

第七章 平稳过程的谱分析

- ◆ 教学目的 理解平稳过程相关函数的谱分解，并掌握相互求解的基本方法。
- ◆ 教学重点 谱分解的基本思路

第一节 平稳过程的谱密度

首先简要回顾普通时间函数的频谱和能谱密度的概念。

设 $x(t)$ 满足 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$, 则 $x(t)$ 的 $Fourier$ 变换存在, 即 $x(t)$ 具有频谱:

$$F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (7.1)$$

则:

$$\overline{F_x(\omega)} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt = F_x(-\omega)$$

且 $F(\omega)$ 的 $Fourier$ 反变换为:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (7.2)$$





易知成立帕赛伐公式:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega) e^{i\omega t} d\omega dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{i\omega t} dt d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega) \overline{F_x(\omega)} d\omega\end{aligned}$$

$$\text{则: } \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_x(\omega)|^2 d\omega \quad (7.3)$$

若将 $x(t)$ 看作加在1欧姆电阻上的电压时, 左式就表示消耗在该电阻上的总能量, 于是 $|F_x(\omega)|^2$ 为能谱密度。



实际问题中，大多数时间函数的总能量都是无限的，因而不能满足傅立叶变换条件。为此考虑平均功率及功率密度。

作一截尾函数：

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t), & |t| \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为 $x_T(t)$ 有限，其傅立叶变换存在，于是有：

$$F_x(\omega, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt \quad (7.4)$$

$F_x(\omega, T)$ 的 $Fourier$ 反变换为：

$$x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega, T) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\text{并且有 } \int_{-\infty}^{\infty} x_T^2(t) dt = \int_{-T}^T x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_x(\omega, T)|^2 d\omega.$$



$$\begin{aligned}\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{\infty} |F_x(\omega, T)|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_x(\omega, T)|^2 d\omega\end{aligned}$$

左边代表 $x(t)$ 消耗在1欧姆电阻上的平均功率，而右边的被积函数 $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |F_x(\omega, T)|^2$ 为**功率密度**。

对随机过程 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 可以作类似的分析。

设 $X(t)$ 是均方连续的随机过程，作截尾随机过程：

$$X_T(t) = \begin{cases} X(t), & |t| \leq T \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

因为 $X_T(t)$ 均方可积，其傅立叶变换存在，于是有：

$$F_X(\omega, T) = \int_{-\infty}^{\infty} X_T(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt.$$



利用帕赛伐公式及反 $Fourier$ 变换有

$$\int_{-\infty}^{\infty} |X_T(t)|^2 dt = \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F_X(\omega, T)|^2 d\omega.$$

由于 $X(t)$ 为随机过程，上式积分后是随机变量，因此，需要在概率平均的意义下对时间取平均。于是有

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt \right] &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E \left[\frac{1}{2T} |F_X(\omega, T)|^2 \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|F_X(\omega, T)|^2 \right] d\omega \end{aligned} \quad (7.5)$$

这就是随机过程 $X(t)$ 的平均功率和功率密度关系的表达式。



定义7.1 设 $\{X(t), t \in R\}$ 为均方连续随机过程，称：

$$\varphi^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt \right] \quad (7.6)$$

为 $X(t)$ 的平均功率。称：

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[|F_X(\omega, T)|^2 \right] \quad (7.7)$$

为 $X(t)$ 的功率谱密度，简称谱密度。



当 $X(t)$ 是均方连续的平稳过程时，因为 $E|X(t)|^2 = R_X(0)$ 是与 t 无关的常数，利用均方积分的性质可将上式简化得：

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt \right] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[|X(t)|^2] dt = E|X(t)|^2 = R_X(0) \quad (7.8)\end{aligned}$$

即平稳过程的平均功率等于该过程的均方值，或等于它的谱密度在频域上的积分，即：

$$\varphi^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) d\omega \quad (7.9)$$

$S_X(\omega)$ 描述了各种频率成分所具有的能量大小。



例7.1 设随机过程 $X(t) = a \cos(\omega_0 t + \Theta)$, a 、 ω_0 为常数, 在下列情况下求 $X(t)$ 的平均功率

- (1) Θ 是在 $(0, 2\pi)$ 上服从均匀分布的随机变量,
- (2) Θ 是在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上服从均匀分布的随机变量。

解: (1) $X(t)$ 是平稳过程, 且相关函数为

$$R_X(\tau) = \frac{a^2}{2} \cos(\omega_0 \tau)$$

故其平均功率为

$$\varphi^2 = R_X(0) = \frac{a^2}{2}$$



$$\begin{aligned}(2) \quad E[X^2(t)] &= E[a^2 \cos^2(\omega_0 t + \Theta)] = E\left[\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \cos(2\omega_0 t + 2\Theta)\right] \\ &= \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2\omega_0 t + 2\theta) \cdot \frac{2}{\pi} d\theta = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{\pi} \sin(2\omega_0 t)\end{aligned}$$

故 $X(t)$ 不是平稳过程，其平均功率为

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \lim_{T \rightarrow \infty} E\left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T |X(t)|^2 dt\right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T E[X^2(t)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \left[\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{\pi} \sin(2\omega_0 t)\right] dt = \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$



对于平稳随机序列的谱分析，我们给出如下结果：

定义7.2 设 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 是平稳随机序列，若相关

函数满足 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |R_X(n)| < \infty$ ，则称

$$S_X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X(n) e^{-in\omega}, -\pi \leq \omega \leq \pi$$

为 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 的谱密度。

此时

$$R_X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_X(\omega) e^{in\omega} d\omega, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



第二节 谱密度的性质

对于平稳过程，第六章从时域角度对相关函数 $R_X(\tau)$ 进行了讨论，上一节则从频域角度对谱密度进行了讨论。

相关函数 $R_X(\tau)$ 和功率谱密度 $S_X(\omega)$ 均为平稳过程 $X(t)$ 的特征，它们存在何种关系？

设 $\{X(t), t \in R\}$ 是均方连续平稳过程， $R_X(\tau)$ 为其相关函数， $S_X(\omega)$ 为其功率谱密度。



$S_X(\omega)$ 具有如下性质:

(1) 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |R_X(\tau)| d\tau < \infty$, 则 $S_X(\omega)$ 是 $R_X(\tau)$ 的傅立叶变换, 即:

$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (7.12)$$

证明: 由(7.4)式, $F_X(\omega, T) = \int_{-\infty}^{\infty} x_T(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T x(t) e^{-i\omega t} dt$

和(7.7)式, $S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|F_X(\omega, T)|^2]$

将(7.4)式代入(7.7)式, 得:

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E[|F_X(\omega, T)|^2] \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E\left[\left|\int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt\right|^2\right] \end{aligned} \quad (7.13)$$



$$\begin{aligned}\text{而: } & \frac{1}{2T} E \left[\left| \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \overline{\int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt} \right] \\ &= \frac{1}{2T} E \left[\int_{-T}^T \int_{-T}^T X(t) \overline{X(s)} e^{-i\omega(t-s)} dt ds \right] \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T E \left[X(t) \overline{X(s)} \right] e^{-i\omega(t-s)} dt ds \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T R_X(t-s) e^{-i\omega(t-s)} dt ds\end{aligned}$$

仿照第六章定理6.10的结论，可得：

$$\frac{1}{2T} E \left[\left| \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right] = \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T} \right) R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$



有:
$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

令:
$$R_X(\tau, T) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau) & |\tau| \leq 2T \\ 0 & |\tau| > 2T \end{cases}$$

显然:
$$\lim_{T \rightarrow \infty} R_X(\tau, T) = R_X(\tau)$$

则:
$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-2T}^{2T} \left(1 - \frac{|\tau|}{2T}\right) R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau, T) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} R_X(\tau, T) e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

对(7.12)式傅氏反变换, 得:

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (7.14)$$



当 $\{X(t), t \in R\}$ 是实平稳过程时, $R_X(\tau)$ 为偶函数, 则:

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) [\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau] d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau) \cos\omega\tau d\tau = 2 \int_0^{\infty} R_X(\tau) \cos\omega\tau d\tau \end{aligned}$$

同理: $R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega) [\cos\omega\tau + i\sin\omega\tau] d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_X(\omega) \cos\omega\tau d\omega \end{aligned}$$



(2) $S_X(\omega)$ 是 ω 的实的、非负偶函数。

证明：由(7.13)式，有：

$$S_X(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} E \left[\left| \int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \right]$$

其中， $\int_{-T}^T X(t) e^{-i\omega t} dt$ 是实的、非负偶函数，取极限后仍然是实的、非负偶函数。



(3) $S_X(\omega)$ 是 ω 的有理函数时，其形式必为：

$$S_X(\omega) = \frac{a_{2n}\omega^{2n} + a_{2n-2}\omega^{2n-2} + \cdots + a_0}{\omega^{2m} + b_{2m-2}\omega^{2m-2} + \cdots + b_0}$$

其中 $a_{2n-i}, b_{2m-j} (i = 0, 2, \cdots, 2n, j = 2, 4, \cdots, 2m)$ 为常数，且 $a_{2n} > 0$ ， $m > n$ ，且分母无实根。

证明：根据(2)及平均功率有限可证明，略。

有理谱密度是常见的一种谱密度。

既然平稳过程的相关函数和功率谱密度互为一对傅氏变换，下面举例说明如何相互求解。



例7.2 已知平稳过程的相关函数为： $R(\tau) = \alpha e^{-\beta|\tau|}$ ， $\alpha, \beta > 0$ ，求谱密度函数。

解：

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \left[\int_{-\infty}^0 e^{-i\omega\tau} \alpha e^{\beta\tau} d\tau + \int_0^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \alpha e^{-\beta\tau} d\tau \right] \\ &= \alpha \left[\frac{e^{(\beta-i\omega)\tau}}{\beta-i\omega} \Big|_{-\infty}^0 + \frac{e^{-(\beta+i\omega)\tau}}{-(\beta+i\omega)} \Big|_0^{+\infty} \right] \\ &= \frac{2\alpha\beta}{(\beta^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$



留数定理

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 外处处解析, C 是 D 内包围各奇点的一条简单正向闭曲线, 则:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]$$

其中, $\text{Res}[f(z), z_k]$ 为 $f(z)$ 在 z_n 处的留数。

当 z_0 为一阶极点, $\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

当 z_0 为 k 阶极点, $\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1} [(z - z_0)^k f(z)]}{dz^{k-1}}$



形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} s_X(\omega) e^{ia\omega} d\omega (a > 0)$ 的积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_X(\omega) e^{ia\omega} d\omega (a > 0) = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]$$



例7.3 已知谱密度为 $S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9}$, 求平稳过程 $X(t)$ 的相关函数。

解:
$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} \frac{\omega^2 + 4}{\omega^4 + 10\omega^2 + 9} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} \frac{\omega^2 + 4}{(\omega^2 + 9) \cdot (\omega^2 + 1)} d\omega$$
$$= i \left[\text{Res}_{z=i} \frac{e^{iz|\tau|} (z^2 + 4)}{(z^2 + 9) \cdot (z^2 + 1)} + \text{Res}_{z=3i} \frac{e^{iz|\tau|} (z^2 + 4)}{(z^2 + 9) \cdot (z^2 + 1)} \right]$$
$$= \frac{1}{48} (9e^{-|\tau|} + 5e^{-3|\tau|})$$



例7.4 设 $\{X_n, n = 0, \pm 1, \dots\}$ 是具有零均值的平稳随机序列，且

$$R_X(n) = \begin{cases} \sigma^2, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

求其功率谱密度。

解：因为 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |R_X(n)| = \sigma^2 < \infty$

则其功率谱密度为：

$$S_X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_X(n) e^{-in\omega} = \sigma^2, -\pi \leq \omega \leq \pi$$

例7.5 设平稳随机序列的谱密度为：

$$S_X(\omega) = \frac{\sigma^2}{|1 - \varphi e^{-i\omega}|^2}, |\varphi| < 1$$

求 $R_X(\tau)$ 。

解： $R_X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} S_X(\omega) e^{in\omega} d\omega$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\sigma^2}{|1 - \varphi e^{-j\omega}|^2} e^{in\omega} d\omega$$

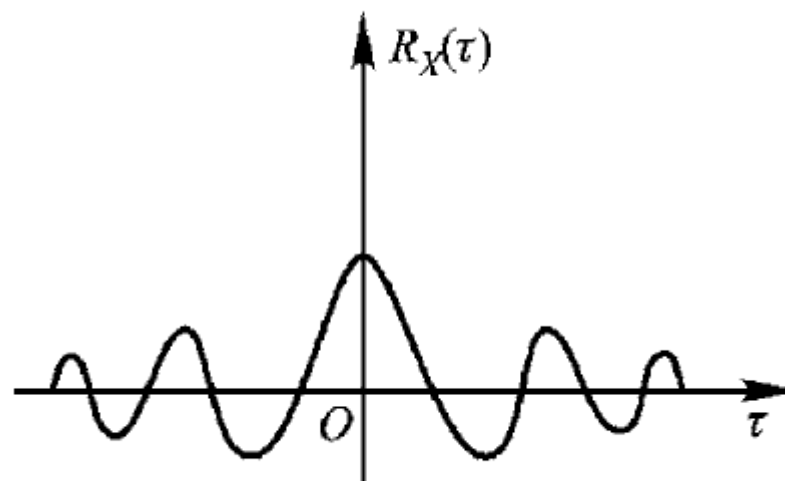
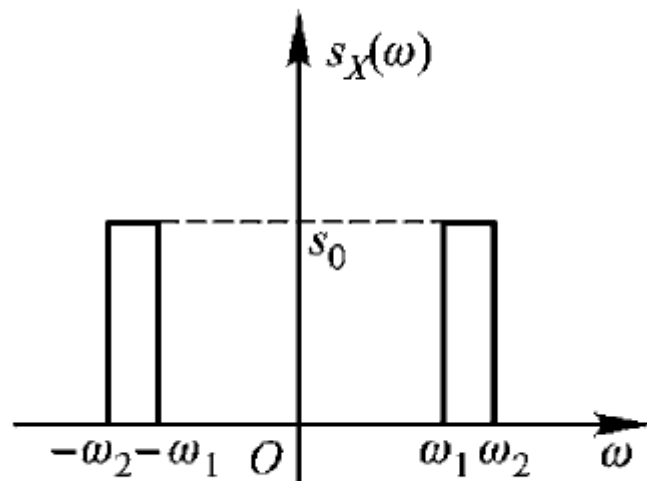
$$= \frac{\sigma^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(n\omega)}{1 - 2\varphi \cos \omega + \varphi^2} d\omega = \frac{\sigma^2 \varphi^n}{1 - \varphi^2}$$

其中， $n = 0, 1, \dots$



7.3 窄带过程及白噪声过程的功率谱密度

当一个随机过程的谱密度限制在很窄的一段频率范围内，则称该过程为**窄带随机过程**。即其谱密度限制在 $\omega \leq |\omega_2 - \omega_1|$ ，如下图所示。





例7.6 已知上图所示的窄带平稳过程的谱密度 $S_X(\omega)$, 求该过程的均方值和相关函数。

解： $X(t)$ 的均方值： $E[X^2(t)] = R_X(0)$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} s_0 d\omega = \frac{1}{\pi} s_0 (\omega_2 - \omega_1)$$

$X(t)$ 的相关函数：

$$\begin{aligned} R_X(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(\omega) e^{-i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} s_0 \cos \omega\tau d\omega \\ &= \frac{s_0}{\pi\omega} [\sin \omega_2\tau - \sin \omega_1\tau] \\ &= \frac{2s_0}{\pi\omega} \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\tau\right) \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\tau\right) \end{aligned}$$



定义7.3 设 $\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$ 为实值平稳过程，若它的均值为零，且谱密度在所有频率范围内为非零的常数，即 $S_X(\omega) = N_0 (-\infty < \omega < +\infty)$ ，则称 $X(t)$ 为**白噪声过程**。

白噪声过程的相关函数在通常意义下的傅氏反变换不存在，所以，为了对白噪声过程进行频谱分析，引进 δ 函数。

具有如下性质的函数称为 **δ 函数**：

$$(1) \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0; \end{cases} \quad (2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$



δ 函数具有如下的重要性质：

对任何连续函数 $f(x)$ ，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

或
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-T) f(x) dx = f(T)$$

于是 δ 函数的傅氏变换为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau = e^{-i\omega\tau} \Big|_{\tau=0} = 1$$

因此：
$$\delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega$$

即：
$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = 2\pi\delta(\tau), \quad \text{即：} \delta(\tau) \leftrightarrow 1$$



同理：

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega) \cdot e^{i\omega\tau} d\omega = 1$$

则： $\int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-i\omega\tau} d\omega = 2\pi\delta(\omega)$ ，即： $1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

例7.7 已知白噪声过程的谱密度为 $S_X(\omega)=N_0$ ($-\infty<\omega<+\infty$)，求它的相关函数。

解：由 δ 函数的性质知

$$R_X(\tau) = N_0\delta(\tau)$$



例7.8 已知相关函数 $R_X(\tau) = a \cos(\omega_0 \tau)$, 其中 a, ω_0 为常数, 求谱密度为 $S_X(\omega)$ 。

解:
$$S_X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} R(\tau) d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} a \cos(\omega_0 \tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$= \frac{a}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}] e^{-i\omega\tau} d\tau$$

$$\text{由 } \delta(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{i\omega\tau} d\tau, \text{ 即 } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau = 2\pi\delta(\omega)$$

$$\text{所以: } s_X(\omega) = a\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$



白噪声过程是一种理想化的数学模型，实际上并不存在。但是，在实际中所遇到的各种随机干扰，只要它的谱密度在比信号频带宽很多的频率范围内存在，且分布近似均匀，通常把这种干扰当做白噪声处理。

以上讨论白噪声功率谱结构时，并未涉及它的概率分布，因此，它可以具有不同的分布，如正态分布，瑞利分布等。



7.4 联合平稳过程的互谱密度

定义7.4 若 $\{X(t), t \in T\}$ 和 $\{Y(t), t \in T\}$ 为平稳过程, 且它们是联合平稳的, 若它们的互相关函数 $R_{XY}(\tau)$ 满足

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |R_{XY}(\tau)| d\tau < +\infty$$

则称 $R_{XY}(\tau)$ 的傅氏变换

$$s_{XY}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (7.21)$$

是 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互功率谱密度, 简称互谱密度。

$$\text{于是有 } R_{XY}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{XY}(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (7.22)$$

互谱密度一般是复值的, 没有谱密度 $s_X(\omega)$ 所具有的实、非负偶函数性质。



7.5 平稳过程通过线性系统的分析

平稳过程的一个重要应用是线性系统对随机输入的响应。

一、线性时不变系统

设系统的输入 $x(t)$ 时，系统的作用为 L ，其输出为 $y(t)$ ，则它们的关系为 $y(t) = L[x(t)]$ (7.24)

其中 L 在数学上代表算子，如加法、乘法、微分、积分等。

定义7.5 称满足下列条件的算子为线性算子。若

$$y_1(t) = L[x_1(t)], y_2(t) = L[x_2(t)]$$

则对任意常数 α, β 有

$$L[\alpha x_1(t) + \beta x_2(t)] = \alpha L[x_1(t)] + \beta L[x_2(t)] = y_1(t) + y_2(t)$$

对于一个系统，若算子 L 是线性的，则该系统为线性系统。



定义7.6 若系统 L 有 $y(t) = L[x(t)]$, 并对任一时间平移 t 都有: $y(t + \tau) = L[x(t + \tau)]$
则称该系统为**时不变系统**。

例7.12 微分算子 $L = \frac{d}{dt}$ 是线性时不变的。

解: 设: $y(t) = L[x(t)] = \frac{d}{dt} x(t)$, 由导数运算性质知, 微分算子满足线性条件, 且:

$$\begin{aligned} L[x(t + \tau)] &= \frac{d}{dt} x(t + \tau) \\ &= \frac{d}{d(t + \tau)} x(t + \tau) = y(t + \tau) \end{aligned}$$



例7.13 积分算子 $L = \int_{-\infty}^t () du$ 是线性时不变的。

解：略，参见P128。

由定义知，一个系统的线性性质，表现在该系统满足叠加原理；系统的时不变性质，表现为输出对输入的关系不随时间推移而变化。

二、频率响应与脉冲响应

定理7.1 设 L 为线性时不变系统，若输入一谐波信号 $x(t) = e^{i\omega t}$ ，则输出为：

$$y(t) = L[e^{i\omega t}] = H(\omega)e^{i\omega t} \quad (7.25)$$

其中 $H(\omega) = L[e^{i\omega t}]|_{t=0}$ 。



证明：令 $y(t) = L[e^{i\omega t}]$ ，由系统的线性时不变性，
则对固定的 τ 和任意的 t ，有：

$$y(t + \tau) = L[e^{i\omega(t+\tau)}] = e^{i\omega\tau} L[e^{i\omega t}]$$

$$\text{令 } t = 0, \text{ 得 } y(\tau) = e^{i\omega\tau} L[e^{i\omega t}]|_{t=0} = H(\omega) e^{i\omega\tau}$$

该定理表明，对线性时不变系统输入一谐波信号时，其输出也是同频率的谐波，只不过振幅和相位有所变化。 $H(\omega)$ 表示了这个变化，称它为系统的**频率响应函数**。



练习：7.2

补充：已知平稳过程 $X(t)$ 的谱密度为：

$$(1) \quad s(\omega) = \frac{\omega^2 + 9}{(\omega^2 + 4)(\omega^2 + 1)}$$

$$(2) \quad s(\omega) = \begin{cases} a, & |\omega| \leq b \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

求其相关函数。

$$\text{答:}(1) R(\tau) = \frac{16e^{-|\tau|} - 5e^{-2|\tau|}}{12}$$

$$(2) \frac{a \sin b\tau}{\pi\tau}$$