概率论复习-泊松过程

计数过程&泊松过程

计数过程：

称随机过程$\{N(t), t \geq 0\}$为计数过程，若N(t)表示到时刻t为止已发生的"事件A"的总数，且N(t)满足下列条件：

1. $N(t) \geq 0$
2. N(t)取整数值
3. 若s<t，则$N(s) \leq N(t)$
4. 当s<t时，N(t)-N(s)等于区间(s,t]中“事件A”发生的次数

泊松过程：

定义1：称计数过程$\{X(t), \quad t \geq 0\}$为具有参数$\lambda(>0)$的泊松过程，如果：

1. X(0)=0;
2. X(t)是独立增量过程（在不重叠的时间段上随机过程的增量是相互独立的）
3. 在任意长度为t的区间中，事件A发生的次数服从参数为λt的泊松分布，即对任意的$s, t >= 0$,有

$$P\{X(t+s) - X(s) = n\} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}, n = 0, 1, \cdots$$

泊松过程是平稳增量过程且$E[X(t)] = \lambda t$,

由于$\lambda = \frac{E[X(t)]}{t}$表示单位时间内事件A发生的平均次数，故称$\lambda$为此过程的速率或强度。

定义2：称计数过程$\{X(t), \quad t \geq 0\}$为具有参数$\lambda(>0)$的泊松过程，如果：

1. X(0)=0;
2. X(t)是独立、平稳增量过程
3. 在充分小的时间间隔内，最多有一个事件发生

泊松过程的数字特征

$$\text{增量的期望：} E[X(t) - X(s)] = \lambda(t - s)$$

$$\text{增量的方差：} D[X(t) - X(s)] = \lambda(t - s)$$

$$\text{一维泊松点的期望：} m_X(t) = E[X(t)] = E[X(t) - X(0)] = \lambda t$$

$$\text{一维泊松点的方差：} \sigma_X^2(t) = D[X(t)] = D[X(t) - X(0)] = \lambda t$$

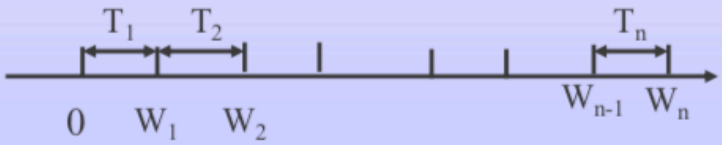
$$\text{泊松过程的自相关变量：当} s >= t \text{时，} R_X(s, t) = \lambda t(\lambda s + 1)$$

$$\text{泊松过程的自协方差：} B_X(s, t) = \lambda \min(s, t)$$

$$g_X(u) = E\left[e^{iuX(t)}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{iku} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\lambda t e^{iu}\right)^k}{k!} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\lambda t e^{u}} = e^{\lambda t\left(e^{iu}-1\right)}$$

泊松过程的时间间隔与等待时间的分布

设$\{X(t),t\geq 0\}$是泊松过程，令$X(t)$表示t时刻事件A发生（顾客出现）的次数，$W_1,W_2,\ldots$表示第一次、第二次，…事件A发生的时间，$T_n(n\geq 1)$表示从第$(n-1)$次事件A发生到第n次发生的时间间隔。通常称W_n为第n次事件A出现的时刻或第n次事件A的等待时间，T_n为第n个时间间隔，均为随机变量。



等待时间W_n：第n次事件发生的时间

时间间隔T_n：第n-1次事件到第n次事件的时间间隔

时间间隔T_n的分布

随机变量$T_n(n >= 1)$是独立同分布的均值为$\frac{1}{\lambda}$的指数分布：

$$f_{T_1}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0 & ,t < 0 \end{cases}$$

等待时间W_n的分布

随机变量W_n是服从参数为n与λ的Γ分布，概率密度：

$$f_{W_n}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

又称爱尔兰分布，是n个相互独立且服从指数分布的随机变量之和的概率密度。

到达时间的条件分布

假设在$[0,t]$内事件A已经发生了一次，我们要确定这一事件到达时间W_1的分布。因为泊松过程有平稳独立增量性，所以这个事件的到达时间在$[0,t]$上服从均匀分布。

$$\text{分布函数}：F_{W_1|X(t)=1}(s) = \begin{cases} 0, & s < 0 \\ s/t, & 0 \leq s < t \\ 1, & s \geq t \end{cases}$$

分布密度：$f_{W_1|X(t)=1}(s)=\begin{cases}1/t, 0\le s<t\\ 0,\text{其它}\end{cases}$

多次到达时间的条件分布

设$\{X(t),\ge 0\}$是泊松过程，已知在$[0,t]$内事件A发生n次，则这n次到达时间$W_1,W_2,...,W_n$与相应于n个[0,t]上均匀分布的独立随机变量的顺序统计量有相同的分布。

> 解释：就是对于$W_1,W_2,...,W_n$的分布，满足顺序统计量的分布

定义：给定(Ω,Σ,P)，$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为其上的随机向量，$\forall\omega\in\Omega$，将试验结果 $X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$ 按从小到大顺序重新进行排列，记为$X_{(1)}(\omega)\le X_{(2)}(\omega)\le\cdots\le X_{(n)}(\omega)$，称$X_{(1)},X_{(2)},\cdots,X_{(n)}$为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的顺序统计量。

> n个独立同分布连续型随机变量$X_1,...,X_n$的顺序统计量的概率密度函数(p.d.f.)为：
>
> $$f(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}n!\prod_{i=1}^n f(x_i), a<x_1<x_2\cdots<x_n<b\\ 0,\text{其它}\end{cases}$$