概率论部分-随机变量

随机变量函数的条件数学期望：

前提：设X,Y,Z为随机变量，g(x),g(y)在R上连续，且E(X),E(Y),E(Z),E(g(y)*X)均存在

- **X,Y相互独立，有：** $\boldsymbol{E}(\mathbf{X}/\boldsymbol{y})=\boldsymbol{E}(\mathbf{X})$
- $E[\boldsymbol{E}(\mathbf{X}/y)]=\boldsymbol{E}(\mathbf{X})$

  证明：$\boldsymbol{E}[\boldsymbol{E}(\mathbf{x}/\boldsymbol{y})]=\int_{-\infty}^{+\infty}E(\mathbf{X}/\boldsymbol{y})\boldsymbol{dF}_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y})=$
  $\int_{-\infty}^{+\infty}E(\mathbf{X}/\boldsymbol{y})f_{\mathbf{Y}}(\boldsymbol{y})dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x/y)dx\right)f_{\mathrm{Y}}(y)dy=$
  $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x/y)f_{\mathrm{Y}}(y)dx\right)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x,y)dx\right)dy=$
  $\int_{-\infty}^{+\infty}x\left(\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\right)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_x(x,y)dx=E(\mathbf{X})$
- $E[g(\mathbf{Y})\cdot\mathbf{X}/y]=g(y)E(\mathbf{X}/y)$
- $E[g(\mathbf{Y})\cdot\mathbf{X}]=E[g(\mathbf{Y})\cdot E(\mathbf{X}/y)]$
- $E\left(\boldsymbol{c}/_{\boldsymbol{y}}\right)=\boldsymbol{c}$
- $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{g}(\mathbf{Y})/\boldsymbol{y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$

  证明：$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{g}(\mathbf{Y})/\boldsymbol{y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})\boldsymbol{E}(\mathbf{1}/\boldsymbol{y})=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$
- $E[(a\mathbf{X}+b\mathbf{Y})/z]=aE(\mathbf{X}/z)+bE(\mathbf{Y}/z)$
- $\boldsymbol{E}[\mathbf{X}-\boldsymbol{E}(\mathbf{X}/\boldsymbol{y})]=\boldsymbol{E}[\mathbf{X}-\boldsymbol{g}(\mathbf{Y})]^2$

全数学期望公式：

$\boldsymbol{E}(\mathbf{X})=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{E}\left(\mathbf{X}/\mathbf{A}_i\right)\boldsymbol{P}\left(\mathbf{A}_i\right)$

随机变量的特征函数：

定义：

定义1.38设**X**是概率空间$(\Omega,\mathcal{F},P)$上的随机变量，分布函数是$F(x)$，称t的函数：

$$\varphi(t)\overset{\Delta}{=}E\left(e^{itX}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x) \qquad (1.4.1)$$

为**X**的特征函数。

重要特征函数：

- **两点分布的特征函数：**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p & q \end{bmatrix} \quad (\text{其中}\, p+q=1)$$

$$\varphi(t)=E\left(e^{it\mathbf{X}}\right)=e^{it1}p+e^{it0}q=q+pe^{it}$$

- **二项分布的特征函数：**

例1.25 **X** $\sim B(n,p)$，求**X**的特征函数

$$p_k=C_n^k p^k q^{n-k},(k=0,1,2,\cdots n)$$

解：$\varphi(t)=E\left(e^{it\mathbf{X}}\right)=\sum_{k=0}^{n}e^{itk}p_k$

$$=\sum_{k=0}^{n}e^{itk}C_n^k p^k q^{n-k}=\left(q+pe^{it}\right)^n$$

- **泊松分布的特征函数：**

例1.26 X ~ $\pi(\lambda)$，$p_k = \dfrac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}(\lambda > 0)$，求X的特征函数

$$\varphi(t) = E\left(e^{itX}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda\left(e^{it}-1\right)}$$

- 均匀分布的特征函数：

例1.27 X ~ $U(a-h, a+h)$，求X的特征函数

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2h} & a-h < x < a+h \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

解：$\varphi(t) = E\left(e^{itX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)\,dx$

$$= \int_{a-h}^{a+h} e^{itx}\frac{1}{2h}dx = \frac{\sin ht}{ht}e^{ita}\ (t \neq 0)$$

当t=0时，$\varphi(t)$=0.

- 正态分布的特征函数：

例1.28 X ~ $N(0,1)$，求X的特征函数

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

解：$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx$

利用复变函数中的闭路 积分定理，有：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}}dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$$

得：$\varphi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

特征函数的性质：

(3) 设$\mathbf{X}$的特征函数为$\varphi_{\mathbf{X}}(t)$，则$\mathbf{Y}=a\mathbf{X}+b$的特征函数为：$\varphi_{\mathbf{Y}}(t)=e^{itb}\varphi_{\mathbf{X}}(at)$

(4) 若随机变量$\mathbf{X}_1,\cdots\mathbf{X}_n$相互独立，其特征函数分别为$\varphi_{\mathbf{X}_1}(t),\cdots\varphi_{\mathbf{X}_n}(t)$，令$\mathbf{Y}=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{X}_k$，则$\mathbf{Y}$的特征函数为$\varphi_{\mathbf{Y}}(t)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\mathbf{X}_k}(t)$

(5) 若随机变量$\mathbf{X}$的n阶绝对矩$E\left(|\mathbf{X}|^n\right)<+\infty$，则有：$E\left(\mathbf{X}^k\right)=(-i)^k\varphi_{\mathbf{X}}^{(k)}(0),1\le k\le n$

逆转公式：

定理1.17（逆转公式） 设随机变量ξ的分布函数和特征函数分别为$F(x)$和$\varphi(t)$，则对任意的x_1，$x_2\in R^{(1)}$，有：

（1）

$$\frac{F(x_2+0)+F(x_2-0)}{2}-\frac{F(x_1+0)+F(x_1-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$$

（2） 若x_1，x_2是$F(x)$的连续点，有：

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{l\to\infty}\int_{-l}^{l}\frac{e^{-itx_1}-e^{-itx_2}}{it}\varphi(t)dt$$

定理1.18 设 $F_1(x)$、$F_2(x)$是两个分布函数，$\varphi_1(t)$、$\varphi_2(t)$是其相应的特征函数，则：

$$F_1(x)=F_2(x)\Leftrightarrow \varphi_1(t)=\varphi_2(t)$$

> 一个特征函数$\varphi_1(t)$对应着唯一的一个分布函数。

定理1.19 若 $\varphi(t)$是一特征函数，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\varphi(t)|dt<+\infty$，则由 $\varphi(t)$所决定的分布函数 $F(x)$是一连续型的分布函数，且 $F'(x)$在$R^{(1)}$上处处存在、有界且连 续，并有：

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-itx}\varphi(t)dt$$

定理1.20 设ξ为只取整数的随机变量，$P\{\xi=k\}=p_k$，$k=0,\pm1,\pm2,\cdots$，特征函数 $\varphi(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}e^{itk}p_k$，则：

$$p_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itk}\varphi(t)dt$$

+∞

母函数

> 相当于非负随机变量的特征函数。

定义1.39 设**X**是非负整数的随机变量，分布列：

$$p_k=P\{\mathbf{X}=k\},\quad k=0,1,2,\ldots$$

则称：$P(s)\overset{\Delta}{=}E(\mathbf{X}^k)=\sum_{k=0}^{\infty}p_ks^k$为**X**的母函数。

设$s=e^{it}$就是特征函数。

母函数的计算：

1. 二项分布 **X~**$B(n,p)$，$P(s)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}s^k=(q+ps)^n$

2. 泊松分布 **X~**$\pi(\lambda)$，$P(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}s^k=e^{-\lambda}e^{\lambda s}=e^{\lambda(s-1)}$

3. 几何分布 **X~**$Geo(p)$，

$$P(s)=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}ps^k=ps\sum_{k=1}^{\infty}(qs)^{k-1}=\frac{ps}{1-qs}$$

母函数的性质：

1. **一个母函数对应一个分布**
2. **独立函数之和的母函数等于母函数之积。**
3. **母函数与数字特征**

2. 母函数与数字特征 设$P(s)$是**X**的母函数，若：$E(\mathbf{X})$存在，则：$E(\mathbf{X})=P'(1)$，若$D(\mathbf{X})$存在，则：$D(\mathbf{X})=P''(1)+P'(1)-\left[P'(1)\right]^2$。

4. **随机个(N)独立同分布的非负整数值随机变量(X)之和的母函数**

若$\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$,…是相互独立且同分布的非负整数值随机变量，**N**是与$\mathbf{X}_1$，$\mathbf{X}_2$,…独立的非负整数值随机变量，则：$Y=\sum_{k=1}^{N}\mathbf{X}_k$的母函数：$H(s)=G(P(s))$，其中$G(s)$、$P(s)$分别是$N$、$\mathbf{X}_1$的母函数。