立

为简化计算, 本模型假设有一条侧线过海域中心, 以此条测线为基准计算两边测线的相对位置, 如图12

任意测线与海域中心距离 d_i 可以用如下关系表示, 其中 d_{i-1} 表示测线 $i-1$ 与海域中心的距离:

$$d_i = d_{i-1} + dl_i \quad (18)$$

根据题意, 将测线 i 的重叠率计算公式简化:

$$\eta_i = 1 - \frac{dl_i}{W_i} \quad (19)$$

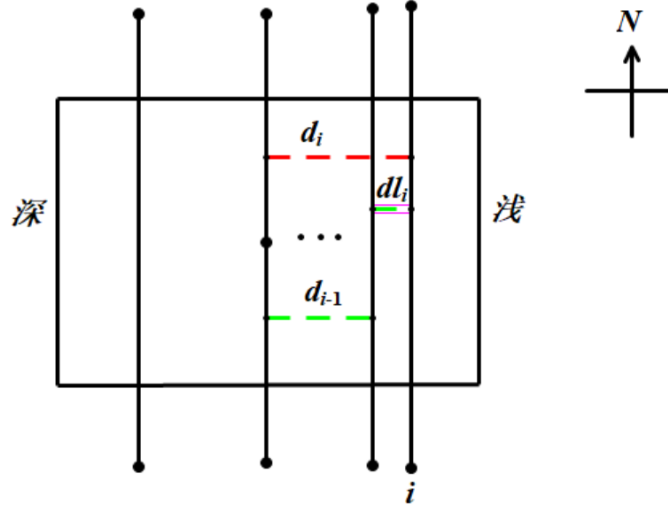


图 12 测线分布

5.4.4 模型求解

联立等式(18)、等式(21)和模型一的等式(3)、等式(5)，可得到 i 和其左邻测线 $i-1$ 间距 dl_i 的计算公式：

$$\left\{ \begin{array}{l} d_i = d_{i-1} + dl_i \\ D_i = D_0 - d_i * \tan \alpha \\ W_i = \frac{D_i \sin \theta \cos^2 \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) \cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)} \\ \eta_i = 1 - \frac{dl_i}{W_i} \end{array} \right. \quad (20)$$

设中间变量 $M_{deg} = \frac{\sin \theta \cos^2 \alpha}{\cos(\frac{\theta}{2} + \alpha) \cos(\frac{\theta}{2} - \alpha)}$ 。由于要使测量长度尽可能短，所以测线间距应当尽可能大，取 $\eta = 0.1$ 解得

$$\left\{ \begin{array}{l} dl_i = \frac{(1 - \eta)(D_0 - d_{i-1} \tan \alpha) M_{deg}}{1 + (1 - \eta) \tan \alpha M_{deg}} \\ \eta = 0.1 \end{array} \right. \quad (21)$$

5.4.5 结果分析

通过 matlab 求解模型，解得一组测线的分布位置，经过可视化后结果如图13：

测线为一组平行于南北方向的不等间距直线，每条测线的间距 dl_i 都服从尽可能大的原则。根据理论分析，从西往东看水深 D_i 逐渐减小，间距 dl_i 也应当逐渐减小，在图像上表示为从西向东侧线越来越密集，与图示表示一致。共有 35 条测线，其最小距离为 70 海里。

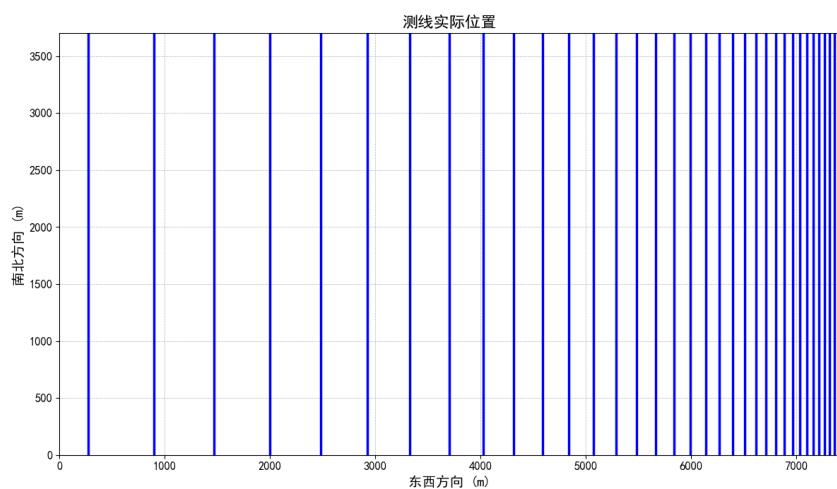


图 13 测线实际位置

5.5 问题四模型

5.5.1 数据分析与几何关系分析

首先需要对问题所提供的海水深度数据（附件.xlsx）进行可视化分析。在读取数据并进行线性差值后进行构建海底的二维平面（长宽作为 x, y 轴，水深用颜色深浅表示）、三维立体图形释（长宽作为 x, y 轴，水深作 z 轴）。结果如图所示14。根据比色卡可知，红色区域的海水深度最深，而紫色区域海水深度最浅。而该海底的东南方向较高，西北和东北方向地形基本一致，西南方向较低。

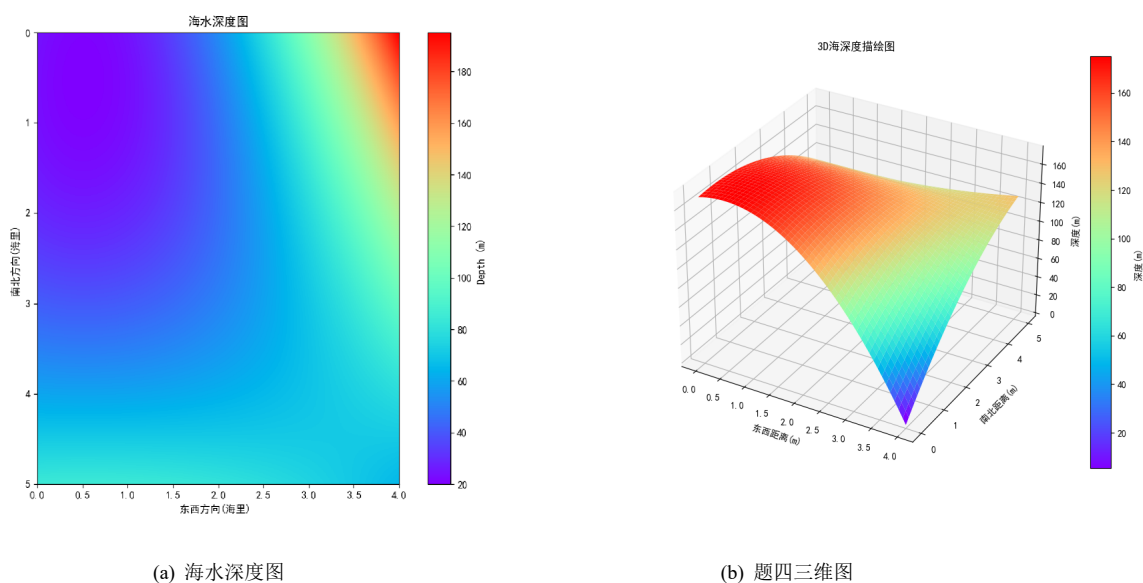


图 14 海水深度数据

对三维立体图进行分析可以发现，水深基本呈现出凸面的趋势，深度基本由对角线

沿两测逐渐加深。对二维平面图分析发现，沿对角线 AC 对海域进行切割，在垂直 AC 向两边延展的方向上海水深度为逐渐变深的趋势。

根据以上分析，我们可以将整个海底近似的沿 AC 剖切为两个斜坡面坡 1 和坡 2，并假设两个坡面的坡度为恒定值，分别对两个坡面设计两组相互平行且方向沿等深线的测线，就可以将模型四转化后使用模型三进行求解。

切割，如图15

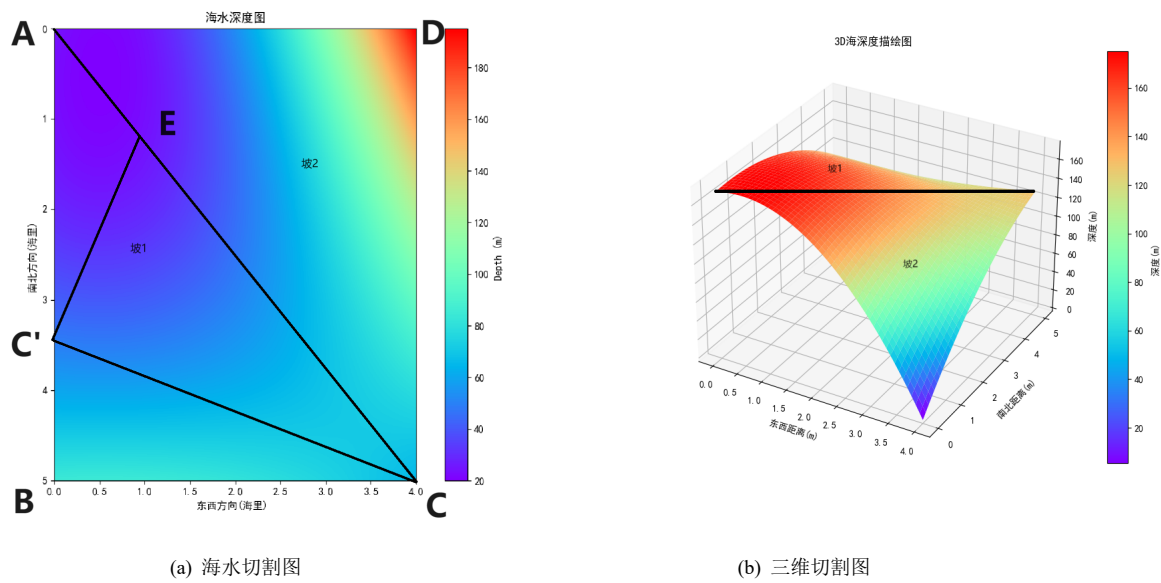


图 15 海域切割

5.5.2 复杂海底地形测深模型建立

海域的俯视简化图如图15所示，首先对坡面 ABC 进行模型建立。在 AB 上找到一点 C' 与 C 深度相同，作等深线 CC'，则该坡面所有等深线都平行于 CC'。沿 AB 剖切，通过几何关系可知其剖面图如图16(b)。



图 16 海水深度数据

图 (b) 中通过几何关系可得等式(22)，进而求出 BC' 的长度。

$$\begin{cases} \frac{BC'}{AB} = \frac{BB' - CC'}{BB' - AA'} \end{cases} \quad (22)$$

图 (a) 中通过几何关系可求得 $C'E$ 长度

$$\begin{cases} AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ C'E = \frac{CC'}{\arctan(\frac{AB}{BC}) - \arctan(\frac{BC'}{BC})} \end{cases} \quad (23)$$

在图 (a) 中通过求得的 $C'E$ 长度进一步计算 E 点的水深 EE' ，最后通过 EE' 计算出坡面 ABC 的坡度 α'

$$\begin{cases} EE' = CC' - \frac{CE * A'A''}{AC} \\ \tan \alpha' = \frac{EE'}{C'E} \end{cases} \quad (24)$$

同理可对坡面 ADC 进行模型的建立，此处就不再赘述。

5.5.3 模型求解

联立公式(22)、公式(23)、公式(24)，可解得坡面 ABC 和坡面 ADC 的测线方向 α'_{ABC} 和 α'_{ADC}

$$\begin{cases} \frac{BC'}{AB} = \frac{BB' - CC'}{BB' - AA'} \\ AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ C'E = \frac{CC'}{\arctan(\frac{AB}{BC}) - \arctan(\frac{BC'}{BC})} \\ EE' = CC' - \frac{CE * A'A''}{AC} \\ \tan \alpha' = \frac{EE'}{C'E} \end{cases} \quad (25)$$

最后将坡度 α_{ABC} 和 α_{ADC} 代入模型三公式(21)，求得任意测线 i 与相邻平行测线间的间距 dl_i ，进而求得测线关于坡面 ADC 的布设情况。

- 测线的总长度计算：

根据三角形的相似关系可求得坡面 ABC 单条测线 i 的长度 l_i 为：

$$\begin{cases} l_i = \frac{(AC' - d_i) * CC'}{AC'} \\ l_i = \frac{(BC' - d_i) * CC'}{BC'} \end{cases} \quad (26)$$

测线总长度为：其中 n 为测线总数。

$$l_{sum} = \sum_{i=1}^n l_i \quad (27)$$

解得总长度为 **181.33 海里**

- 漏测海区占总待测海域面积的百分比：

由于该模型由模型三拓广而来，如图，分为两个海域 ABC 与海域 ADC ，海域 ABC 与海域 ADC 上的两组测线均对各自的海域进行严格覆盖，所以无漏测海区。

- 在重叠区域中，重叠率超过 20% 部分的总长度：

根据模型分析，如图，海域 ABC 与海域 ADC 上的两组测线在垂直于测线方向上设计重叠率为 10%，与模型三相同。所以在垂直于测线方向上**无重叠率超过 20% 部分的长度**；在海域的切割对角线 AC 上，由于两组测线相交所以会出现出现重叠率超过 20% 部分的情况。所以**重叠率超过 20% 部分的总长度即为 AC 的长度为 6.4 海里**。

5.5.4 结果分析

(测线总长度，漏测海区占总待测海域面积的百分比，重叠率超过 20% 部分的总长度) = (181.33 海里，0，2.23 海里)

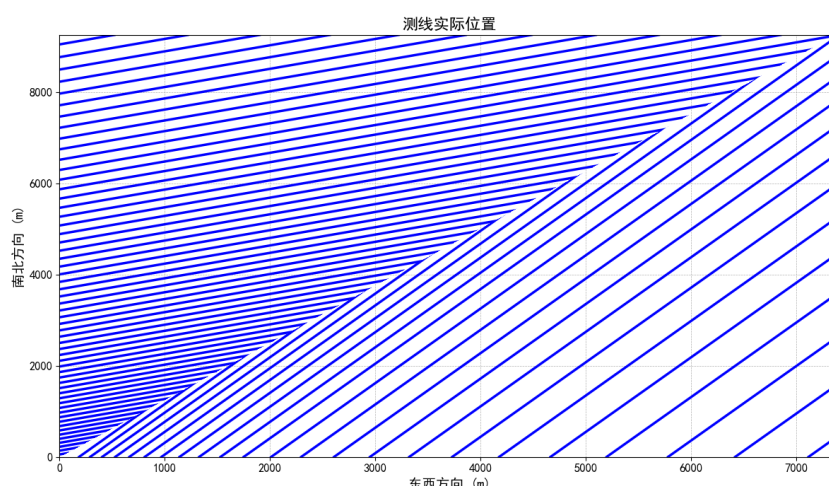


图 17 问题四实际图

六、模型的改进

1. 对于问题三的模型，在测线间距的设计时，可以不以海域中心的测线作为基准，而是首先计算深度最低点和最高点的测线位置，保证覆盖范围恰好为整个海域范围。再对中间的测线位置进行设计，使每一条测线满足最小重复率，这样可以继续减少测线的总长度，从而优化模型。
2. 对于问题四的模型，每一条航线都不必行驶到海域边界，而是对每一条测线都计算其最短距离，降低海域边界处的重复率。由于模型较为复杂，可以采用一些启发式

算法例如粒子群算法、遗传算法等进行求解。

3. 对于问题四的模型，可以将海域进行精细分割，可以采用基于规则格网对海底三维地形进行建模，再对每一块精细分割的海域进行测线的布设，可以提高模型的精度。

七、模型的优缺点

7.1 模型的优点

1. 本文将覆盖宽度 W 和重复率 η 进行了优化，使计算结果更符合实际情况。
2. 本文通过巧妙的计算几何处理将四个模型巧妙的联系起来，并且在一定程度上进行了互相的转化，使得模型整体更具有逻辑性和条理性。
3. 本文对问题进行了降维处理，简化了问题的难度，方便模型的求解效率和求解精度。
4. 本文对问题一和问题二进行了严谨的几何分析与计算。
5. 对于问题三，本文考虑国家标准和建立测线方向分析模型两个方向，严格论证了测线方向沿海域的等深线布设。
6. 对于问题四，本模型对复杂海域的分析与分割，在复杂海域上对测线长度、海域覆盖范围进行优化，结果在复杂海域上表现良好，适用于大部分的复杂海域。

7.2 模型的缺点

1. 在问题三的求解中为方便计算使用海域中心的测线作为基准，可能导致测线长度的增加。
2. 在问题四中仅将海域粗略的分割为了两个部分，海底拟合为斜平面后可能会造成较大的误差。

7.3 模型的推广

通过对全局的分析，我们可以得出该问题的本质其实是个地形扫描的问题。可以推广到类似的分析上，例如飞机喷洒农药问题、人工降雨问题等。通过该模型或该模型的扩展，可以设计这类问题最优路径。

参考文献

[1] 文佳昕, 李靖涵, 行瑞星等. 顾及地形复杂度的多波束测深数据抽稀算法 [J]. 测绘科学技术学报, 2018, 35(04): 435-440.

[2] 薛秋珍. 基于多波束声呐数据的海底三维地形模型构建 [D]. 江苏海洋大学, 2023. DOI: 10.44354/d.cnki.gjsuy.2022.000187.

[3]. 中华人民共和国交通行业标准多波束测探系统测量技术要求 [J]. 交通标准化,2011(03):15-19.

[4] 常衍, 杨帅东, 刘夕奇等. 多波束测量系统在水下工程检测中的应用 [C]//中国水利学会.2022 中国水利学术大会论文集(第六分册). 黄河水利出版社,2022:6.DOI:10.26914/c.cnkihy.2022.0

附录 A 问题一代码—matlab 源程序

```
numboat = 10;
d0 = 200;
d = [-1000, -800, -600, -400, -200, 0, 200, 400, 600, 800];
D = zeros(1, numboat);
W = zeros(1, numboat);
W1 = zeros(1, numboat);
W2 = zeros(1, numboat);
over_l = zeros(1, numboat);
over_p = zeros(1, numboat);
D(5) = 70;
theta = 120;
alpha = 1.5;
theta_r = deg2rad(theta);
alpha_r = deg2rad(alpha);

%深度
for i = 1 : numboat
    D(i) = 70 - d(i) * tan(alpha_r);
end

%覆盖宽度
for i = 1 : numboat
    W1(i) = D(i) * sin(theta_r / 2) / cos(theta_r / 2 + alpha_r);
    W2(i) = D(i) * sin(theta_r / 2) / cos(theta_r / 2 - alpha_r);
    %W(i) = (W1(i) + W2(i)) * cos(alpha_r);
    W(i) = D(i) * sin(theta_r) * cos(alpha_r) * cos(alpha_r) / (cos(theta_r / 2 + alpha_r) *
        cos(theta_r / 2 - alpha_r));
end

%重叠率
for i = 2 : numboat
    over_l(i) = W2(i - 1) + W1(i);
    %over_p(i) = 1 - d0 / W(i);
    over_p(i) = 1 - d0 / (over_l(i) * cos(alpha_r));
end
```

附录 B 问题二代码—matlab 源程序

```
numdis = 8;
numarg = 8;
haili = 1852;
W = zeros(numarg, numdis);
```



```

%角度定义与求解
theta = 120;
alpha = 1.5;
theta_r = deg2rad(theta);
alpha_r = deg2rad(alpha);
beta = [0, 45, 90, 135, 180, 225, 270, 315];
beta_r = zeros(1, numarg);
for i = 1 : numarg
    beta_r(i) = deg2rad(beta(i));
end
alpha_s = zeros(1, numarg);%alpha'
for i = 1 : numarg
    alpha_s(i) = atan(tan(alpha_r) * sin(beta_r(i)));
end

%航行距离定义
dis0 = 0.3 * haili;
dis = [0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.2, 1.5, 1.8, 2.1];
dis_s = zeros(1, numdis);
for i = 1 : numdis
    dis_s(i) = dis(i) * haili;
end

%深度定义
D0 = 120;
D_s = zeros(numarg, numdis);
for i = 1 : numarg
    for j = 1 : numdis
        D_s(i, j) = D0 + dis_s(j) * cos(beta_r(i)) * tan(alpha_r);
    end
end

%计算覆盖宽度
for i = 1 : numarg
    for j = 1 : numdis
        W(i, j) = D_s(i, j) * sin(theta_r) * cos(alpha_s(i)) * cos(alpha_s(i)) / (cos(theta_r / 2 + alpha_s(i)) * cos(theta_r / 2 - alpha_s(i)));
    end
end
end

```

附录 C 问题三中心线左侧代码—matlab 源程序

```

D0 = 110;
h = 1852;

```

```

theta = 120;
alpha = 1.5;
theta_r = deg2rad(theta);
alpha_r = deg2rad(alpha);

m_arg = sin(theta_r) * cos(alpha_r) * cos(alpha_r) / (cos(theta_r / 2 + alpha_r) * cos(theta_r
    / 2 - alpha_r));
d_sum = 0;
all_sum = [];
all_d = [];
while d_sum < 2 * h
    k1 = 0.9 * (D0 + d_sum * tan(alpha_r)) * m_arg;
    k2 = 1 - 0.9 * tan(alpha_r) * m_arg;
    d = k1 / k2;
    d_sum = d_sum + d;
    all_d = [all_d d];
    all_sum = [all_sum d_sum];
end

all = zeros(1, length(all_sum));
for i = 1 : length(all_sum)
    all(i) = 2 * h - all_sum(i);
end

```

附录 D 问题三中心线右侧—matlab 源程序

```

D0 = 110;
h = 1852;

theta = 120;
alpha = 1.5;
theta_r = deg2rad(theta);
alpha_r = deg2rad(alpha);

m_arg = sin(theta_r) * cos(alpha_r) * cos(alpha_r) / (cos(theta_r / 2 + alpha_r) * cos(theta_r
    / 2 - alpha_r));
d_sum = 0;
all_sum = [];
all_d = [];
while d_sum < 2 * h
    k1 = 0.9 * (D0 - d_sum * tan(alpha_r)) * m_arg;
    k2 = 1 + 0.9 * tan(alpha_r) * m_arg;
    d = k1 / k2;
    d_sum = d_sum + d;

```

```

    all_d = [all_d d];
    all_sum = [all_sum d_sum];
end

all = zeros(1, length(all_sum));
for i = 1 : length(all_sum)
    all(i) = all_sum(i) + 2 * h;
end

```

附录 E 问题四部分代码（详细见支撑材料）—matlab 源程序

```

h = 1852;
ab = 5 * h;
bc = 4 * h;
bc_1 = ab * (84.4-65.2) / (84.4-24.4);
ac = sqrt(ab^2 + bc^2);
cc_1 = sqrt(bc_1^2 + (bc)^2);
arg_12 = atan(5 / 4);
arg_2 = atan(bc_1 / bc);
arg_1 = arg_12 - arg_2;
ce = cc_1 / cos(arg_1);
ee_1 = 65.2 - ce * (65.2 - 24.4) / ac;
c_1e = cc_1 * tan(arg_1);
alpha_r = atan((65.2 - ee_1) / c_1e);

theta = 120;
theta_r = deg2rad(theta);
D0 = 65.2;

m_arg = sin(theta_r) * cos(alpha_r) * cos(alpha_r) / (cos(theta_r / 2 + alpha_r) * cos(theta_r / 2 - alpha_r));
d_sum = 0;
all_sum = [];
all_d = [];

ac_1 = ab - bc_1;
d_max = ac_1 * cos(arg_2);
while d_sum < d_max
    k1 = 0.9 * (D0 - d_sum * tan(alpha_r)) * m_arg;
    k2 = 1 + 0.9 * tan(alpha_r) * m_arg;
    d = k1 / k2;
    d_sum = d_sum + d;
    all_d = [all_d d];
    all_sum = [all_sum d_sum];
end

```

```

all = zeros(1, length(all_sum));
for i = 1 : length(all_sum)
    all(i) = all_sum(i) / cos(arg_2);
end

len = [];
len1 = cc_1;

for i = 1 : length(all_sum) - 1
    len = [len (ac_1 - all(i)) * cc_1 / ac_1];
    len1 = len1 + (ac_1 - all(i)) * cc_1 / ac_1;
end

final = zeros(1, length(all_sum) - 1);
for i = 1 : length(all_sum) - 1
    final(i) = ac_1 - all(i);
end

```

附录 F 构建三维立体图—python 源程序

```

import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
import numpy as np
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D #导入库函数
#Loading the data again
data = pd.read_excel("附件.xlsx", header=None)

# 问题四平面图
plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei']
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False
plt.figure(figsize=(10,8))
plt.imshow(data,cmap='rainbow', extent=[0,4,5,0])
plt.colorbar( label='Depth (m) ' )

#坐标轴说明
plt.title( '海水深度图' )
plt.xlabel( '东西方向(海里) ' )
plt.ylabel( '南北方向(海里) ' )
plt.show()

plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei']
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False

```

```

# 问题四立体图
x = np.linspace(0, 4, data.shape[1])
y = np.linspace(0, 5, data.shape[0])
X,Y = np.meshgrid(x, y)
fig = plt.figure(figsize=(11,8))
ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
surf = ax.plot_surface(X, Y, data, cmap='rainbow')
fig.colorbar(surf, ax=ax, label='深度(m) ')

#坐标轴说明
ax.set_xlabel('东西距离(m) ')
ax.set_ylabel('南北距离(m) ')
ax.set_zlabel('深度(m) ')
ax.set_title(' 3D海深度描绘图 ')
plt.show()

#问题二结果图
distance = np.array([0,0.3,0.6,0.9,1.2,1.5,1.8,2.1])
#海里
angle = np.array([0,45,90,135,180,225,270,315])# degrees
depth_values = np.array([
[415.69,466.9,516.49,566.89,617.29,677.69,718.09,768.48],
[416.12,451.79,487.47,523.14,558.81,594.50,630.16,665.84],
[416.55,416.55,416.55,416.55,416.55,416.55,416.55,416.55],
[416.12,380.45,344.77,309.10,273.42,237.75,202.08,166.40],
[415.69,365.29,314.89,264.50,214.10,163.70,113.30,62.90],
[416.12,380.44,344.77,309.10,273.42,237.75,202.08,166.40],
[416.55,416.55,416.55,416.55,416.55,416.55,416.55,416.55],
[416.12,451.79,487.47,523.14,558.81,594.50,630.16,665.84]
])
plt.rcParams['font.sans-serif']=['SimHei']
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False
#Plotting
fig = plt.figure(figsize=(10,8))
ax = fig.add_subplot(111,projection='3d' )
X, Y = np.meshgrid(angle, distance)
ax.plot_surface(X, Y,depth_values, cmap="rainbow" )
surf = ax.plot_surface(X, Y, depth_values, cmap='rainbow')
fig.colorbar(surf, ax=ax, label='深度(m) ')
ax.set_xlabel( '角度 ( °)')
ax.set_ylabel( '距离 (m) ')
ax.set_zlabel( '深度 (m) ')
ax.set_title( '深度随角度、距离变化图' )
plt.show()

```

#问题2结果图

```
vertical_lines = [2*1852,3329.7286,2922.1109,2478.1758,1994.6875,1468.122,894.6413,
270.065,4021.66,4315.3085,4586.745,4837.6568,5069.5934,5283.9907,5482.1749,
5665.372,5834.7157,5991.2533,6135.9533,6269.71084,6393.353,6507.6460,6613.2956,
6710.955,6801.230,6884.67910378118,6961.816,7033.1214,7099.0337,7159.9617,7216.2822,7268.34374,
7316.468,7360.95,7402.0747,7440.08631]
sea_width = 4 * 1852
sea_length = 2 * 1852

# 设置支持中文显示的字体
plt.rcParams['font.sans-serif'] = ['SimHei']
plt.rcParams['axes.unicode_minus'] = False # 解决保存图像时负号 '-' 显示为方块的问题

# 重新绘制图形
plt.figure(figsize=(12, 7))
for line in vertical_lines:
    plt.plot([line, line], [0, sea_length], 'b-', linewidth=2.5) # 设置线宽为2.5

plt.xlim(0, sea_width)
plt.ylim(0, sea_length)
plt.xlabel('东西方向 (m)', fontsize=14) # 设置坐标轴标签的字体大小
plt.ylabel('南北方向 (m)', fontsize=14)
plt.title('测线实际位置', fontsize=16) # 设置标题的字体大小
plt.xticks(fontsize=12) # 设置x轴刻度的字体大小
plt.yticks(fontsize=12) # 设置y轴刻度的字体大小
plt.grid(True, which='both', linestyle='--', linewidth=0.5)
plt.tight_layout() # 调整布局, 使图形适应窗口大小
plt.show()
```