工程硕士生“概率论与随机过程”考试大纲

第一部分：概率论

1. 理解条件概率的定义，会灵活运用乘法公式；
2. 了解两个事件相互独立与互不相容的概念，能推广到n维的情形；
3. 理解二维离散型随机变量的联合分布和边缘分布，联合分布函数和边缘分布函数的概念。就离散型、连续型情形理解条件分布函数的定义，就连续型情形会求其条件概率密度函数；
4. 掌握随机变量函数的分布函数的计算方法，就连续型情形会求随机变量函数的分布密度函数；
5. 深刻理解条件数学期望的定义，掌握其求法。了解随机变量函数的条件数学期望和条件方差的计算方法；
6. 理解特征函数的定义，熟练掌握两点分布、二项分布、泊松分布、均匀分布及正态分布特征函数的计算，了解特征函数的性质；
7. 理解母函数的定义，掌握二项分布、泊松分布及几何分布的母函数的计算，了解母函数的性质。

工程硕士生“概率论与随机过程”考试大纲（续）

第二部分：随机过程

第一章：随机过程的概念及统计特征

1. 理解随机过程的基本概念，知道样本函数、状态空间的定义；
2. 了解随机过程一维分布函数、分布密度的定义，知道推广到n维的情形；
3. 掌握随机过程的数字特征：均值函数、方差函数、自相关函数、自协方差函数、互相关函数、互协方差函数。熟练掌握均值函数和相关函数的求法；
4. 了解二阶矩过程、正交增量过程、马尔可夫过程、独立增量过程、平稳增量过程、正态随机过程、泊松过程、维纳过程、平稳过程的定义及性质；
5. 知道两随机过程互不相关和相互正交的概念。

工程硕士生“概率论与随机过程”考试大纲（续）

第三章：泊松过程

1. 理解计数过程的概念，深刻理解泊松过程的两种定义，理解其等价的基本思想；
2. 掌握泊松过程的数字特征；
3. 掌握泊松过程的时间间隔与等待时间的分布，掌握泊松过程的到达时间的条件分布，会简单地用于解决实际问题。
4. 了解非齐次泊松过程和复合泊松过程的基本概念。

工程硕士生“概率论与随机过程”考试大纲（续）

第二章：马尔可夫链

1. 深入理解马氏链、一步转移概率的概念，掌握随机矩阵的定义，会就实际问题求出一步转移概率矩阵；
2. 理解初始概率和绝对概率（初始概率向量和绝对概率向量）的概念，能利用**C-K**方程求n步转移概率矩阵和绝对概率向量；
3. 理解马氏链的状态常返（正常返、零常返）、非常返及遍历状态的概念，了解闭集的定义和不可约马氏链的性质，掌握其判别法。已知状态空间和一步转移概率矩阵能熟练地判别状态的常返、非常返性，并能将状态空间进行分解；
4. 理解马氏链的遍历性，掌握n步转移概率的渐进性质及平稳分布的求法，知道平稳分布与各状态平均返回时间的关系。

工程硕士生“概率论与随机过程”考试大纲（续）

第五章：连续时间的马氏过程

1. 深刻理解连续时间马尔可夫链的定义；
2. 理解Q矩阵的定义，了解向前向后方程的思想，了解连续时间马氏链转移概率的极限性质及其与平稳分布的关系，会运用其解决简单的实际问题；
3. 了解生灭过程的概念。

工程硕士生“概率论与随机过程”考试大纲（续）

第六章：平稳随机过程

1. 理解宽平稳过程（以下简称平稳过程）的概念，了解其与严平稳过程的差别；就各种情形能熟练地判断已知随机过程是否为平稳过程；
2. 了解两随机过程联合平稳的概念，会求互相关函数；
3. 了解随机序列几乎处处收敛、依概率收敛、依**r**阶矩收敛及依分布收敛的定义，知道这四种收敛性之间的关系。了解均方收敛、均方连续、均方可导、均方可积的概念及判别准则；
4. 理解平稳过程的各态历经性，根据均值和相关函数的各态历经性，能判别平稳过程是否具有各态历经性。

工程硕士生“概率论与随机过程”考试大纲（续）

第五章：平稳过程的谱分析

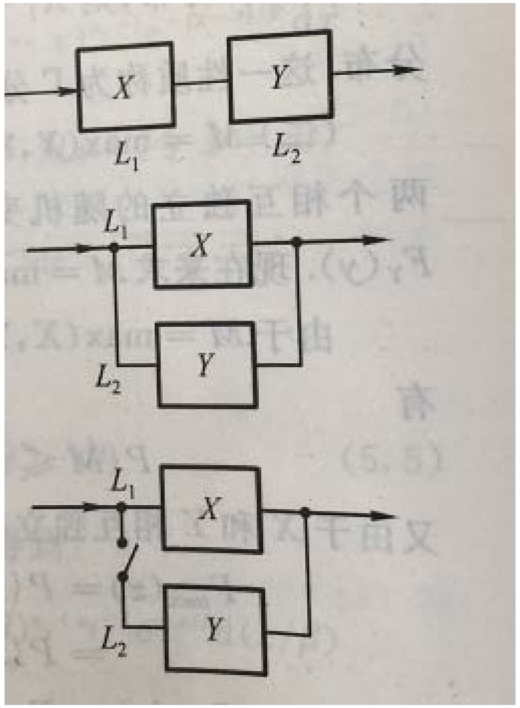
1. 了解平稳过程的平均功率和功率谱密度的概念，会求平均功率；
2. 理解功率谱密度的性质，知道功率谱密度和相关函数构成一对付氏变换函数，并能利用此关系相互求解；
3. 了解窄带随机过程和白噪声过程，知道δ函数的性质。

例1 设系统L由两个相互独立的子系统L_1、L_2联接而成，联接的方式分别是(1)串联,(2)并联,(3)备用（当系统L_1损坏时，系统L_2开始工作），如右图所示。设L_1、L_2的寿命分别为X、Y，已知它们的概率密度分别为:

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

其中$\alpha>0$，$\beta>0$且$\alpha\ne\beta$，试分别以上述三种联接方式写出L的寿命Z的概率密度。



解：(1)串联，当L_1、L_2中有一个损坏时，系统L就停止工作，因此寿命$Z=\min(X,Y)$。

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

由X、Y彼此相互独立，则$Z=\min(X,Y)$的分布函数$F_Z(z)$为：

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=1\text{-}P\{Z>z\}=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-P\{X>z\}\cdot P\{Y>z\}=1\text{-}\left[1-F_X(z)\right]\cdot\left[1-F_Y(z)\right]$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)x} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

则Z的概率密度为：$f_{\min(X,Y)}(z)=f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)x} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$

解：(2)并联，当且仅当L_1、L_2都损坏时，系统L才停止工作，因此寿命$Z=\max(X,Y)$。

$$\because F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases} \qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

由X、Y彼此相互独立，则$Z=\max(X,Y)$的分布函数$F_Z(z)$为：

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}=P\{X\le z\}\cdot P\{Y\le z\}$$

$$=F_X(z)\cdot F_Y(z)=\begin{cases}\left(1-e^{-\alpha z}\right)\left(1-e^{-\beta z}\right) & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

则Z的概率密度为：

$$f_{\max(X,Y)}(z)=f_Z(z)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha z}+\beta e^{-\beta z}-(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)x} & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

解：(3)备用的情况，当L_1损坏时L_2才开始工作，因此寿命

$Z=X+Y$，因此，当$z>0$时：

$$\because\ f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

X、Y彼此相互独立，当$z>0$时$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$为：

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)\cdot f_Y(y)dy=\int_0^z \alpha e^{-\alpha(z-y)}\cdot\beta e^{-\beta y}dy$$

$$=\alpha\beta e^{-\alpha z}\int_0^z e^{-(\beta-\alpha)y}dy=\frac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left[e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right]$$

当$z\le 0$时$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)=0$，则$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}\left[e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}\right] & z>0\\ 0 & z\le 0\end{cases}$$

例2 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$$

定义：$U=\sqrt{X^2+Y^2}$,$V=Y$，求：

(1)(U,V)的概率密度$g(u,v)$;

(2)求U的边缘概率密度$g_U(u)$。

解：(1)：$\begin{cases}U=\sqrt{X^2+Y^2}\\ V=Y\end{cases}$，则：$\begin{cases}x=\pm\sqrt{u^2-v^2}\\ y=v\end{cases}$ $|v|\le u$

则：$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\pm\frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}} & \mp\frac{v}{\sqrt{u^2-v^2}}\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\pm\frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}$$

故：$g(u,v)=f(x,y)|J|=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\dfrac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}, & |v|\le u,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

对$u>0$，$g_U(u)=\int_{-\infty}^{\infty}g(u,v)dv$

$$=\int_{-u}^{u}\frac{1}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\frac{u}{\sqrt{u^2-v^2}}dv$$

$$=\frac{u}{\pi\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}\int_{-u}^{u}\frac{1}{\sqrt{u^2-v^2}}dv=\frac{u}{\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}$$

所以：$g_U(u)=\begin{cases}\dfrac{u}{\sigma^2}e^{-\frac{u}{2\sigma^2}}, & u>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

例3 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(x^2+y^2-2\rho xy)},0<\rho<1$$

求$U=X/Y$的概率密度$f_U(u)$。

解：令：$\begin{cases}U=X/Y\\V=Y\end{cases}$，则：$\begin{cases}x=uv\\y=v\end{cases}$，则：

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}v & u\\ o & 1\end{vmatrix}=v$$

则：$\varphi(u,v)=f(x(u,v),y(u,v))\left|J\right|$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho u+1)v^2}\left|v\right|,u,v\in R$$

关于U的边缘概率密度函数$f_U(u)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u,v)dv$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{v}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2(1-\rho^2)}(u^2-2\rho u+1)v^2}dv$$

$$=\frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\frac{2\sigma^2(1-\rho^2)}{u^2-2\rho u+1}$$

$$=\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi(u^2-2\rho u+1)},\quad u\in R$$

例4设二维随机变量的概率密度$f(x,y)=\begin{cases}2, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

求：$E[E[Y\mid X]]$

解：$E[E[Y\mid X]]=E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty} y\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx\right)dy$

$$=\int_0^x y\left(\int_0^1 f(x,y)dx\right)dy=\int_0^1\left(\int_0^x yf(x,y)dy\right)dx=\int_0^1\left(\int_0^x 2ydy\right)dx=\frac{1}{3}$$

例5 设$X\sim U(0,1)$, Y服从参数为1的指数分布, X与Y相互独立，求$E[X+Y\mid X]$。

解法1: 由X与Y相互独立，有：$E[Y\mid X]=E[Y]$

$$E[X+Y\mid X]=E[X\mid X]+E[Y\mid X]=X+E[Y]=X+1$$

解法2: 令：$\begin{cases} U=X+Y \\ V=X \end{cases}$，则：$\begin{cases} x=v \\ y=x-v \end{cases}$，则：

$$J=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1$$

又：$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y} & 0<x<1,\ \ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

则：$\varphi(u,v)=\begin{cases} e^{v-u} & 0<v<1,\ \ u>v \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

当$0<v<1$时

$$\varphi_{U|V}\left(u\middle|v\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(u,v)}{\varphi_V(v)}dv$$

$$=\begin{cases} e^{v-u} & u>v \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

则：$E\left[U\middle|V=v\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}u\varphi_{U|V}\left(u\middle|v\right)du=\int_{v}^{+\infty}ue^{v-u}du=v+1$

所以：$E\left[X+Y\mid X\right]=X+1$

例6 设(U,V)的概率密度为：

$$g(u,v)=\begin{cases} e^{-u}, & u-v>0, v>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

（1）求$E(I_{\{V>1\}}\,|\,U=10)$，其中$I_{\{V>1\}}(\omega)=\begin{cases} 1, & \omega\in\{V>1\} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

（2）求$D(V\,|\,U)$

解：U的边缘概率密度为：

$$g_U(u)=\int_0^u g(u,v)dv=\begin{cases} \int_0^u e^{-u}dv, & u>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}=\begin{cases} ue^{-u}, & u>0 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

所以条件概率：

$$g_{V|U}(v|u)=\frac{g(u,v)}{g_U(u)}=\begin{cases}\frac{1}{u}, & 0<v<u\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

（1）$E(I_{\{V>1\}}|U=10)=1\cdot P(V>1|U=10)$

$$=\int_1^{10}g_{V|U}(v|u=10)dv=\int_1^{10}\frac{1}{10}dv=\frac{9}{10}$$

（2）因为$E(V|U=u)=\frac{u}{2}$，$E(V^2|U=u)=\frac{u^2}{3}$,

$D(V|U=u)=\frac{u^2}{12}$，所以：$D(V|U)=\frac{U^2}{12}$

例7 $X \sim B(n,\ p)$，$Y \sim \pi(\lambda)$，且X与Y相互独立，计算$X+Y$的特征函数。

解：$\because X \sim B(n,\ p)$，则：$\varphi_X(t)=\left(q+pe^{it}\right)^n$，其中$q=1-p$

又$\because Y \sim \pi(\lambda)$，则：$\varphi_Y(t)=e^{\left(e^{it}-1\right)\lambda}$，且$X$与$Y$相互独立

则：$\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\cdot\varphi_Y(t)=\left(q+pe^{it}\right)^n\cdot e^{\left(e^{it}-1\right)\lambda}$？

例8 设ξ，η为离散且相互独立的随机变量，其分布律为：

ξ	0	1	2
P_i	1/2	3/8	1/8

η	0	1	
P_j	1/3	2/3	

用特征函数的性质求$\zeta=\xi+2\eta$的分布律以及$E(\zeta)$。

解： 设$\varphi_\xi(t)=E\left[e^{i\xi t}\right]=e^{i0t}\cdot\frac{1}{2}+e^{i1t}\cdot\frac{3}{8}+e^{i2t}\cdot\frac{1}{8}$

$$=\frac{1}{2}+\frac{3}{8}e^{it}+\frac{1}{8}e^{2it}$$

$$\varphi_{2\eta}(t)=E\left[e^{i2\eta t}\right]=e^{i0t}\cdot\frac{1}{3}+e^{i2t}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{2it}$$

由ξ，η独立，则ξ,2η也相互独立，则：

$$\varphi_{\zeta}(t)=\varphi_{\xi}(t)\cdot\varphi_{2\eta}(t)=\frac{1}{6}+\frac{1}{8}e^{it}+\frac{9}{24}e^{2it}+\frac{1}{4}e^{3it}+\frac{1}{12}e^{4it}$$

则：

ζ	0	1	2	3	4
P	1/6	1/8	9/24	1/4	1/12

于是，$\varphi_{\zeta}'(t)=\left(\frac{1}{8}e^{it}+\frac{9}{12}e^{2it}+\frac{3}{4}e^{3it}+\frac{1}{3}e^{4it}\right)i$

则：$\varphi_{\zeta}'(0)=\left(\frac{1}{8}+\frac{9}{12}+\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\right)i=\frac{47}{24}i$

所以：$E(\zeta)=(-i)\varphi_{\zeta}'(0)=\frac{47}{24}$

例9 设随机过程$X(t)=\sin(\omega t+\Theta)$，$t\in\mathrm{R}$，其中$\omega$为常数，$\Theta\sim U\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，计算随机过程$X(t)$的分布密度函数$f(x;0)$。

解：当$t=0$，$X(t)=\sin\Theta$

则：$$F_X(x)=P\{\sin\Theta\le x\}=\begin{cases}P\{\Theta\le\arcsin x\} & -1\le x\le 1\\ 0 & x<-1\\ 1 & x>1\end{cases}$$

$$\therefore f(x;0)=f_X(x)=f(\theta)\left|\frac{d\theta}{dx}\right|=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} & -1\le x\le 1\\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

2.14 设随机过程 $Y_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$，其中 $X_j\left(j=1,2,\cdots n\right)$ 是相互独立的随机变量，且：

$P\left(X_j=1\right)=p$，$P\left(X_j=0\right)=1-p=q$，求 $Y_n\left(n=1,2,\cdots\right)$ 的均值和协方差函数。

解：$Y_n\left(n=1,2,\cdots\right)$ 的均值函数为：$E\left(Y_n\right)=E\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\sum_{j=1}^{n}E\left(X_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(1\bullet p+0\bullet q\right)=np$

而：$E\left(X_iX_j\right)=\begin{cases}p^2, i\neq j\\ p, i=j\end{cases}$，则 $Y_n\left(n=1,2,\cdots\right)$ 的协方差函数为：

$$B_Y\left(n,m\right)=E\left[\sum_{j=1}^{n}X_j-np\right]\left[\sum_{k=1}^{m}X_k-mp\right]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}E\left(X_jX_k\right)-mnp^2$$

当 $m\le n$ 时，$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}E\left(X_jX_k\right)=\sum_{j=k}E\left(X_jX_k\right)+\sum_{j\neq k}E\left(X_jX_k\right)=mp+\left(mn-m\right)p^2=mpq+mnp^2$

同理当 $m>n$ 时，$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}E\left(X_jX_k\right)=\sum_{j=k}E\left(X_jX_k\right)+\sum_{j\neq k}E\left(X_jX_k\right)=np+\left(mn-n\right)p^2=npq+mnp^2$

则：$B_Y\left(n,m\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}E\left(X_jX_k\right)-mnp^2=\min\left(m,n\right)pq$

例11 设时间区间$(0,t]$内到达某商店门口的顾客数$N(t)$是强度为$\lambda(\lambda>0)$的泊松过程。每个到达商店门口的顾客以概率p进入商店，以概率$1-p$不进入商店，且假设各个顾客进入商店与否相互独立。以$N_1(t)$表示$(0,t]$内进入该商店的顾客数，求：

（1）$P\{N_1(t)=k\},k=0,1,\ldots,t\in(0,T]$;

（2）若以X_i表示进入商店的第i个顾客花费的钱数，并假设$X_1,X_2,\ldots$相互独立，且服从$N(0,100)$的均匀分布，求该商店在$(0,T]$内平均销售额。

p_{ij}

解 （1）对于$t\in(0,T]$

$$P\{N_1(t)=k\}=\sum_{n=k}^{\infty}P\{N(t)=n\}P\{N_1(t)=k\mid N(t)=n\}$$

$$=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t}C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda pt}$$

（2）该商店在$(0,T]$内销售额为$X_1+X_2+\cdots+X_{N_1(T)}$，所以平均销售额为：

$$E[X_1+X_2+\cdots+X_{N_1(T)}]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(N_1(T)=n)E[X_1+X_2+\cdots+X_{N_1(T)}\mid N_1(T)=n]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}P(N_1(T)=n)E[X_1+X_2+\cdots+X_n\mid N_1(T)=n]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda pT)^n}{n!}e^{-\lambda pT}E[X_1+X_2+\cdots+X_n]$$

$$=50\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda pT)^n}{n!}e^{-\lambda pT}n=50\lambda pT$$

也可由定理3.6直接得结论

例12 将2个红球4个黑球任意地分别放入甲乙两个盒子中，每个盒子放3个，现从每个盒子中任取一球，交换后放回盒中，以$X(n)$表示经过n次交换后甲盒中红球数，则$\{X_n, n\geq 0\}$为一齐次马尔可夫链，试求其一步转移概率矩阵。

解: (1)根据题意，$I=\{0,1,2\}$

p_{00}表示甲盒中原有0个红球，经过一次交换后仍然0个红球，当且仅当下次交换从乙盒的2红1黑中抽到黑球（从甲盒中必然抽中黑球），即：$p_{00}=\dfrac{1}{3}$;

p_{01}表示甲盒中原有0个红球，经过一次交换后有1个红球，当且仅当下次交换从乙盒的2红1黑中抽中红球（从甲盒中必然抽中黑球），即：$p_{01}=\dfrac{2}{3}$;

$p_{02}=1-p_{00}-p_{01}=0$

例12 将2个红球4个黑球任意地分别放入甲乙两个盒子中，每个盒子放3个，现从每个盒子中任取一球，交换后放回盒中，以$X(n)$表示经过n次交换后甲盒中红球数，则$\{X_n, n\geq 0\}$为一齐次马尔可夫链，试求其一步转移概率矩阵。

续解: p_{10}表示甲盒中原来有一个红球，经过一次交换以后无红球，当且仅当：下次抽球时从乙盒的1红2黑中抽到的是黑球同时从甲盒中抽中了原来的那1个红球，因此：$p_{10}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$,

同理：p_{11}表示甲盒中原来有一个红球，经过一次交换以后仍然只有1个红球，当且仅当两种情况：下次抽球时从乙盒的1红2黑中抽中的是黑球同时从甲盒中抽中的也是黑球；或者下次抽球时从乙盒的1红2黑中抽中的是红球同时从甲盒中抽中的也是红球，因此：$p_{11}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$，于是：$p_{12}=1-p_{10}-p_{11}=\frac{2}{9}$

例12 将2个红球4个黑球任意地分别放入甲乙两个盒子中，每个盒子放3个，现从每个盒子中任取一球，交换后放回盒中，以$X(n)$表示经过n次交换后甲盒中红球数，则$\{X_n, n\geq 0\}$为一齐次马尔可夫链，试求其一步转移概率矩阵。

续解：同第一行，有：$p_{20}=0$

p_{21}甲盒中原有2个红球，经过一次交换后只有1个红球，当且仅当下次抽球从甲盒中抽中1个红球且从乙盒中抽中黑球，即：$p_{21}=\dfrac{2}{3}$

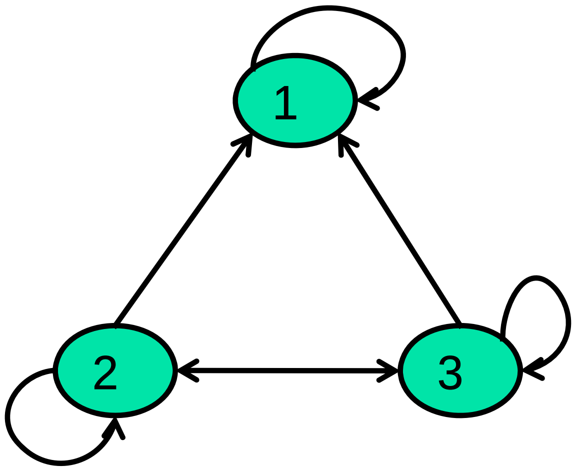
p_{22}甲盒中原有2个红球，经过一次交换后仍然有2个红球，当且仅当下次抽球从甲盒中抽中1个黑球（乙盒中只能抽中黑球），因此：$p_{22}=\dfrac{1}{3}$

则一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/9 & 5/9 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

例13 设有限齐次马尔可夫链的状态空间为$I=\{1,2,3\}$，一步转移概率矩阵为$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\\ 1/4 & 1/2 & 1/4\end{pmatrix}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} p_{23}^{(n)}$。

解：



由状态转移图知：

1为常返态，**2**、**3**为非常返态

则：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{23}^{(n)}=0$

例14 设一质点在1,2,3点上作随机游动，若在时刻t质点位于这三个点之一，在$[t,t+h)$内，它以概率$\frac{1}{2}h+o(h)$分别转移到其它二点之一，试求质点随机游动的柯尔莫哥洛夫方程，转移概率$p_{ij}(t)$及平稳分布。

解：由题意有：$p_{ij}(h)=\frac{1}{2}h+o(h)(j\neq i)$

再由定理5.3，得：

$$q_{ii}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{j\neq i}p_{ij}(h)}{h}=1$$

$$q_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{h\to 0}\frac{p_{ij}(h)}{h}=\frac{1}{2}$$

$$Q=\begin{bmatrix}-1 & 1/2 & 1/2\\ 1/2 & -1 & 1/2\\ 1/2 & 1/2 & -1\end{bmatrix}$$

则由 5.11 式，柯尔莫哥洛夫向前方程为：

$$P'(t)=P(t)Q$$

即：$$\begin{bmatrix} p'_{11}(t) & p'_{12}(t) & p'_{13}(t) \\ p'_{21}(t) & p'_{22}(t) & p'_{23}(t) \\ p'_{31}(t) & p'_{32}(t) & p'_{33}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

而：$$\sum_{j=1}^{3} p_{ij}(t)=1(i=1,2,3)$$

所以：

$$\begin{aligned} p'_{ij}(t) &= -p_{ij}(t)+\frac{1}{2}\left[p_{i,j-1}(t)+p_{i,j+1}(t)\right] \\ &= -p_{ij}(t)+\frac{1}{2}\left[1-p_{ij}(t)\right] = -\frac{3}{2}p_{ij}(t)+\frac{1}{2}\left(i,j\in I,\ \text{其中} I=\{1,2,3\}\right) \end{aligned}$$

则上述一阶线性微分方程的解为：$p_{ij}(t)=ce^{-\frac{3}{2}t}+\frac{1}{3}$

由初始条件：

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

则：$c=\begin{cases}2/3 & i=j\\ -1/3 & i\neq j\end{cases}$

则：$p_{ij}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t} & i=j\\ \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t} & i\neq j\end{cases}$

所以，其平稳分布为：$\pi_j(t)=\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\dfrac{1}{3},\ j=1,2,3$。

例15 设$\{W(t), t \geq 0\}$是参数为σ^2的维纳过程，$W(0)=0$，令：$X(t)=e^{-\beta t}W\left(e^{2\beta t}\right)$，$-\infty < t < +\infty$，$\beta > 0$为常数。证明$X(t)$为平稳过程，求其谱密度。

解:(1) $\mu_X(t)=E\left[X(t)\right]=e^{-\beta t}E\left[W\left(e^{2\beta t}\right)\right]=0$

(2) $R_X(s,t)=E\left[X(s)X(t)\right]$

$$=E\left[e^{-\beta s}e^{-\beta t}W\left(e^{2\beta s}\right)W\left(e^{2\beta t}\right)\right]$$

$$=e^{-\beta(t+s)}E\left[W\left(e^{2\beta s}\right)W\left(e^{2\beta t}\right)\right]$$

当$s<t$，$E\left[W\left(e^{2\beta s}\right)W\left(e^{2\beta t}\right)\right]$

$=E\left\{\left[W\left(e^{2\beta s}\right)-W(0)\right]\left[W\left(e^{2\beta t}\right)-W\left(e^{2\beta s}\right)+W\left(e^{2\beta s}\right)\right]\right\}$

$=E\left[W\left(e^{2\beta s}\right)-W(0)\right]E\left[W\left(e^{2\beta t}\right)-W\left(e^{2\beta s}\right)\right]+E\left[W\left(e^{2\beta s}\right)\right]^2$

$=\sigma^2e^{2\beta s}$

所以：$R_X(s,t)=\sigma^2e^{-\beta(t-s)}$

同理，当$s\geq t$时，$R_X(s,t)=\sigma^2e^{-\beta(s-t)}$

即：$R_X(s,t)=\sigma^2e^{-\beta|s-t|}$

综上所述：$\mu_X(t)$为常数，$R_X(s,t)$只与$s-t$有关

由平稳过程的定义，则$X(t)$为平稳过程。

谱密度函数：$S_X(\omega)=\dfrac{\sigma^2\beta}{\pi\left(\omega^2+\beta^2\right)}$

例16设$X(t)$是平稳过程，定义$Y(t)=X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)$，$X(t)$与$\Theta$相互独立，$\Theta \sim U(0,2\pi)$，$\omega_0$为常数。试证明$Y(t)$是平稳过程。若$X(t)$的功率谱密度为$s_X(\omega)$，求$Y(t)$的功率谱密度。

解:(1) $E\left[Y(t)\right]=E\left[X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)\right]=E\left[X(t)\right]\cdot E\left[\cos(\omega_0 t+\Theta)\right]$

而：$E\left[\cos(\omega_0 t+\Theta)\right]=\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0$

则：$E\left[Y(t)\right]=0$为常数

$$R_Y(s,t)=E\left[Y(s)Y(t)\right]=E\left[X(s)\cos(\omega_0 s+\Theta)X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)\right]$$

$$=E\left[X(s)X(t)\right]\cdot E\left[\cos(\omega_0 s+\Theta)\cos(\omega_0 t+\Theta)\right]$$

$$=R_X(s-t)\int_0^{2\pi}\cos(\omega_0 s+\theta)\cos(\omega_0 t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta$$

$=R_X(s-t)\cdot\frac{1}{2}\cos\omega_0(s-t)$仅与时间间隔有关

$\therefore Y(t)$是平稳过程。

$(2)\because E[Y(t)] = E\left[X(t)\cos(\omega_0 t+\Theta)\right] = E[X(t)]\cdot E\left[\cos(\omega_0 t+\Theta)\right]=0$

$$R_Y(s,t) = R_X(s-t)\cdot\frac{1}{2}\cos\omega_0(s-t)$$

$$令:\tau = s-t,\ 则 R_Y(\tau)=R_X(\tau)\cdot\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau$$

$$\therefore s_Y(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_Y(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\cdot\frac{1}{2}\cos\omega_0\tau\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-i\omega_0\tau}+e^{i\omega_0\tau}}{2}e^{-i\omega\tau}d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)\cdot\frac{1}{4}\left[e^{-i(\omega+\omega_0)\tau}+e^{-i(\omega-\omega_0)\tau}\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{4}\left[s_X(\omega+\omega_0)+s_X(\omega-\omega_0)\right]\left(\because s_X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\right)$$