第六章 平稳过程

- **教学目的** 充分理解平稳过程的基本概念，会判断一个过程是否为平稳过程；理解随机过程的连续、可导和可积的定义；理解平稳过程各态历经性的基本概念，掌握利用定义判断一个过程是否具有各态历经性的基本方法。
- **重点** 平稳过程的定义；范数和均方收敛的概念；各态历经性的定义。

第一节 平稳过程的概念

定义6.1.1 设$\{\xi(t),t\in T\}$为随机过程，若对任意的正整数n及实数$t_i,x_i(i=1,\cdots n)$及τ，有：

$$P\{\xi(t_1)\le x_1,\cdots\xi(t_n)\le x_n\}=P\{\xi(t_1+\tau)\le x_1,\cdots,\xi(t_n+\tau)\le x_n\}$$

即：$(\xi(t_1),\cdots\xi(t_n))$和$(\xi(t_1+\tau),\cdots,\xi(t_n+\tau))$具有相同的分布，称$\{\xi(t)\}$为强平稳过程。

强平稳过程的一切有限维分布函数不随时间的变化而变化，这样的要求过于苛刻。因此转而研究强平稳过程的数字特征。

简单回顾一下二阶矩过程：

若对任意$t \in T, E[\xi(t)]^2$存在，则称$\xi(t)$为二阶矩过程。

第二章已经证明：$E\left[\xi^2(t)\right] < +\infty \Leftrightarrow \mu_\xi(t) < +\infty, D\left[\xi(t)\right] < +\infty$，因此，二阶矩过程也可以被定义为：$\mu_\xi(t), D\left[\xi(t)\right]$存在并且有限。

二阶矩过程的自协方差函数：

$$B_\xi(s,t) = E[(\xi(s) - m_\xi(s))\overline{(\xi(t) - m_\xi(t))}], s,t \in T$$

则：
$$\left|B_\xi(s,t)\right|^2 = \left|E[(\xi(s) - m_\xi(s))\overline{(\xi(t) - m_\xi(t))}]\right|^2$$
$$\leq E\left|\xi(s) - m_\xi(s)\right|^2 \cdot E\left|\xi(t) - m_\xi(t)\right|^2$$
$$= D\left[\xi(s)\right] \cdot D\left[\xi(t)\right] < \infty$$

即：二阶矩过程的自协方差函数总是存在的，因此其自相关函数也总是存在的。

二阶矩过程的性质：

性质1二阶矩过程$\{\xi(t),t\in T\}$的自相关函数有:$\overline{R_\xi(s,t)}=R_\xi(t,s)$

证明:$\overline{R_\xi(s,t)}=\overline{E[\xi(s)\overline{\xi(t)}]}=E[\xi(t)\overline{\xi(s)}]=R_\xi(t,s)$

特别地：若二阶矩过程$\{\xi(t),t\in T\}$是实随机过程，则：

$R_\xi(s,t)=R_\xi(t,s)$

二阶矩过程的性质：

性质2二阶矩过程$\{\xi(t),t\in T\}$的自相关函数$R_{\xi}(s,t)$具有非负定性，即对任意有限多个任意$t_i\in T$及复数$\lambda_i,i=1,2,\cdots n,$ $n\geq 1$，有：

$$\sum_{i,j=1}^{n}R_{\xi}(t_i,t_j)\lambda_i\overline{\lambda_j}\geq 0$$

证明：$\sum_{i,j=1}^{n}R_{\xi}(t_i,t_j)\lambda_i\overline{\lambda_j}=\sum_{i,j=1}^{n}E\left[\xi(t_i)\overline{\xi(t_j)}\right]\lambda_i\overline{\lambda_j}$

$$=E\left\{\sum_{i,j=1}^{n}\left[\xi(t_i)\overline{\xi(t_j)}\right]\lambda_i\overline{\lambda_j}\right\}$$

$$=E\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\xi(t_i)\lambda_i\right]\overline{\sum_{j=1}^{n}\left[\xi(t_j)\lambda_j\right]}\right\}=E\left[\left|\sum_{i=1}^{n}\xi(t_i)\lambda_i\right|^2\right]\geq 0$$

二阶矩自相关函数的非负定性可以改写为：

对任意有限多个任意$t_i \in T$及复数$\lambda_i, i = 1, 2, \cdots n, n \geq 1$，有：

$$\sum_{i,j=1}^{n} R_\xi\left(t_i, t_j\right)\lambda_i \overline{\lambda_j} \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_\xi\left(t_1,t_1\right) & R_\xi\left(t_1,t_2\right) & \cdots & R_\xi\left(t_1,t_n\right) \\ R_\xi\left(t_2,t_1\right) & R_\xi\left(t_2,t_2\right) & \ldots & R_\xi\left(t_2,t_n\right) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_\xi\left(t_n,t_1\right) & R_\xi\left(t_n,t_2\right) & \ldots & R_\xi\left(t_n,t_n\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} \\ \overline{\lambda_2} \\ \ldots \\ \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} \geq 0$$

若$\{\xi(t),t\in T\}$为强平稳过程，且为二阶矩过程，考察其数字特征。

当$t,t+\tau\in T$，$\xi(t)$和$\xi(t+\tau)$具有相同的分布，

即$E[\xi(t)]=E[\xi(t+\tau)]$，即强平稳过程的均值函数为常数；

当$t_1,t_2,t_1+\tau,t_2+\tau\in T$，有:$(\xi(t_1),\xi(t_2))$和$(\xi(t_1+\tau),\xi(t_2+\tau))$具有相同的分布，即

$$R_\xi(t_1,t_2)=E\left[\xi(t_1)\overline{\xi(t_2)}\right]=E\left[\xi(t_1+\tau)\overline{\xi(t_2+\tau)}\right]$$

$$=R_\xi(t_1+\tau,t_2+\tau)=R_\xi(t_1-t_2,0)(令\tau=-t_2),$$

即强平稳过程的相关函数与起点无关，只与时间的间隔t_2-t_1有关。

于是，我们引入弱平稳过程的概念如下：

定义6.1.2 $\{\xi(t),t\in T\}$为二阶矩过程，且满足：

（1）对一切$t\in T$，$\mu_\xi(t)=E[\xi(t)]=$常数C

（2）对任意的$t,t+\tau\in T$，$R_\xi(t+\tau,t)=E\left[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right]=R_\xi(\tau)$

与t无关，则称$\{\xi(t),t\in T\}$为弱平稳过程（简称平稳过程）。

当T为离散集时，$\{\xi(t),t\in T\}$为平稳时间序列。

一般说来，强平稳过程未必是弱平稳过程，显然弱平稳过程更不是强平稳过程。

强平稳过程$+$二阶矩过程$\Rightarrow$弱平稳过程

下面我们提到的平稳过程均指弱平稳过程。

例6.1 设$\{X_n, n=0,\pm1,\cdots\}$是实的互不相关随机变量序列，且$EX_n=0, DX_n=\sigma^2$.试讨论随机序列的平稳性。

解：$EX_n=0$;

$\{X_n, n=0,\pm1,\cdots\}$是实的互不相关随机变量序列,

则对$\forall n\neq m$，$Cov(X_n, X_m)=0$,

即$Cov(X_n, X_m)=E[X_nX_m]-EX_nEX_m=E[X_nX_m]=0$

$$DX_n=E[X_n]^2-[EX_n]^2=E[X_n]^2=\sigma^2$$

故对任意整数τ:

$$R_X(n,n-\tau)=E[X_nX_{n-\tau}]=\begin{cases}\sigma^2 & \tau=0\\ 0 & \tau\neq 0\end{cases}$$

因此$\{X_n, n=0,\pm1,\cdots\}$是平稳过程。

例6.2 设有状态连续时间离散的随机过程$X(t)=\sin 2\pi\Theta\, t$，其中随机变量Θ在(0,1)上服从均匀分布，t=1，2，…。试考察$X(t)$的平稳性。

解：
$$EX(t)=\int_0^1 \sin 2\pi\theta t d\theta = 0$$

$$R_X(s,t)=EX(s)X(t)=\int_0^1 \sin 2\pi\theta t \sin 2\pi\theta s d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 \left[\cos 2\pi\theta(t-s)-\cos 2\pi\theta(t+s)\right]d\theta$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & t=s\\ 0 & t\neq s\end{cases}$$

故该随机过程是广义平稳的。可以验证该过程不是严平稳的。

二、平稳过程的基本性质

性质1　相关函数$R_\xi(\tau)$满足：

（1）$R_\xi(0)\ge 0$　（2）$R_\xi(-\tau)=\overline{R_\xi(\tau)}$　（3）$\left|R_\xi(\tau)\right|\le R_\xi(0)$

（4）$R_\xi(\tau)$是非负定的，即对任意的正整数n及任意的$t_1,\cdots t_n\in T$和任意的复数$\lambda_1,\cdots\lambda_n$，有：

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}R_\xi(t_j-t_k)\lambda_j\overline{\lambda_k}\ge 0$$

证明：由相关函数定义，$R_\xi(\tau)=E\left[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right]$，

$$(1)R_\xi(0)=E\left[\xi(t)\overline{\xi(t)}\right]=E\left|\xi(t)\right|^2\ge 0.$$

(2)平稳过程是二阶矩过程，由二阶矩过程相关函数的性质即得。

也可单独证明：$\overline{R_\xi(\tau)}=\overline{E\left[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right]}=E\left[\overline{\xi(t+\tau)}\xi(t)\right]$

$$=E\left[\xi(t)\overline{\xi(t+\tau)}\right]=\overline{R_\xi(-\tau)}$$

(3) $$\left|R_\xi(\tau)\right|^2 = \left|E\left[\xi(t+\tau)\overline{\xi(t)}\right]\right|^2$$

$$\le E\left[\left|\xi(t+\tau)\right|^2\right]E\left[\left|\xi(t)\right|^2\right] = R_\xi(0)R_\xi(0) = \left[R_\xi(0)\right]^2$$

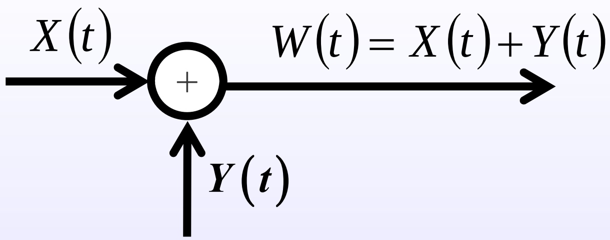
(4)平稳过程是二阶矩过程，由二阶矩过程相关函数的性质即得。

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} R_\xi(t_j - t_k)\lambda_j\overline{\lambda_k} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E\left[\xi(t_j)\overline{\xi(t_k)}\right]\lambda_j\overline{\lambda_k}$$

$$= E\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\xi(t_j)\overline{\xi(t_k)}\lambda_j\overline{\lambda_k}\right] = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n}\xi(t_j)\lambda_j\right|^2\right] \ge 0$$

第二节 联合平稳过程

下面主要讨论两个平稳过程的联合平稳问题。如下图所示，若将两个平稳过程同时输入加法器后，输出是否平稳?



$$R_W(t+\tau,t)=E\left[W(t+\tau)\overline{W(t)}\right]=E\left\{\left[X(t+\tau)+Y(t+\tau)\right]\left[\overline{X(t)+Y(t)}\right]\right\}$$

$$=R_X(\tau)+R_Y(\tau)+R_{XY}(t+\tau,t)+R_{YX}(t+\tau,t)$$

从上式可知，要使$\{W(t),t\in T\}$为平稳过程，需满足$X(t)$和$Y(t)$的互相关函数$R_{XY}(t+\tau,t)$以及$R_{YX}(t+\tau,t)$与t无关。

定义6.2.1 若$\{X(t),t\in T\}$和$\{Y(t),t\in T\}$为平稳过程，若它们的互相关函数$R_{XY}(t+\tau,t)$、$R_{YX}(t+\tau,t)$仅与τ有关，则称$X(t)$、$Y(t)$是联合平稳过程。

若$X(t)$、$Y(t)$是联合平稳过程，则其和过程$W(t)$也是平稳过程。

类似地，联合平稳过程$X(t)$和$Y(t)$的互相关函数具有下列的性质：

(1) $\left|R_{XY}(\tau)\right|^2\le R_X(0)R_Y(0),\left|R_{YX}(\tau)\right|^2\le R_X(0)R_Y(0)$

(2) $R_{XY}(-\tau)=\overline{R_{YX}(\tau)}$

若$X(t)$和$Y(t)$是实随机过程，则有：

$$R_{XY}(-\tau)=R_{YX}(\tau)$$

例6.2.1 $X(t)=A\sin(\omega t+\Theta)$，$Y(t)=B\sin(\omega t+\Theta-\varphi)$为两个平稳过程，$A$、$B$、$\omega$、$\phi$为常数，$\Theta$在$(0,2\pi)$上服从均匀分布。求$R_{XY}(\tau)$，$R_{YX}(\tau)$。

解：$$R_{XY}(\tau)=E\left[X(t)Y(t-\tau)\right]$$
$$=E\left[A\sin(\omega t+\Theta)B\sin(\omega t-\omega\tau+\Theta-\varphi)\right]$$
$$=\int_0^{2\pi}AB\sin(\omega t+\Theta)\sin(\omega t-\omega\tau+\Theta-\varphi)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta$$
$$=\frac{1}{2}AB\cos(\omega\tau+\varphi)$$

注意：讲稿和教科书有时$R_{XY}(\tau)=E\left[X(t)Y(t-\tau)\right]$，有时$R_{XY}(\tau)=E\left[X(t+\tau)Y(t)\right]$，对平稳过程均可。

则：$$R_{YX}(\tau)=R_{XY}(-\tau)=\frac{1}{2}AB\cos(\omega\tau-\varphi)$$

第三节 随机分析

在高等数学的微积分中，连续、导数和积分等概念都建立在极限概念的基础上。对随机过程，也需建立随机过程的连续性、导数、积分的概念，这些内容是建立在二阶矩随机序列极限的基础之上的。

一、收敛性概念

定义6.3.1 称二阶矩随机序列$\{X_n(e)\}$以概率1收敛于二阶矩随机变量$\{X(e)\}$，若使$\lim\limits_{n\to\infty} X_n(e)=X(e)$成立的$e$的集合的概率为1，即：

$$P\left\{e:\ \lim_{n\to\infty} X_n(e)=X(e)\right\}=1 \text{或} P\left\{e:\ \lim_{n\to\infty} X_n(e)\neq X(e)\right\}=0$$

或称$\{X_n(e)\}$几乎处处收敛于$X(e)$，记作$X_n \xrightarrow{a.e.} X$。

定义6.3.2 若对$\forall \varepsilon > 0$，有$\lim\limits_{n\to\infty} P\{|X_n(e) - X(e)| \geq \varepsilon\} = 0$，则称随机变量序列$\{X_n(e)\}$依概率收敛于随机变量$X(e)$. 记作$X_n \xrightarrow{P} X$。

定义6.3.3 若$\lim\limits_{n\to\infty} E\left[|X_n - X|^2\right] = 0$，则称$\{X_n(e)\}$均方收敛于$X(e)$，记作$X_n \xrightarrow{L_2} X$或$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\, X_n = X$。

定义6.3.4 若$\{X_n(e)\}$相应的分布函数列$\{F_n(x)\}$，在X的分布函数$F(x)$的每一个连续点处有$\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$，则称随机变量序列$\{X_n(e)\}$依分布收敛于$X(e)$，记作$X_n \xrightarrow{d} X$.

上述四种意义下的收敛有如下关系(结论性介绍，证明略)：

$$\left.\begin{array}{l} X_n \xrightarrow{L_2} X \\ X_n \xrightarrow{a.e.} X \end{array}\right\} \Rightarrow X_n \xrightarrow{P} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$

二、均方收敛

(一)具有有限二阶矩的随机变量空间$\mathscr{H}$

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间，ξ是定义在其上的实或复的随机变量，令：

$$\|\xi\| \triangleq \sqrt{E\left(|\xi|\right)^2},\quad \mathscr{H}=\left\{\xi:\|\xi\|<+\infty\right\}$$

若ξ_1，$\xi_2\in\mathscr{H}$，且$\xi_1=\xi_2\,(a.e.)$，则可认为ξ_1，ξ_2是同一元素。

定理6.3.1 若$\xi\in\mathscr{H}$，称$\|\xi\|$为ξ的范数，$\mathscr{H}$是一线性赋范空间。

线性赋范空间=线性空间+范数

线性空间

- 加法的封闭性**(1)**，且满足以下运算规律：

1. 交换律——（2）
2. 结合律——（3）
3. 零元素的存在性——（4）
4. 负元素的存在性——（5）

- 数乘的封闭性**(6)**，且满足以下运算规律：

1. 单位元的存在性——（7）
2. 数乘的结合律——（8）
3. 数乘的分配律——（9）

柯西–许瓦兹不等式：

$$\left|E\left[\xi(t)\eta(t)\right]\right| \le \left\{E\left[\left|\xi(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2} \cdot \left\{E\left[\left|\eta(t)\right|^2\right]\right\}^{1/2}$$

或 $\left|E\left[\xi(t)\eta(t)\right]\right|^2 \le E\left[\left|\xi(t)\right|^2\right] \cdot E\left[\left|\eta(t)\right|^2\right]$

范数（满足4条）

（1）$\|\xi\| \geq 0, \quad \xi \in \mathcal{H}$　　（2）$\|\alpha\xi\| = |\alpha|\,\|\xi\|, \quad \xi \in \mathcal{H}, \quad \alpha \in C$

（3）$\|\xi + \eta\| \leq \|\xi\| + \|\eta\|$（三角不等式），$\xi, \eta \in \mathcal{H}$

（4）$\|\xi\| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$

证明：$0 = \|\xi\| = E(|\xi|^2) \Leftrightarrow |\xi| = 0 \Leftrightarrow \xi = 0$

$$\|\xi + \eta\|^2 = E(|\xi + \eta|^2) = E\left[(\xi + \eta)\overline{(\xi + \eta)}\right]$$

$$= E\left(|\xi|^2\right) + E\left(|\eta|^2\right) + E\left(\xi\bar{\eta}\right) + E\left(\bar{\xi}\eta\right)$$

$$\leq E\left(|\xi|^2\right) + E\left(|\eta|^2\right) + 2\left[E\left(|\xi|^2\right)E\left(|\eta|^2\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left\{\left[E\left(|\xi|^2\right)\right]^{1/2}\right\}^2 + \left\{\left[E\left(|\eta|^2\right)\right]^{1/2}\right\}^2 + 2\left[E\left(|\xi|^2\right)E\left(|\eta|^2\right)\right]^{1/2}$$

$$= \left\{\left[E\left(|\xi|^2\right)\right]^{1/2} + \left[E\left(|\eta|^2\right)\right]^{1/2}\right\}^2 = \left(\|\xi\| + \|\eta\|\right)^2$$

即：$\|\xi+\eta\|^2 \le \left(\|\xi\|+\|\eta\|\right)^2$，三角不等式得证。

三角不等式可变形为：$\|\xi-\eta\| \ge \left\|\|\xi\|-\|\eta\|\right\|$

(二)均方收敛的充要条件

根据均方收敛和范数的定义，我们有：

定义6.3.5 设$\xi_n,\xi\in\mathcal{H}$，若$\|\xi_n-\xi\|\to 0\,(n\to\infty)$，则称$\xi$是$\xi_n$当$n\to\infty$时的均方极限，记作：$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n=\xi$ 或$\xi_n \xrightarrow{L_2} \xi\,(n\to\infty)$

引理6.3.1 设$\xi_n, \eta_n \in \mathscr{H}$，

（1）若$\|\xi_n - \xi\| \to 0 (n \to \infty)$，则$\xi \in \mathscr{H}$，即$\mathscr{H}$对均方极限是封闭的。

（2）若$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n = \xi, \underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n = \eta$，则$\|\xi - \eta\| = 0$，即均方极限是唯一的(在范数意义上)。

（3）若$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n = \xi, \underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\eta_n = \eta$，则$\underset{n\to\infty}{l.i.m}(\alpha\xi_n + \beta\eta_n) = \alpha\xi + \beta\eta$，其中$\alpha, \beta$为任意实（或复）常数。

证明：（1）当n充分大，$\because \xi_n \in \mathscr{H} \therefore \|\xi_n\| < +\infty$

则：$\|\xi\| = \|\xi - \xi_n + \xi_n\|$

$$\le \|\xi_n - \xi\| + \|\xi_n\| < +\infty，则\xi \in \mathscr{H}$$

（2）由$\|\xi-\eta\|=\|\xi-\xi_n+\xi_n-\eta\|$

$$\leq\|\xi-\xi_n\|+\|\xi_n-\eta\|\to 0(n\to\infty)$$

则： $\|\xi-\eta\|=0$，即$\xi=\eta(a.e.)$

（3）由$\|(\alpha\xi_n+\beta\eta_n)-(\alpha\xi+\beta\eta)\|$

$$=\|(\alpha\xi_n-\alpha\xi)+(\beta\eta_n-\beta\eta)\|$$

$$\leq\|(\alpha\xi_n-\alpha\xi)\|+\|(\beta\eta_n-\beta\eta)\|$$

$$=|\alpha|\|\xi_n-\xi\|+|\beta|\|\eta_n-\eta\|\to 0(n\to\infty)$$

则：$\underset{n\to\infty}{l.i.m}(\alpha\xi_n+\beta\eta_n)=\alpha\xi+\beta\eta$

引理6.3.2 若$\xi_n \in \mathscr{H}$，且$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n = \xi$，则：

$$\left.\begin{array}{l}(1)\lim\limits_{n\to\infty} E(\xi_n) = E(\xi) \\ (2)\lim\limits_{n\to\infty} E\left(|\xi_n|^2\right) = E\left(|\xi|^2\right)\end{array}\right\}$$

(求数学期望和求均方极限可交换顺序)

证明：（1）由$Cauchy-Schwarz$不等式，有：

$$|E(\xi_n)-E(\xi)| = |E(\xi_n-\xi)| \le \left[E\left(|\xi_n-\xi|^2\right)\right]^{1/2}$$

$$\le \|\xi_n-\xi\| \to 0\,(n\to\infty)$$

（2）由$\big|\|\xi_n\|-\|\xi\|\big| \le \|\xi_n-\xi\| \to 0\,(n\to\infty)$，则

$\lim\limits_{n\to\infty}\|\xi_n\| = \|\xi\|$，因而：$\lim\limits_{n\to\infty} E\left(|\xi_n|^2\right) = E\left(|\xi|^2\right)$

引理6.3.3 若$\xi_n,\eta_n\in\mathcal{H}$，且$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n=\xi,\ \underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\eta_n=\eta$，

则：$\lim\limits_{n,m\to\infty}E\left(\xi_n\overline{\eta_m}\right)=E\left(\xi\overline{\eta}\right)$

证明：由$Cauchy-Schwarz$不等式，有：

$$\left|E\left(\xi_n\overline{\eta_m}\right)-E\left(\xi\overline{\eta}\right)\right|=\left|E\left(\xi_n\overline{\eta_m}-\xi\overline{\eta}\right)\right|\le E\left(\left|\xi_n\overline{\eta_m}-\xi\overline{\eta}\right|\right)$$

$$=E\left(\left|\xi_n\overline{\eta_m}-\xi_n\overline{\eta}+\xi_n\overline{\eta}-\xi\overline{\eta}\right|\right)$$

$$\le E\left(\left|\xi_n\overline{\eta_m}-\xi_n\overline{\eta}\right|\right)+E\left(\left|\xi_n\overline{\eta}-\xi\overline{\eta}\right|\right)$$

$$\le\sqrt{E\left(\left|\xi_n\right|^2\right)}\cdot\sqrt{E\left(\left|\overline{\eta_n}-\overline{\eta}\right|^2\right)}+\sqrt{E\left(\left|\xi_n-\xi\right|^2\right)}\sqrt{E\left(\left|\overline{\eta}\right|^2\right)}$$

$$\le\left\|\xi_n\right\|\cdot\left\|\overline{\eta_m}-\overline{\eta}\right\|+\left\|\xi_n-\xi\right\|\cdot\left\|\overline{\eta}\right\|\to0\left(n\to\infty\right)$$

定理6.3.2(均方收敛准则)　若$\xi_n \in \mathcal{H}$，则下列条件相互等价：

(1) $\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n = \xi$

(2) 存在常数C,使得 $\lim\limits_{n,m\to\infty} E\left(\xi_n\overline{\xi_m}\right) = C$

(3) $\lim\limits_{n,m\to\infty} \left\|\xi_n - \xi_m\right\| = 0$

证明：（1）$\Rightarrow$（2）由引理6.3.3，有：

$$\lim_{n,m\to\infty} E\left(\xi_n\overline{\xi_m}\right) = E\left(\xi\overline{\xi}\right) = E\left(|\xi|^2\right) = \|\xi\|^2$$

因此，只须令$C = \|\xi\|^2$即可。

定理6.3.2（均方收敛准则） 若$\xi_n \in \mathcal{H}$，则下列条件相互等价：

$$(1)\ \underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n = \xi$$

(2) 存在常数C，使得 $\lim\limits_{n,m\to\infty} E\left(\xi_n\overline{\xi_m}\right)=C$

$$(3)\ \lim_{n,m\to\infty}\left\|\xi_n-\xi_m\right\| = 0$$

（2）$\Rightarrow$（3） 由：$E\left(\left|\xi_n-\xi_m\right|^2\right)$

$$= E\left[\left(\xi_n-\xi_m\right)\overline{\left(\xi_n-\xi_m\right)}\right]$$

$$= E\left(\left|\xi_n\right|^2\right)+E\left(\left|\xi_m\right|^2\right)-E\left(\xi_m\overline{\xi_n}\right)-E\left(\overline{\xi_m}\xi_n\right)$$

$$\to C+C-C-C=0\left(n,m\to\infty\right)$$

(3)$\Rightarrow$(1) 由*Chebyshev*不等式，有：

$$P\left\{\left|\xi_n-\xi_m\right|\geq\varepsilon\right\}\leq\frac{E\left(\left|\xi_n-\xi_m\right|^2\right)}{\varepsilon^2}\to 0\left(n,m\to\infty\right)$$

知$\{\xi_n\}$依概率相互收敛，类似于高等数学中的柯西定理，存在子序列几乎处处收敛到某一ξ，最后证$\underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n=\xi$，但因细节问题涉及我们前面忽略未讲的*Fatou*$-$*Lebesque*定理，因此略。

本节讨论的均方收敛性非常重要，它是本章学习的重点。

三、均方连续

定义6.3.6 设$\{\xi(t),\ t\in T\}$为二阶矩过程，若$t\to\tau$时，$\xi(t)\xrightarrow{L_2}\xi(\tau)$，即$\underset{t\to\tau}{l.i.m}\,\xi(t)=\xi(\tau)$则称$\{\xi(t),\ t\in T\}$在$t=\tau$处均方连续；若$\{\xi(t)\}$在每一点$t\in T$处均方连续，则称$\{\xi(t)\}$在$T$上均方连续。

与高等数学中函数的连续性差别仅仅在于收敛性的不同！

分析：$\xi(t) \xrightarrow{L_2} \xi(\tau) \Leftrightarrow \left\|\xi(t)-\xi(\tau)\right\| \to 0\,(t \to \tau)$

$$\Leftrightarrow E\left[\left|\xi(t)-\xi(\tau)\right|^2\right] \to 0\,(t \to \tau)$$

而：$E\left[\left|\xi(t)-\xi(\tau)\right|^2\right]$

$$= E\left[\xi(t)-\xi(\tau)\right]\overline{\left[\xi(t)-\xi(\tau)\right]}$$

$$= E\left[\xi(t)-\xi(\tau)\right]\left[\overline{\xi(t)}-\overline{\xi(\tau)}\right]$$

$$= R_\xi(t,t)-R_\xi(t,\tau)-R_\xi(\tau,t)+R_\xi(\tau,\tau)$$

因此,$\{\xi(t), t \in T\}$在$t=\tau$处是否均方连续取决于其自相关函数$R_\xi(s,t)$是否在(τ,τ)点连续。

为此，得下述均方连续准则：

定理6.3.3（均方连续准则）二阶矩过程$\{\xi(t),t\in T\}$在$t=\tau$处均方连续$\Leftrightarrow$其相关函数$R_\xi(s,t)$在(τ,τ)点连续。

证明：“$\Leftarrow$”设$R_\xi(s,t)$在(τ,τ)点连续，则：

$$\|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\|=\sqrt{E\left[\left|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\right|^2\right]}$$

而：$E\left[\left|\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\right|^2\right]$

$$=E\left\{\left[\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\right]\overline{\left[\xi(\tau+h)-\xi(\tau)\right]}\right\}$$

$$=R_\xi(\tau+h,\tau+h)-R_\xi(\tau+h,\tau)$$

$$-R_\xi(\tau,\tau+h)+R_\xi(\tau,\tau)\to 0\left(h\to 0\right)$$

则$\{\xi(t)\}$在$t=\tau$处均方连续

“$\Rightarrow$” 若$\{\xi(t)\}$在$t=\tau$处均方连续，则有：

$$\xi(\tau+h)\xrightarrow{L_2}\xi(\tau),\quad \xi(\tau+h')\xrightarrow{L_2}\xi(\tau),\quad h,h'\to 0$$

由引理7.1.3知，当$h,h'\to 0$时，有：

$$R_\xi(\tau+h,\tau+h')=E\left[\xi(\tau+h)\overline{\xi(\tau+h')}\right]$$

$$\to E\left[\xi(\tau)\overline{\xi(\tau)}\right]=R_\xi(\tau,\tau)$$

则$R_\xi(s,t)$在(τ,τ)点连续。

推论：若$R_\xi(s,t)$在一切(τ,τ)处连续，则$R_\xi(s,t)$在一切(s,t)处连续。

证明：由均方收敛准则，若$R_\xi(s,t)$在一切(τ,τ)处连续，则对任意的$t\in T,\{\xi(t)\}$均方连续，即有：

$$\xi(u)\xrightarrow{L_2}\xi(s)(u\to s),\quad \xi(v)\xrightarrow{L_2}\xi(t)(v\to t)$$

由引理6.3.3，有：

$$R_\xi(u,v)=E\left[\xi(u)\overline{\xi(v)}\right]$$

$$\to E\left[\xi(s)\overline{\xi(t)}\right]=R_\xi(s,t)$$

$$(u\to s,v\to t)$$

例 设$\{\xi(t), t \ge 0\}$为*Possion*过程，讨论其均方连续性。

解：由第三章泊松过程的讨论，有：

$$\mu_\xi(t) = \lambda t$$

$$D_\xi(t) = \lambda t$$

所以，泊松过程是二阶矩过程。

$$R_\xi(s,t) = \lambda \min(s,t) + \lambda s \lambda t$$

显然，$R_\xi(s,t)$在$(\tau,\tau)$$\left(\tau \in [0,+\infty)\right)$处连续，因此泊松过程$\{\xi(t), t \ge 0\}$均方连续。

简单回顾一下上节的知识：

均方收敛性：$\lim\limits_{n\to\infty} E\left(\left|\xi_n-\xi\right|^2\right)=0 \Leftrightarrow \underset{n\to\infty}{l.i.m}\,\xi_n=\xi$

$$\Leftrightarrow \xi_n \xrightarrow{L_2} \xi\left(n\to\infty\right) \Leftrightarrow \left\|\xi_n-\xi\right\| \to 0\left(n\to\infty\right)$$

$$\Leftrightarrow \exists \text{常数} C=E|\xi|^2, \ni \lim_{n,m\to\infty} E\left(\xi_n\overline{\xi_m}\right)=C$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n,m\to\infty}\left\|\xi_n-\xi_m\right\|=0$$

二阶矩过程（已讲，略）：

$$E\left[\left|\xi^2(t)\right|\right]<+\infty \Leftrightarrow \mu_\xi(t)\text{和}\sigma_\xi^2(t)\text{存在}$$

二阶矩过程$\{\xi(t),t\in T\}$在$t=\tau$处均方连续

$\Leftrightarrow$ 其相关函数$R_\xi(s,t)$在(τ,τ)点连续。

四、均方导数

首先回顾高等数学求导数的概念：

函数$f(t)$在t_0处可导$\Leftrightarrow$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(t_0+h)-f(t_0)}{h}$$存在且有限，记为$f'(t_0)$。

类似地，可定义随机过程$\{\xi(t),t\in T\}$在任意点$t=\tau$处的均方导数。

定义6.3.7 设$\{\xi(t), t\in T\}$为二阶矩过程，若存在随机变量$\xi'(t)\in\mathcal{H}$，使

$$\lim_{h\to 0} E\left[\left|\frac{\xi(\tau+h)-\xi(\tau)}{h}-\xi'(\tau)\right|^2\right]=0$$

即：$\underset{h\to 0}{l.i.m}\dfrac{\xi(\tau+h)-\xi(\tau)}{h}=\xi'(\tau)$则称$\{\xi(t)\}$在$t=\tau$处均方可导，记为$\xi'(\tau)$，称为$\{\xi(t)\}$在$t=\tau$处的均方导数；若$\{\xi(t)\}$在每一点$t\in T$处均方可导，则称它在$T$上均方可导或均方可微，记为$\xi'(t)$或$\dfrac{d\xi(t)}{dt}$，$t\in T$。

分析：$\frac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\xrightarrow{L_2}\xi'(t)\Leftrightarrow E\left\{\left[\frac{\xi(t_1+h_1)-\xi(t_1)}{h_1}\right]\overline{\left[\frac{\xi(t_2+h_2)-\xi(t_2)}{h_2}\right]}\right\}$

$$=\frac{R_\xi(t_1+h_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1+h_1,t_2)-R_\xi(t_1,t_2+h_2)+R_\xi(t_1,t_2)}{h_1h_2}$$

$$\lim_{h_1,h_2\to 0}\left[\frac{R_\xi(t_1+h_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1+h_1,t_2)}{h_1h_2}-\frac{R_\xi(t_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1,t_2)}{h_1h_2}\right]$$

$$=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\lim_{h_2\to 0}\frac{R_\xi(t_1+h_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1+h_1,t_2)}{h_2}-$$

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\lim_{h_2\to 0}\frac{R_\xi(t_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1,t_2)}{h_2}$$

$$=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial R_\xi(t_1+h_1,t_2)}{\partial t_2}-\frac{\partial R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right]$$

$$=\lim_{h_1\to 0}\frac{\frac{\partial R_\xi(t_1+h_1,t_2)}{\partial t_2}-\frac{\partial R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2}}{h_1}=\frac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$$

$$\lim_{h_1,h_2\to 0}\left[\frac{R_\xi(t_1+h_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1+h_1,t_2)}{h_1h_2}-\frac{R_\xi(t_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1,t_2)}{h_1h_2}\right]$$

$$=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\left[\lim_{h_2\to 0}\frac{R_\xi(t_1+h_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1+h_1,t_2)}{h_2}-\lim_{h_2\to 0}\frac{R_\xi(t_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1,t_2)}{h_2}\right]$$

$$=\lim_{h_1\to 0}\frac{1}{h_1}\left[\frac{\partial R_\xi(t_1+h_1,t_2)}{\partial t_2}-\frac{\partial R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right]=\lim_{h_1\to 0}\frac{\frac{\partial R_\xi(t_1+h_1,t_2)}{\partial t_2}-\frac{\partial R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2}}{h_1}$$

$$=\frac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$$

请指出上述证明过程的错误。

$$f(x,y)=\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y},\text{求}\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y),\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)$$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}f(x,y)=\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\right]=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x+x^2}{x}\right]=\lim_{x\to 0}(1+x)=1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}f(x,y)=\lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}\right]=\lim_{y\to 0}\left[\frac{-y+y^2}{y}\right]=\lim_{x\to 0}(-1+y)=-1$$

定义6.3.8 设$R_\xi(t_1,t_2)$为二元函数，若如下极限：

$$\lim_{h_1,h_2\to 0}\frac{R_\xi(t_1+h_1,t_2+h_2)-R_\xi(t_1+h_1,t_2)-R_\xi(t_1,t_2+h_2)+R_\xi(t_1,t_2)}{h_1h_2}$$

存在，则称$R_\xi(t_1,t_2)$在点(t_1,t_2)广义二次可导。

引理6.3.4 若$R_\xi(t_1,t_2)$在(t_1,t_2)处及其附近关于t_1,t_2的一阶偏导数存在,二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 R}{\partial t_1 \partial t_2}$存在且在$(t_1,t_2)$处连续，则$R_\xi(t_1,t_2)$在$(t_1,t_2)$处存在广义二次导数，且等于$\frac{\partial^2 R}{\partial t_1 \partial t_2}$。

定理6.3.4（均方可导准则）二阶矩过程$\{\xi(t),t\in T\}$在$t=\tau$处均方可导$\Leftrightarrow$其相关函数$R_\xi(t_1,t_2)$在(τ,τ)处广义二次可导。

证明略

定理6.3.5　设二阶矩过程$\{\xi(t),t\in T\}$的均值函数为$\mu_\xi(t)$，相关函数为$R_\xi(t_1,t_2)$，并在T上的均方导数为$\xi'(t)$，则：

(1) $\mu_{\xi'}(t)=E[\xi'(t)]=\{E[\xi(t)]\}'=\mu_\xi'(t)$

(2) $R_{\xi\xi'}(t_1,t_2)=E\left[\xi(t_1)\overline{\xi'(t_2)}\right]=\dfrac{\partial R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_2}$

$R_{\xi'\xi}(t_1,t_2)=E\left[\xi'(t_1)\overline{\xi(t_2)}\right]=\dfrac{\partial R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1}$

(3) $R_{\xi'}(t_1,t_2)=E\left[\xi'(t_1)\overline{\xi'(t_2)}\right]=\dfrac{\partial^2 R_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$

简言之，求数学期望与求均方导数可交换。

证明： （1） $\mu_{\xi'}(t)=E\left[\underset{h\to 0}{l.i.m}\dfrac{\xi(t+h)-\xi(t)}{h}\right]$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{E\left[\xi(t+h)\right]-E\left[\xi(t)\right]}{h}=\left\{E\left[\xi(t)\right]\right\}'=\mu_{\xi}'(t)$$

（2） $R_{\xi'\xi}(t_1,t_2)=E\left[\xi'(t_1)\overline{\xi(t_2)}\right]=E\left\{\underset{h\to 0}{l.i.m}\dfrac{\xi(t_1+h)-\xi(t_1)}{h}\overline{\xi(t_2)}\right\}$

$$=\lim_{h\to 0}E\left[\frac{\xi(t_1+h)-\xi(t_1)}{h}\overline{\xi(t_2)}\right]=\lim_{h\to 0}\frac{R_{\xi}(t_1+h,t_2)-R_{\xi}(t_1,t_2)}{h}$$

$$=\frac{\partial R_{\xi}(t_1,t_2)}{\partial t_1}$$

(3) $R_{\xi'}(t_1,t_2)=E\left[\xi'(t_1)\overline{\xi'(t_2)}\right]=E\left\{\underset{h_2\to 0}{l.i.m}\,\xi'(t_1)\dfrac{\overline{\xi(t_2+h_2)-\xi(t_2)}}{h_2}\right\}$

$$=\lim_{h_2\to 0}\frac{1}{h_2}\left[\frac{\partial R_{\xi}(t_1,t_2+h_2)}{\partial t_1}-\frac{\partial R_{\xi}(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right]=\frac{\partial^2 R_{\xi}(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}$$

推论　设$\{\xi(t),t\in T\}$在T上均方可导，且$\xi'(t)=0$，则$\xi(t)=\xi$（不随t变化的随机变量）。

证明：由$\xi'(t)=0$及定理6.3.5的(2)，知：

$$\frac{\partial R_\xi(s,t)}{\partial s}=\frac{\partial R_\xi(s,t)}{\partial t}=0,$$

则：$R_\xi(s,t)\equiv C$

于是对任意的$s,t\in T$，$s\neq t$，有：

$$\|\xi(s)-\xi(t)\|^2=E\left[|\xi(s)-\xi(t)|^2\right]$$

$$=E\left\{[\xi(s)-\xi(t)]\overline{[\xi(s)-\xi(t)]}\right\}$$

$$=R_\xi(s,s)-R_\xi(s,t)-R_\xi(t,s)+R_\xi(t,t)=0$$

则$\xi(s)=\xi(t)$，即$\xi(t)=\xi$（不随t变化的随机变量）。

五、均方积分

设$\{\xi(t),t\in T\}$($[a,b]\subset T$)为二阶矩过程，相关函数为$R_\xi(s,t)$，$f(t)$是一普通的实或复值函数，在均方收敛意义下讨论积分：

$$\int_a^b f(t)\xi(t)dt。$$

1、二阶矩过程的均方积分

定义6.3.8 设 $\{\xi(t),t\in T\}$($[a,b]\subset T$)为二阶矩过程，$f(t)$是一复值函数，令：Δ：$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$为$[a,b]$的分割，记：

$$\Delta t_k=t_k-t_{k-1},|\Delta|=\max_{1\le k\le n}\{\Delta t_k\}$$

$$I(\Delta)=\sum_{k=1}^{n}f(u_k)\xi(u_k)\Delta t_k,\quad t_{k-1}\le u_k\le t_k$$

若当$n\to\infty\left(|\Delta|\to 0\right)$时，$I(\Delta)$的均方极限存在且有限，则称此极限为$f(t)\xi(t)$在$[a,b]$上的均方积分，记为:$\int_a^b f(t)\xi(t)dt$。

分析：$I(\Delta)\xrightarrow{L_2}\int_a^b f(t)\xi(t)dt \Leftrightarrow \exists C$，使得：

$$\lim_{|\Delta|,|\Delta'|\to 0} E\left[I(\Delta)\overline{I(\Delta')}\right]=C$$

$$\Delta : a=s_0<s_1<\cdots<s_n=b, s_{k-1}\le u_k\le s_k, k=1,\cdots,n$$

$$\Delta : a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b, t_{j-1}\le v_j\le t_j, j=1,\cdots,m$$

而：$E\left[I(\Delta)\overline{I(\Delta')}\right]$

$$=E\left\{\sum_{k=1}^{n} f(u_k)\xi(u_k)\Delta s_k\right\}\left\{\overline{\sum_{j=1}^{m} f(v_j)\xi(v_j)\Delta t_j}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} E\left\{\left[f(u_k)\xi(u_k)\Delta s_k\right]\left[\overline{f(v_j)\xi(v_j)\Delta t_j}\right]\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(u_k)\overline{f(v_j)}E\left[\xi(u_k)\overline{\xi(v_j)}\right]\Delta s_k\Delta t_j$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(u_k)\overline{f(v_j)}R_\xi(u_k,v_j)\Delta s_k\Delta t_j$$

考察$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} f(u_k)\overline{f(v_j)}R_\xi(u_k,v_j)\Delta s_k \Delta t_j$，当$n,m\to\infty$，

$|\Delta|,|\Delta'|\to 0$时，是否收敛到$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R_\xi(s,t)dsdt$?

定理6.3.6 设$\{\xi(t),t\in T\}$为二阶矩过程，$[a,b]\subset T$，相关函数$R_\xi(s,t)$，$f(t)$为一复值函数，如果$\{\xi(t)\}$在$[a,b]$上均方连续，且$f(t)$在$[a,b]$上连续，则$f(t)\xi(t)$在$[a,b]$上均方可积，且$\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{f(t)}R_\xi(s,t)dsdt$存在。

定理6.3.7　若$f(t),g(t)$在$[a,b]$上连续,$\{\xi(t)\}$在$[a,b]$上均方连续，则：

（1）$E\left[\int_a^b f(t)\xi(t)dt\right]=\int_a^b f(t)E[\xi(t)]dt=\int_a^b f(t)\mu_\xi(t)dt$

（2）$E\left\{\left[\int_a^b f(s)\xi(s)ds\right]\overline{\left[\int_a^b g(t)\xi(t)dt\right]}\right\}=\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{g(t)}E\left[\xi(s)\overline{\xi(t)}\right]dsdt$

$$=\int_a^b\int_a^b f(s)\overline{g(t)}R_\xi(s,t)dsdt$$

证明：（1）由$I(\Delta)\xrightarrow{L_2}\int_a^b f(t)\xi(t)dt$，由引理6.3.2，有：

$$E\left[\int_a^b f(t)\xi(t)dt\right]=E\left[\underset{\substack{n\to\infty\\(|\Delta|\to 0)}}{l.i.m}\,I(\Delta)\right]=\lim_{\substack{n\to\infty\\(|\Delta|\to 0)}}E[I(\Delta)]$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\(|\Delta|\to 0)}}E\left[\sum_{k=1}^n f(u_k)\xi(u_k)\Delta t_k\right]$$

$$=\lim_{\substack{n\to\infty\\(|\Delta|\to 0)}}\sum_{k=1}^n f(u_k)E[\xi(u_k)]\Delta t_k=\int_a^b f(t)\mu_\xi(t)dt$$

定理6.3.8 $\{\xi(t)\},\{\eta(t)\}$在$[a,b]$上均方连续，则：

（1）$E\left|\int_a^b \xi(t)dt\right|^2 \le K(b-a)^2$,其中$K=\max\limits_{t\in T} E\left|\xi(t)\right|^2$

（2）对任意α,β有:$\int_a^b\left[\alpha\xi(t)+\beta\eta(t)\right]dt$

$$=\alpha\int_a^b \xi(t)dt+\beta\int_a^b \eta(t)dt$$

(3) 对任意$c\in[a,b]$有:$\int_a^b \xi(t)dt=\int_a^c \xi(t)dt+\int_c^b \xi(t)dt$

类似于高等数学中利用不定积分求可积函数的原函数，引入均方积分的概念后，也可讨论随机过程的均方不定积分（原过程），并可得到关于均方积分的牛顿–莱布尼兹公式。

定义6.3.9　设对任意的$t\in[a,b]$,$\{\xi(t)\}$在$[a,t]$上均方连续，

令：$\eta(t)=\int_a^t \xi(s)ds$，称$\{\eta(t),a\le t\le b\}$为$\{\xi(t),a\le t\le b\}$在$[a,b]$上的均方不定积分。

定理6.3.9 设$\{\eta(t),a\le t\le b\}$为$\{\xi(t),a\le t\le b\}$在$[a,b]$上的均方不定积分，则$\{\eta(t),a\le t\le b\}$在$[a,b]$上均方连续，且：

(1) $\eta'(t)=\xi(t)$，$a\le t\le b$

(2) $E\left[\eta(t)\right]=\int_a^t E\left[\xi(s)\right]ds$

(3) $R_\xi(s,t)=E\left[\eta(s)\overline{\eta(t)}\right]=\int_a^t\int_a^t R_\xi(u,v)dudv$

证明：首先说明$\eta(t)$在$[a,b]$上的均方连续性，不妨假设$\Delta t>0$,

则：$\|\eta(t+\Delta t)-\eta(t)\|=\left\|\int_a^{t+\Delta t}\xi(s)ds-\int_a^t\xi(s)ds\right\|=\left\|\int_t^{t+\Delta t}\xi(s)ds\right\|$

$$\le\int_t^{t+\Delta t}\|\xi(s)\|ds\le M\Delta t\to 0(\Delta t\to 0)$$

其中$\|\xi(s)\|=\sqrt{E[|\xi(s)|^2]}=\sqrt{R_\xi(s,s)}$是$s$的连续函数，$M=\max\limits_{a\le t\le b}\|\xi(s)\|$

(1) $$\left\|\frac{\eta(t+\Delta t)-\eta(t)}{\Delta t}-\xi(t)\right\|^2=\left\|\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left[\xi(s)-\xi(t)\right]ds\right\|^2$$

$$\le\frac{1}{\Delta t^2}\left|\int_t^{t+\Delta t}\left\|\xi(s)-\xi(t)\right\|ds\right|^2$$

$$\le\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\left\|\xi(s)-\xi(t)\right\|^2 ds$$

而, $\left\|\xi(s)-\xi(t)\right\|^2=E\left[\left|\xi(s)-\xi(t)\right|^2\right]$

$$=E\left[\xi(s)-\xi(t)\right]\left[\overline{\xi(s)-\xi(t)}\right]$$

$$=R_\xi(s,s)-R_\xi(s,t)-R_\xi(t,s)+R_\xi(t,t)$$

当t给定，$s\in[t,t+\Delta t]$，则$\left\|\xi(s)-\xi(t)\right\|^2$是$s$的连续函数

即：$\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当$|\Delta t| < \delta$，有：

$\|\xi(s) - \xi(t)\|^2 < \varepsilon$则：

$$\left\| \frac{\eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} - \xi(t) \right\|^2 \le \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \varepsilon ds \le \varepsilon$$

则：$\underset{\Delta t \to 0^+}{l.i.m} \dfrac{\eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} = \xi(t)$，

同理：$\underset{\Delta t \to 0^-}{l.i.m} \dfrac{\eta(t+\Delta t) - \eta(t)}{\Delta t} = \xi(t)$即：$\eta'(t) = \xi(t)$

（2）和（3）可类似地证明，略。

推论（牛顿－莱布尼兹公式）：若$\{\xi(t)\}$均方可微,$\{\xi'(t)\}$均方连续，则：$\xi(b)-\xi(a)=\int_a^b \xi'(t)dt$

证明：记$\eta(t)=\int_a^t \xi'(s)ds$，则：$\eta'(t)=\xi'(t)$，即：

$$\left[\eta(t)-\xi(t)\right]'=0$$

由定理6.3.5的推论，有：

$$\eta(t)-\xi(t)=\xi\text{（不依赖于}t\text{的随机变量）}$$

则：$\int_a^t \xi'(s)ds=\xi(t)+\xi$

我们注意到：当$t=a$时，有$\xi(a)+\xi=0$，则$\xi=-\xi(a)$

则：$\int_a^b \xi'(s)ds=\xi(b)-\xi(a)$

第四节 平稳过程的各态历经性

我们知道，平稳过程的统计特征完全由其均值函数和相关函数确定，而均值函数和相关函数是随机过程$\{X(t)\}$的取值在整个样本空间Ω上的概率平均，由$\{X(t)\}$的分布函数所确定，通常很难求得，因此我们关心这样的问题：在什么条件下，在已知一个较长时间的样本记录的条件下，获得平稳过程的数字特征的充分依据，即对一个样本函数取时间平均来代替统计平均？即讨论平稳过程的各态历经性。

首先回顾大数定律：

设独立同分布的随机变量序列$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$，具有$E[X_n]=m$，$D[X_n]=\sigma^2,(n=1,2,\cdots)$，则：

$$\lim_{N\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X_k-m\right|<\varepsilon\right\}=1$$

其中，若将随机变量序列$\{X_n,n=1,2,\cdots\}$看作是离散时间参数的随机过程，则$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}X_k$为过程的样本函数按时刻不同取平均，它随样本的不同而不同，是一个随机变量。而$m=E[X_n]$是随机过程的均值，即任意时刻过程取值的统计平均。大数定律说明：随着时间n的增长，随机过程的样本函数按时间平均以越来越大的概率近似于过程的统计平均，也就是说，只要观测的时间足够长，随机过程的每个样本函数能够“遍历”各种可能状态，随机过程的这种特性即叫各态历经性。

由随机过程的定义知：任意的$t\in T$，对应的$X(t)$为一个随机变量，$E[X(t)]=m_X(t)$即为统计平均；任意的$\omega\in\Omega$，对应的$X(t)$为一个普通的时间函数（样本函数），若在T上取平均，即为时间平均。

定义6.4.1 由$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$为均方连续的平稳过程，则分别称：

$$\langle X(t)\rangle=\underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt$$

$$\langle X(t)X(t-\tau)\rangle=\underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t-\tau)dt$$

为该过程的时间均值和时间相关函数。

例6.4.1 计算随机相位正弦波 $X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$的时间平均$\langle X(t)\rangle$和时间相关函数$\langle X(t)X(t-\tau)\rangle$。

解

$$\langle X(t)\rangle = \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega t+\Theta)\mathrm{d}t$$

$$= \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{a\cos\Theta\sin\omega T}{\omega T} = 0.$$

$$\langle X(t)X(t-\tau)\rangle$$

$$= \underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a^2\cos(\omega t+\Theta)\cos[\omega(t-\tau)+\Theta]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{a^2}{2}\cos\omega\tau.$$

定义6.4.2 由$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$为均方连续的平稳过程，若：$\langle X(t)\rangle = E[X(t)] = m_X$ 以概率 1 成立，即：

$$\underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt=m_X$$

以概率 1 成立，则称该平稳过程 $X(t)$ 的均值具有各态历经性。

若：$\langle X(t)X(t-\tau)\rangle = E[X(t)X(t-\tau)] = R_X(\tau)$以概率1成立，即：

$$\underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)X(t-\tau)dt=R_X(\tau)$$

以概率 1 成立，则称该平稳过程的相关函数具有各态历经性。

定义6.4.3 如果均方连续的平稳过程$\{X(t), -\infty < t < +\infty\}$的均值和相关函数均具有各态历经性，则称该平稳过程具有各态历经性。

说明:

(1) “以概率 1 成立”是对 X(t)的所有样本函数而言。

(2) 各态历经性有时也称作遍历性或埃尔古德性(*ergodicity*)。

(3) 并不是所有平稳过程都具有各态历经性。

例6.4.2 平稳过程 $X(t)=Y$, 其中Y 是方差不为零的随机变量。

解： 因为$\langle X(t)\rangle=\langle Y\rangle=Y$

即时间均值随Y取不同的值而不同，而平稳过程的均值函数为常数，所以$\langle X(t)\rangle$不可能以概率1等于常数。

故平稳过程$X(t)=Y$不是各态历经的。

定理6.4.1 设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是均方连续的平稳过程，则它的均值具有各态历经性性的充要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau|}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-|m_X|^2\right]d\tau=0 \qquad (6.9)$$

证明：$\because\langle X(t)\rangle$是随机变量，先求它的均值和方差得：

$$E\left[\langle X(t)\rangle\right]=E\left[\underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)dt\right]$$

$$=\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}E\left[X(t)\right]dt=m_X$$

则随机变量$\langle X(t)\rangle$的均值为常数m_X。

由方差的性质知：若$D\left[\langle X(t)\rangle\right]=0$，则$\langle X(t)\rangle$依概率1等于$E\left[\langle X(t)\rangle\right]$，因此要证明$X(t)$的各态历经性等价于要证$D\left[\langle X(t)\rangle\right]=0$。

$$D\left[\langle X(t)\rangle\right]=E\left[\left|\langle X(t)\rangle\right|^2\right]-\left|m_X\right|^2 \qquad (6.10)$$

而： $$E\left[\left|\langle X(t)\rangle\right|^2\right]=E\left[\left|\underset{T\to+\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}X(t)\,dt\right|^2\right]$$

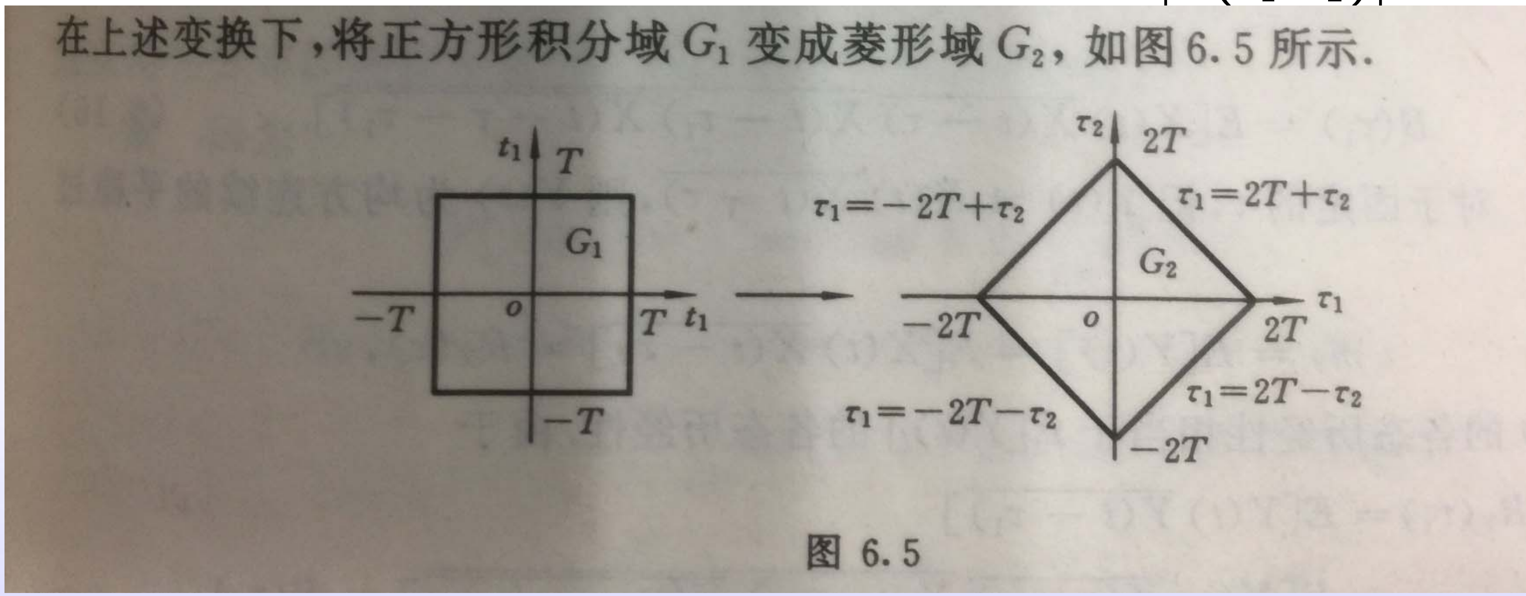
$$=\lim_{T\to\infty}E\left[\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}X(t_2)\,dt_2\overline{\int_{-T}^{T}X(t_1)\,dt_1}\right]=0$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}X(t_2)\overline{X(t_1)}\,dt_2dt_1$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X(t_2-t_1)\,dt_2dt_1$$

$$\because E\left[\left|\langle X(t)\rangle\right|^2\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T}R_X\left(t_2-t_1\right)dt_2dt_1$$

做变换：$\tau_1=t_1+t_2,\tau_2=t_2-t_1$，变换的雅可比式为：$\left|\dfrac{\partial\left(t_1,t_2\right)}{\partial\left(\tau_1,\tau_2\right)}\right|=\dfrac{1}{2}$



在上述变换下，将正方形积分域 G_1 变成菱形域 G_2，如图 6.5 所示.

图 6.5

则：$$E\left[\left|\langle X(t)\rangle\right|^2\right]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\iint_{G_2}\frac{1}{2}R_X\left(\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{4T^2}\int_{-2T}^{2T}\int_{-2T+|\tau_2|}^{2T-|\tau_2|}\frac{1}{2}R_X\left(\tau_2\right)d\tau_1d\tau_2 \qquad (6.11)$$

则：$E\left[\left|\langle X(t)\rangle\right|^2\right]=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{4T^2}\displaystyle\int_{-2T}^{2T}\int_{-2T+|\tau_2|}^{2T-|\tau_2|}\dfrac{1}{2}R_X\left(\tau_2\right)d\tau_1 d\tau_2$ (6.11)

又因为，有：$\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-2T}^{2T}\left(1-\dfrac{|\tau_2|}{2T}\right)d\tau_2=1$

则：$|m_X|^2=\dfrac{1}{2T}\displaystyle\int_{-2T}^{2T}|m_X|^2\left(1-\dfrac{|\tau_2|}{2T}\right)d\tau_2$ (6.12)

将(6.11)和(6.12)代入(6.10)，得：

$$D\left[\langle X(t)\rangle\right]=E\left[\left|\langle X(t)\rangle\right|^2\right]-|m_X|^2$$

$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T^2}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau_2|}{2T}\right)\left[R_X(\tau)-|m_X|^2\right]d\tau \qquad (6.13)$$

(6.13)式等于零即为$\langle X(t)\rangle$以概率1等于均值函数m_X的充要条件，定理6.4.1得证。

定理6.4.2 设$\{X(t),-\infty<t<+\infty\}$是均方连续的平稳过程，则其相关函数具有各态历经性的充要条件是：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-2T}^{2T}\left(1-\frac{|\tau_1|}{2T}\right)\left[B_X(\tau_1)-|R_X(\tau)|^2\right]d\tau_1=0$$

其中：$B_X(\tau_1)=E\left[X(t+\tau)\overline{X(t)}\,\overline{X(t+\tau_1+\tau)\overline{X(t+\tau_1)}}\right]$

例6.4.3 设有随机相位过程$\xi(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，$a,\omega$为常数，$\Theta$在$(0,2\pi)$上服从均匀分布，问$\xi(t)$是否为各态历经过程？

解：因$E[\xi(t)]=E[a\cos(\omega t+\Theta)]=\int_0^{2\pi} a\cos(\omega t+\theta)\frac{1}{2\pi}d\theta=0$

$$R_\xi(t,t-\tau)=\frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)=R_\xi(\tau)$$

而$\langle\xi(t)\rangle=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)dt=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega t+\Theta)dt$

$$=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\frac{\sin(\omega T+\Theta)-\sin(-\omega T+\Theta)}{\omega}=0$$

即:$\langle\xi(t)\rangle=E[\xi(t)]$

同理:$\langle\xi(t)\overline{\xi(t-\tau)}\rangle=\underset{T\to\infty}{l.i.m}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\xi(t)\overline{\xi(t-\tau)}dt=\frac{a^2}{2}\cos(\omega\tau)=R_\xi(\tau)$

即$\{\xi(t),t\in T\}$具有各态历经性。

说明： 各态历经定理的重要价值：

从理论上给出了如下保证：

一个平稳过程 $X(t)$,只要它满足定理6.4.1和定理6.4.2，便可以根据“以概率1成立”的含义从一次试验所得到的样本函数来确定该过程的均值和自相关函数，即：

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = m_X$$

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_0^T x(t)x(t-\tau)dt = R_X(t)$$

说明：

各态历经定理的条件是比较宽的，工程中碰到的大多数平稳过程都能满足。但要去验证它们是否成立却是十分困难的。

在实践中，通常事先假定所研究的平稳过程具有各态历经性，并从这个假定出发，对由此而产的各种资料进行分析处理，看所得的结论是否与实际相符。如果不符，则要修改假设另作处理。