习题 2

2.1 设随机过程 $X(t)=Vt+b,\ t\in(0,\infty)$，$b$ 为常数，V 服从正态分布 $N(0,1)$ 的随机变量，求 $X(t)$ 的一维概率密度、均值和相关函数。

解：由 $V\sim N(0,1)$，则：$E(V)=0,\ D(V)=1$

则 $X(t)$ 的均值函数为：$E\left[X(t)\right]=E(Vt+b)=tE(V)+b=b$

$X(t)$ 的相关函数为：$R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=E(vt_1+b)(vt_2+b)=t_1t_1E(v^2)+b^2=t_1t_1+b^2$

$X(t)$ 的一维概率密度为：$f_t(x)=\dfrac{\partial F_t(x)}{\partial x}$，而函数 $x=Vt+b$ 在 $t\in(0,\infty)$ 单调

则：$f_t(x)=\dfrac{\partial F_t(x)}{\partial x}=\dfrac{\partial F_t(x)}{\partial v}\bullet\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{1}{t}f(v)$

又：V 服从正态分布 $N(0,1)$，则：$f(v)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}$

所以：$f_t(x)=\dfrac{1}{t}f(v)=\dfrac{1}{t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{v^2}{2}}=\dfrac{1}{t\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-b)^2}{2t^2}}$，$x\in R$ -end-

2.2 设随机变量 Y 具有概率密度 $f(y)$，令：

$$X(t)=e^{-Yt},(t>0,Y>0)$$

求随机过程 $X(t)$ 的一维概率密度及 $EX(t)$，$R_X(t_1,t_2)$。

解：由 $X(t)=e^{-Yt},(t>0,Y>0)$

则 $X(t)$ 的均值函数为：$EX(t)=E\left[e^{-Yt}\right]=\int_0^{=\infty}e^{-yt}f(y)dy$

$X(t)$ 的相关函数为：$R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=E\left[e^{-Yt_1}e^{-Yt_2}\right]=\int_0^{=\infty}e^{-y(t_1+t_2)}f(y)dy$

$X(t)$ 的一维概率密度为：$f_t(x)=\dfrac{\partial F_t(x)}{\partial x}=\dfrac{\partial F_t(y)}{\partial y}\bullet\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|=\dfrac{1}{tx}f(y)=\dfrac{1}{tx}f\left(-\dfrac{\ln t}{t}\right)(t>0)$ -end-

2.3 若从 $t=0$ 开始每隔 $\dfrac{1}{2}$ 秒抛掷一枚均匀的硬币作实验，定义随机过程：

$$X(t)=\begin{cases}\cos(\pi t), \\ 2t,\end{cases} t\text{时刻分别抛得正、反面}$$

试求：（1） $X(t)$的一维分布函数$F\left(\frac{1}{2};x\right)$，$F(1;x)$；

（2） $X(t)$的二维分布函数$F\left(\frac{1}{2},1;x_1,x_2\right)$；

（3） $X(t)$的均值$m_X(t)$，$m_X(1)$，方差$\sigma_X^2(t)$，$\sigma_X^2(1)$。

解：（1）当$t=\frac{1}{2}$时，$X\left(\frac{1}{2}\right)$的分布列$P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)=0\right\}=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)=1\right\}=\frac{1}{2}$

则分布函数：$F\left(\frac{1}{2};x\right)=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)\le x\right\}=\begin{cases}0,\ x<0 \\ \frac{1}{2},\ 0\le x<1 \\ 1,\ x\ge 1\end{cases}$

同理：当$t=1$时，$X(1)$的分布列$P\{X(1)=-1\}=P\{X(1)=2\}=\frac{1}{2}$

则分布函数：$F(1;x)=P\{X(1)\le x\}=\begin{cases}0,\ x<-1 \\ \frac{1}{2},\ -1\le x<2 \\ 1,\ x\ge 2\end{cases}$

（2）由于在不同时刻抛掷硬币是相互独立的，则在$t=\frac{1}{2}$，$t=1$的联合分布列为：

$$P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)=0,X(1)=-1\right\}=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)=0,X(1)=2\right\}$$

$$=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)=1,X(1)=-1\right\}=P\left\{X\left(\frac{1}{2}\right)=1,X(1)=2\right\}=\frac{1}{4}$$

则二维分布函数$F\left(\frac{1}{2},1;x_1,x_2\right)$分布函数：

$$F\left(\frac{1}{2},1;x_1,x_2\right)=\begin{cases}0,x_1<0\text{ 或}x_2<-1 \\ \frac{1}{4},0\le x_1<1\text{且}-1\le x_2<2 \\ \frac{1}{4},0\le x_1<1\text{且}x_2\ge 2\text{或}x_1\ge 1\text{且}-1\le x_2<2 \\ 1,\ x_1\ge 1\text{且}x_2\ge 2\end{cases}$$

（3）离散型随机过程的均值函数为：

$$m_X(t)=\frac{1}{2}\bullet\cos(\pi t)+\frac{1}{2}\bullet 2t=\frac{1}{2}\left[\cos(\pi t)+2t\right]$$

则：$m_X(1)=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\pi\bullet\frac{1}{2}\right)+2\bullet 1\right]=\frac{1}{2}$

方差$\sigma_X^2(t)=E\left[X^2(t)\right]-\left[m_X(t)\right]^2=\frac{1}{2}\bullet\cos^2(\pi t)+\frac{1}{2}\bullet(2t)^2-\left[\frac{1}{2}\left[\cos(\pi t)+2t\right]\right]^2=\left[\frac{1}{2}\left[\cos(\pi t)-1\right]\right]^2$

则：方差$\sigma_X^2(1)=\left[\frac{1}{2}\left[\cos\left(\pi\bullet\frac{1}{4}\right)-1\right]\right]^2=\frac{9}{4}$ -end-

2.4 设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)$，其中$\omega$为常数，$A,B$ 是相互独立且服从正态 $N(0,\sigma^2)$ 的随机变量，求随机过程的均值和相关函数。

解：由于 $A,B\sim N(0,\sigma^2)$，则 $E(A)=E(B)=0,\ D(A)=D(B)=\sigma^2$

则：$m_X(t)=E\left[X(t)\right]=E\left[A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right]=\cos(\omega t)E(A)+\sin(\omega t)E(B)=0$

$X(t)$的相关函数为：

$$R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=E\left[A\cos(\omega t_1)+B\sin(\omega t_1)\right]\left[A\cos(\omega t_2)+B\sin(\omega t_2)\right]$$

由于 A,B 是相互独立则均值函数为：

$$R_X(t_1,t_2)=\cos(\omega t_1)\cos(\omega t_2)E(A^2)+\sin(\omega t_1)\sin(\omega t_2)E(A^2)=\sigma^2\cos\omega(t_1-t_2)$$ -end-

2.5 已知随机过程 $X(t)$ 的均值函数 $m_X(t)$ 和协方差函数 $B_X(t_1,t_2)$，$\varphi(t)$ 为普通函数，令：$Y(t)=X(t)+\varphi(t)$，求随机过程 $Y(t)$ 的均值和协方差函数。

解：由 $Y(t)=X(t)+\varphi(t)$，φ(t)为普通函数

则随机过程 $Y(t)$ 的均值函数为：$m_Y(t)=E\left[Y(t)\right]=E\left[X(t)+\varphi(t)\right]=m_X(t)+\varphi(t)$

协方差函数 $B_Y(t_1,t_2)=E\left[Y(t_1)-m_Y(t_1)\right]\left[Y(t_2)-m_Y(t_2)\right]$

$$=E\left[X(t_1)-m_X(t_1)\right]\left[X(t_2)-m_X(t_2)\right]=B_X(t_1,t_2)$$ -end-

2.6 设随机过程 $X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$，其中 $A,\ \omega$ 为常数，Θ 是在 $(-\pi,\pi)$ 上均匀分布的随机变量，令 $Y(t)=X^2(t)$，求 $R_Y(t,t+\tau)$和$R_{XY}(t,t+\tau)$。

解：$R_Y(t,t+\tau)=E\left[Y(t)Y(t+\tau)\right]=E\left[X^2(t)X^2(t+\tau)\right]$

$$\therefore R_Y(t,t+\tau)=E\left[A^2\sin^2(\omega t+\Theta)\right]\left[A^2\sin^2(\omega t+\omega\tau+\Theta)\right]=A^4E\left[\sin^2(\omega t+\Theta)\right]\left[\sin^2(\omega t+\omega\tau+\Theta)\right]$$

而：$4\left[\sin^2(\omega t+\Theta)\right]\left[\sin^2(\omega t+\omega\tau+\Theta)\right]$

$$=\left[1-\cos(2\omega t+2\Theta)\right]\bullet\left[1-\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\Theta)\right]$$

$$=1-\cos(2\omega t+2\Theta)-\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\Theta)+\cos(2\omega t+2\Theta)\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\Theta)$$

$$=1-\cos(2\omega t+2\Theta)-\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\Theta)+\frac{1}{2}\cos(4\omega t+2\omega\tau+4\Theta)+\frac{1}{2}\cos(2\omega\tau)$$

$$\therefore R_Y(t,t+\tau)=A^4E\left[\sin^2(\omega t+\Theta)\right]\left[\sin^2(\omega t+\omega\tau+\Theta)\right]$$

$$=A^4E\left[1-\cos(2\omega t+2\Theta)-\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\Theta)+\frac{1}{2}\cos(4\omega t+2\omega\tau+4\Theta)+\frac{1}{2}\cos(2\omega\tau)\right]$$

而：$E\left[\cos(2\omega t+2\Theta)\right]=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\omega t+2\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0$

同理：$E\left[\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\Theta)\right]=\int_{-\pi}^{\pi}\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0$

则：

$$R_Y(t,t+\tau)=A^4E\left[1-\cos(2\omega t+2\Theta)-\cos(2\omega t+2\omega\tau+2\Theta)+\frac{1}{2}\cos(4\omega t+2\omega\tau+4\Theta)+\frac{1}{2}\cos(2\omega\tau)\right]$$

$$=\frac{1}{4}A^4E\left[1+\frac{1}{2}\cos(2\omega\tau)\right]=\frac{1}{4}A^4\left[1+\frac{1}{2}\cos(2\omega\tau)\right]$$

而：$R_{XY}(t,t+\tau)=E\left[X(t)Y(t+\tau)\right]$

$$=E\left[A\sin(\omega t+\Theta)\right]\left[A^2\sin^2(\omega t+\omega\tau+\Theta)\right]$$

$$=A^3E\left[\sin(\omega t+\Theta)\right]\left[\sin^2(\omega t+\omega\tau+\Theta)\right]=A^3\int_{-\pi}^{\pi}\sin(\omega t+\theta)\sin^2(\omega t+\omega\tau+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

-end-

2.7 设随机过程 $X(t)=X+Yt+Zt^2$，其中 X、Y、Z 是相互独立的随机变量，且具有均值为零，方差为 1，求随机过程 $X(t)$ 的协方差函数。

解：由于 $E(X)=E(Y)=E(Z)=0,\ D(X)=D(Y)=D(Z)=1$

则 $X(t)$ 的均值函数为：$m_X(t)=E\left[X(t)\right]=E\left(X+Yt+Zt^2\right)=E(X)+tE(Y)+t^2E(Z)=0$

所以 $X(t)$ 的协方差函数为：

$$B_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)X(t_2)\right]=E\left(X+Yt_1+Zt_1{}^2\right)\left(X+Yt_2+Zt_2{}^2\right)$$

$$=E\left(X^2\right)+t_1t_2E\left(Y^2\right)+t_1^2t_2^2E\left(Z^2\right)=1+t_1t_2+t_1^2t_2^2$$ -end-

2.8 设 $X(t)$ 为实随机过程， x 为任意实数，令：

$$Y(t)=\begin{cases}1, X(t)\le x\\ 0, X(t)>x\end{cases}$$

证明随机过程 $Y(t)$ 的均值函数和相关函数分别为 $X(t)$ 的一维和二维分布函数。

证明：$Y(t)$ 的均值函数为：

$$m_Y(t)=E\left[Y(t)\right]=1\bullet P\left\{X(t)\le x\right\}+0\bullet P\left\{X(t)>x\right\}=P\left\{X(t)\le x\right\}=F_X(x)$$

$Y(t)$ 的相关函数为：

$$R_Y(t_1,t_2)=E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right]$$

$$=1\bullet1\bullet P\left\{X(t_1)\le x,\ X(t_2)\le x\right\}+1\bullet0\bullet P\left\{X(t_1)\le x,\ X(t_2)>x\right\}$$

$$+0\bullet1\bullet P\left\{X(t_1)>x,\ X(t_2)\le x\right\}+0\bullet0\bullet P\left\{X(t_1)>x,\ X(t_2)>x\right\}$$

$$=1\bullet1\bullet P\left\{X(t_1)\le x,\ X(t_2)\le x\right\}=P\left\{X(t_1)\le x,\ X(t_2)\le x\right\}=F_X(x_1,x_2)$$

-end-

2.9 设 $f(t)$ 是一个周期为 T 的周期函数,随机变量 Y 在 $(0,T]$ 上均匀分布,令 $X(t)=f(t-Y)$，

求证随机过程 $X(t)$ 满足：$E\left[X(t)X(t+\tau)\right]=\dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)f(t+\tau)dt$ 。

证明：$E\left[X(t)X(t+\tau)\right]=E\left[f(t-Y)f(t-Y+\tau)\right]=\int_0^T f(t-y)f(t-y+\tau)\dfrac{1}{T}dy$

令 $t-y=s$，有：$E\left[X(t)X(t+\tau)\right]=-\int_t^{t-T} f(s)f(s+\tau)\dfrac{1}{T}ds=\dfrac{1}{T}\int_{t-T}^{t} f(s)f(s+\tau)ds$

由于 $f(t)$ 是一个周期为 T 的周期函数，则：

$$E\left[X(t)X(t+\tau)\right]=\frac{1}{T}\int_0^T f(s)f(s+\tau)ds=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)f(t+\tau)dt$$ -end-

2.10 设随机过程 $X(t)$ 的协方差函数为 $B_X(t_1,t_2)$，方差函数为 $\sigma_X^2(t)$，试证：

（1）$\left|B_X(t_1,t_2)\right|\le\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)$；

（2）$\left|B_X(t_1,t_2)\right|\le\frac{1}{2}\left[\sigma_X^2(t_1)+\sigma_X^2(t_2)\right]$

证明：（1）根据定义，有：$\left|B_X(t_1,t_2)\right|=\left|E\left[X(t_1)-m_X(t_1)\right]\overline{\left[X(t_2)-m_X(t_2)\right]}\right|$

根据 Schwarz 不等式，有：

$$\left|E\left[X(t_1)-m_X(t_1)\right]\overline{\left[X(t_2)-m_X(t_2)\right]}\right|\le\left[E\left|X(t_1)-m_X(t_1)\right|^2\bullet E\left|X(t_2)-m_X(t_2)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)$$

（2）有（1）的结论，有：$\left|B_X(t_1,t_2)\right|\le\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)$

而对任意的 $x,y\in R$，均有：$xy\le\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)$

则：$\left|B_X(t_1,t_2)\right|\le\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)\le\frac{1}{2}\left[\sigma_X^2(t_1)+\sigma_X^2(t_2)\right]$ -end-

2.11 设随机过程 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互协方差函数为 $B_{XY}(t_1,t_2)$，试证：

$\left|B_{XY}(t_1,t_2)\right|\le\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)$

证明：根据定义，有：$\left|B_{XY}(t_1,t_2)\right|=\left|E\left[X(t_1)-m_X(t_1)\right]\overline{\left[Y(t_2)-m_Y(t_2)\right]}\right|$

根据 Schwarz 不等式，有：

$$\left|E\left[X(t_1)-m_X(t_1)\right]\overline{\left[Y(t_2)-m_Y(t_2)\right]}\right|\le\left[E\left|X(t_1)-m_X(t_1)\right|^2\bullet E\left|Y(t_2)-m_Y(t_2)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}=\sigma_X(t_1)\sigma_Y(t_2)$$

-end-

2.12 设随机过程 $X(t)=\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i(\omega t+\Phi_k)}$，其中 ω 为常数，A_k 为第 k 个信号的随机振幅，Φ_k 是在 $(0,2\pi)$ 上均匀分布的随机相位，所以随机变量 A_k，$\Phi_k\left(k=1,2,\cdots N\right)$ 以及它们之间都是相互独立的，求 $X(t)$ 的均值和协方差函数。

解：先求 $X(t)$ 的均值函数：$E\left[X(t)\right]=E\left[\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i(\omega t+\Phi_k)}\right]=\sum_{k=1}^{N}E\left[A_k e^{i(\omega t+\Phi_k)}\right]$

因 A_k，$\Phi_k\left(k=1,2,\cdots N\right)$ 之间相互独立，则：$E\left[X(t)\right]=\sum_{k=1}^{N}E\left[A_k\right]E\left[e^{i(\omega t+\Phi_k)}\right]$

而：$\Phi_k \sim U(0,2\pi)$，则：$E\left[e^{i(\omega t+\Phi_k)}\right]=\int_0^{2\pi} e^{i(\omega t+\varphi_k)}\frac{1}{2\pi}d\varphi=0$

所以：$E\left[X(t)\right]=\sum_{k=1}^{N}E\left[A_k\right]E\left[e^{i(\omega t+\Phi_k)}\right]=0$

$X(t)$的协方差函数$B_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)=E\left[X(t_1)\overline{X(t_2)}\right]$

$$=E\left[\sum_{k=1}^{N}A_k e^{i(\omega t_1+\Phi_k)}\right]E\left[\overline{\sum_{j=1}^{N}A_j e^{i(\omega t_2+\Phi_j)}}\right]=\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}E\left\{e^{i\left[\omega(t_1-t_2)+(\Phi_k-\Phi_j)\right]}\right\}E\left(A_kA_j\right)$$

当$k\neq j$时，Φ_k与Φ_j相互独立，则：$E\left\{e^{i\left[\omega(t_1-t_2)+(\Phi_k-\Phi_j)\right]}\right\}=e^{i\omega(t_1-t_2)}E\left[e^{i\Phi_k}\right]E\left[e^{-i\Phi_j}\right]=0$

当$k=j$时，$E\left\{e^{i\left[\omega(t_1-t_2)+(\Phi_k-\Phi_j)\right]}\right\}=e^{i\omega(t_1-t_2)}$

则$X(t)$的协方差函数$B_X(t_1,t_2)=e^{i\omega(t_1-t_2)}\sum_{k=1}^{N}E\left(A_k^2\right)$

-end-

2.13 设$\{X(t),\ t\geq 0\}$是实正交增量过程，$X(0)=0,\ V$是标准正态随机变量，若对任意的$t\geq 0,\ X(t)$与V相互独立，令$Y(t)=X(t)+V$，求随机过程$\{Y(t),\ t\geq 0\}$的协方差函数。

解：因$\{X(t),\ t\geq 0\}$是实正交增量过程，则：$X(t)$的零均值的二阶矩过程。

又V是标准正态随机变量，则：$E(V)=0,\ D(V)=1$，则$E\left[Y(t)\right]=E\left[X(t)\right]+E(V)=0$

由因为任意的$t\geq 0,\ X(t)$与V相互独立，则：

$$B_Y(t_1,t_2)=R_Y(t_1,t_2)=E\left[Y(t_1)Y(t_2)\right]=E\left[X(t_1)+V\right]\left[X(t_2)+V\right]$$

$$=R_X(t_1,t_2)+m_X(t_1)E(V)+m_X(t_2)E(V)+E\left(V^2\right)=R_X(t_1,t_2)+1=\sigma_X^2\min(t_1,t_2)+1$$

-end-

2.14 设随机过程$Y_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$，其中$X_j(j=1,2,\cdots n)$是相互独立的随机变量，且：

$P(X_j=1)=p,\ P(X_j=0)=1-p=q$，求$Y_n(n=1,2,\cdots)$的均值和协方差函数。

解：$Y_n(n=1,2,\cdots)$的均值函数为：$E(Y_n)=E\left(\sum_{j=1}^{n}X_j\right)=\sum_{j=1}^{n}E(X_j)=\sum_{j=1}^{n}(1\bullet p+0\bullet q)=np$

而：$E\left(X_iX_j\right)=\begin{cases}p^2,i\neq j\\ p,\ i=j\end{cases}$，则$Y_n\left(n=1,2,\cdots\right)$的协方差函数为：

$$B_Y\left(n,m\right)=E\left[\sum_{j=1}^{n}X_j-np\right]\left[\sum_{k=1}^{m}X_k-mp\right]=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}E\left(X_jX_k\right)-mnp^2$$

当$m\leq n$时，$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}E\left(X_jX_k\right)=\sum_{j=k}E\left(X_jX_k\right)+\sum_{j\neq k}E\left(X_jX_k\right)=mp+\left(mn-m\right)p^2=mpq+mnp^2$

同理当$m>n$时，$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}E\left(X_jX_k\right)=\sum_{j=k}E\left(X_jX_k\right)+\sum_{j\neq k}E\left(X_jX_k\right)=np+\left(mn-n\right)p^2=npq+mnp^2$

则：$B_Y\left(n,m\right)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}E\left(X_jX_k\right)-mnp^2=\min\left(m,n\right)pq$

-end-

2.15 设Y，Z是独立同分布随机变量，$P\left(Y=1\right)=P\left(Y=-1\right)=\frac{1}{2}$，$X\left(t\right)=Y\cos\left(\theta t\right)+Z\sin\left(\theta t\right)$，$-\infty<t<\infty$，其中$\theta$为常数，证明随机过程$\left\{X\left(t\right),-\infty<t<\infty\right\}$是广义平稳过程，但不是严平稳过程。

证明：由于随机过程$\left\{X\left(t\right),-\infty<t<\infty\right\}$的均值函数为：

$$m_X\left(t\right)=E\left[X\left(t\right)\right]=E\left[Y\cos\left(\theta t\right)+Z\sin\left(\theta t\right)\right]=\cos\left(\theta t\right)E\left(Y\right)+\sin\left(\theta t\right)E\left(Z\right)=0$$

相关函数为：

$$R_X\left(t_1,t_2\right)=E\left[X\left(t_1\right)X\left(t_2\right)\right]=E\left[Y\cos\left(\theta t_1\right)+Z\sin\left(\theta t_1\right)\right]\left[Y\cos\left(\theta t_2\right)+Z\sin\left(\theta t_2\right)\right]$$

而Y，Z是独立同分布随机变量，则：$E\left(Y\right)=E\left(Z\right)=0$，$E\left(Y^2\right)=E\left(Z^2\right)=1$，则：

$$R_X\left(t_1,t_2\right)=\cos\left(\theta t_1\right)\cos\left(\theta t_2\right)E\left(Y^2\right)+\sin\left(\theta t_1\right)\sin\left(\theta t_2\right)E\left(Z^2\right)=\cos\theta\left(t_1-t_2\right)$$

且$E\left[X^2\left(t\right)\right]=R_X\left(t,t\right)=1$

则随机过程$\left\{X\left(t\right),-\infty<t<\infty\right\}$是广义平稳过程。

下面证明$\left\{X\left(t\right),-\infty<t<\infty\right\}$不是严平稳过程，采用反证法：

假设$\left\{X\left(t\right),-\infty<t<\infty\right\}$是严平稳过程，则：$F\left(t_1;x\right)=F\left(t_2;x\right)$

特别地，有：$F\left(0;1\right)=F\left(\frac{\pi}{4\theta};1\right)$，下面分别计算这两个值，有：

$$F(0;1)=P\{X(0)\le 1\}=P\{Y\le 1\}=1$$

而 $F\left(\frac{\pi}{4};1\right)=P\left\{X\left(\frac{\pi}{4\theta}\right)\le 1\right\}=P\left\{Y\cos\frac{\pi}{4}+Z\sin\frac{\pi}{4}\le 1\right\}=P\left\{Y+Z\le\sqrt{2}\right\}$

$$=P\{Y=1,\ Z=-1\}+P\{Y=-1,\ Z=1\}+P\{Y=-1,\ Z=-1\}=\frac{3}{4}$$

显然：$F(0;1)\ne F\left(\frac{\pi}{4\theta};1\right)$与假设矛盾，则$\{X(t),-\infty<t<\infty\}$不是严平稳过程。

-end-

2.16 设$\{W(t),-\infty<t<\infty\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程，令$X(t)=e^{-\alpha t}W\left(e^{2\alpha t}\right),-\infty<t<\infty$，$\alpha>0$为常数，证明$\{X(t),-\infty<t<\infty\}$是平稳正态过程，相关函数$R_{X(\tau)}=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$。

证明：因$\{W(t),-\infty<t<\infty\}$是参数为$\sigma^2$的维纳过程，有：$W(t)\sim N\left(0,\sigma^2t\right)$，则：

$W\left(e^{2\alpha t}\right)\sim N\left(0,\sigma^2e^{2\alpha t}\right)$，且$E[X(t)]=0,-\infty<t<\infty$

$X(t)$的相关函数为：

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=e^{-\alpha t_1}e^{-\alpha t_2}E\left[W\left(e^{2\alpha t_1}\right)W\left(e^{2\alpha t_2}\right)\right]=e^{-\alpha(t_1+t_2)}E\left[W\left(e^{2\alpha t_1}\right)W\left(e^{2\alpha t_2}\right)\right]$$

而：$E\left[W\left(e^{2\alpha t_1}\right)W\left(e^{2\alpha t_2}\right)\right]=E\left[W\left(e^{2\alpha t_1}\right)-W(0)\right]\left[W\left(e^{2\alpha t_2}\right)-W\left(e^{2\alpha t_1}\right)+W\left(e^{2\alpha t_1}\right)\right]$

因$W(t)$是独立增量过程，则$E\left[W\left(e^{2\alpha t_1}\right)-W(0)\right]\left[W\left(e^{2\alpha t_2}\right)-W\left(e^{2\alpha t_1}\right)\right]=0\left(t_2\ge t_1\right)$

则$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]=e^{-\alpha(t_1+t_2)}E\left[W\left(e^{2\alpha t_1}\right)\right]^2=e^{-\alpha(t_1+t_2)}\left\{D\left[W\left(e^{2\alpha t_1}\right)\right]+\left[EW\left(e^{2\alpha t_1}\right)^2\right]\right\}$

$$=e^{-\alpha(t_1+t_2)}\sigma^2e^{2\alpha t_1}=\sigma^2e^{-\alpha(t_2-t_1)}\left(t_2\ge t_1\right)$$

同理可得：$R_X(t_1,t_2)=\sigma^2e^{-\alpha(t_1-t_2)}\left(t_1\ge t_2\right)$，则$\{X(t),-\infty<t<\infty\}$是平稳正态过程。

综上所述，有相关函数：$R_X(t_1,t_2)=\sigma^2e^{-\alpha|t_1-t_2|}$，即$R_X(\tau)=\sigma^2e^{-\alpha|\tau|}$

-end-

2.17 设$\{X(t),\ t\ge 0\}$是维纳过程，$X(0)=0$，试求它的有限维概率密度函数族。

解：由维纳过程的定义，有：$X(t)\sim N\left(0,\sigma^2t\right)$

则对任意的n及$0<t_1<t_2<\cdots<t_n$，有：$X(t_i)\sim N\left(0,\sigma^2t_i\right)$，$i=1,2,\cdots n$

又因为维纳过程是齐次的独立增量过程，则$\left(X(t_1),X(t_2),\cdots X(t_n)\right)$的联合分布与

$\left(X\left(t_1\right)-X\left(0\right),X\left(t_2\right)-X\left(t_1\right),\cdots X\left(t_n\right)-X\left(t_{n-1}\right)\right)$相同。

再由其独立增量性，知$\left(X\left(t_1\right)-X\left(0\right),X\left(t_2\right)-X\left(t_1\right),\cdots X\left(t_n\right)-X\left(t_{n-1}\right)\right)$服从联合正态分布，则$\left(X\left(t_1\right),X\left(t_2\right),\cdots X\left(t_n\right)\right)$的概率密度为：

$$f_X\left(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t_1}}e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma^2 t_1}}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\left|t_{k+1}-t_k\right|}}e^{-\frac{\left|x_{k+1}-x_k\right|^2}{2\sigma^2\left|t_{k+1}-t_k\right|}}$$

-end-

习题 3

3.1 设$X_1(t)$和$X_2(t)$是分别具有参数λ_1和λ_2的相互独立的泊松过程，证明：

（1）$Y(t)=X_1(t)+X_2(t)$是具有参数$\lambda_1+\lambda_2$的泊松过程；

（2）$Z(t)=X_1(t)-X_2(t)$不是泊松过程。

证明：因为$X_1(t)\sim\pi(\lambda_1)$，$X_2(t)\sim\pi(\lambda_2)$

（1）根据泊松过程的定义，下面对随机过程$Y(t)=X_1(t)+X_2(t)$一一验证其满足：

1° $Y(0)=X_1(0)+X_2(0)=0$

2° 取$t_1<t_2\le t_3<t_4$，说明$Y(t)$为独立增量过程

因为：$X_1(t)\sim\pi(\lambda_1)$，$X_2(t)\sim\pi(\lambda_2)$，则：

$X_1(t_2)-X_1(t_1)$与$X_1(t_4)-X_1(t_3)$，$X_2(t_2)-X_2(t_1)$与$X_2(t_4)-X_2(t_3)$相互独立

另外，$X_1(t)$与$X_2(t)$相互独立，则：

$X_1(t_2)-X_1(t_1)$与$X_2(t_4)-X_2(t_3)$，$X_2(t_2)-X_2(t_1)$与$X_1(t_4)-X_1(t_3)$相互独立

则：$Y_1(t_2)-Y_1(t_1)=\left(X_1(t_2)-X_1(t_2)\right)+\left(X_2(t_2)-X_2(t_2)\right)$与

$Y_1(t_4)-Y_1(t_3)=\left(X_1(t_4)-X_1(t_3)\right)+\left(X_2(t_4)-X_2(t_3)\right)$相互独立

则：$Y(t)$是独立增量过程。

3° $P\left(Y(t+s)-Y(s)=n\right)=P\left(X_1(t+s)+X_2(t+s)-X_1(s)-X_2(s)=n\right)$

$$=P\left\{\bigcup_{i=0}^{n}\left(X_1(t+s)-X_1(s)=i,\ X_2(t+s)+X_2(s)=n-i\right)\right\}$$

$$=\sum_{i=0}^{n}P\left\{\left(X_1(t+s)-X_1(s)=i,\ X_2(t+s)+X_2(s)=n-i\right)\right\}$$

由于 $X_1(t)$与$X_2(t)$ 相互独立，则：

$$P\left(Y(t+s)-Y(s)=n\right)=\sum_{i=0}^{n}P\left(X_1(t+s)-X_1(s)=i\right)\bullet P\left(X_2(t+s)+X_2(s)=n-i\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{n}e^{-\lambda_1 t}\frac{(\lambda_1 t)^i}{i!}e^{-\lambda_2 t}\frac{(\lambda_2 t)^{n-i}}{(n-i)!}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}t^n}{n!}\sum_{i=0}^{n}n!\frac{(\lambda_1 t)^i}{i!}\frac{(\lambda_2 t)^{n-i}}{(n-i)!}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}t^n}{n!}(\lambda_1+\lambda_2)^n=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{n!}\left[(\lambda_1+\lambda_2)t\right]^n$$

综上所述，$Y(t)=X_1(t)+X_2(t)$ 是具有参数 $\lambda_1+\lambda_2$ 的泊松过程。

（2）$E\left[Z(t)\right]=E\left[X_1(t)-X_2(t)\right]=E\left[X_1(t)\right]-E\left[X_2(t)\right]=(\lambda_1-\lambda_2)t$

$D\left[Z(t)\right]=D\left[X_1(t)-X_2(t)\right]=D\left[X_1(t)\right]-D\left[X_2(t)\right]=(\lambda_1+\lambda_2)t$

显然：$E\left[Z(t)\right]=D\left[Z(t)\right]$，则 $Z(t)=X_1(t)-X_2(t)$ 不是泊松过程。

-end-

3.2 设到达某商店的顾客组成强度为 λ 的泊松过程，每个顾客购买商品的概率为 p，且与其它顾客是否购买商品无关，若 $\{Y_t,\ t\geq 0\}$ 是购买商品的顾客数，证明 $\{Y_t,\ t\geq 0\}$ 是强度为 λp 的泊松过程。

证明：设 $\{X(t),\ t\geq 0\}$ 表示到达商店的顾客数，ξ_i 表示第 i 个顾客是否购买商品，不妨假设若第 i 个顾客购买商品，取 $\xi_i=1$；若第 i 个顾客未购买商品，取 $\xi_i=0$。

则：$P(\xi_i=1)=p,\ P(\xi_i=0)=1-p$

再由题意知：$\xi_i,\ i=1,2,\cdots$ 彼此独立且同分布，且与 $\{X(t),\ t\geq 0\}$ 独立

因此，$Y_t=\sum_{i=1}^{X(t)}\xi_i$ 是复合泊松过程。

容易验证Y_t满足：（1）$Y_0=0$；（2）Y_t是独立增量过程；且：

$$
\begin{aligned}
P\{Y_{t+s}-Y_s=k\} &= P\{(s,t+s)\text{内有}k\text{个顾客购买}\}\\
&= P\{(s,t+s)\text{内有}k\text{个顾客购买},\text{有}n\text{个人到达，}n\geq 0\}\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P\{N(t+s)-N(s)=n,\text{此}n\text{个人中有}k\text{个顾客购买了商品}\}\\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}\\
&= e^{-\lambda t}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^n}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k}\\
&= e^{-\lambda t}\sum_{l=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^{l+k}}{k!l!} p^k (1-p)^{n-k} \qquad (l=n-k)\\
&= \frac{e^{-\lambda t}\cdot(\lambda pt)^k}{k!}\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{((1-p)\lambda t)^l}{l!}\\
&= \frac{e^{-\lambda pt}(\lambda pt)^k}{k!}
\end{aligned}
$$

因此，Y_t是强度为λp的泊松过程。

-end-

3.3 设电话总机在$(0,t]$内接到电话呼叫数$X(t)$是具有强度（每分钟）为λ的泊松过程，求：

（1）两分钟内接到 3 次呼叫的概率；

（2）第二分钟内接到第 3 次呼叫的概率。

解：（1）因$X(t)\sim\pi(\lambda)$

则：$P\big(Y(t+2)-Y(t)=3\big)=\dfrac{(2\lambda)^3 e^{-2\lambda}}{3!}=\dfrac{4}{3}\lambda^3 e^{-2\lambda}$

（2）$P\{$第二分钟内接到第 3 次呼叫$\}=\sum\limits_{K=0}^{2} P\left\{X(1)-X(0)=k, X(2)-X(1)\geq 3-k\right\}$

$$
\begin{aligned}
&=\sum_{K=0}^{2} P\left\{X(1)-X(0)=k\right\}P\left\{X(2)-X(1)\geq 3-k\right\}\\
&=P\left\{X(1)-X(0)=0\right\}P\left\{X(2)-X(1)\geq 3\right\}+P\left\{X(1)-X(0)=1\right\}P\left\{X(2)-X(1)\geq 2\right\}\\
&\quad +P\left\{X(1)-X(0)=2\right\}P\left\{X(2)-X(1)\geq 1\right\}\\
&=e^{-\lambda}\left[1-P\left\{X(2)-X(1)=0\right\}-P\left\{X(2)-X(1)=1\right\}-P\left\{X(2)-X(1)=2\right\}\right]
\end{aligned}
$$

$$+\lambda e^{-\lambda}\left[1-P\{X(2)-X(1)=0\}-P\{X(2)-X(1)=1\}\right]+\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}\left[1-P\{X(2)-X(1)=0\}\right]$$

$$=e^{-\lambda}\left[1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}-\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}\right]+\lambda e^{-\lambda}\left[1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}\right]+\frac{\lambda}{2}e^{-\lambda}\left[1-e^{-\lambda}\right]$$

$$=e^{-\lambda}\left[\left(1+\lambda+\frac{\lambda^2}{2}\right)-e^{-\lambda}\left(1+2\lambda+2\lambda^2\right)\right]$$

-end-

3.4 设$\{X(t),\ t\geq 0\}$是具有参数为λ的泊松过程，假设 S 是相邻事件的时间间隔，证明：$P\{S>s_1+s_2|S>s_1\}=P\{S>s_2\}$，即假定预先知道最近一次到达发生在$s_1$秒，下一次到达至少发生在将来$s_2$秒的概率等于在将来$s_2$秒出现下一次事件的无条件概率（这一性质称为“泊松过程无记忆性” ）。

证明：因为$X(t)\sim\pi(\lambda)$

则：$P\{S>s_1+s_2|S>s_1\}=P\{X(s_1+s_2)-X(s_1)=0\}=\dfrac{(\lambda s_2)^0}{0!}e^{-\lambda s_2}$

$$=e^{-\lambda s_2}=1-P\{S\leq s_2\}=P\{S>s_2\}$$

-end-

3.5 设到达某路口的绿、黑、灰色的汽车的到达率分别为λ_1，λ_2，λ_3，且均为泊松过程，它们相互独立，若把这些汽车合并单个输出过程（假定无长度、无延时），求：

（1）相邻绿色汽车之间的不同到达时间间隔的概率密度；

（2）汽车之间的不同到达时刻间隔的概率密度。

解：（1）由定理 3.2 知绿色汽车到达时间间隔为独立同分布的均值为$\dfrac{1}{\lambda}$的指数分布，则绿色汽车之间的不同到达时间间隔的概率密度为：

$$f(t)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

（2）若把这些汽车合并单个输出过程$Y(t)$，则根据 3.1（1）知$Y(t)$服从于参数为$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$的泊松过程，于是汽车之间的不同到达时刻间隔的概率密度为：

$$f_Y(t)=\begin{cases}(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)t} & t\ge 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

-end-

3.6 设$\{X(t),\ t\ge 0\}$为具有参数为λ的泊松过程，证明：

（1）$E(W_n)=\dfrac{n}{\lambda}$，即泊松过程第$n$次到达时间的数学期望恰好是到达率倒数的$n$倍；

（2）$D(W_n)=\dfrac{n}{\lambda^2}$，即泊松过程第$n$次到达时间的方差恰好是到达率平方的倒数的$n$倍。

证明：设T_i表示$\{X(t),\ t\ge 0\}$第$i-1$次事件发生到第i次事件发生的时间间隔，则$T_i,\ i=1,2,\cdots$相互独立且服从均值为$\dfrac{1}{\lambda}$的指数分布，则：

$$E(T_i)=\frac{1}{\lambda},\ D(T_i)=\frac{1}{\lambda^2},\ i=1,2,\cdots n\text{，而}W_n=\sum_{i=1}^{n}T_i$$

（1）$E(W_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}E(T_i)=\dfrac{n}{\lambda}$

（2）$D(W_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}D(T_i)=\dfrac{n}{\lambda^2}$

-end-

3.7 设$\{X(t),\ t\ge 0\}$和$\{Y(t),\ t\ge 0\}$分别是具有参数为λ_1和λ_2的相互独立的泊松过程，令W和W'是$X(t)$的两个相继泊松型事件出现的时间，且$W<W'$，对于$W<t<W'$，有$X(t)=X(W)$和$X(W')=X(W)+1$，定义$N=Y(W')-Y(W)$，求N的概率分布。

解：$P(N=k)=\int\limits_0^{\infty}P\{Y(W')-Y(W)=k,W'-W=s\}ds$

$$=\int_0^{\infty}P\{Y(W')-Y(W)=k\,|\,W'-W=s\}\bullet P\{W'-W=s\}ds$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{(\lambda_2 s)^k}{k!}e^{-\lambda_2 s}\bullet\lambda_1 e^{-\lambda_1 s}ds=\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k$$

-end-

3.8 设脉冲到达计数器的规律是到达率为λ的泊松过程，记录每个脉冲的概率为p，记录不同

脉冲的概率是相互独立的，令$X(t)$表示已被记录的脉冲数：

（1）求$P\{X(t)=k\}$，$k=0,1,2,\cdots$

（2）$X(t)$是否为泊松过程。

解：设$\{N(t),\ t\ge 0\}$表示在$[0,t]$区间脉冲到达计数器的个数，若第i个脉冲被计数器记录，取$\xi_i=1$；若第i个脉冲不被计数器记录，取$\xi_i=0$，则：$P(\xi_i=1)=p,\ P(\xi_i=0)=1-p$，则：

$$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)}\xi_i$$

则根据复合泊松过程的定义知：$X(t)$为泊松过程，且：

$$E\left[X(t)\right]=E\left[N(t)\right]\bullet E(\xi_1)=\lambda t\bullet p=\lambda pt$$

则$X(t)$的强度为λp，所以：

$$P\{X(t)=k\}=\frac{(\lambda pt)^k}{k!}e^{-\lambda pt},\ k=0,1,2,\cdots$$

-end-

3.9 某商店每日 8 时开始营业，从 8 时到 11 时平均顾客到达率线性增加，在 8 时顾客平均到达率为 5 人/时，11 时到达率达最高峰 20 人/时；从 11 时到 13 时，平均顾客到达率保持不变，为 20 人/时；从 13 时到 17 时，顾客到达率线性下降，到 17 时顾客到达率为 12 人。假定在不相重叠的时间间隔内到达商店的顾客数是相互独立的，问在 8:30—9:30 间无顾客到达商店的概率是多少？在这段时间内到达商店的顾客数学期望是多少？

解：将时间 8 时至 17 时平移为 0 时至 9 时，依据题意商店的到达率为：

$$\lambda(t)=\begin{cases}5+5t, & 0\le t\le 3\\ 20, & 3<t\le 5\\ 20-2(t-5), & 5<t\le 9\end{cases}$$

则：$m_X(1.5)-m_X(0.5)=\int_{0.5}^{1.5}(5+5t)dt=10$

所以：$P\{X(1.5)-X(0.5)=0\}=\frac{(10t)^0}{0!}e^{-10t}=e^{-10t}$

则：在 8:30—9:30 间无顾客到达商店的概率是e^{-10t}？在这段时间内到达商店的顾客数学期望是 10 人。

-end-

3.10 设移民到某地区定居的户数是一泊松过程，平均每周有 2 户定居，即$\lambda=2$，如果每户的人口数是随机变量，一户四人的概率是$\frac{1}{6}$，一户三人的概率是$\frac{1}{3}$，一户二人的概率是$\frac{1}{3}$，一户一人的概率是$\frac{1}{6}$，并且每户的人口数是相互独立的，求在五周内移民到该地区人口的数学期望与方差。

解：设$\left\{N(t),\ t\geq 0\right\}$表示在$[0,t]$间的移民户数，$Y_i$表示每户的人口数，则在$[0,t]$内的移民人数：$X(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$是一个复合泊松过程。

因为Y_i相互独立且具有相同分布的随机变量，其分布率为：

$$P\{Y=1\}=P\{Y=4\}=\frac{1}{6},\ P\{Y=2\}=P\{Y=3\}=\frac{1}{3}$$

则：$E(Y)=\frac{5}{2},\ E\left(Y^2\right)=\frac{43}{6}$

根据题意知$N(t)$在 5 周内是强度为 10 的泊松过程，由定理 3.6，有：

$$m_X(t)=E\left[X(t)\right]=\lambda t E(Y_1),\ D_X(t)=D\left[X(t)\right]=\lambda t E\left(Y_1^2\right)$$

则：$m_X(5)=2\times 5\times\frac{5}{2}=25,\ D_X(t)=2\times 5\times\frac{43}{6}=\frac{215}{3}$

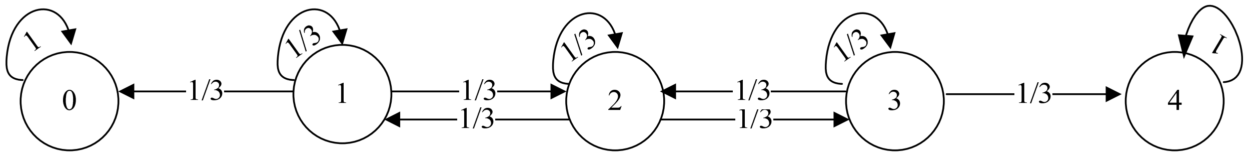
所以：在五周内移民到该地区人口的数学期望为 25，方差为$\frac{215}{3}$。

-end-

习题 4

4.1 设质点在区间$[0,4]$的整数点作随机游动，到达 0 点或 4 点后以概率 1 停留在原点，在其它整数点分别以概率$\frac{1}{3}$向左、右移动一格或停留在原点，求质点随机游动的一步和二步转移概率矩阵。

解：根据题意，画出其状态转移图：



则一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ I=\{0,1,2,3,4\}$$

二步转移概率矩阵为：

$$P^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & 0\\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{3}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ 0 & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{4}{9}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ I=\{0,1,2,3,4\}$$

-end-

4.2 独立地重复抛掷一枚硬币，每次抛掷出现正面的概率为 p，对于 $n\geq 2$，令 $X_n=0,1,2$或3，这些值分别对应于第$n-1$次和第n次抛掷的结果为（正，正），（正，反），（反，正），（反，反），求马尔可夫链$\{X_n,\ n=0,1,2\cdots\}$的一步和二步转移概率矩阵。

解：根据题意，有：$I=\{0,1,2,3\}$

则一步转移概率矩阵为：$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{bmatrix}$

二步转移概率矩阵为：

$$P^2=\begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \\ p & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \\ p^2 & pq & pq & q^2 \end{bmatrix}$$

-end-

4.3 设$\{X_n,\ n\geq 0\}$为马尔可夫链，试证：

（1）$P\left\{X_{n+1}=i_{n+1},X_{n+2}=i_{n+2},\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\,\middle|\,X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots X_n=i_n\right\}$

$=P\left\{X_{n+1}=i_{n+1},X_{n+2}=i_{n+2},\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\,\middle|\,X_n=i_n\right\}$

（2）$P\left\{X_0=i_0,\cdots X_n=i_n,X_{n+2}=i_{n+2},\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\,\middle|\,X_{n+1}=i_{n+1}\right\}$

$=P\left\{X_0=i_0,\cdots X_n=i_n\,\middle|\,X_{n+1}=i_{n+1}\right\}\bullet P\left\{X_{n+2}=i_{n+2},\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\,\middle|\,X_{n+1}=i_{n+1}\right\}$

证明：（1）$P\left\{X_{n+1}=i_{n+1},X_{n+2}=i_{n+2},\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\,\middle|\,X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots X_n=i_n\right\}$

$$=\frac{P\left\{X_0=i_0,X_1=i_1\cdots X_n=i_n,X_{n+1}=i_{n+1},X_{n+2}=i_{n+2}\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\right\}}{P\left\{X_0=i_0,X_1=i_1,\cdots X_n=i_n\right\}}$$

$$=\frac{p_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}p_{i_ni_{n+1}}\cdots p_{i_{n+m-1}i_{n+m}}}{p_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}}=p_{i_ni_{n+1}}\cdots p_{i_{n+m-1}i_{n+m}}=\frac{p_{i_n}p_{i_ni_{n+1}}\cdots p_{i_{n+m-1}i_{n+m}}}{p_{i_n}}$$

$$=\frac{P\left\{X_n=i_n,X_{n+1}=i_{n+1}\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\right\}}{P\left\{X_n=i_n\right\}}=P\left\{X_{n+1}=i_{n+1}\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\,\middle|\,X_n=i_n\right\}$$

（2）$P\left\{X_0=i_0,\cdots X_n=i_n,X_{n+2}=i_{n+2},\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\,\middle|\,X_{n+1}=i_{n+1}\right\}$

$$=\frac{P\left\{X_0=i_0,X_n=i_n,X_{n+1}=i_{n+1},X_{n+2}=i_{n+2}\cdots X_{n+m}=i_{n+m}\right\}}{P\left\{X_{n+1}=i_{n+1}\right\}}$$

$$=\frac{p_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_{n-1}i_n}p_{i_ni_{n+1}}\cdots p_{i_{n+m-1}i_{n+m}}}{p_{i_{n+1}}}=\frac{p_{i_0}p_{i_0i_1}\cdots p_{i_ni_{n+1}}}{p_{i_{n+1}}}\bullet\frac{p_{i_{n+1}}p_{i_{n+1}i_{n+2}}\cdots p_{i_{n+m-1}i_{n+m}}}{p_{i_{n+1}}}$$

$$=P\left\{X_0=i_0,\cdots X_n=i_n \middle| X_{n+1}=i_{n+1}\right\}\bullet P\left\{X_{n+2}=i_{n+2},\cdots X_{n+m}=i_{n+m} \middle| X_{n+1}=i_{n+1}\right\}$$

-end-

4.4 设$\{X_n,\ n\geq 1\}$为有限齐次马尔可夫链，其初始分布和转移概率矩阵为：

$$p_i=P\{X_0=i\}=\frac{1}{4},\quad i=1,2,3,4,\quad P=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{8}&\frac{1}{4}&\frac{3}{8}\\ \frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

试证：$P\left\{X_2=4 \middle| X_0=1,\ 1<X_1<4\right\}\neq P\left\{X_2=4 \middle| 1<X_1<4\right\}$

证明：由题意，有：

$$P\left\{X_2=4 \middle| 1<X_1<4\right\}=\frac{P\{1<X_1<4,\ X_2=4\}}{P\{1<X_1<4\}}$$

$$=\frac{P\{X_1=2,\ X_2=4\}+P\{X_1=3,\ X_2=4\}}{P\{X_1=2\}+P\{X_1=3\}}=\frac{P\{X_1=2\}\bullet p_{24}+P\{X_1=3\}\bullet p_{34}}{P\{X_1=2\}+P\{X_1=3\}}=\frac{\frac{7}{8}\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}+1}=\frac{19}{60}$$

而：$P\left\{X_2=4 \middle| X_0=1,\ 1<X_1<4\right\}=\dfrac{P\{X_0=1,\ 1<X_1<4,\ X_2=4\}}{P\{X_0=1,\ 1<X_1<4\}}$

$$=\frac{P\{X_0=1,\ X_1=2,\ X_2=4\}+P\{X_0=1,\ X_1=3,\ X_2=4\}}{P\{X_0=1,\ X_1=2\}+P\{X_0=1,\ X_1=3\}}$$

$$=\frac{p_1p_{12}p_{24}+p_1p_{13}p_{34}}{p_1p_{12}+p_1p_{13}}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{8}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}}=\frac{5}{16}\neq\frac{19}{60}$$

则：$P\left\{X_2=4 \middle| X_0=1,\ 1<X_1<4\right\}\neq P\left\{X_2=4 \middle| 1<X_1<4\right\}$

-end-

4.5 设$\{X(t),\ t\geq T\}$为随机过程，且$X_1=X(t_1),\ X_2=X(t_2),\cdots X_n=X(t_n),\cdots$为独立同分布随机变量序列，令$Y_0=0,\ Y_1=Y(t_1)=X_1,\ Y_n+cY_{n-1}=X_n,\ n\geq 2$，试证$\{Y_n,\ n\geq 0\}$是马尔可夫链。

证明：由题意，有：$Y_n=X_n-cY_{n-1}$，知Y_n是$(X_1,\cdots X_n)$的函数，由于$X_1,\cdots X_n,\cdots$是相互独立的

随机变量，故对任意的$n\ge 0$，X_{n+1}与$\left(Y_0,Y_1\cdots Y_n\right)$独立。

$$P\left\{Y_{n+1}=i_{n+1}\left|Y_0=0,Y_1=i_1,\cdots Y_n=i_n\right.\right\}=P\left\{Y_{n+1}+cY_n=i_{n+1}+ci_n\left|Y_0=0,Y_1=i_1,\cdots Y_n=i_n\right.\right\}$$

$$=P\left\{X_{n+1}=i_{n+1}+ci_n\left|Y_0=0,Y_1=i_1,\cdots Y_n=i_n\right.\right\}=P\left\{X_{n+1}=i_{n+1}+ci_n\right\}$$

$$=P\left\{X_{n+1}=i_{n+1}+ci_n\left|Y_n=i_n\right.\right\}=P\left\{Y_{n+1}=i_{n+1}\left|Y_n=i_n\right.\right\}$$

由i_k，$k=1,2,\cdots n+1$的任意性知：$\{Y_n，n\ge 0\}$是马尔可夫链。

-end-

4.6 已知随机游动的转移概率矩阵为：$P=\begin{bmatrix}0.5&0.5&0\\0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\end{bmatrix}$，求三步转移概率矩阵$P^{(3)}$及当初试分布为$P\left\{X_0=1\right\}=P\left\{X_0=2\right\}=0$，$P\left\{X_0=3\right\}=1$时，经三步转移后处于状态 3 的概率。

解：由于$P^{(2)}=\begin{bmatrix}0.5&0.5&0\\0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0.5&0.5&0\\0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25&0.5&0.25\\0.25&0.25&0.5\\0.5&0.25&0.25\end{bmatrix}$

则：$P^{(3)}=P^{(2)}\bullet P=\begin{bmatrix}0.25&0.5&0.25\\0.25&0.25&0.5\\0.5&0.25&0.25\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0.5&0.5&0\\0&0.5&0.5\\0.5&0&0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.25&0.375&0.375\\0.375&0.25&0.375\\0.375&0.375&0.25\end{bmatrix}$

而：$p_1=p_2=0$，$p_3=1$

由：$p_j\left(n\right)=\sum\limits_{i\in I}p_ip_{ij}^{(n)}$，则：$p_3\left(3\right)=\sum\limits_{i=1}^{3}p_ip_{i3}^{(3)}=p_1p_{13}^{(3)}+p_2p_{23}^{(3)}+p_3p_{33}^{(3)}=0.25$

则经三步转移后处于状态 3 的概率为 0.25。

-end-

4.7 已知本月销售状态的初始分布和转移概率矩阵如下：

（1）$P^T\left(0\right)=\left[0.4\quad 0.2\quad 0.4\right]$，$P=\begin{bmatrix}0.8&0.1&0.1\\0.1&0.7&0.2\\0.2&0.2&0.6\end{bmatrix}$；

（2）$P^T(0)=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1\\0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2\\0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6\end{bmatrix}$；

求下一、二个月的销售状态分布。

解：（1）$P^{(2)}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.7 & 0.2\\0.2 & 0.2 & 0.6\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.7 & 0.2\\0.2 & 0.2 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.67 & 0.17 & 0.16\\0.19 & 0.54 & 0.27\\0.3 & 0.28 & 0.62\end{bmatrix}$

再由：$P^T(n)=P^T(0)\bullet P^{(n)}$

则下一个月的销售状态分布为：

$$P^T(1)=P^T(0)\bullet P^{(1)}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.2 & 0.4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0.8 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.7 & 0.2\\0.2 & 0.2 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.42 & 0.26 & 0.32\end{bmatrix}$$

同理下二个月的销售状态分布为：

$$P^T(2)=P^T(0)\bullet P^{(2)}=\begin{bmatrix}0.4 & 0.2 & 0.4\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0.67 & 0.17 & 0.16\\0.19 & 0.54 & 0.27\\0.3 & 0.28 & 0.62\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.426 & 0.288 & 0.286\end{bmatrix}$$

（2）$P^{(2)}=\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1\\0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2\\0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1\\0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2\\0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.52 & 0.15 & 0.17 & 0.16\\0.16 & 0.40 & 0.27 & 0.17\\0.16 & 0.15 & 0.43 & 0.26\\0.16 & 0.15 & 0.27 & 0.42\end{bmatrix}$

再由：$P^T(n)=P^T(0)\bullet P^{(n)}$

则下一个月的销售状态分布为：

$$P^T(1)=P^T(0)\bullet P^{(1)}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0.7 & 0.1 & 0.1 & 0.1\\0.1 & 0.6 & 0.2 & 0.1\\0.1 & 0.1 & 0.6 & 0.2\\0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.22 & 0.2 & 0.3 & 0.28\end{bmatrix}$$

下二个月的销售状态分布为：

$$P^T(2)=P^T(0)\cdot P^{(2)}=\begin{bmatrix}0.2 & 0.2 & 0.3 & 0.3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0.52 & 0.15 & 0.17 & 0.16\\0.16 & 0.40 & 0.27 & 0.17\\0.16 & 0.15 & 0.43 & 0.26\\0.16 & 0.15 & 0.27 & 0.42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.232 & 0.2 & 0.298 & 0.27\end{bmatrix}$$

-end-

4.8 某商店六年共 24 个季度销售记录如下表（状态 1—畅销，状态 2—滞销）

季　节	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售状态	1	1	2	1	2	2	1	1	1	2	1	2
季　节	12	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
销售状态	1	1	2	2	1	1	2	1	2	1	1	1

以频率估计概率，求：

（1）销售状态的初始分布；

（2）三步转移概率矩阵及三步转移后的销售状态分布。

解：（1）由题意，在 24 个季节中处于畅销状态共有 15 个季节，用频率估计概率，则：

$$p_1=P\{X_0=1\}=\frac{15}{24},\ p_2=P\{X_0=2\}=\frac{9}{24}$$

则：$P^T(0)=\begin{bmatrix}p_1 & p_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{15}{24} & \frac{9}{24}\end{bmatrix}$

（2）一步转移概率矩阵为 $P=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\p_{21} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{14} & \frac{7}{14}\\\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}$

则，二步转移概率矩阵为 $P^{(2)}=\begin{bmatrix}\frac{7}{14} & \frac{7}{14}\\\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{7}{14} & \frac{7}{14}\\\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{23}{36} & \frac{13}{36}\\\frac{91}{162} & \frac{71}{162}\end{bmatrix}$

所以，三步转移概率矩阵为 $P^{(3)}=\begin{bmatrix}\frac{23}{36} & \frac{13}{36}\\\frac{91}{162} & \frac{71}{162}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{7}{14} & \frac{7}{14}\\\frac{7}{9} & \frac{2}{9}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\0.62 & 0.38\end{bmatrix}$

由 $P^T(n)=P^T(0)\cdot P^{(n)}$

则： $P^{T}\left(3\right)=P^{T}\left(0\right)\bullet P^{(3)}=\begin{bmatrix}\frac{15}{24} & \frac{9}{24}\end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix}0.6 & 0.4\\0.62 & 0.38\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.61 & 0.39\end{bmatrix}$

-end-

4.9 设老鼠在如图 4.14 的迷宫中作随机游动，当它处在某个方格中有 k 条通道时，以概率 $\frac{1}{k}$ 随机通过任一通道，求老鼠作随机游动的状态空间、转移概率矩阵及状态空间可分解成几个闭集。

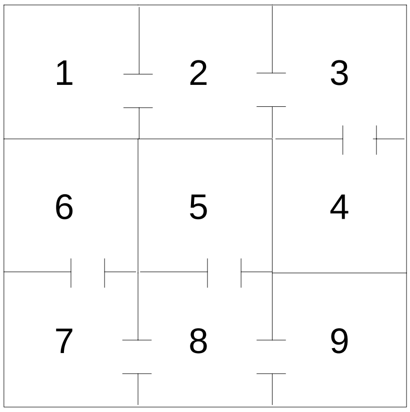


图 4.14

解：显然，状态空间 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

由题意，一步转移概率矩阵为：

$$P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1 & 0\\0 & P_2\end{bmatrix}$$

其中 P_1，P_2 也是随机矩阵，则状态空间 I 可分为两个闭集：

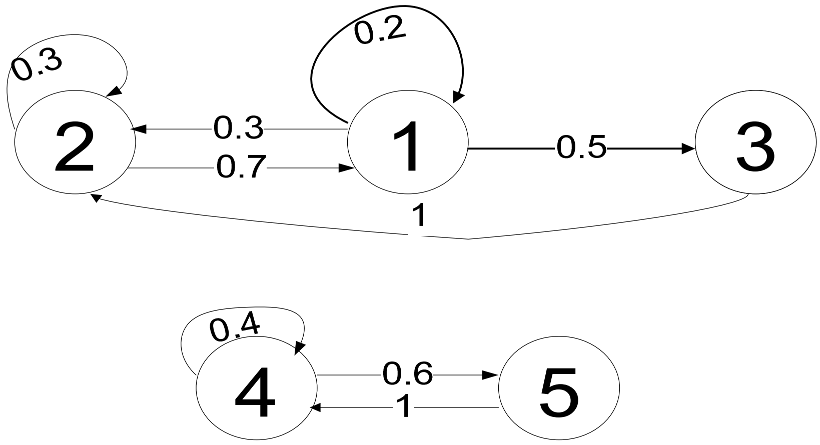
$I=C_1+C_2$，其中$C_1=\{1,2,3,4\}$，$C_2=\{5,6,7,8,9\}$

-end-

4.10 讨论下列转移概率矩阵的马尔可夫链的状态分类：

（1）$P=\begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.7 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

解：1° 画出状态转移图



2° 由状态转移图，有：$N=\Phi$，$C_1=\{1,2,3\}$，$C_2=\{4,5\}$

3° 考查状态 4，$f_{44}^{(1)}=0.4$，$f_{44}^{(2)}=0.6\times1=0.6$，$f_{44}^{(n)}=0\left(n\geq3\right)$，则：

$$f_{44}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{44}^{(n)}=f_{44}^{(1)}+f_{44}^{(2)}=0.4+0.6=1\text{，则状态 4 常返}$$

而：$\mu_4=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{44}^{(n)}=1\times f_{44}^{(1)}+2\times f_{44}^{(2)}=1\times0.4+2\times0.6=1.6<\infty$，则状态 4 正常返

显然，状态 4 的周期为 1，则状态 4 为非周期正常返状态，则状态 4 为遍历态，所以 5 也为遍历态。

再考查状态 1，$f_{44}^{(1)}=0.2$，$f_{44}^{(2)}=0.3\times0.7=0.21$，$f_{44}^{(n)}=0.3\times0.7\times0.3^{n-2}+0.5\times0.7\times0.3^{n-3}\left(n\geq3\right)$

则：$f_{44}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{44}^{(n)}=0.2+0.21+0.3\times0.7\times0.3\left(1+0.3+0.3^2+\cdots\right)+\times0.5\times0.7\left(1+0.3+0.3^2+\cdots\right)$

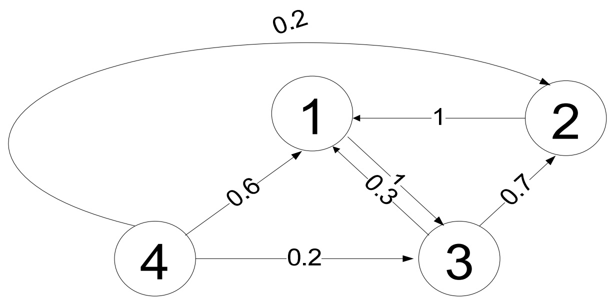
$=0.41+0.59\times0.7\times\left(1+0.3+0.3^2+\cdots\right)=0.41+0.59=1$，则状态 1 常返

$\mu_1=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{44}^{(n)}=1\times0.2+2\times0.21+\sum_{n=3}^{\infty}n\times\left[0.3\times0.7\times0.3^{n-2}+0.5\times0.7\times0.3^{n-3}\right]<\infty$，则状态 1 正常返

显然，状态 1 的周期为 1，则状态 1 为非周期正常返状态，则状态 1 为遍历态，所以 2、3 也为遍历态。

（2）$P=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\1&0&0&0\\0.3&0.7&0&0\\0.6&0.2&0.2&0\end{bmatrix}$

解：1° 画出状态转移图



2° 由状态转移图，状态 4 非常返 $N=\{4\}$，状态 1、2、3 构成一个常返闭集 $C=\{1,2,3\}$。

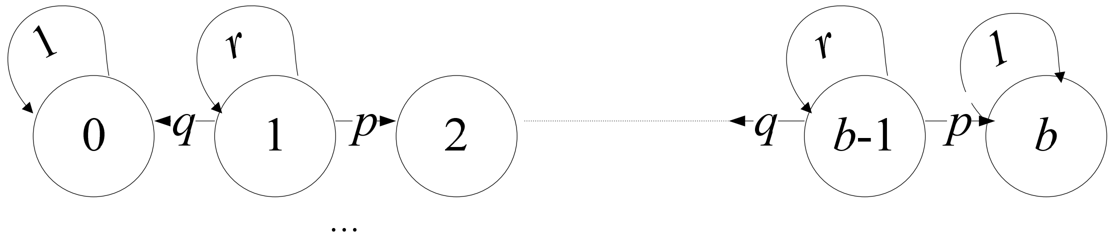
也可直接考查状态 2，$f_{22}^{(2n)}=0,\ f_{22}^{(1)}=0,\ f_{22}^{(3)}=1\times1\times0.7=0.7,\ f_{22}^{(2n+3)}=1\times1^n\times0.3^n\times1\times0.7\left(n\geq1\right)$

则：$f_{22}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{22}^{(n)}=0.7+\sum_{n=1}^{\infty}1\times1^n\times0.3^n\times1\times0.7=1$，则状态 2 常返，且周期为 1。

而平均返回之间：$\mu_2=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{22}^{(n)}=3\times0.7+\sum_{n=1}^{\infty}\left(2n+1\right)\times1\times1^n\times0.3^n\times1\times0.7<\infty$，则状态 2 为遍历态，则闭集 $C=\{1,2,3\}$ 为遍历闭集。

（3）$P=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\q&r&p&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&q&r&p&0&\cdots&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0&q&r&p\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{bmatrix}$，其中 $q+r+p=1,\ I=\{0,1,\cdots b\}$。

解：1° 画出状态转移图，如下：



2° 由状态转移图可知：状态 0，b 为吸收态，则：$C_1=\{0\}$，$C_2=\{b\}$，且周期为 1，则为遍历态；$N=\{1,2,\cdots b-1\}$ 是非常返态。

-end-

4.11 设马尔可夫链的转移概率矩阵为：

（1）$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ （2）$\begin{bmatrix} p_1 & q_1 & 0 \\ 0 & p_2 & q_2 \\ q_3 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$

计算 $f_{11}^{(n)}$，$f_{12}^{(n)}$，$n=1,2,3$。

解：（1）利用公式 4.16：$p_{ij}^{(n)}=\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$，得如下递推公式：

$$f_{ij}^{(n)}=p_{ij}^{(n)}-\sum_{k=1}^{n-1} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}$$

则：$f_{11}^{(1)}=p_{11}^{(1)}=\frac{1}{2}$，$f_{12}^{(1)}=p_{12}^{(1)}=\frac{1}{2}$

而：$P^{(1)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$，所以：$P^{(2)}=P^{(1)}\bullet P^{(1)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18} \end{bmatrix}$

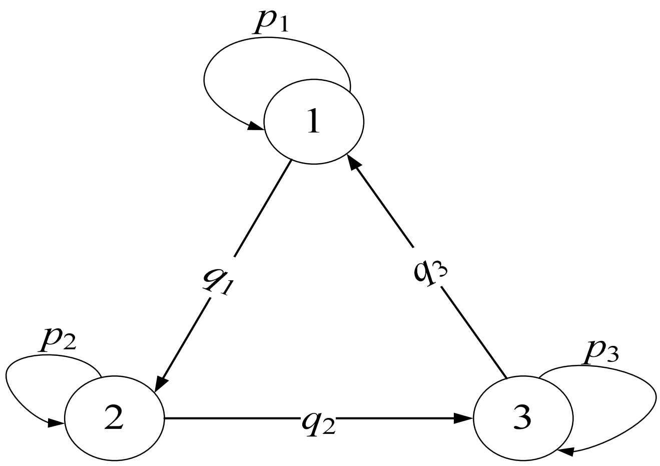
则：$f_{11}^{(2)}=p_{11}^{(2)}-f_{11}^{(1)}p_{11}^{(1)}=\frac{5}{12}-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$，$f_{12}^{(2)}=p_{12}^{(2)}-f_{12}^{(1)}p_{22}^{(1)}=\frac{7}{12}-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{4}$

同理：$P^{(3)}=P^{(1)}\bullet P^{(2)}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} \frac{5}{12} & \frac{7}{12} \\ \frac{7}{18} & \frac{11}{18} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{29}{72} & \frac{43}{72} \\ \frac{29}{54} & \frac{25}{54} \end{bmatrix}$

则：$f_{11}^{(3)} = p_{11}^{(3)} - f_{11}^{(1)} p_{11}^{(2)} - f_{11}^{(2)} p_{11}^{(1)} = \dfrac{1}{9}$

$f_{12}^{(3)} = p_{12}^{(3)} - f_{12}^{(1)} p_{22}^{(2)} - f_{12}^{(2)} p_{22}^{(1)} = \dfrac{1}{8}$

（2）1° 画出状态转移图如下：



2° 根据上图，显然：$f_{11}^{(1)}=p_{11}^{(1)}=p_1$，$f_{11}^{(2)}=0$，$f_{11}^{(3)} = q_1 q_2 q_3 \left(1 \xrightarrow{q_1} 2 \xrightarrow{q_2} 3 \xrightarrow{q_3} 1\right)$

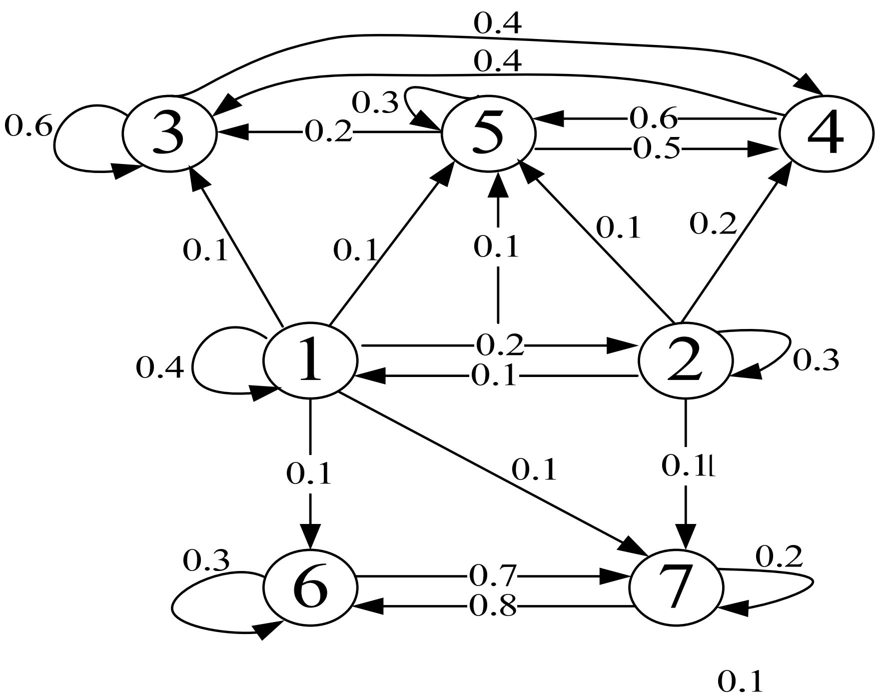
$f_{12}^{(1)}=p_{12}^{(1)}=q_1$，$f_{12}^{(2)}=p_1 q_1 \left(1 \xrightarrow{p_1} 1 \xrightarrow{q_1} 2\right)$，$f_{12}^{(3)}=p_1^2 q_1 \left(1 \xrightarrow{p_1} 1 \xrightarrow{p_1} 1 \xrightarrow{q_1} 2\right)$

-end-

4.12 设马尔可夫链的状态空间 $I=\{1,2,\cdots 7\}$，转移概率矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 & 0.2 & 0.2 & 0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$$，求状态的分类及各常返闭集的平稳分布。

解：1° 画出状态转移图



2° 根据状态转移图，显然有：状态 6、7 互通，3、4、5 互通，1、2 互通。

$$
\begin{aligned}
f_{11} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)} = f_{11}^{(1)} + f_{11}^{(2)} + f_{11}^{(3)} + \cdots \\
&= 0.4 + 0.2\times 0.1 + 0.2\times 0.3\times 0.1 + 0.2\times 0.3^2\times 0.1 + \cdots \\
&= 0.4 + 0.2\times 0.1\left(1 + 0.3 + 0.3^2 + \cdots\right) = \frac{3}{7} < 1
\end{aligned}
$$

所以：状态 1 非常返，则状态 2 也是非常返态。

状态 6、7 互通，且：

$$
f_{66} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{66}^{(n)} = f_{66}^{(1)} + f_{66}^{(2)} + f_{66}^{(3)} + \cdots = 0.3 + 0.7\times 0.8 + 0.7\times 0.2\times 0.8 + 0.7\times 0.2^2\times 0.8 + \cdots
$$

$$
= 0.3 + 0.7\times 0.8\times\left(1 + 0.2 + \times 0.2^2 + \cdots\right) = 0.3 + 0.7\times 0.8\times\frac{1}{1-0.2} = 1
$$

则状态 6 常返，所以状态 7 也是常返态，得闭集 $C_1 = \{6,7\}$

同理，可判断状态 3、4、5 也是常返态，得闭集 $C_2 = \{3,4,5\}$

下面进一步判断状态 6、7 是正常返还是零常返，求其平均返回时间：

$$
\mu_6 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{66}^{(n)} = 1\times f_{66}^{(1)} + 2\times f_{66}^{(2)} + 3\times f_{66}^{(3)} + \cdots
$$

$$=1\times 0.3+2\times 0.7\times 0.8+3\times 0.7\times 0.2\times 0.8+4\times 0.7\times 0.2^2\times 0.8+\cdots \quad （1）$$

$$0.2\times \mu_6 = 1\times 0.3\times 0.2+2\times 0.7\times 0.8\times 0.2+3\times 0.7\times 0.2^2\times 0.8+\cdots \quad （2）$$

（1） 减（2），得:

$$0.8\times \mu_6 = 1\times 0.3-0.3\times 0.2+2\times 0.7\times 0.8+1\times 0.7\times 0.2\times 0.8+1\times 0.7\times 0.2^2\times 0.8+\cdots$$

$$0.8\times \mu_6 = 1.36+0.7\times 0.8\times\left(1+0.2+0.2^2+\cdots\right)=1.36+0.7\times 0.8\times\frac{1}{1-0.2}=2.06$$

$\mu_6 = 2.575$，则状态 6 为正常返，所以状态 7 也是正常返。

同理，可判断状态 3、4、5 也是正常返态的，略。

3° 由状态 3、4、5 为非周期正常返状态，则平稳分布存在。

对应的随机子矩阵为：$\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$，设状态 3、4、5 对应的平稳分布为：$\left(\pi_3,\pi_4,\pi_5\right)$

则：$\begin{cases} \left(\pi_3,\pi_4,\pi_5\right)\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix} = \left(\pi_3,\pi_4,\pi_5\right) \\ \pi_3+\pi_4+\pi_5=1 \end{cases}$

得平稳分布为：$\left(\frac{10}{23},\frac{7}{23},\frac{6}{23}\right)$，则闭集 $C_2=\{3,4,5\}$ 的平稳分布是：$\left(0,0,\frac{10}{23},\frac{7}{23},\frac{6}{23},0,0\right)$

同理可得闭集 $C_1=\{6,7\}$ 的平稳分布是：$\left(0,0,0,0,0,\frac{8}{15},\frac{7}{15}\right)$

-end-

4.13 设马尔可夫链转移概率矩阵为：

$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$，求它的平稳分布。

解：设平稳分布为：$\left(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots\right)$，则：

$$\begin{cases}(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots)\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}=(\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots) \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\cdots=1\end{cases}$$

得：$$\begin{cases}\pi_0=q_1\pi_1 \\ \pi_1=\pi_0+q_2\pi_2 \\ \pi_j=p_{j-1}\pi_{j-1}+q_{j+1}\pi_{j+1}\,(j=2,3,\cdots) \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\cdots=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\pi_1=\dfrac{1}{q_1}\pi_0 \\ \pi_2=\dfrac{1-q_1}{q_1q_2}\pi_0=\dfrac{p_1}{q_1q_2}\pi_0 \\ \pi_3=\dfrac{(p_1-p_1p_2)\pi_0}{q_1q_2q_3}=\dfrac{p_1p_2}{q_1q_2q_3}\pi_0 \\ \cdots \\ \pi_j=\dfrac{p_1p_2...p_{j-1}}{q_1q_2q_3}\pi_0\,(j=2,3,4,\cdots) \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+......=1\end{cases}$$

则：

$$\begin{cases}\pi_j=\dfrac{p_1p_2...p_{j-1}}{q_1q_2q_3}\pi_0\,(p_0=1,\ \ j=1,2,\cdots) \\ \pi_0=\dfrac{1}{1+\sum\limits_{j=1}^{\infty}\prod\limits_{k=0}^{j-1}\dfrac{p_{k-1}}{q_{k+1}}}\end{cases}$$

-end-

4.14 艾伦菲斯特（Erenfest）链。设甲、乙两个容器共有$2N$个球，每隔单位时间从这$2N$个球中任取一球放入另一容器中，记X_n为在时刻n甲容器中球的个数，则$\{X_n,\ n\ge 0\}$是齐次马尔可夫链，称为艾伦菲斯特链。求该链的平稳分布。

解：根据题意，艾伦菲斯特链的状态空间为$I=\{0,1,2,\cdots 2N\}$，则转移概率矩阵为：

$$p_{ii}=0,\ p_{i,i+1}=\frac{2N-i}{2N},\ p_{i,i-1}=\frac{i}{2N}\left(i=0,1,\cdots 2N\right)$$

平稳分布$\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots\pi_{2N}\}$，满足如下方程组：

$$\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots\pi_{2N}\}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2N} & 0 & \frac{2N-1}{2N} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\{\pi_0,\pi_1,\pi_2,\cdots\pi_{2N}\}$$

则：$$\begin{cases} \pi_0=\frac{1}{2N}\pi_1 \\ \pi_j=\pi_{j-1}\frac{2N-j+1}{2N}+\pi_{j+1}\frac{j+1}{2N}\pi_1,1\le j\le 2N-1 \\ \pi_{2N}=\frac{1}{2N}\pi_{2N-1} \end{cases}$$

即：$\pi_j=C_{2N}^{j}\pi_0$

由条件：$\pi_0+\pi_1+\pi_2+\cdots+\pi_{2N}=1$，得：$\pi_0+C_{2N}^{1}\pi_0+C_{2N}^{2}\pi_0+\cdots+C_{2N}^{2N}\pi_0=1$

由二项定理，得：$(1+1)^{2N}\pi_0=1$，即：$\pi_0=2^{-2N}$

则所求平稳分布为：$\{2^{-2N},C_{2N}^{1}2^{-2N},C_{2N}^{2}2^{-2N},\cdots C_{2N}^{2N}2^{-2N}\}$ -end-

4.15 将 2 个红球 4 个白球任意地分别放入甲、乙两个盒子中，每个盒子放 3 个，现从每个盒子中各任取一球，交换后放回盒中（甲盒内取出的球放入乙盒中，乙盒内取出的球放入甲盒中），以$X(n)$表示经过n次交换后甲盒中的红球数，则$\{X(n),\ n\ge 0\}$为一齐次马尔可夫链，试求：

（1）一步转移概率矩阵；

（2）证明$\{X(n),\ n\ge 0\}$是遍历链；

（3）求$\lim\limits_{n\to\infty}p_{ij}^{(n)},\ j=0,1,2$。

解：根据题意，状态空间$I=\{0,1,2\}$

（1）一步转移概率矩阵为：$P=\begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/9 & 5/9 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

（2）$I=\{0,1,2\}$有限，且I中所有状态互通，即状态空间I不可分，则由定理 4.13 推论 1 有：不可约的有限马氏链必为正常返，则I中所有状态全部为正常返。

显然，状态 0,1,2 的周期全部为 1，即I中所有状态全部为非周期的正常返状态，则$\{X(n),\ n\ge 0\}$是遍历链。

（3）由 4.39 式，有：$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\dfrac{1}{\mu_j}=\pi_j$，其中$\{\pi_0,\pi_1,\pi_2\}$为平稳分布，且满足：

$$\begin{cases} [\pi_0,\pi_1,\pi_2]\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 2/9 & 5/9 & 2/9 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \end{bmatrix}=[\pi_0,\pi_1,\pi_2] \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2=1 \end{cases}$$

解以上方程组，得平稳分布为：$\left\{\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{1}{5}\right\}$，则：

$$\lim_{n\to\infty} p_{i0}^{(n)}=\pi_0=\frac{1}{5},\lim_{n\to\infty} p_{i1}^{(n)}=\pi_1=\frac{3}{5},\lim_{n\to\infty} p_{i2}^{(n)}=\pi_2=\frac{1}{5}$$ -end-

4.16 设$\{X(n),\ n\ge 1\}$为非周期不可约马尔可夫链，状态空间为 I，若对一切 $j\in I$，其一步转移概率矩阵满足条件：$\sum\limits_{i\in I} p_{ij}=1$，试证：

（1）对一切 $j,\sum\limits_{i\in I} p_{ij}^{(n)}=1$

（2）若状态空间$I=\{1,2,\cdots m\}$，计算各状态的平均返回时间。

证明：（1）用数学归纳法，显然，$n=1$成立

设$n=m$成立，来考查$n=m+1$结论是否成立

根据 C-K 方程，对一切 j,有：$\sum\limits_{i\in I} p_{ij}^{(m+1)}=\sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{k\in I} p_{ik}^{(m)}p_{kj}=\sum\limits_{k\in I} p_{kj}\sum\limits_{i\in I} p_{ik}^{(m)}=\sum\limits_{k\in I} p_{kj}=1$

（2）由条件知：$\{X(n),\ n\ge 1\}$为非周期不可约马尔可夫链，且状态空间有限，则由定理 4.16

推论 1 知：该马尔可夫链为遍历链。

因此，$\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j = \dfrac{1}{\mu_j} > 0\left(j \in I \right)$

所以：$\sum\limits_{i=1}^{m} \lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}^{(n)} \pi_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{1}{\mu_j} = \dfrac{m}{\mu_j} = 1$

则必有：$\mu_j = m\left(j = 1, 2, \cdots m \right)$ -end-

4.17 设河流每天的 BOD（生物耗氧量）浓度为齐次马尔可夫链，状态空间为 $I = \{1,2,3,4\}$ 是按 BOD 浓度为极低、低、中、高分别表示的，其一步转移概率矩阵（以一天为单位）为：

$$P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$$

若 BOD 浓度为高，则称河流处于污染状态，

（1）证明该链为遍历链；

（2）求该链的平稳分布；

（3）河流再次达到污染的平均时间 μ_4。

解：（1）证明：

$$由\ P^{(2)} = P \bullet P = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.34 & 0.42 & 0.19 & 0.05 \\ 0.22 & 0.39 & 0.28 & 0.11 \\ 0.15 & 0.28 & 0.45 & 0.12 \\ 0.08 & 0.26 & 0.44 & 0.22 \end{bmatrix}$$

知马尔可夫链所有状态 $I = \{1,2,3,4\}$ 互通，即该马尔可夫链不可约

且每个状态为非周期的，则由定理 4.16 推论 1 知，该马尔可夫链为遍历链。

（2）再由定理 4.16 推论 1 知，该马尔可夫链的平稳分布存在，不妨假设为 $\{\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4\}$，则有：

$$\begin{cases} [\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4]\begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.5 & 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix} = [\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4] \\ \pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1 \end{cases}$$

得：$\pi_1=0.2112$，$\pi_2=0.3028$，$\pi_3=0.3236$，$\pi_4=0.1044$

则平稳分布为：$\{\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4\}=\{0.2112,0.3028,0.3236,0.1044\}$

（3）$\mu_4=\dfrac{1}{\pi_4}=\dfrac{1}{0.1044}=9.58$（天）

-end-

习题 5

5.1 设连续时间的马尔可夫链$\{X(t),\ t\ge 0\}$具有转移概率：

$$p_{ij}(h)=\begin{cases} \lambda_i h+o(h) & j=i+1 \\ 1-\lambda_i h+o(h) & j=i \\ 0 & j=i-1 \\ o(h) & |j-i|\ge 2 \end{cases}$$

其中λ_i是正数，$X(t)$表示一个生物群体在时刻t的成员总数，求柯尔莫哥洛夫方程，转移概率$p_{ij}(t)$。

解：由定理 5.3，有：

$$q_{ii}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}=-\frac{d}{dh}p_{ii}(h)\Big|_{h=0}=\lambda_i,\ i\ge 0$$

$$q_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}=\frac{d}{dh}p_{ij}(h)\Big|_{h=0}=\begin{cases}\lambda_i & j=i+1,\ i\ge 0 \\ 0 & 其它\end{cases}$$

则由 5.9 式，柯尔莫哥洛夫向前方程为：

$$p_{ij}^{'}(t)=\sum_{k\equiv j}p_{ik}(t)q_{kj}-p_{ij}(t)q_{jj}$$

即：

$$\begin{cases} p_{ij}^{'}(t)=\sum_{k\neq j}p_{ik}(t)q_{kj}-p_{ij}(t)q_{jj}=-\lambda_j p_{ij}(t)+\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t),\ j\geq i+1 \\ p_{ii}^{'}(t)=-\lambda_i p_{ii}(t) \end{cases}$$

上述微分方程的解由初始条件：

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

得：$\begin{cases} p_{ij}^{'}(t)=e^{-\lambda_j t}\int_0^t e^{-\lambda_j t}\lambda_{j-1}p_{i,j-1}(s)ds,\ j\geq i+1 \\ p_{ii}^{'}(t)=e^{-\lambda_i t} \end{cases}$ （过程略）

-end-

5.2 一质点在 1，2，3 点上作随机游动，若在时刻 t 质点位于这三个点之一，则在 $[t,t+h)$ 内它以概率 $\frac{1}{2}h+o(h)$ 分别转移到其它两点之一，试求质点随机游动的柯尔莫哥洛夫方程，转移概率 $p_{ij}(t)$ 及平稳分布。

解：由定理 5.3，有：

$$q_{ii}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-p_{ii}(\Delta t)}{\Delta t}=-\frac{d}{dh}p_{ii}(h)\bigg|_{h=0}=-1,\ \ i=1,2,3$$

$$q_{ij}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}=\frac{d}{dh}p_{ij}(h)\bigg|_{h=0}=\frac{1}{2}(j\neq i)$$

则 Q 矩阵为：

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$$

则由 5.11 式，柯尔莫哥洛夫向前方程为：

$$P^{'}(t)=P(t)Q$$

即：$\begin{bmatrix} p_{11}^{'}(t) & p_{12}^{'}(t) & p_{13}^{'}(t) \\ p_{21}^{'}(t) & p_{22}^{'}(t) & p_{23}^{'}(t) \\ p_{31}^{'}(t) & p_{32}^{'}(t) & p_{33}^{'}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) \end{bmatrix}\bullet\begin{bmatrix} -1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}$

而：$\sum_{j=1}^{3} p_{ij}(t)=1(i=1,2,3)$

所以：

$$p_{ij}^{'}(t)=-p_{ij}(t)+\frac{1}{2}\left[p_{i,j-1}(t)+p_{i,j+1}(t)\right]$$
$$=-p_{ij}(t)+\frac{1}{2}\left[1-p_{ij}(t)\right]=-\frac{3}{2}p_{ij}(t)+\frac{1}{2}\left(i,j\in I，其中I=\{1,2,3\}\right)$$

则上述一阶线性微分方程的解为：$p_{ij}(t)=ce^{-\frac{3}{2}t}+\frac{1}{3}$

由初始条件：

$$p_{ij}(0)=\begin{cases}1 & i=j \\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

则：$c=\begin{cases}2/3 & i=j \\ -1/3 & i\neq j\end{cases}$

则：$p_{ij}(t)=\begin{cases}\frac{1}{3}+\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t} & i=j \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3}e^{-\frac{3}{2}t} & i\neq j\end{cases}$

所以，其平稳分布为：$\pi_j(t)=\lim\limits_{t\to\infty}p_{ij}(t)=\frac{1}{3}，j=1,2,3$。

-end-

5.3 设某车间有 M 台车床，由于各种原因车床时而工作，时而停止，假设时刻 t，一台正在工作的车床，在时刻 $t+h$ 停止工作的概率为 $\mu h+o(h)$，而时刻 t 不工作的车床，在时刻 $t+h$ 开始工作的概率为 $\lambda h+o(h)$，且各车床工作情况是相互独立的，若 $N(t)$ 表示时刻 t 正在工作的

车床数，求：

（1）齐次马尔可夫过程$\{N(t),\ t\ge 0\}$的平稳分布；

（2）若$M=10,\ \lambda=60,\ \mu=30$，系统处于平稳状态时有一半以上车床工作的概率。

解：（1）由题意知$N(t)$是连续时间的马尔可夫链，其状态空间为$I=\{0,1,2,\cdots M\}$。

设时刻t有i台车床工作，则在$(t,t+h]$内又有一台车床开始工作，在不计高阶无穷小时，它应等于原来停止工作的 M-i 台车床中，在$(t,t+h]$内恰有一台开始工作。

则：$p_{i,i+1}(h)=(M-i)\lambda h+o(h),\ i=0,1,\cdots M-1$

类似地，有：$p_{i,i-1}(h)=i\mu h+o(h),\ i=1,2,\cdots M$

$$p_{ij}(h)=o(h),|i-j|\ge 2$$

则$\{N(t),\ t\ge 0\}$为生灭过程，其中：

$$\lambda_i=(M-i)\lambda h,\ i=0,1,\cdots M-1$$

$$\mu_i=i\mu h,\ i=1,2,\cdots M$$

由 5.14 式知它的平稳分布为 ：

$$\pi_0=\left(1+\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-M}=\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{M}$$

$$\pi_j=C_M^j\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j\pi_0=C_M^j\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^j\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{M-j},\ j=1,2,\cdots M$$

（2）若$M=10,\ \lambda=60,\ \mu=30$，则：

$$P\{N(t)>5\}=\sum_{j=6}^{10}\pi_j=\sum_{j=6}^{10}C_{10}^j\left(\frac{60}{90}\right)^j\left(\frac{30}{90}\right)^{10-j}=0.7809$$

-end-

5.4 排队问题。设有一服务台，$[0,t)$内到达服务台的顾客数是服从泊松分布的随机变量，即顾客流是泊松过程，单位时间达到服务台的平均人数为λ，服务台只有一个服务员，对顾客的服务时间是按指数分布的随机变量，平均服务时间为$1/\mu$。如果服务台空闲时到达的顾客立即接受服务；如果顾客达到时服务员正在为另一顾客服务，则他必须排队等候；如果顾客

到达时发现已经有二人在等候，则他就离开不再回来。设$X(t)$代表在t时刻系统内的顾客人数（包括正在被服务的顾客和排队等候的顾客），该人数就是系统所处的状态，于是这个系统的状态空间为$I=\{0,1,2,3\}$；又设在$t=0$时系统处于状态 0，即服务员空闲，求过程的 Q 矩阵及t时刻系统处于状态j的绝对概率$p_j(t)$所满足的微分方程。

解：由题意知$\{X(t),\ t\geq 0\}$是时间连续的马尔可夫链，其状态空间为$I=\{0,1,2,3\}$。

$$Q=\begin{bmatrix} q_{00} & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ q_{10} & q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{20} & q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

习题 6

6.1 设有随机过程$X(t)=\cos(\omega t+\Theta)$，其中$\omega>0$为常数，$\Theta$是在区间$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量，问$X(t)$是否为平稳过程。

解：根据平稳过程的定义，只须考查$X(t)$是否为二阶矩过程，其均值是否为常数，相关函数是否只与时间的间隔有关，下面一一考查：

而：$E\left[X(t)\right]=E\left[\cos(\omega t+\Theta)\right]=\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\times\frac{1}{2\pi}d\theta=0$

$$\begin{aligned} R_X(t+\tau,t)&=E\left[X(t+\tau)\overline{X(t)}\right] \\ &=\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\omega\tau+\theta)\cos(\omega t+\theta)\bullet\frac{1}{2\pi}d\theta \\ &=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos(2\omega t+\omega\tau+2\theta)+\cos\omega\tau\right]d\theta \\ &=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos\omega\tau d\theta=\frac{1}{4\pi}\bullet\cos\omega\tau\bullet 2\pi=\frac{1}{2}\cos\omega\tau \text{ 与 } t \text{ 无关} \end{aligned}$$

$E\left|X(t)\right|^2=R_X(0)=\frac{1}{2}<\infty$，即$X(t)$为二阶矩过程。

综上所述，则 $X(t)$ 是平稳过程。

-end-

6.2 设有随机过程 $X(t)=A\cos(\pi t)$，其中 A 是均值为零，方差为 σ^2 的正态随机变量，求：

（1）$X(1)$ 和 $X\left(\frac{1}{4}\right)$ 的概率密度；

（2）$X(t)$ 是否为平稳过程。

解：（1）因为：正态随机变量的线性函数仍然是正态随机变量，所以：

由 $X(t)=A\cos(\pi t)$，其中 $A\sim N(0,\sigma^2)$

有：$X(1)=-A,\ X\left(\frac{1}{4}\right)=A\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}A$

则：$E[X(1)]=E(-A)=E(A)=0,\ D[X(1)]=D(-A)=D(A)=\sigma^2$

$$E\left[X\left(\frac{1}{4}\right)\right]=E\left(\frac{\sqrt{2}}{2}A\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}E(A)=0,\ D\left[X\left(\frac{1}{4}\right)\right]=D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}A\right)=\frac{1}{2}D(A)=\frac{1}{2}\sigma^2$$

所以：$X(1)$ 的概率密度为：$f(1;x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ x\in R$

$X\left(\frac{1}{4}\right)$ 的概率密度为：$f\left(\frac{1}{4};x\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{\sigma^2}},\ x\in R$

（2）由 $X(t)=A\cos(\pi t)$，则：$E[X(t)]=\cos(\pi t)E(A)=0$

$$R_X(t+\tau,t)=E\left[X(t+\tau)\overline{X(t)}\right]=E\left[A\cos(\pi t+\pi\tau)A\cos(\pi t)\right]=\sigma^2\cos(\pi t+\pi\tau)A\cos(\pi t)$$

即相关函数 $R_X(t+\tau,t)$ 与 t 有关，所以 $X(t)$ 不是平稳过程。

-end-

6.3 设有随机过程 $X(t)=A\cos(\omega t+\Theta)$，其中 A 是服从瑞利分布的随机变量，其概率密度为：

$$f(a)=\begin{cases}\frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} & a>0\\ 0 & a\le 0\end{cases}$$

均值为零，方差为 σ^2 的正态随机变量，Θ是在 $(0,2\pi)$ 上服从均匀分布且与求 A 相互独立的随

机变量，ω为常数，问$X(t)$是否为平稳过程。

解：由 A 服从瑞利分布，则：

$$E(A)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x \bullet \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=-xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\Bigg|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

由于被积函数恰恰是标准正态分布$N(0,1)$的概率密度，所以：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=1$

则：$E(A)=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sigma=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$

另，$E(A^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} x^2 \bullet \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$，令：$y=\frac{x^2}{2\sigma^2}$

则：$E(A^2)=2\sigma^2\int_{0}^{+\infty} ye^{-y}dy=2\sigma^2$

所以：$D(A)=E(A^2)-E^2(A)=2\sigma^2-\frac{\pi}{2}\sigma^2=\frac{4-\pi}{2}\sigma^2$

则：$A\sim N\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma,\frac{4-\pi}{2}\sigma^2\right)$

下面一一验证平稳过程的条件：

1° 由 A 与Θ相互独立，且$\cos(\omega t+\Theta)$是关于Θ的连续函数，则 A 与$\cos(\omega t+\Theta)$也相互独立。

则：$E[X(t)]=E[A\cos(\omega t+\Theta)]=E(A)E[\cos(\omega t+\Theta)]=E(A)\int_{0}^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\bullet\frac{1}{2\pi}=0$

2° $R_X(t+\tau,t)=E\left[X(t+\tau)\overline{X(t)}\right]=E[A\cos(\omega t+\omega\tau+\Theta)A\cos(\omega t+\Theta)]$

$$=\frac{1}{2}\cos(\omega\tau)E[A^2](\text{同}6.1)=\sigma^2\cos(\omega\tau),\ \text{与}t\text{无关}$$

3° $E|X(t)|^2=R_X(0)=\sigma^2<\infty$

综上所述知：$X(t)$为平稳过程。

-end-

6.4 设有随机过程 $X(t)=f(t+\Theta)$，其中 $f(t)$ 是周期为 T 的实值连续函数，Θ是在$(0,T)$上服从均匀分布且的随机变量，证明 $X(t)$是平稳过程并求相关函数 $R_X(\tau)$。

解：1° $E\left[X(t)\right]=E\left[f(t+\Theta)\right]=\int_0^T f(t+\theta)\bullet\frac{1}{T}d\theta=\int_t^{t+T} f(y)\bullet\frac{1}{T}dy$

由于 $f(t)$ 是周期为 T 的实值连续函数，则：$E\left[X(t)\right]=\frac{1}{T}\int_0^T f(y)dy$ 为常数。

2° $R_X(t+\tau,t)=E\left[X(t+\tau)\overline{X(t)}\right]=\int_0^T f(t+\tau+\theta)f(t+\theta)\bullet\frac{1}{T}d\theta$

$$=\frac{1}{T}\int_t^{t+T} f(y+\tau)f(y)dy=\frac{1}{T}\int_0^T f(y+\tau)f(y)dy,\ \text{与}t\text{无关}$$

3° $E\left|X(t)\right|^2=R_X(0)=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(y)dy<\infty$（$f(t)$ 是周期为 T 的实值连续函数）

综上所述知：$X(t)$是平稳过程。

且相关函数为：$R_X(t+\tau,t)=\frac{1}{T}\int_0^T f(y+\tau)f(y)dy$

-end-

6.5 设 $X(t)$和$Y(t)$为平稳过程，且相互独立，求 $Z(t)=X(t)Y(t)$的相关函数，$Z(t)$是否为平稳过程。

解：1° $R_Z(t+\tau,t)=E\left[Z(t+\tau)\overline{Z(t)}\right]=E\left[X(t+\tau)Y(t+\tau)\overline{X(t)Y(t)}\right]$

因为 $X(t)$和$Y(t)$ 相互独立，则：

$$R_Z(t+\tau,t)=E\left[X(t+\tau)\overline{X(t)}\right]\bullet E\left[Y(t+\tau)\overline{Y(t)}\right]=R_X(\tau)\bullet R_X(\tau),\ \text{与}t\text{ 无关。}$$

2° 由 $X(t)$和$Y(t)$为平稳过程，且相互独立，则：

$$E\left[Z(t)\right]=E\left[X(t)Y(t)\right]=E\left[X(t)\right]\bullet E\left[Y(t)\right]=m_X\bullet m_Y$$

3° $E\left|Z(t)\right|^2=R_Z(0)=R_Z(0)=R_X(0)\bullet R_Y(0)<+\infty$

综上所述知：$X(t)$是平稳过程。

-end-

6.6 设 $X(t)$ 为实平稳过程，若存在 $T>0$，$R_X(T)=R_X(0)$，试证：

（1）它以概率 1 对所有 t，有 $X(t+T)=X(t)$ 成立；

（2）对所有 τ，有 $R_X(\tau+T)=R_X(\tau)$，即随机过程的相关函数是具有周期为 T 的周期函数。

证明：（1）由 $X(t)$ 为实平稳过程，则：$E\left[X(t)\right]=m_X=Const.\quad R_X(t+\tau,t)=R_X(\tau)$

对给定 $T>0$ 和任意 t，由题意知：

$$\begin{aligned}D\left[X(t+T)-X(t)\right]&=E\left[X(t+T)-X(t)\right]^2-E^2\left[X(t+T)-X(t)\right]\\&=E\left[X^2(t+T)\right]+E\left[X^2(t)\right]-2E\left[X(t+T)X(t)\right]-0\\&=R_X(0)+R_X(0)-2R_X(T)=0\left(T>0,\ R_X(T)=R_X(0)\right)\end{aligned}$$

则由契比雪夫不等式，对 $\forall\varepsilon>0$，有：

$$P\left\{\left|X(t+T)-X(t)\right|\ge\varepsilon\right\}\le\frac{D\left[X(t+T)-X(t)\right]}{\varepsilon^2}=0$$

即对 $\forall t$，$X(t+\tau)$ 以概率 1 等于 $X(t)$。

（2）由 $X(t)$ 为实平稳过程，对给定 T 和 $\forall t$，由（1）式，得：

$$E\left[X(t+T+\tau)-X(t+\tau)\right]^2=D\left[X(t+T+\tau)-X(t+\tau)\right]+E^2\left[X(t+T+\tau)-X(t+\tau)\right]=0+0^2=0$$

因此，$\left|R_X(t+T)-R_X(t)\right|=\left|E\left[X(t+T+\tau)X(\tau)\right]-E\left[X(t+\tau)X(\tau)\right]\right|$

$$\begin{aligned}&=\left|E\left[X(t+T+\tau)-X(t+\tau)\right]X(t)\right|\\&\le\left\{E^2\left[X(t+T+\tau)-X(t+\tau)\right]E^2\left[X(t)\right]\right\}^{1/2}=0\end{aligned}$$

所以：$R_X(t+T)=R_X(t)$，即随机过程的相关函数是具有周期为 T 的周期函数。

-end-

6.7 设有随机过程 $X(t)$ 是二阶矩过程，即 $E\left|X(t)\right|^2<+\infty$，均值 $E\left[X(t)\right]=\alpha+\beta t$，协方差 $B_X(t_1,t_2)=e^{-\lambda|t_1-t_2|}$，令 $Y(t)=X(t+1)-X(t)$，则 $Y(t)$ 为平稳过程，求它的均值和相关函数。

解：1° 由 $Y(t)=X(t+1)-X(t)$

则：$E\left[Y(t)\right]=E\left[X(t+1)-X(t)\right]=E\left[X(t+1)\right]-E\left[X(t)\right]=\alpha+\beta(t+1)-(\alpha+\beta t)=\beta$

2° $R_Y(t+\tau,t)=E\left[Y(t+\tau)\overline{Y(t)}\right]=E\left[X(t+\tau+1)-X(t+\tau)\right]\left[\overline{X(t+1)-X(t)}\right]$

$$=R_X(t+\tau+1,t+1)-R_X(t+\tau+1,t)-R_X(t+\tau,t+1)+R_X(t+\tau,t)$$

由：$B_X(t_1,t_2)=R_X(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_X(t_2)$

则：$R_X(t_1,t_2)=B_X(t_1,t_2)+m_X(t_1)m_X(t_2)=e^{-\lambda|t_1-t_2|}+(\alpha+\beta t_1)(\alpha+\beta t_1)$

所以：$R_Y(t+\tau,t)=R_X(t+\tau+1,t+1)-R_X(t+\tau+1,t)-R_X(t+\tau,t+1)+R_X(t+\tau,t)$

$$\begin{aligned}&=e^{-\lambda|\tau|}+\left[\alpha+\beta(t+\tau+1)\right]\left[\alpha+\beta(t+1)\right]-e^{-\lambda|\tau-1|}-\left[\alpha+\beta(t+\tau)\right]\left[\alpha+\beta(t+1)\right]\\&\quad-e^{-\lambda|\tau+1|}+\left[\alpha+\beta(t+\tau+1)\right]\left[\alpha+\beta t\right]+e^{-\lambda|\tau|}+\left[\alpha+\beta(t+\tau)\right]\left[\alpha+\beta t\right]\\&=2e^{-\lambda|\tau|}-e^{-\lambda|\tau+1|}-e^{-\lambda|\tau-1|}+\beta^2=R_Y(\tau)\text{，与}t\text{ 无关}\end{aligned}$$

3° $E\left|Y(t)\right|^2=2-2e^{-\lambda}+\beta^2<+\infty$

则：$Y(t)$为平稳过程。它的均值和相关函数如上已求出。

-end-

6.8 设$X(t)$是雷达的发射信号，遇到目标后返回接收机的微弱信号为$aX(t-\tau_1)$，$a\ll 1$，τ_1是信号返回时间。由于接收到的信号伴有噪声，记噪声为$N(t)$，故接收到的全信号为$Y(t)=aX(t-\tau_1)+N(t)$

（1）若$X(t)$和$Y(t)$是单独且联合平稳过程，求互相关函数$R_{XY}(\tau)$；

（2）在（1）条件下，假定$N(t)$的均值为零，且与$X(t)$是相互独立的，求$R_{XY}(\tau)$。

解：（1）由$Y(t)=aX(t-\tau_1)+N(t)$，其中：$a\ll 1$

则：$R_{XY}(\tau)=E\left[X(t+\tau)\overline{Y(t)}\right]=E\left[X(t+\tau)\right]\left[\overline{aX(t-\tau_1)+N(t)}\right]=aR_X(\tau+\tau_1)+R_{XN}(\tau)$

（2）若$N(t)$的均值为零，且与$X(t)$是相互独立的，则：

$$R_{XN}(\tau)=E\left[X(t+\tau)\overline{N(t)}\right]=E\left[X(t+\tau)\right]\bullet E\left[\overline{N(t)}\right]=0$$

则：$R_{XY}(\tau)=aR_X(\tau+\tau_1)$

-end-

6.9 设$\{X_n,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$是具有零均值，方差为 1 的独立同分布的随机序列，令

$Y_n=\sum_{l=0}^{k}a_l X_{n-l}\{n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$，其中 a_l 为常数，试证 $\{Y_n,\ n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 是平稳过程。

证明：1° 由 $Y_n=\sum_{l=0}^{k}a_l X_{n-l}\{n=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$

则：$E(Y_n)=E\left[\sum_{l=0}^{k}a_l X_{n-l}\right]=\sum_{l=0}^{k}a_l E(X_{n-l})=0$

2° $R_Y(n+m,n)=E\left[Y_{n+m}\overline{Y_n}\right]=E\left[\sum_{l=0}^{k}a_l X_{n+m-l}\overline{\sum_{l=0}^{k}a_l X_{n-l}}\right]$

由条件 $E(X_n)=0,\ D(X_n)=1$, 且 X_n 相互独立，所以：

$$E\left(X_i\overline{X_j}\right)=\begin{cases}0 & i\neq j\\ 1 & i=j\end{cases}，所以：$$

$$R_Y(n+m,n)=E\left[\sum_{l=0}^{k}a_l X_{n+m-l}\overline{\sum_{l=0}^{k}a_l X_{n-l}}\right]=\begin{cases}a_m a_0+a_{m+1}a_1+\cdots a_k a_{k-m} & 0\le|m|\le k\\ 0 & |m|>k\end{cases} 与 n 无关$$

3° $E|Y_n|^2=R_Y(n,n)=\sum_{i=0}^{k}a_i^2<+\infty$

综上所述知：$\{Y_n\}$ 为平稳过程。

-end-

6.10 设 $\{N(t),\ t\ge0\}$ 为泊松过程，令 $X(t)=N(t+L)-N(t)$，其中 L 为正常数，若 $N(t)$ 表示某事件在区间 $(0,t]$ 内发生的次数，则 $X(t)$ 表示该事件在起点为 t，长为 L 的区间内发生的次数，求随机过程 $X(t)$ 的均值和协方差函数。

解：1° 由 $\{N(t),\ t\ge0\}$ 为泊松过程，则：

$$m_N(t)=\lambda t,\ R_N(s,t)=\begin{cases}\lambda s(\lambda t+1),\ s\le t\\ \lambda t(\lambda s+1),\ s>t\end{cases}$$

所以：$E[X(t)]=E[N(t+L)-N(t)]=E[N(t+L)]-E[N(t)]=\lambda(t+L)-\lambda t=\lambda L$

2° $R_X(t+\tau,t)=E\left[X(t+\tau)\overline{X(t)}\right]=E\left[N(t+L+\tau)-N(t+\tau)\right]\left[\overline{N(t+L)-N(t)}\right]$

$$=R_N(t+L+\tau,t+L)-R_N(t+L+\tau,t)-R_N(t+\tau,t+L)+R_N(t+\tau,t)$$

当$\tau \ge L$时，

$$R_X(t+\tau,t)=\lambda(t+L)\left[\lambda(t+L+\tau)+1\right]-\lambda t\left[\lambda(t+L+\tau)+1\right]-\lambda(t+L)\left[\lambda(t+\tau)+1\right]+\lambda t\left[\lambda(t+\tau)+1\right]$$

$$=\lambda^2L^2$$

同理可得其它情况的结果：

$$R_X(t+\tau,t)=\begin{cases}\lambda^2L^2-\lambda\tau+\lambda L & 0\le\tau<L\\ \lambda^2L^2+\lambda\tau+\lambda L & -L\le\tau<0\\ \lambda^2L^2 & \tau<-L\end{cases}$$

所以：$B_X(t+\tau,t)=R_X(t+\tau,t)-m_X(t+\tau)m_X(t)$

$$=\begin{cases}\lambda\left(L-|\tau|\right) & |\tau|<L\\ 0 & |\tau|\ge L\end{cases}$$

-end-

6.11 设$\{X(t),\ t\ge 0\}$为维纳过程，令$Y(t)=\int_0^t X(s)ds$，试判别$\{Y(t),\ t\ge 0\}$是否为平稳过程。

解：