



### 三、状态分类的判别法

为了下面的需要我们引入实数列的母函数的概念。

设  $\{a_n, n \geq 0\}$  为一实数列，称幂级数  $A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$  为数列  $\{a_n\}$  的母函数，当存在  $s_0 > 0$ ，使得  $|s| < s_0$  时  $A(s)$  收敛。

若  $A(s)$ ， $B(s)$  分别是  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的母函数，则数列：

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots$$

的母函数  $C(s) = A(s)B(s)$ ，称  $\{c_n\}$  是  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的卷积。



简单证明:  $\{c_n\}$  为什么是  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的卷积?

设  $C(s)$  为  $\{c_n\}$  的母函数,  $C(s) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k$ , 则:

$$A(s)B(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i \sum_{j=0}^{\infty} b_j s^j = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_i b_j s^{i+j}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right] s^k \quad (\text{设 } i + j = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^k = C(s)$$

因此:  $C(s) = A(s)B(s)$



定理4.2.5 状态*i*常返  $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ ;

若*i*非常返, 则  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}}$

证明: 由  $p_{ii}^{(n)} = \sum_{l=1}^n f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)}$ ,  $n \geq 1$ , 两边乘以  $s^n$ , 并对  $n \geq 1$  求和, 得:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{l=1}^n f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)} \right) s^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^n f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)} \right) s^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{l=0}^n f_{ii}^{(l)} p_{ii}^{(n-l)} \right) s^n \quad (f_{ii}^{(0)} = 0) \end{aligned}$$

设  $P(s)$  和  $F(s)$  分别为  $\{p_{ii}^{(n)}\}$  和  $\{f_{ii}^{(n)}\}$  的母函数, 则:

$$P(s) - 1 = P(s)F(s)$$

当  $0 \leq s < 1$  时,  $F(s) < F(1) = f_{ii} \leq 1$ , 所以:  $P(s) = \frac{1}{1 - F(s)}$



证明(续): 设 $P(s)$ 和 $F(s)$ 分别为 $\{p_{ii}^{(n)}\}$ 和 $\{f_{ii}^{(n)}\}$ 的母函数, 则:

$$P(s) - 1 = P(s)F(s)$$

一方面: 当 $0 \leq s < 1$ 时, 有:

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} s^n < F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii} \leq 1, \text{ 即 } F(s) < 1$$

$$\text{所以: } P(s) = \frac{1}{1 - F(s)}$$

另一方面当 $0 \leq s < 1$ 时, 对任意的正整数 $N$ , 有:

$$\sum_{n=0}^N p_{ii}^{(n)} s^n \leq P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} s^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = P(1)$$

所以先令 $s \uparrow 1$ , 再令 $N \rightarrow \infty$ , 可得:  $\lim_{s \uparrow 1} P(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$



同理可证： $\lim_{s \uparrow 1} F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}$  (其中  $F(s) < 1$ )

则对： $P(s) = \frac{1}{1 - F(s)}$  两边同时令  $s \uparrow 1$ , 有： $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1 - f_{ii}}$

$i$ 常返  $\Leftrightarrow f_{ii} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$  (系统返回 $i$ 的次数为无穷多次)

$i$ 非常返  $\Leftrightarrow f_{ii} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$  (系统返回 $i$ 的次数为有限多次)



为了进一步理解以上特性，定义随机变量： $Y(n) = \begin{cases} 1 & \xi_n = j \\ 0 & \xi_n \neq j \end{cases}$

随机变量  $Y = \sum_{n=0}^{\infty} Y(n)$  表示系统到达  $j$  的次数。

则， $Y$  的条件期望：

$$\begin{aligned} E[Y | \xi_0 = j] &= E\left[\sum_{n=0}^{\infty} Y(n) | \xi_0 = j\right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E[Y(n) | \xi_0 = j] = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \times P\{\xi_n = j | \xi_0 = j\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} \end{aligned}$$

$j$  常返  $\Leftrightarrow f_{jj} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$  (系统返回  $j$  的平均次数为无穷多次)

$j$  非常返  $\Leftrightarrow f_{jj} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$  (系统返回  $j$  的平均次数为有限多次)



**推论：**若 $j$ 非常返，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$

由常返性的定义，有 $f_{jj} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ ，则系统

从状态 $j$ 出发经过有限步转移系统迟早会返回状态 $j$ ，而当该过程无限地继续下去，必有：

$$j \rightarrow \cdots \rightarrow j \rightarrow \cdots \rightarrow j \rightarrow \cdots \rightarrow j \cdots,$$

系统访问 $j$ 的次数将无限增加。

若状态 $j$ 非常返，有 $f_{jj} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$ ，则系统

访问 $j$ 至多有限多次。





定理4.2.6 设 $A \triangleq \{\text{系统无限多次访问 } j\}$ ,

$$A_m \triangleq \{\text{系统至少 } m \text{ 次访问 } j\},$$

并记:  $g_{ij} = P\{A | \xi_0 = i\}$ ,  $g_{ij}(m) = P\{A_m | \xi_0 = i\}$ , 则:

$$g_{jj} = \begin{cases} 1 & f_{jj} = 1 \text{ (系统从状态 } j \text{ 出发, 无穷多次返回 } j \text{ 的概率为 } 1) \\ 0 & f_{jj} < 1 \text{ (系统从状态 } j \text{ 出发, 无穷多次返回 } j \text{ 的概率为 } 0) \end{cases}$$

证明: 由 $A$ 和 $A_m$ 的定义知:  $A_m \supset A_{m+1}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , 且:

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m, \text{ 即: } \lim_{m \rightarrow \infty} A_m = A$$

$$\begin{aligned} \text{因而: } g_{ij} &= P\{A | \xi_0 = i\} = P\left\{\lim_{m \rightarrow \infty} A_m | \xi_0 = i\right\} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} P\{A_m | \xi_0 = i\} = \lim_{m \rightarrow \infty} g_{ij}(m) \end{aligned}$$





先计算  $g_{ij}(m+1)$

$$\begin{aligned}
 g_{ij}(m+1) &= P\{A_{m+1} | \xi_0 = i\} \\
 &= P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} (\text{至少 } \exists 0 < n < n_1 \cdots < n_m, \text{使得 } \xi_\nu \neq j, 1 \leq \nu < n, \xi_n = j, \xi_{n_l} = j, l=1, \dots, m) | \xi_0 = i\right\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_\nu \neq j, 1 \leq \nu < n, \xi_n = j | \xi_0 = i\} \cdot P\{\text{至少有 } m \text{ 个 } n_l > n, \xi_{n_l} = j, l=1, \dots, m | \xi_n = j\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \cdot P\{\text{系统至少 } m \text{ 次到达 } j | \xi_0 = j\} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} g_{jj}(m) = g_{jj}(m) \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = f_{ij} g_{jj}(m)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{于是 } g_{jj}(m+1) &= f_{jj} g_{jj}(m) = f_{jj} f_{jj} g_{jj}(m-1) \\
 &= \cdots = f_{jj}^m g_{jj}(1) = f_{jj}^{m+1}
 \end{aligned}$$

$$\text{则: } g_{jj} = \lim_{m \rightarrow \infty} g_{jj}(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} f_{jj}^m = \begin{cases} 1 & f_{jj} = 1 \\ 0 & f_{jj} < 1 \end{cases}$$



推论:

$$g_{ij} = \begin{cases} f_{ij} & j \text{常返} \\ 0 & j \text{非常返} \end{cases}$$

如果 $j$ 是常返的, 则系统从 $i$ 出发无穷多次返回 $j$ 的概率为1;  
如果 $j$ 是非常返的, 则系统从 $i$ 出发无穷多次返回 $j$ 的概率为0。



**定理4.2.7** 设 $i$ 是周期为 $d$ 的常返态, 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = d / \mu_i$ 。

证明略。

**推论:** 设 $i$ 常返, 则

(1)  $i$ 零常返  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ ;

(2)  $i$ 是遍历态  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 1 / \mu_i$ 。

**证明:** (1) 若 $i$ 零常返, 则由定理4.2.7知  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = d / \mu_i = 0$

而当 $n \neq 0 \pmod{d}$ ,  $p_{ii}^{(n)} = 0$ 。必要性得证

反之, 若  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = 0$ , 而 $i$ 是正常返, 则由定理4.2.7知:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = d / \mu_i > 0, \text{ 矛盾。}$$



(2)  $\Leftarrow$  设若  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{\mu_i} > 0$ , 于是  $i$  是正常返且  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(nd)} = \frac{1}{\mu_i}$ , 则由定理4.2.7知  $d = 1$ , 于是  $i$  是遍历态。反之显然。

**推论：** 若  $j$  是零常返或非常返态，则： $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

证明：由 
$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \leq \sum_{l=1}^{n'} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} + \sum_{l=n'+1}^n f_{ij}^{(l)}$$

对固定的  $n'$ ，当  $n \rightarrow \infty$ ， $j$  非常返由定理4.2.5的推论，零常返由其判别条件，均有： $p_{jj}^{(n)} \rightarrow 0$ ，所以上式第一项趋于零。

再由  $\sum_{l=1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} = f_{ij} \leq 1$ ，则截尾项  $\sum_{l=n'+1}^{\infty} f_{ij}^{(l)} \rightarrow 0 (n' \rightarrow \infty)$

则： $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$



综上所述，归纳如下：

$$(1) \text{ 状态 } j \text{ 常返} \Leftrightarrow f_{jj} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = \mathbf{1} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty,$$

$$\text{状态 } j \text{ 正常返} \Leftrightarrow f_{jj} = 1, \mu_j < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} > 0$$

$$\text{状态 } j \text{ 零常返} \Leftrightarrow f_{jj} = 1, \mu_j = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$$

$$(2) \text{ 状态 } j \text{ 非常返} \Leftrightarrow f_{jj} < 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < \mathbf{1} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} p_{jj}^{(n)} = 0$$



重要结论：有限状态的 $Markov$ 链至少有一个常返态。

反证法1：设 $I = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\forall i \in I, \forall n \geq 1$ , 有： $\sum_{j=1}^N p_{ij}^{(n)} = 1$

如果状态空间 $I$ 的每一个状态全部为非常返态, 则:

上式左右两边同时取 $n \rightarrow \infty$ , 有:

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N p_{ij}^{(n)} = \sum_{j=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0, \text{ 矛盾。}$$

反证法2：设 $I = \{1, 2, \dots, N\}$ , 所有状态全部为非常返, 不妨假设系统访问状态 $1, 2, \dots, N$ 最多分别为 $k_1, k_2, \dots, k_N$ 次, 则当 $n$ 足够大,  $n = k_1 + k_2 + \dots + k_N + 1$ , 则再无任何一个状态被系统访问, 矛盾。





下面说明互通与状态分类的关系：

**定理4.2.8** 若 $i$ 常返，且 $i \rightarrow j$ ，则 $j \rightarrow i$ 。

**证明：** 由 $i \rightarrow j$ 知， $\exists n$ ，使 $p_{ij}^{(n)} > 0$ ，

由 $i$ 常返知： $f_{ii} = 1$ ， $f_{ii} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} f_{ki}$ ，且 $\sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} = 1$ ，

对比以下两个恒等式：

$$\sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} f_{ki} = 1$$

$$\sum_{k \in I} p_{ik}^{(n)} = 1$$

必有：若某个 $k$ 使 $p_{ik}^{(n)} > 0$ ，其对应的 $f_{ki} \Rightarrow f_{ki} = 1$

因此，由 $i \rightarrow j$ ，存在的那个 $n$ 使 $p_{ij}^{(n)} > 0$ ，其对应的 $f_{ji}$

必有 $f_{ji} = 1$ ，则： $j \rightarrow i$



**定理4.2.9**若 $i \leftrightarrow j$ , 则状态 $i, j$ 有下列情况:

- (1) 同为常返或同为非常返; 若为常返, 则同为正常返或同为零常返;
- (2)  $i, j$ 有相同的周期。

**证明:** (1) 由 $i \leftrightarrow j$ , 则 $\exists s \geq 1, r \geq 1$ 使得:

$$p_{ij}^{(s)} = \alpha > 0, \quad p_{ji}^{(r)} = \beta > 0$$

由 $C-K$ 方程, 则:

$$p_{ii}^{(r+n+s)} = \sum_{m,k \in I} p_{im}^{(s)} p_{mk}^{(n)} p_{ki}^{(r)} \geq p_{ij}^{(s)} p_{jj}^{(n)} p_{ji}^{(r)} = \alpha \beta p_{jj}^{(n)}$$

类似地, 有:  $p_{jj}^{(r+n+s)} \geq \alpha \beta p_{ii}^{(n)}$

则:  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}, \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$  相互控制, 同时收敛或同时发散。

则由定理4.2.5, 有 $i, j$ 同为常返或同为非常返;

$\because \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)}, \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$  相互控制, 同时为零或同时为正, 由定理4.2.7的推论

得证:  $i, j$ 同为正常返或同为零常返。



**定理4.2.9**若 $i \leftrightarrow j$ , 则状态 $i, j$ 有下列情况:

- (1) 同为常返或同为非常返; 若为常返, 则同为正常返或同为零常返;
- (2)  $i, j$ 有相同的周期。

**证明 (续)** (2) 仍令:  $p_{ij}^{(s)} = \alpha > 0$ ,  $p_{ji}^{(r)} = \beta > 0$

不妨设 $i$ 的周期为 $d$ ,  $j$ 的周期为 $t$ , 即:

$$d = G.C.D\{n : n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\}$$

$$t = G.C.D\{n : n \geq 1, p_{jj}^{(n)} > 0\}$$

由前面的结论, 有:  $p_{ii}^{(r+n+s)} \geq \alpha\beta p_{jj}^{(n)}$ , 知:

对 $\forall p_{jj}^{(n)} > 0$ 的 $n$ , 必有 $p_{ii}^{(r+n+s)} > 0$ , 从而 $d \mid (r+n+s)$ ;

但 $p_{ii}^{(r+s)} \geq p_{ij}^{(s)} p_{ji}^{(r)} = \alpha\beta > 0$ , 所以 $d \mid (r+s)$

所以, 必有:  $d \mid n$ , 即 $d$ 是所有满足 $p_{jj}^{(n)} > 0$ 的 $n$ 的公约数  
则:  $d \leq t$ ,

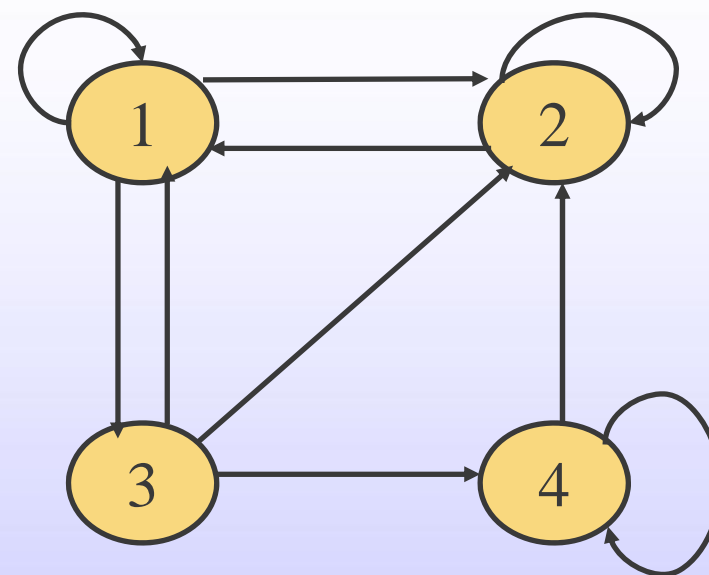
同理可证:  $t \leq d$ , 所以:  $d = t$



例4.2.6 设马氏链的状态空间  $I = \{1, 2, 3, 4\}$ ，转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

试判别状态的常返性。



解：步骤1°画出状态转移图

步骤2°由状态转移图，知：

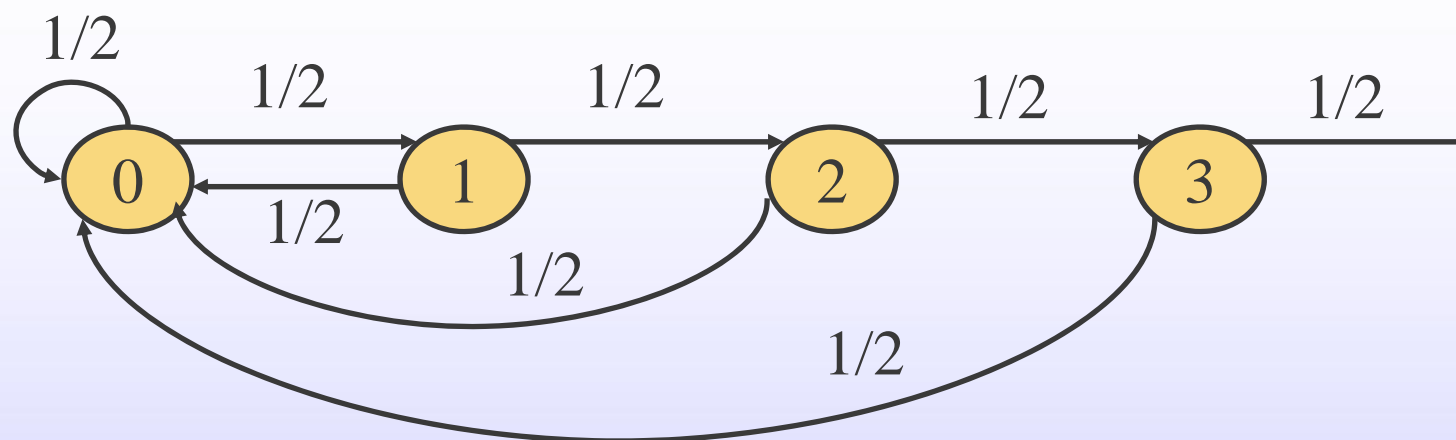
各状态互通  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$

步骤3°由有限 **Markov** 链至少有一个常返态，则由定理4.2.9知所有状态均为常返。



**例4.2.7** 设 $Markov$ 链 $\{\xi_n, n \in T\}$ 的状态空间为 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$ , 转移概率为:  $p_{00} = \frac{1}{2}$ ,  $p_{i+1, i} = \frac{1}{2}$ ,  $p_{i0} = \frac{1}{2}$ ,  $i \in I$ , 考查状态的常返性及遍历性。

**解:** 步骤1° 画出状态转移图



步骤2° 考查状态0, 由状态转移图知 $f_{00}^{(1)} = p_{00}^{(1)} = \frac{1}{2}$

$$f_{00}^{(2)}(0 \rightarrow 1 \rightarrow 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$f_{00}^{(3)}(0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$



一般地，有： $f_{00}^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n (0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow \cdots \rightarrow n-1 \rightarrow 0)$

$$\text{则： } f_{00} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$$

$$\mu_0 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^n < \infty$$

可见状态**0**为正常返。

又由于 $p_{00}^{(1)} = \frac{1}{2} > 0$ ，所以它是非周期的，因此状态**0**为遍历态。

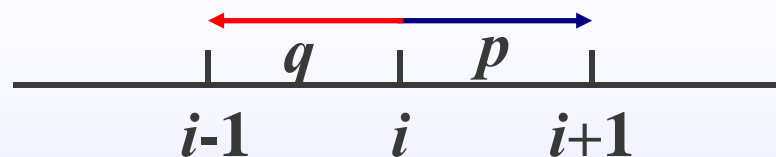
对任意状态**i** ( $i = 1, 2, \dots$ )，由于**i**  $\leftrightarrow$  **0**，则**i**也是遍历态。





**例4.2.8**质点在正、负整数点无限制地随机游动，设质点分别以 $p$ 的概率右移一个单位，以 $q$ 的概率左移一个单位，且 $p + q = 1$ ，试判别状态的常返性。

解：画出状态转移图如下：



由前面的例子，有：无限制随机游动各状态均互通，故所有状态或全为常返态，或全为非常返态。

现考察状态0.

$$p_{00}^{(1)} = p_{00}^{(3)} = \cdots = p_{00}^{(2n+1)} = 0$$

$$p_{00}^{(2n)} = C_{2n}^n p^n q^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n q^n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$



$$\text{而: } n! \approx n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \quad (2n)! \approx (2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}$$

$$p_{00}^{(2n)} \approx \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} 2\pi} p^n q^n = \frac{2^{2n} (pq)^n}{\sqrt{\pi n}} = \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

易知:  $pq = p(1-p) \leq \frac{1}{4}$  , 当  $p = q = \frac{1}{2}$  时等式成立

则:  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} = \sum_{m=0}^{\infty} p_{00}^{(2m)} = \infty$ , 则状态0常返

当  $p > q$  (或  $p < q$ ) 时, 有:  $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{(n)} < \infty$ , 则状态0非常返

(从原点出发以正的概率趋于  $+\infty$  或  $-\infty$ , 而永不返回)

## 第三节 状态空间的分解

### 一、状态空间的分解

**定义4.3.1** 设 $C$ 是 $I$ 的子集, 若对 $\forall i \in C, j \notin C$ , 有:  $i \mapsto j$ , 则 $C$ 为**闭集**。若 $I$ 中状态均互通, 则称Markov链**不可约**。

实际上,  $C$ 是闭集  $\Leftrightarrow$  对 $\forall i \in C, j \notin C$ , 有 $p_{ij} = 0$ 。

**证明:** " $\Rightarrow$ " 由闭集 $C$ 的定义有:  $\forall i \in C, j \notin C, \forall$  正整数 $n$ , 有:  $p_{ij}^{(n)} = 0$   
于是 $p_{ij} = 0$ 。

" $\Leftarrow$ " 由 $C-K$ 方程,  $p_{ij}^{(2)} = \sum_{r \in I} p_{ir} p_{rj} = \sum_{r \in C} p_{ir} p_{rj} + \sum_{r \notin C} p_{ir} p_{rj} = 0$

利用归纳法可证:  $p_{ij}^{(n)} = 0$

**显然:** 一个吸收态 $i$ 构成的闭集 $\{i\}$ 是最小的。

状态空间 $I$ 可分为常返态和非常返态两部分, 分别记为 $C$ 和 $D$ 。闭集是自 $C$ 的内部不能到达 $C$ 的外部, 意味着质点一旦进入闭集 $C$ , 它将永远留在 $C$ 中运动。



**定理4.3.1** *Markov*链的所有常返态构成一个闭集。

**证明：** 设  $C = \{\text{某一Markov链的所有常返态}\}$

$D = \{\text{某一Markov链的所有非常返态}\}$

反证：若  $C$  不是闭集，则  $\exists i \in C, j \in D = \overline{C}$ , 使  $i \rightarrow j$ 。

必有：  $j \rightarrow i$ ，于是  $j$  也为常返态。

即  $j \in C$ ，与  $j \in D = \overline{C}$  矛盾。



**定理4.3.2** *Markov*链的状态空间 $I$ 可以分解为下列不相交子集的和： $I = D + C = D + C_1 + C_2 + \dots$ 使得：

- (1) 每一个 $C_n$ 是常返态组成的不可约闭集；
- (2)  $C_n$ 中的状态同类：或全为正常返，或全为零常返，它们有相同的周期，且 $f_{jk} = 1, j, k \in C_n$ ；
- (3)  $D$ 为所有非常返态组成的集合，由 $C_n$ 中的状态不能到达 $D$ 中的状态。



证明:  $I = \begin{cases} D(\text{非常返态}) \\ C(\text{常返态}) \end{cases}$

根据互通关系, 将常返闭集  $C$  划分为不同的类。

若  $i_1 \in C$ , 所有与  $i_1$  互通的状态组成一类, 记为闭集  $C_1$ ;

若  $C_1 = C$ , 则  $C$  不可分,  $I = D + C$ ;

若  $C_1 \neq C$ ,  $\exists i_2 \in C - C_1$ , 所有与  $i_2$  互通的状态组成一类, 记为闭集  $C_2$ ;

若  $C_1 + C_2 = C$ , 则:  $I = D + C_1 + C_2$ ;

若  $C_1 + C_2 \neq C$ , 则  $\exists i_3 \in C - C_1 - C_2$ , 所有与  $i_3$  互通的状态组成一类, 记为闭集  $C_3$ ;

如此继续下去, 总可以将  $C$  分解为  $C_1, C_2, \dots$  的闭集之和,

则:  $I = D + C = D + C_1 + C_2 + \dots$





上述定理中的 $D$ 不一定是闭集。

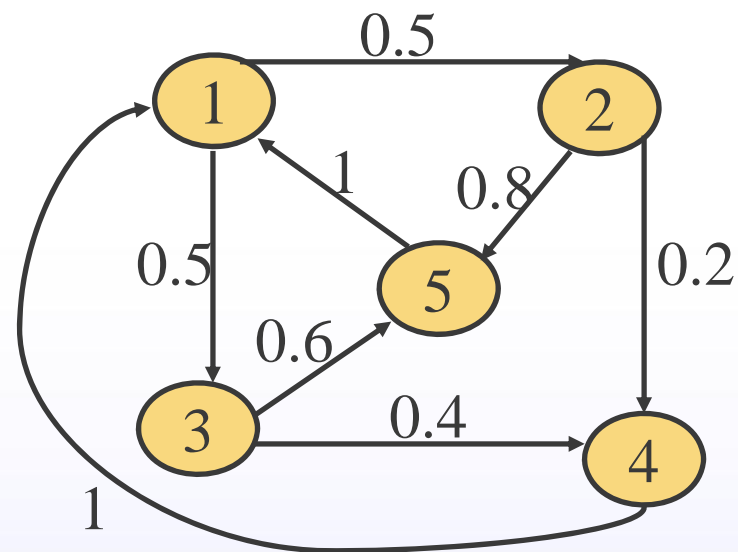
若 $I$ 是有限集， $D$ 不可能是闭集。此时，若质点最初是从某一非常返态出发，最终必然离开 $D$ 进入某一常返态 $C_i$ ，以后也一直在 $C_i$ 中运动。

若 $I$ 是无穷集， $D$ 有可能是闭集。如：无限制的随机游动问题 $p \neq q$ 的情况，此时 $I=D$ ， $C$ 为空集，所有的状态全部为非常返态，质点以正的概率趋于正无穷或负无穷远点，永不返回；只要 $C$ 不空，即至少有一个常返状态，则质点最初是从某一非常返态出发，最终必然离开 $D$ 进入某一常返态 $C_i$ ，以后也一直在 $C_i$ 中运动。



例4.3.1 设 $Markov$ 链的状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , 转移概率矩阵为

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



讨论该 $Markov$ 链状态分类及周期。

解: 1°先画出状态转移图如右上

2°由状态转移图, 有:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$   $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ , 即任意两个状态均互通, 则 $Markov$ 链不可约。

考查状态1,  $f_{11}^{(3)} = p_{12}p_{25}p_{51} + p_{12}p_{24}p_{41} + p_{13}p_{35}p_{51} + p_{13}p_{34}p_{41} = 1$ ,  $f_{11}^{(n)} = 0$

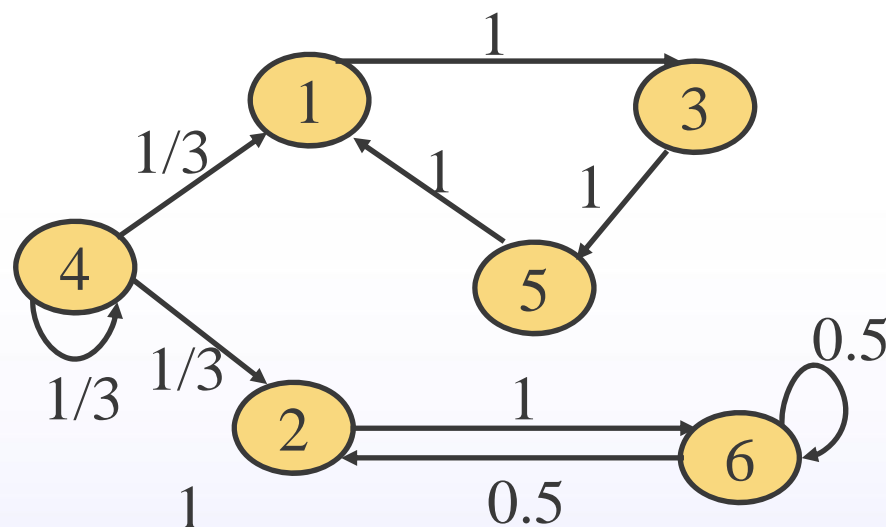
( $n \neq 3$ ), 则  $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = f_{11}^{(3)} = 1$ , 且  $\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 3$ , 则状态1为正常返。

又 $I$ 所有状态互通, 则所有状态全为正常返。



例4.3.2 设 $Markov$ 链的状态空间 $I = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , 转移概率矩阵为:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



讨论该 $Markov$ 链状态分类及周期。

解: 1° 先画出状态转移图如右上

2° 由状态转移图,  $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ ,  $\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 3 f_{11}^{(3)} = 3$

则状态1, 3, 5均为周期为3的正常返态。

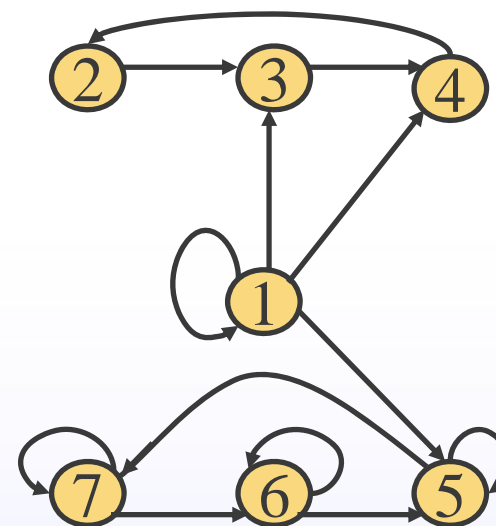
又  $2 \rightarrow 6 \rightarrow 2$ ,  $\mu_6 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{66}^{(n)} = f_{66}^{(1)} + 2 f_{66}^{(2)} = \frac{3}{2}$ , 则状态2, 6为遍历态

$f_{44} = f_{44}^{(1)} = \frac{1}{3}$ , 则状态4非常返



**例4.3.3** 设 $Markov$ 链的状态空间 $I = \{1, 2, \dots, 7\}$ , 转移概率矩阵为:

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$



试对状态空间进行分解。

**另解:** 考察状态1:  $f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)}$  而:  $f_{11}^{(1)} = 0.4$   $f_{11}^{(n)} = 0 (n \neq 1)$

则:  $f_{11} = 0.4 < 1$ , 则状态1非常返

另:  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}^{(n)} = 0.4 + 0.4^2 + \dots + 0.4^n + \dots = \frac{2}{3}$ , 即  $D = \{1\}$

状态2,  $f_{22} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{(n)} = f_{22}^{(3)} = 1 (2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2)$ , 则状态2常返。同理, 状态5常返。

$I = D + C_1 + C_2$ , 其中  $C_1 = \{2, 3, 4\}$  且周期为3,  $C_2 = \{5, 6, 7\}$  且周期为1。



计算 $f_{55}$

$$f_{55} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{55}^{(n)}, \text{ 其中 } f_{55}^{(1)}=0.7, f_{55}^{(2)}=0$$

$$f_{55}^{(n)} = p_{57}^{(1)} p_{76}^{(1)} p_{65}^{(1)} \sum_{k=0}^{n-3} \left[ p_{77}^{(1)} \right]^k \cdot \left[ p_{66}^{(1)} \right]^{n-3-k} \quad (n \geq 3)$$

$$f_{55} = 0.7 + \sum_{n=3}^{\infty} 0.3 \times 0.4 \times 0.5^{n-2} \sum_{k=0}^{n-3} \left( \frac{0.6}{0.5} \right)^k$$

$$= 0.7 + \sum_{n=3}^{\infty} 0.12 \times 0.5^{n-2} \frac{1.2^{n-1} - 1}{0.2}$$

$$= 0.7 + \sum_{n=3}^{\infty} 0.6 \times (0.6^{n-2} - 0.5^{n-2}) = 1$$

则:5常返。



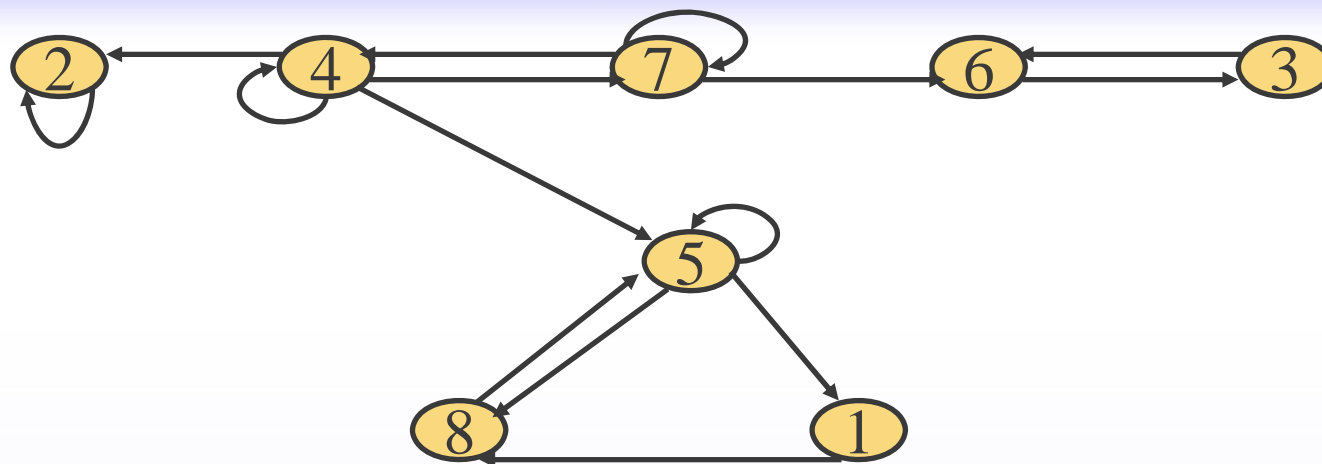
例4.3.4  $I = \{1, 2, \dots, 8\}$ , 转移概率矩阵为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & * & 0 & * & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其中“\*”表示该元素为正，试将 $I$ 进行分解。

解：1°画出状态转移图如下：





2° 根据状态转移图，显然有： $f_{22} = 1$ ，所以2为吸收壁，则 $C_1 = \{2\}$ ；  
由 $1 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ ，知1,5,8三个状态互通，状态5的周期是1，且：

$$f_{55} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{55}^{(n)} = f_{55}^{(1)} + f_{55}^{(2)} + f_{55}^{(3)} = p_{55} + p_{58}p_{85} + p_{51}p_{18}p_{85} = p_{55} + p_{58} + p_{51} = 1$$

$$\mu_5 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{55}^{(n)} = 1 \times p_{55} + 2 \times p_{58}p_{85} + 3 \times p_{51}p_{18}p_{85} < \infty$$

所以：1,5,8为非周期的正常返状态，即遍历态，且 $C_2 = \{1,5,8\}$ ；

再由3,6互通，且 $f_{33} = p_{36}p_{63} = 1$ ，则3,6是周期为2的正常返状态， $C_3 = \{3,6\}$

显然： $f_{44} < 1$ （4只要到达状态2或5，一旦离开永不返回），所以4,7为非常返状态， $D = \{4,7\}$ ，且周期为1，因此： $I = D + C = D + C_1 + C_2 + C_3$