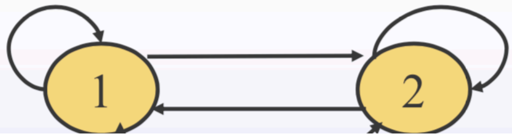
概率论习题-Markov链

例4.2.6设马氏链的状态空间$I=\{1,2,3,4\}$，转移概率矩阵为

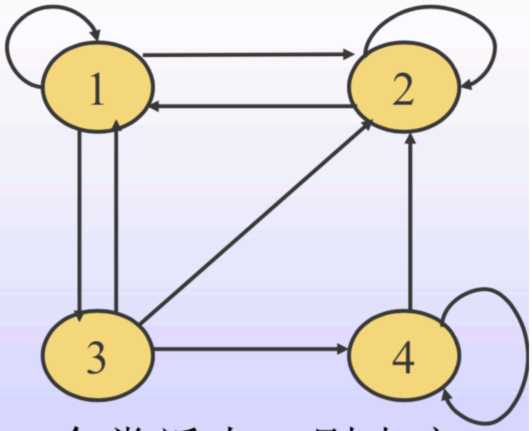
$$P=\begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

试判别状态的常返性。



> 重点：互通关系，互通的有限链

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



解：步骤1°画出状态转移图

步骤2°由状态转移图，知：

各状态互通$2 \to 1 \to 3 \to 4 \to 2$

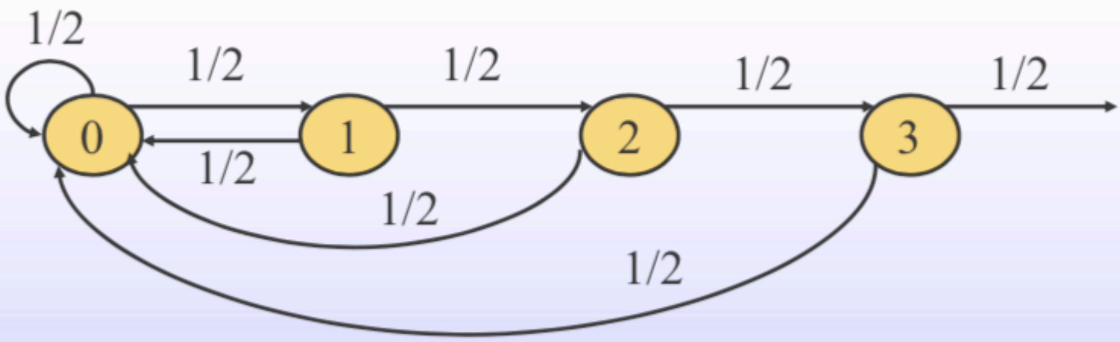
步骤3°由有限*Markov*链至少有一个常返态，则由定理**4.2.9**知所有状态均为常返。

例**4.2.7**设*Markov*链$\{\xi_n, n \in T\}$的状态空间为$I = \{0,1,2,\cdots\}$，转移概率为：$p_{00} = 1/2$，$p_{ii+1} = 1/2$，$p_{i0} = 1/2$，$i \in I$，考查状态的常返性及遍历性。

> 无限链的常返性判断，遍历性判断。计算平均返回时间来判断正常返

> $f_{ij}^{(n)}=P\{\xi_n=j,\xi_s\neq j,s=1,\cdots n-1|\xi_0=i\}$
>
> $f_{ij}=P\{T_{ij}<\infty|\xi_0=i\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\{T_{ij}=n|\xi_0=i\}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$
>
> $\mu_{ij}=E(T_{ij})=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}^{(n)}$

解： 步骤1° 画出状态转移图



步骤2°考查状态0，由状态转移图知$f_{00}^{(1)}=p_{00}^{(1)}=1/2$

$$f_{00}^{(2)}(0\to1\to0)=1/2\cdot1/2=1/4$$

$$f_{00}^{(3)}(0\to1\to2\to0)=1/2\cdot1/2\cdot1/2=1/8$$

一般地，有：$f_{00}^{(n)}=\left(1/2\right)^n(0\to1\to2\to\cdots\to n-1\to0)$

则：$f_{00}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1/2\right)^n=1$

$$\mu_0=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{00}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}n\left(1/2\right)^n<\infty$$

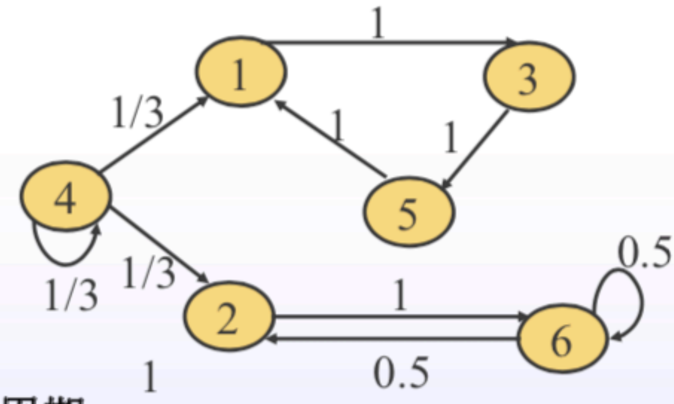
可见状态0为正常返。

又由于$p_{00}^{(1)}=1/2>0$，所以它是非周期的，因此状态0为遍历态。

对任意状态$i(i=1,2,\cdots)$，由于$i\leftrightarrow0$，则i也是遍历态。

例4.3.2设*Markov*链的状态空间$I=\{1,2,3,4,5,6\}$，转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



讨论该*Markov*链状态分类及周期。

> 上一题的练习

解： 1°先画出状态转移图如右上

2°由状态转移图,$1 \to 3 \to 5 \to 1, \mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 3 f_{11}^{(3)} = 3$

则状态1,3,5均为周期为3的正常返态。

又$2 \to 6 \to 2, \mu_6 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{66}^{(n)} = f_{66}^{(1)} + 2 f_{66}^{(2)} = \frac{3}{2}$，则状态2,6为遍历态

$f_{44} = f_{44}^{(1)} = \frac{1}{3}$，则状态4非常返

> 判断遍历态：μ不为整数
>
> 遍历态：$\lim_{n \to \infty} p_{ii}^{(n)} = 1/\mu_i$

例4.2.5设Markov链$I = \{1,2,3\}$，$P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix}$，求$f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, f_{13}^{(n)}$

> 递推公式计算法
>
> 状态转移图法

解法1：利用递推公式: $f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$

$\therefore f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)}$

$\therefore f_{11}^{(1)} = p_{11} = 0 \quad f_{12}^{(1)} = p_{12} = p_1 \quad f_{13}^{(1)} = p_{13} = q_1$

$$P^{(2)} = P^2 = P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix}$$

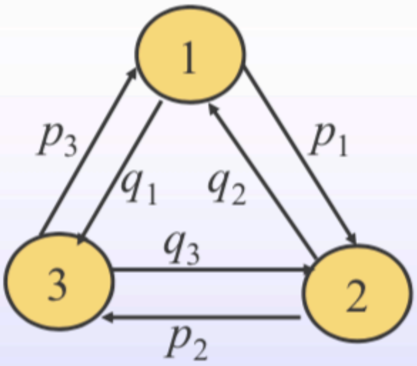
$$= \begin{bmatrix} p_1 q_2 + p_3 q_1 & q_1 q_3 & p_1 p_2 \\ p_2 p_3 & p_1 q_2 + p_2 q_3 & q_1 q_2 \\ p_3 q_2 & p_1 p_3 & p_3 q_1 + p_2 q_3 \end{bmatrix}$$

而: $f_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(1)}$ $\quad \therefore f_{11}^{(2)} = p_{11}^{(2)} - f_{11}^{(1)} p_{11}^{(1)} = p_1 q_2 + p_3 q_1$

$f_{12}^{(2)} = p_{12}^{(2)} - f_{12}^{(1)} p_{22}^{(1)} = q_1 q_3 \quad f_{13}^{(2)} = p_{13}^{(2)} - f_{13}^{(1)} p_{33}^{(1)} = p_1 p_2$

同理可求：当$n \geq 3$, $f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, f_{13}^{(n)}$

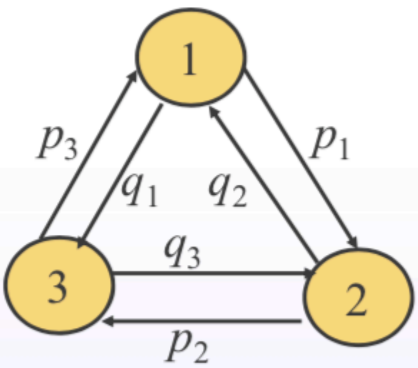
解法2：根据题意，画出状态转移图如下：



由状态转移图，有：

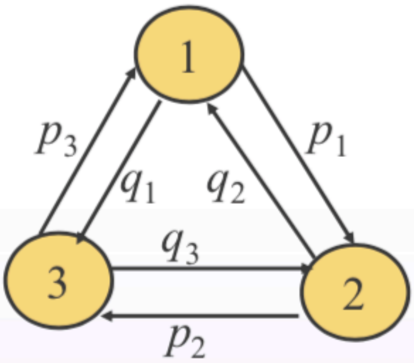
若n为偶数，则：$1\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{m-1}1\xrightarrow{1}3\xrightarrow{1}2$，即：

$$f_{12}^{(n)}=\begin{cases}(q_1p_3)^{m-1}q_1q_3\left(1\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{m-1}1\xrightarrow{1}3\xrightarrow{1}2\right) & n=2m,m\geq 1\\(q_1p_3)^{m}p_1\left(1\xrightarrow{m}3\xrightarrow{m}1\xrightarrow{1}2\right) & n=2m+1,m\geq 0\end{cases}$$



同理，有：

$$f_{13}^{(n)}=\begin{cases}(p_1q_2)^{m-1}p_1p_2\left(1\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{m-1}1\xrightarrow{1}2\xrightarrow{1}3\right) & n=2m,m\geq 1\\(p_1q_2)^{m}q_1\left(1\xrightarrow{m}2\xrightarrow{m}1\xrightarrow{1}3\right) & n=2m+1,m\geq 0\end{cases}$$



$$f_{11}^{(n)}=\begin{cases} p_1(p_2q_3)^{m-1}q_2+q_1(p_2q_3)^{m-1}p_3\begin{pmatrix} 1\xrightarrow{1}2\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{1}1\text{或} \\ 1\xrightarrow{1}3\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{1}1,n=2m,m\geq 1 \end{pmatrix} \\ p_1(p_2q_3)^{m-1}p_2p_3+q_1(p_1q_3)^{m-1}q_3q_2 \\ \begin{pmatrix} 1\xrightarrow{1}2\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{1}3\xrightarrow{1}1\text{或} \\ 1\xrightarrow{1}3\xrightarrow{m-1}2\xrightarrow{m-1}3\xrightarrow{1}2\xrightarrow{1}1,n=2m+1,m\geq 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$