北京邮电大学 2015——2016 学年第 1 学期

《概率论与随机过程》期末考试试题（含答案）

考试注意事项：学生必须将答题内容（包括填空题）做在试题答题纸上，做在试卷纸上一律无效。在答题纸上写上你的**班号**和选课单上的**学号**，**班内序号!**

一.填空题（每空 3 分，共 45 分）

1.设$\{X(t),t\in T\},\{Y(t),t\in T\}$ 为两个随机过程，当$\underline{B_{XY}(s,t)=0}$，称这两个随机过程互不相关；当$\underline{R_{XY}(s,t)=0}$时，称这两个随机过程相互独立。

2. 设 X 的分布函数为$F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$，其中，$\Phi(x)$是标准正态分布的分布函数，则 $EX=\underline{0.7}$.

3. 设 X 服从均值为 2 的指数分布，$Y=1-e^{-X/2}$， Y 的概率密度记为 $f_Y(y)$，则

$$\underline{f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}}.$$

4. 设 X 和Y 的联合概率密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x+\frac{y^2}{2})}, & x>0,-\infty<y<\infty,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

令随机变量$Z=X+2Y$，则 COV(X，Z)=__1_____.

5.设$X\sim\pi(1),Y\sim B(2,0.5)$，$Z=X+2Y$，且$X$与$Y$相互独立，则$Z$的特征函数$\varphi_Z(t)=$ $\underline{\dfrac{1}{4}e^{e^{it}-1}(e^{2it}+1)^2}$

6.设随机过程$X(t)=\sin(\omega t+\Theta),t\in \mathrm{R}$，其中$\omega>0$为常数，$\Theta\sim U(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$，则

$$\underline{f(x;0)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & |x|<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}}$$

7.设随机过程$\{X(t), 0\le t<+\infty\}$均方可积，且相关函数为$R_X(s,t)=1+2st$，则

$E\left[\left|\int_0^1 X(t)dt\right|^2\right]$ =________1.5.

8.设$\{N(t), t\ge 0\}$是强度为$\lambda>0$的泊松过程，T_1表示第一次事件发生的时刻，则

$P\{T_1\le 1 \mid N(2)=1\}$ =____0.5____.

9.设平稳过程$X(t)$的功率谱密度$s_X(\omega)=\dfrac{1}{\omega^4+3\omega^2+2}$，则其自相关函数为_

$\dfrac{1}{2}e^{-|\tau|}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}e^{-\sqrt{2}|\tau|}$.

10. 设$\{W(t), 0\le t<+\infty\}$是参数为σ^2的维纳过程，令$Y(t)=W(e^t), t\in \mathrm{R}$，则相关函数$R_Y(s,s+2)=\sigma^2 e^s$

11. 设齐次马氏链$\{X_n,\ n\ge 0\}$的状态空间$E=\{1,2\}$,一步转移概率矩阵为

$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$，初始分布$p_1(0)=p, p_2(0)=1\text{-}p, 0<p<1$，当$p=$__0.6__时，$X_n$的绝对分布与$n$无关。

12.设仅有两个状态E={0，1}的连续时间马尔可夫链的转移概率为

$p_{01}(t)=\lambda t+o(t)$，$p_{10}(t)=\mu t+o(t)$，则其Q矩阵为$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$，平稳分布为_

$\left(\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$.

13.设随机过程$X(t)=e^{-t\Theta}, t>0, \Theta\sim U(0,1)$,则均值函数$\mu_X(t)=\dfrac{1}{t}(1-e^{-t})$

二（10 分）已知 $X(t)=Y+Zt, t>0$, 其中 Y, Z 独立同分布，且 $Y\sim N(0,1)$，试求 $(X(s), X(t))(s\neq t)$ 的协方差矩阵以及 $X(t)$ 的二维概率密度函数。

见第二章讲稿例 2.11

解：$\because X(t)=Y+Zt$，且 Y、Z 相互独立且同分布，$Y\sim N(0,1)$，则：

$$\therefore E\left[X(t)\right]=E\left(Y\right)+tE\left(Z\right)=0$$

$$D\left[X(t)\right]=D\left(Y\right)+t^2D\left(Z\right)=1+t^2$$

$$B_X\left(s,t\right)=E\left[X(s)-E\left(X(s)\right)\right]\left[X(t)-E\left(X(t)\right)\right]=E\left[X(s)X(t)\right]$$

$$=E\left[\left(Y+Zs\right)\left(Y+Zt\right)\right]=E\left(Y^2\right)+stE\left(Z^2\right)=1+st$$

则协方差矩阵为：$B=\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+s^2 & 1+st \\ 1+st & 1+t^2 \end{pmatrix}$，$X=(x_1, x_2)$

另，因为 Y、Z 均为正态分布，则其线性组合 $X(t)$ 为正态随机过程。

且有：$X(t)\sim N(0,1+t^2)$

则随机过程 $\left\{X(t)\right\}$ 的二维概率分布密度函数为：

$$f(s,t;x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi(\det B)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}XB^{-1}X^T\right\}, s,t>0$$

三(12 分)已知 $N(t), t\geq 0$ 是强度为 λ 的泊松过程，试求：

（1）$E[N(t)N(s+t)], s>0$（2）$E[N(s+t)\mid N(t)](s>0)$ 的分布律。

解：$(1)\ E[N(t)N(s+t)]=E[N(t)\text{-}N(0)]\left[N(s+t)\text{-}N(t)\text{+}N(t)\right]$

$$\underline{\underline{\text{独立增量过程}}}E[N(t)\text{-}N(0)]E\left[N(s+t)\text{-}N(t)\right]\text{+}E\left[N^2(t)\right]$$

$$=\lambda t\cdot\lambda s+D\left[N(t)\right]+E^2\left[N(t)\right]=\lambda t+\lambda^2 t(s+t), s>0$$

$$P\{E[N(s+t)\mid N(t)]=\lambda s+k)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,\cdots$$

四(12 分)设马氏链 $\{X_n, n\geq 0\}$ 的状态空间为 $\{1,2,3,\cdots\}$，一步转移概率矩阵为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

确定该链的空间分解，状态分类，各状态的周期，并求平稳分布。

解.（1)链可分, $\{1,3\}\{4\}$是不可分闭集, 状态空间 $E=\{1,3\}\cup\{4\}\cup\{2,5,6,7,\cdots\}$

（2） 周期 $d(i)=1, i=1,2,\ldots.$

（3） 设平稳分布为 $\pi=(\pi_1,\pi_2,\ldots)$,则

$$\begin{cases} \pi=\pi P, \\ \sum_i \pi_i = 1 \\ \pi_i \geq 1, i=1,2,\ldots \end{cases}$$

解之得 $\pi=(p,0,q,p,0,0,\cdots)$,其中 $p\geq 0, q\geq 0, 2p+q=1$.

（4） 所以 1,3,4 正常返态,其余都不是常返态，又因为

$f_{22}=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}<1,\ f_{44}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}<1,\ f_{ii}=\frac{1}{3}<1, i=6,7,\ldots$, 所以 $2,4,6,7,\ldots$ 都为非常返态。

五（16 分）设随机过程 $X(t)=A\cos(\omega_0 t+\Theta), t\in \mathrm{R}, \omega_0$ 是正常数，随机变量 A 和 Θ 相

互独立，且 A 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}}, x>0 \\ 0, \quad 其他 \end{cases}$，$\Theta \sim U(0,2\pi)$。

（1） 证明 $X(t)$ 是平稳过程。

$\mu_X(t)=0, R_X(\tau)=\cos\omega_0\tau$。

（2） 判断其是否为各态历经过程；

$<X(t)>=0, <X(t)X(t-\tau)>=\frac{A^2}{2}\cos(\omega_0\tau)$，不是各态历经的。

（3） 求 $X(t)$ 的平均功率和功率谱密度；

$\varphi^2=1$，$s_X(\omega)=\pi[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)]$

（4） 求 $R_{X'}(\tau)$。

$R_{X'}(\tau)=\omega_0^2\cos\omega_0\tau$。

六（5 分）证明：有限马尔可夫链不存在零常返态。

证明:(1)假设$\boldsymbol{I}$含有零常返状态$\boldsymbol{i}$，则$\boldsymbol{C}=\{j:i\to j\}$是不可约闭集

简单证明：$\boldsymbol{C}$的不可约性。$\forall j,k\in C$，有：$i\to j, i\to k$

由$\boldsymbol{i}$是常返态，由定理**4.2.8**知：$j\to i, k\to i$，则$j\leftrightarrow k$，即$\boldsymbol{C}$不可约。

再证$\boldsymbol{C}$是闭集，即$\forall j\in C$，$k\notin C$，有$j\mapsto k$。

反证，若$j\to k$ $\quad\because i\to j$，必有$i\to k$

则：$k\in C$与假设$k\notin C$矛盾，因此$\boldsymbol{C}$是闭集。

$\because C$是不可约闭集$\therefore \sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)}=1$，且$\boldsymbol{C}$是中所有状态全是零常返。

则由定理**4.4.1**，对$\forall j\in C$，有:$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$

但$\boldsymbol{C}$是有限集，当$n\to\infty$时有:$1=\lim_{n\to\infty}\sum_{j\in C} p_{ij}^{(n)}=\sum_{j\in C}\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=0$,矛盾。