概率论习题-随机过程

随机过程的数字特征

例2.6 已知随机相位正弦波$X(t)=a\cos(\omega t+\Theta)$，其中$a>0$，$\omega$为常数，$\Theta$为在$(0,2\pi)$上服从均匀分布的随机变量。求随机过程$\{X(t),t\in(0,\infty)\}$的$m_X(t)$和$R_X(s,t)$。

解：由Θ在$(0,2\pi)$上服从均匀分布有：

$$f(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi},\theta\in(0,2\pi)\\ 0, \quad 其他\end{cases}$$

则：

$$m_X(t)=E[a\cos(\omega t+\Theta)]=a\int_0^{2\pi}\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=0$$

$$R_X(s,t)=E[X(s)X(t)]=E[a\cos(\omega s+\Theta)\cdot a\cos(\omega t+\Theta)]$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\cos(\omega s+\theta)\cdot\cos(\omega t+\theta)\cdot\frac{1}{2\pi}d\theta=\frac{a^2}{2}\cos\omega(t-s)$$

正态随机过程：

例2.11设正态随机过程$X(t)=Y+Zt$，$t>0$，其中Y，Z是相互独立的$N(0,1)$随机变量，求$\{X(t)，t>0\}$的一、二维概率密度族。

解：因为Y与Z是相互独立的正态随机变量，则其线性组合$X(t)$仍是正态随机变量，要计算其一、二维概率密度，只须计算其数字特征$m_X(t)$，$D_X(t)$和自相关系数$r_X(s,t)$即可。

$$m_X(t)=E\left[X(t)\right]=E\left[Y+Zt\right]=E(Y)+tE(Z)=0$$

$$D_X(t)=D\left[X(t)\right]=D\left[Y+Zt\right]=D(Y)+t^2D(Z)=1+t^2$$

$$B_X(s,t)=E\left[X(s)X(t)\right]-m_X(s)m_X(t)=E\left[(Y+Zs)(Y+Zt)\right]=1+st$$

$$r_X(s,t)=\frac{B_X(s,t)}{\sqrt{D_X(s)}\sqrt{D_X(t)}}=\frac{1+st}{\sqrt{1+s^2}\sqrt{1+t^2}}$$

则随机过程$\{X(t)，t>0\}$的一维概率密度为：

$$f_t(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\left(1+t^2\right)}}\exp\left\{-\frac{x^2}{2\left(1+t^2\right)}\right\}，\quad t>0$$

由上页，有：

$$m_X(t)=E\left[X(t)\right]=E\left[Y+Zt\right]=E(Y)+tE(Z)=0$$

$$D_X(t)=D\left[X(t)\right]=D\left[Y+Zt\right]=D(Y)+t^2D(Z)=1+t^2$$

$$B_X(s,t)=E\left[X(s)X(t)\right]-m_X(s)m_X(t)=E\left[(Y+Zs)(Y+Zt)\right]=1+st$$

则协方差矩阵$B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+s^2 & 1+st\\ 1+st & 1+t^2\end{pmatrix},X=(x_1,x_2)$

因此，随机过程$\{X(t)，t>0\}$的二维概率密度为：

$$f(s,t;x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi(\det B)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}XB^{-1}X^T\right\},s,t>0$$