概率论习题-随机变量

例1.30 设ξ_1，ξ_2的联合概率密度为：

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left[1+xy\left(x^2-y^2\right)\right] & |x|\le 1,|y|\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$$

以$\varphi_i(t)$表ξ_i的特征函数，$i=1,2$，且$\eta=\xi_1+\xi_2$的特征函数为$\varphi(t)$，证明：$\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$，但$\xi_1$，$\xi_2$不独立。

证明：ξ_1，ξ_2的边沿分布密度为：

$$f_{\xi_1}(x)=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left[1+xy\left(x^2-y^2\right)\right]dy=\frac{1}{2} & |x|\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$f_{\xi_2}(y)=\begin{cases}\int_{-1}^{1}\frac{1}{4}\left[1+xy\left(x^2-y^2\right)\right]dy=\frac{1}{2} & |y|\le 1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

即ξ_1，ξ_2均在$[-1,1]$均匀分布，但：

$f_{\xi_1}(x)f_{\xi_2}(y)=\dfrac{1}{4}\neq f(x,y)$，则$\xi_1$，$\xi_2$不独立

下面说明$\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$

显然$\eta=\xi_1+\xi_2$的分布密度函数为：

$$f_\eta(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx \qquad (*)$$

由于$f(x,y)$在$|x|\le 1,|y|\le 1$外为零，则对固定的 z,$(*)$中的积分只有当$|x|\le 1$和$|z-x|\le 1$同时满足时非零，即：

$$\text{由}f_\eta(z)=\begin{cases}\int_{-1}^{z+1}\frac{1}{4}\left(1+3z^2x^2-2zx^3-z^3x\right)dx=\frac{1}{4}(2+z) & -2\le z\le 0\\ \int_{z-1}^{1}\frac{1}{4}\left(1+3z^2x^2-2zx^3-z^3x\right)dx=\frac{1}{4}(2-z) & 0<z\le 2\\ 0 & |z|>2\end{cases}$$

$f_\eta(z)$属于三角分布的密度函 数。

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itz}f_\eta(z)dz=\frac{1}{4}\left[\int_{-2}^{0}(2+z)e^{itz}dz+\int_{0}^{2}(2-z)e^{itz}dz\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{2-e^{2it}-e^{-2it}}{t^2}\right]=\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2$$

同理可得：$\varphi_1(t)=\varphi_2(t)=\dfrac{\sin t}{t}$

则：$\varphi(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$

例1.31 五颗骰子任意投掷，问总数为15的概率？

解：投掷每颗骰子可出现1, 2, 3, 4, 5, 6六种可能，它们出现的概率均为$\frac{1}{6}$。假设出现某数$\mathbf{X}_i$是随机变量，其相应的母函数为$\frac{1}{6}\left(s^1+s^2+\ldots+s^6\right)=\frac{s\left(1-s^6\right)}{6(1-s)}$

一次投掷五颗骰子时，每颗骰子出现的数是相互独立的，$\left\{\mathbf{X}_i\right\}$，$i=1,2,3,4,5$，五颗骰子出现的总和为：

$$\mathbf{Y}=\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2+\mathbf{X}_3+\mathbf{X}_4+\mathbf{X}_5$$

则$\mathbf{Y}$的母函数为：$H(s)=\left[\frac{s\left(1-s^6\right)}{6(1-s)}\right]^5$

展开$H(s)$，取s^{15}的系数得：

$$P\{\mathbf{Y}=15\}=\frac{1}{6}\left[C_{14}^{10}\times 1+C_5^1\times C_8^4\right]=0.084$$

（具体计算过程略）