概率论复习-Markov链

> Markov过程按状态空间I和参数集T进行分类。
>
> I和T均离散，即马尔科夫链
>
> I离散、但T连续，即为纯不连续的马尔科夫过程（间断性$Markov$过程）
>
> I和T均连续型$Markov$过程

Markov链

对状态空间为I的随机过程，$i_0, i_1, \dots i_{n+1} \in I$，参数集为T，$\{\xi_n, n \in T\}$，有：

$$P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_0 = i_0, \cdots \xi_n = i_n\} = P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n\}$$

则称$\{\xi_n\}$为Markov链，上式表达的性质称为Markov性。

转移概率&随机矩阵

称条件概率$p_{ij}(n) = P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\}$为Markov链$\{\xi_n, n \in T\}$的一步转移概率，其中$i, j \in I$

> 下一个转移状态不仅与上一个时刻的状态有关，且与当前的参数n有关，但如果$p_{ij}(n)$不依赖于n，则Markov链具有平稳的转移概率，即转移概率具有平稳性（齐次Markov链）

一步转移概率矩阵（随机矩阵）

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} & \dots \\ p_{21} & \dots & p_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

性质：

1. $p_{ij} \geq 0 (i, j \in I)$
2. $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1 (i \in I)$（从状态i出发转移到系统各个状态的概率之和为1）

n步转移概率：

称条件概率$p_{ij}^{(n)} = P\{\xi_{m+n} = j | \xi_m = i\} \, (i, j \in I, n \geq 1)$为Markov链$\{\xi_n, n \in T\}$的n步转移概率，并称$\boldsymbol{P}^{(n)} = \left(p_{ij}^{(n)}\right)$为Markov链的n步转移概率矩阵，其中：

1. $p_{ij}^{(n)} \geq 0$
2. $\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$

$\boldsymbol{P}^{(n)}$为随机矩阵，当n=1时，$\boldsymbol{P}^{(1)} = \boldsymbol{P}$,$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 i = j \\ 0 i \neq j \end{cases}$

C-K方程：

定理4.1.1 设$\{\xi_n, n\in T\}$为Markov链，则对$\forall n\ge 0, 1\le l<n, i,j\in I$，$p_{ij}^{(n)}$有如下性质：

(1) $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k\in I}p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n-l)}$ (Chapman – Kolmogorov方程，简称C – K方程)

(2) $p_{ij}^{(n)}=\sum_{k_1\in I}\cdots\sum_{k_{n-1}\in I}p_{ik_1}p_{k_1k_2}\cdots p_{k_{n-1}j}$ (3) $P^{(n)}=P\cdot P^{(n-1)}$ (4) $P^{(n)}=P^n$

> 意思就是n步转移概率可以通过所有的单步转移概率路径相加得到
>
> **n步转移概率矩阵是一步转移概率矩阵的n次幂**

初始概率概率&绝对概率

定义4.1.6 设$\{\xi_n, n\in T\}$为Markov链，分别称$p_i=P\{\xi_0=i\}$和$p_j(n)=P\{\xi_n=j\}(i,j\in I)$为Markov链的初始概率和绝对概率。

记：初始概率向量$P^T(0)=(p_1,p_2\cdots)$

n时刻的绝对概率向量$P^T(n)=(p_1(n),p_2(n)\cdots)$，$n>0$

Markov链的性质：

定理4.1.2 设$\{\xi_n, n\in T\}$为Markov链，则对$\forall n\ge 1, j\in I$，$p_j(n)$有如下性质：

(1) $p_j(n)=\sum_{i\in I}p_ip_{ij}^{(n)}$ (2) $p_j(n)=\sum_{i\in I}p_i(n-1)p_{ij}$

(3) $P^T(n)=P^T(0)\cdot P^{(n)}$ (4) $P^T(n)=P^T(n-1)\cdot P$

定理4.1.3 设$\{\xi_n, n\in T\}$为Markov链，则对$\forall i_1,\cdots i_n\in I$和$n\ge 1$，有：$P\{\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n\}=\sum_{i\in I}p_ip_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

推论 在定理4.1.3的条件下，有：

(1) $P\{\xi_0=i,\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n\}=p_i p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

(2) $P\{\xi_1=i_1,\cdots\xi_n=i_n|\xi_0=i\}=p_{ii_1}p_{i_1i_2}\cdots p_{i_{n-1}i_n}$

Markov链的状态分类(互通性)

设$Markov$链$\{\xi_n,n\geq0\}$具有可数的状态空间$I=\{0,1,2,\cdots\}$，转移概率矩阵为$P=(p_{ij})$，初始分布为$\{p_i,i\in I\}$。

定义4.2.1 若$\exists n\geq1$，使得$p_{ij}^{(n)}>0$，则称状态i可达j，记为$i\to j$；

反之，$\forall n$，均有：$p_{ij}^{(n)}=0$，则称状态i不可达j，记为$i\mapsto j$；

若$i\to j$且$j\to i$，则称状态i,j互通，记为$i\leftrightarrow j$。

通常将状态空间中互通的状态构成的集合称为类，互通的状态为同类。

定理：

定理4.2.1（传递性）若$i\to k$且$k\to j$，则$i\to j$。

证明：由$i\to k$，则$\exists l\geq1$，使得$p_{ik}^{(l)}>0$

由$k\to j$，则$\exists n\geq1$，使得$p_{kj}^{(n)}>0$

由$C-K$方程，$p_{ij}^{(n+l)}=\sum\limits_{r\in I}p_{ir}^{(l)}p_{rj}^{(n)}\geq p_{ik}^{(l)}p_{kj}^{(n)}>0$

则：$i\to j$。

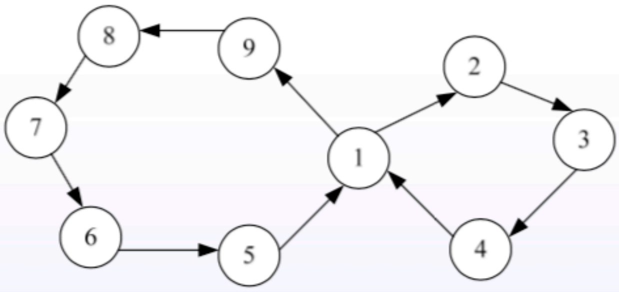
推论：若$i\to k_1,k_1\to k_2,\cdots,k_n\to j$，则$i\to j$

定理4.2.2 （1）对称性：若$i\leftrightarrow j$，则$j\leftrightarrow i$

（2）传递性：若$i\leftrightarrow k$且$k\leftrightarrow j$，则$i\leftrightarrow j$

状态的分类

例4.2.3 设*Markov*链的状态空间为$I=\{1,\cdots,9\}$,状态转移图如右图所示，求1状态的周期。



$$d(1)=G.C.D\{n:p_{11}^{(n)}>0\}=G.C.D\{4,6,8,10,12,14,16,\cdots\}=2$$

定义4.2.2 若$p_{ii}^{(n)}>0$的所有正整数$n\geq 1$存在最大公约数d，则称状态i是**周期**为d的,记为$d(i)=d$；若$d(i)=1$，则称状态i是非周期的。

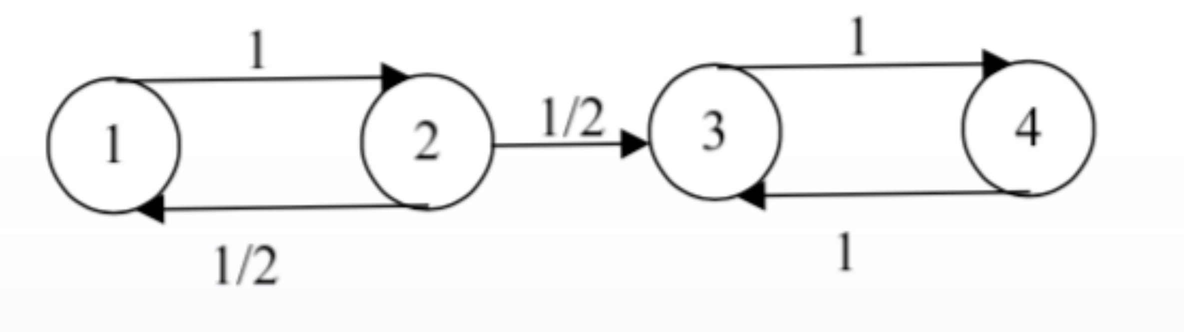
记：$d(i)=G.C.D\{n:p_{ii}^{(n)}>0\}$

> 其中G.C.D的意思是最大公约数

引理：

引理4.2.1 如果$d(i)=d$,则存在正整数M，使对一切$n\geq M$,有$p_{ii}^{(nd)}>0$。

重要例题：



设$I=\{1,2,3,4\}$，转移概率如图，显然状态2和状态3有相同的周期d=2，但是从状态3出发经过两步必然返回到3，而状态2则不然。

重要定义

定义4.2.3　对$Markov$链任意两个状态$i,j\in I$，定义：

（1）称T_{ij}是系统从状态i出发，首次到达状态j的时间：

$$T_{ij}=n\Leftrightarrow\{\xi_0=i,\xi_1\neq j,\cdots,\xi_{n-1}\neq j,\xi_n=j\}$$

（2）称$f_{ij}^{(n)}=P\left\{T_{ij}=n\middle|\xi_0=i\right\}\geq 0$是系统从状态$i$出发，经$n$步首次到达状态$j$的（条件）概率，即：

$$f_{ij}^{(n)}=P\left\{\xi_n=j,\xi_s\neq j,s=1,\cdots n-1\middle|\xi_0=i\right\}$$

（3）称$f_{ij}=P\left\{T_{ij}<\infty\middle|\xi_0=i\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}P\left\{T_{ij}=n\middle|\xi_0=i\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}f_{ij}^{(n)}$是系统从状态$i$出发，经有限步终于到达状态$j$的概率。

显然：$0\leq f_{ij}^{(n)}\leq f_{ij}\leq 1$，$\forall n\geq 1$，且补充：$f_{ij}^{(0)}=0,\forall i,j$

常返&非常返

当f_{ij}=1时，$\{f_{ij}^{(n)}$，$n=1,2,...\}$构成一个概率分布。而$T_{ij}=n$为随机变量，其概率为$f_{ij}^{(n)}$，于是我们考虑从状态i 出发最后到达状态j的平均时间：

$$\mu_{ij}=E\left(T_{ij}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ij}^{(n)}$$

当$i=j$，称$\mu_i=\sum_{n=1}^{\infty}nf_{ii}^{(n)}$为状态$i$的平均返回时间。

定义4.2.4　若$f_{ii}=1$，则称状态i常返（迟早必然会返回状态i）

若$f_{ii}<1$，则称状态i非常返

定义4.2.5　对常返状态i，若$\mu_i<\infty$，则为正常返；

若$\mu_i=\infty$，则为零常返。

定义4.2.6　非周期的正常返态，称为遍历态。

母函数：

设$\{a_n, n \geq 0\}$为一实数列，称幂级数$A(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n$为数列$\{a_n\}$的母函数，当存在$s_0 > 0$，使得$|s| < s_0$时$A(s)$收敛。

若$A(s)$，$B(s)$分别是$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的母函数，则数列：

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n = 0, 1, \cdots$$

的母函数$C(s) = A(s)B(s)$，称$\{c_n\}$是$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的卷积。

常返与非常返n步返回的概率和：

1. 状态i常返 $\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$

   > 常返的每次概率都为1($p_{ii} = 1$)

2. 状态i非常返，$\sum_{n=0}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \frac{1}{1-f_{ii}}$

   > 能返回的概率和，因为只返回有限次。

返态的极限返回概率：

定理4.2.7设i是周期为d的常返态，则$\lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(nd)} = d / \mu_i$。

证明略。

推论：设i常返，则

（1）i零常返 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 0$;

（2）i是遍历态 $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} p_{ii}^{(n)} = 1 / \mu_i$。

> 若j是零常返或非常返态，则$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

证明/判别->常返性：

1. 状态j常返$\Leftrightarrow f_{jj} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$
2. 状态j正常返$\Leftrightarrow f_{jj} = 1, \mu_j < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty, \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} > 0$
3. 状态j零常返$\Leftrightarrow f_{jj} = 1, \mu_j = \infty \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty, \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = 0$

4. 状态j非常返 $\Leftrightarrow f_{jj}<1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_{jj}^{(n)}<1 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}<\infty$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)}=0$

重要结论：有限状态的Markov链至少有一个常返态

互通与状态分类的关系

1. 若i常返，且$i \to j$,则$j \to i$
2. 若$i \leftrightarrow j$，则状态i，j有下列情况
   - 同为常返或同为非常返；若为常返，则同为正常返或同为零常返；
   - i,j有相同的周期

状态空间的分解：

定义4.3.1 设C是I的子集，若对$\forall i\in C, j\notin C$,有：$i \mapsto j$，则$C$为**闭集**。若$I$中状态均互通，则称$Markov$链**不可约**。

> 两个子集中的元素均不可达

定理4.3.1 $Markov$链的所有常返态构成一个闭集。

重要分解

定理4.3.2 $Markov$链的状态空间I可以分解为下列不相交子集的和：$I=D+C=D+C_1+C_2+\cdots$使得：

(1)每一个C_n是常返态组成的不可约闭集；

(2)C_n中的状态同类：或全为正常返，或全为零常返，它们有相同的周期，且$f_{jk}=1$，$j,k\in C_n$；

(3)D为所有非常返态组成的集合，由C_n中的状态不能到达D中的状态。

Markov链遍历性：

定理4.4.3 对$\forall i,j$，有：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\begin{cases}0 & \text{若}j\text{非常返或零常返}\\ f_{ij}/\mu_j & \text{若}j\text{正常返}\end{cases}$$

推论 不可约马氏链、常返，则对$\forall i,j$，有：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}p_{ij}^{(k)}=\frac{1}{\mu_j}$

Markov链的平稳分布

定义4.4.2 称概率分布$\{\pi_j,j\in I\}$为*Markov*链的平稳分布，若它满足：

$$\begin{cases}\pi_j=\sum\limits_{i\in I}\pi_i p_{ij}\\ \sum\limits_{j\in I}\pi_j=1,\pi_j\ge 0\end{cases}$$

> 解释：π_j 的值等于所有与它相连的点概率分布的加权（i到j的概率）和

定理4.4.4 不可约非周期*Markov*链是正常返$\Leftrightarrow$存在平稳分布，且此平稳分布为极限分布$\left\{\frac{1}{\mu_j},j\in I\right\}$。

推论1 有限状态的不可约非周期*Markov*链必存在平稳分布。

推论2 若不可约非周期*Markov*链的所有状态是非常返或零常返，则不存在平稳分布。

推论3 若$\{\pi_j, j \in I\}$是不可约非周期马氏链的平稳分布，则：

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j \qquad (4.45)$$

证明：由$p_j(n) = \sum_{i\in I} p_i p_{ij}^{(n)}$及$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$，有：

$$\lim_{n\to\infty} p_j(n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I} p_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in I} p_i \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i\in I} p_i \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$$

由定理4.4.2知：$\frac{1}{\mu_j} = \pi_j$，证毕。