例3.3 设在$[0,t]$内事件**A**已经发生n次，且$0<s<t$，对于$0<k<n$，求$P(X(s)=k|X(t)=n)$。

解： 利用条件概率及泊松分布得

$$P(X(s)=k\mid X(t)=n)$$

$$=\frac{P(X(s)=k,X(t)=n)}{P(X(t)=n)}=\frac{P(X(s)=k,X(t)-X(s)=n-k)}{P(X(t)=n)}$$

$$=\frac{e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{[\lambda(t-s)]^{n-k}}{(n-k)!}}{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n/n!}=C_n^k\left(\frac{s}{t}\right)^k\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

这是一个参数为n和$\dfrac{s}{t}$的二项分布。

例3.4 设在$[0,t]$内事件A已经发生n次，求第$k\left(k<n\right)$次事件A发生的时间W_k的条件概率密度函数。

解：当$h(>0)$充分小时且$s<t$,

$$P\{s<W_k\le s+h\mid X(t)=n\}=\frac{P\{s<W_k\le s+h,X(t)=n\}}{P\{X(t)=n\}}$$

$$=P\{s<W_k\le s+h,X(t)-X(s+h)=n-k\}\frac{n!}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}$$

$$=P\{s<W_k\le s+h\}P\{X(t)-X(s+h)=n-k\}\frac{n!}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}$$

将上式两边除以h，令$h \to 0$并取极限，有：

$$f_{W_k|X(t)}(s|n) = \lim_{h\to 0}\frac{P\{s < W_k \le s+h \mid X(t)=n\}}{h}$$

$$= f_{W_k}(s)P\{X(t)-X(s)=n-k\}(\lambda t)^{-n}e^{\lambda t}n!$$

$$= \lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\left[\lambda(t-s)\right]^{n-k}e^{-\lambda(t-s)}}{(n-k)!}\frac{n!}{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}$$

$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{s^{k-1}}{t^k}\left(1-\frac{s}{t}\right)^{n-k}$$

其中W_k的概率密度$f_{W_k}(s)$由定理3.3给出。

由上式结果知：条件概率密度$f_{W_k|X(t)}(s|n)$是一个$Beta$分布。

例3.5 设$\{X_1(t),\ t\geq0\}$和$\{X_2(t),\ t\geq0\}$是两个相互独立的泊松过程，它们在单位时间内平均出现的事件数分别为λ_1和λ_2。记$W_k^{(1)}$为过程$X_1(t)$的第k次事件到达时间， $W_1^{(2)}$为过程$X_2(t)$的第1次事件到达时间，求$P(W_k^{(1)} < W_1^{(2)})$，即第一个泊松过程的第k次事件发生比第二个泊松过程的第一次事件发生早的概率。

解： 设$W_k^{(1)}$的取值为x， $W_1^{(2)}$的取值为y，由(3.7)式得

$$f_{W_k^{(1)}}(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\dfrac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!}, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

$$f_{W_1^{(2)}}(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y\geq 0,\\ 0, & y<0.\end{cases}$$

则：$P(W_k^{(1)} < W_1^{(2)}) = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$

其中D为由$y = x$与y轴所围区域(如图3.2)，$f(x,y)$为$W_k^{(1)}$与$W_1^{(2)}$的联合概率密度。

由于$X_1(t)$和$X_2(t)$相互独立，故

$$f(x,y) = f_{W_k^{(1)}}(x) f_{W_1^{(2)}}(y)$$

于是

$$P(W_k^{(1)} < W_1^{(2)}) = \int_0^{\infty}\int_x^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \frac{(\lambda_1 x)^{k-1}}{(k-1)!} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dydx = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^k$$

例3.7略