



定理4.3.3不可约 $Markov$ 链的状态必为下列情况之一：
正常返、零常返、非常返。

证明： $Markov$ 链不可约，即 I 中状态均互通，由定理4.2.9得证。

引理 若 C 是闭集，则 $\{p_{ij}^{(k)}, i, j \in C, k \leq n\}$ 仍然是随机矩阵，从而以 C 为状态空间也构成一个 $Markov$ 链，称为**原马氏链的子马氏链**。

证明：即要证 $\sum_{k \in C} p_{ik}^{(k)} = 1, \forall i \in C, k \leq n$ 。

C 为闭集，则对 $\forall i \in C, j \notin C$ ，有 $i \mapsto j$ ，即对 $\forall k, p_{ij}^{(k)} = 0$ 。

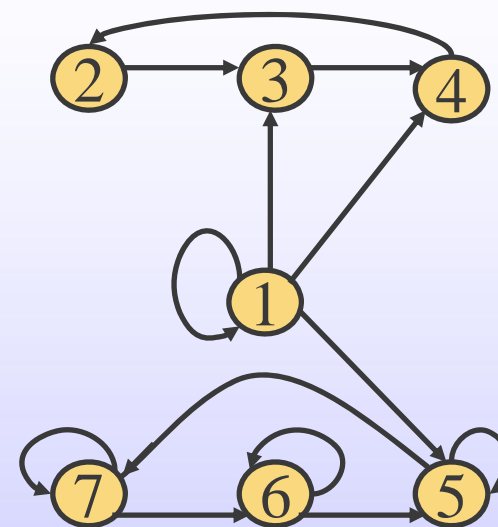
于是： $\sum_{k \in I} p_{ik}^{(k)} = \sum_{k \in C} p_{ik}^{(k)} + \sum_{k \notin C} p_{ik}^{(k)} = 1$ ，即 $\sum_{k \in C} p_{ik}^{(k)} = 1$ 得证。



由此可见： I 的一个闭子集 C ，可考虑 C 上的原马氏链的子马氏链，其状态空间为 C ，转移矩阵 $G=(p_{ij})$ ， $i, j \in C$ 是原马氏链转移矩阵 $P=(p_{ij})$ ， $i, j \in I$ 的子矩阵。

前面例4.3.3 Markov链的状态空间 $I = \{1, 2, \dots, 7\}$ ，转移概率矩阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$



下面研究质点在不可约闭集 C 中的运动情况



定理4.3.4 周期为 d 的不可约 $Markov$ 链，其状态空间 C 可唯一地分解成 d 个互不相交的子集之和，即： $C = \bigcup_{r=0}^{d-1} G_r$, $G_r \cap G_s = \Phi$, $r \neq s$, 且使得自 G_r 中任一状态出发，经一步转移必进入 G_{r+1} 中（其中 $G_d = G_0$ ）。

证明： 任意取定一状态 i ，对 $r = 0, 1, 2, \dots, d-1$ ，定义集合：

$$G_r = \left\{ j, \exists \text{ 某个 } n \geq 0, \text{ 有 } p_{ij}^{(nd+r)} > 0 \right\} \quad \because C \text{ 不可约, 则: } C = \bigcup_{r=0}^{d-1} G_r$$

若 $\exists j \in G_r \cap G_s$ ，则必存在某个 n 和 m ，使得 $p_{ij}^{(nd+r)} > 0$, $p_{ij}^{(md+s)} > 0$

又 $\because i \leftrightarrow j$ ，故必存在 h ，使得 $p_{ji}^{(h)} > 0$ ，于是有：

$$\begin{aligned} p_{ii}^{(nd+r+h)} &\geq p_{ij}^{(nd+r)} p_{ji}^{(h)} > 0 & G_0 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow \dots \rightarrow G_{d-1} \\ p_{ii}^{(md+s+h)} &\geq p_{ij}^{(md+s)} p_{ji}^{(h)} > 0 & \longleftarrow \end{aligned}$$

$\therefore d \mid r+h$ ，且 $d \mid s+h$ ，从而 $d \mid [(r+h)-(s+h)]$ ，即： $d \mid r-s$

但 $0 \leq r, s \leq d-1$ ，故必须有： $r-s=0$ ，即 $G_r \cap G_s = \Phi$ ($r \neq s$)



下证对任意的 $j \in G_r$, 有: $\sum_{k \in G_{r+1}} p_{jk} = 1$, 即自 G_r 中任一状态出发, 经一步转移必进入 G_{r+1} 中。

$$\text{事实上, } 1 = \sum_{k \in C} p_{jk} = \sum_{k \in G_{r+1}} p_{jk} + \sum_{k \notin G_{r+1}} p_{jk} = \sum_{k \in G_{r+1}} p_{jk}$$

下面分析 $\sum_{k \notin G_{r+1}} p_{jk} = 0$ 成立的原因:

$$\because G_r = \{j, \exists \text{ 某个 } n \geq 0, \text{ 有 } p_{ij}^{(nd+r)} > 0\}$$

$$\text{而 } j \in G_r \therefore p_{ij}^{(nd+r)} > 0$$

$$\text{当 } k \notin G_{r+1} \text{ 时, 有: } p_{ik}^{(nd+r+1)} = 0$$

$$\therefore 0 = p_{ik}^{(nd+r+1)} \geq p_{ij}^{(nd+r)} p_{jk}, \text{ 只可能有: } p_{jk} = 0$$



最后证明分解的唯一性，只需证明 $\{G_r\}$ 与最初 i 的选择无关。即对固定的 i ，状态 j 和 k 同属于 G_r ，则对另外选定的 i' ，状态 j 和 k 仍属于同一 G_r 。

假设对 i ， C 被分解为 G_0, G_1, \dots, G_{d-1} ，对 i' ， C 被分解为 $G'_0, G'_1, \dots, G'_{d-1}$

又假设 $j, k \in G_r$ ， $i' \in G_s$ ，则有：

$$G_s = \left\{ i', \exists \text{某个 } n_2 \geq 0, \text{有 } p_{ii'}^{(n_2 d + s)} > 0 \right\}$$

$$G_r = \left\{ j, \exists \text{某个 } n_1 \geq 0, \text{有 } p_{ij}^{(n_1 d + r)} > 0 \right\}$$

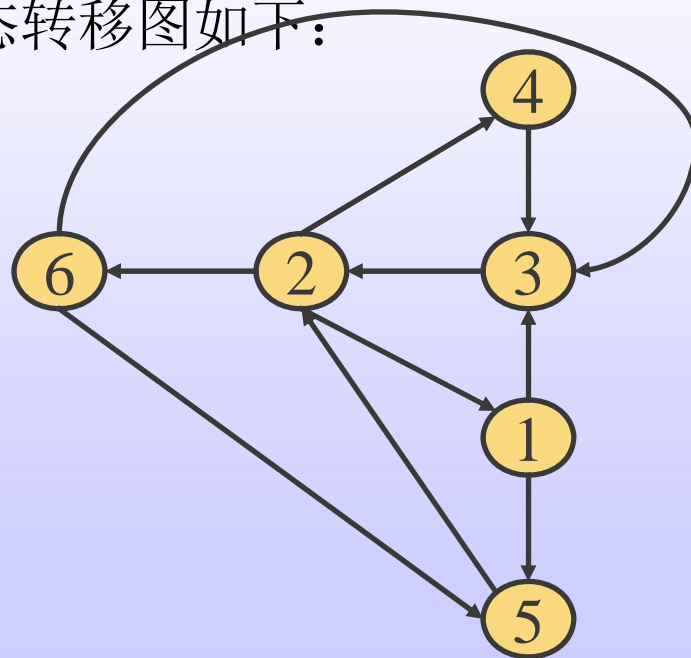
(1) 若 $r \geq s$ ，自 i' 出发，只能在 $r-s, r-s+d, r-s+2d, \dots$ 等步上到达状态 j, k 。故 j, k 均属于 G'_{r-s}

(2) 若 $r < s$ ，自 i' 出发，只能在 $d - (s-r) = r-s+d, 2d - (s-r) = r-s+2d \dots$ 等步上到达状态 j, k ，故 j, k 也同属于 G'_{r-s+d}

例4.3.5 设不可分 $Markov$ 链的状态空间 $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 转移阵为:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

解: 画出状态转移图如下:



例4.3.5 设不可分Markov链的状态空间 $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ，转移阵为：

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 & 0 \end{bmatrix}$$

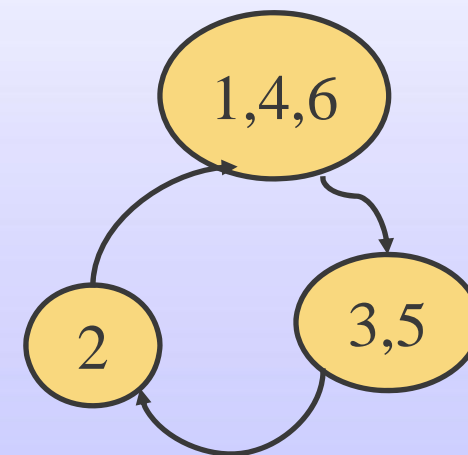
由状态转移图知，各状态的周期 $d = 3$ 。取 $i = 1$ ，令：

$$G_0 = \{j, \exists \text{ 某个 } n \geq 0, \text{ 有 } p_{1j}^{(3n)} > 0\}$$

$$G_1 = \{j, \exists \text{ 某个 } n \geq 0, \text{ 有 } p_{1j}^{(3n+1)} > 0\}$$

$$G_2 = \{j, \exists \text{ 某个 } n \geq 0, \text{ 有 } p_{1j}^{(3n+2)} > 0\}$$

则： $C = G_0 \cup G_1 \cup G_2 = \{1, 4, 6\} \cup \{3, 5\} \cup \{2\}$





定理4.3.5 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是周期为 d 的不可约 $Markov$ 链, 则在定理4.3.4的结论下有:

- (1) 如只在时刻 $0, d, 2d, \dots$ 上考虑 $\{X_n\}$, 即得一新马氏链, 其转移矩阵为: $P^{(d)} = (p_{ij}^{(d)})$, 对此新链, 每一 G_r 中是不可约闭集, 且 G_r 中的状态是非周期的;
- (2) 若原马氏链 $\{X_n\}$ 常返, 则 $\{X_{nd}\}$ 也常返。

证明:(1)由定理4.3.4得知 G_r 对 $\{X_{nd}\}$ 也是闭集。

另外, 对 $\forall j, k \in G_r$, 因 $\{X_n\}$ 不可约, 则存在 N , 使得 $p_{jk}^{(N)} > 0$ 。

由定理4.3.4知 N 只可能是 nd 形, 即: 对 $\{X_{nd}\}$, 有: $j \rightarrow k$

同理有: $k \rightarrow j$, 所以有: $j \leftrightarrow k$, 即 G_r 不可分。

再由引理4.2.1知, 存在正整数 M , 使对一切 $n \geq M$, 有 $p_{jj}^{(nd)} > 0$

所以, 对 $\{X_{nd}\}$, 状态 j 周期为1, 即非周期。



定理4.3.5 设 $\{X_n, n \geq 0\}$ 是周期为 d 的不可约 $Markov$ 链, 则在定理4.3.4的结论下有:

- (1) 如只在时刻 $0, d, 2d, \dots$ 上考虑 $\{X_n\}$, 即得一新马氏链, 其转移矩阵为: $P^{(d)} = (p_{ij}^{(d)})$, 对此新链, 每一 G_r 中是不可约闭集, 且 G_r 中的状态是非周期的;
- (2) 若原马氏链 $\{X_n\}$ 常返, 则 $\{X_{nd}\}$ 也常返。

证明(续):(2) 设马氏链 $\{X_n\}$ 常返, 则 $\forall j \in G_r$, 由周期的定义知: 当 $n \neq 0 \bmod(d)$ 时, $p_{jj}^{(n)} = 0$, 因此 $f_{jj}^{(n)} = 0$, 则:

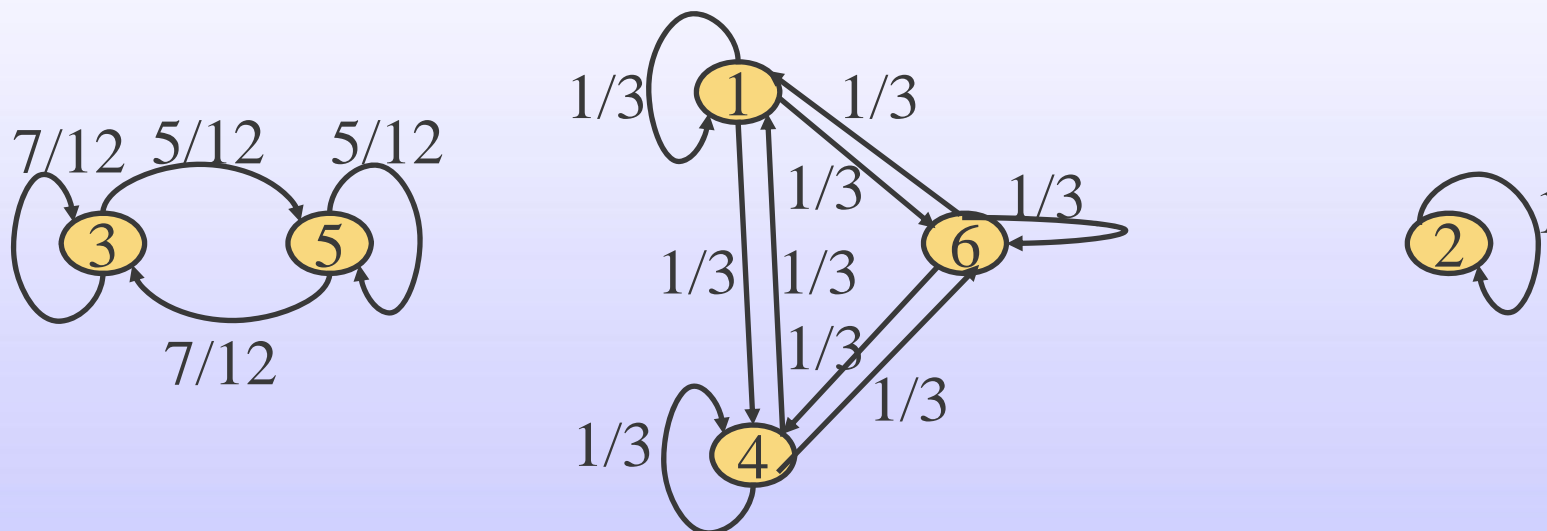
$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(nd)}, \text{ 则对 } \{X_{nd}\} \text{ 而言, } \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(nd)} = f_{jj} = 1。$$



例4.3.6 设 $\{X_n\}$ 为上例中的马氏链，已知 $d = 3$ ，则 $\{X_{3n}, n \geq 0\}$ 的

转移矩阵为： $P^{(3)} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 7/12 & 0 & 5/12 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$

解：画出子链的状态转移图如下：



$G_0 = \{1, 4, 6\}$, $G_1 = \{3, 5\}$, $G_2 = \{2\}$ 各形成不可约闭集，且周期为1。

第四节 $p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质与平稳分布

对 $p_{ij}^{(n)}$ 的极限性质，讨论两个问题：其一， $p_{ij}^{(n)}$ 是否存在？
其二，如果存在，其极限是否与 i 有关？

一、 $p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质

定理4.4.1 若 j 是零常返或非常返态，则： $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

前面已证明过，略。

定义4.4.1 $\forall i, j \in I$ ，有： $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = p_j > 0$ 存在，则称马氏链具有遍历性，这种马氏链又被叫做遍历链。



推论1 对于有限状态的 $Markov$ 链，必有：

(1)不可能全是非常返状态（已证），也不可能含有零常返态。

(2) D 不是闭集，因而有限不可约 $Markov$ 链只有常返态
且为正常返态。

证明:(1)假设 I 含有零常返状态 i ，则 $C = \{j : i \rightarrow j\}$ 是不可约闭集

简单证明： C 的不可约性。 $\forall j, k \in C$ ，有： $i \rightarrow j, i \rightarrow k$

由 i 是常返态，由定理4.2.8知： $j \rightarrow i, k \rightarrow i$ ，则 $j \leftrightarrow k$ ，即 C 不可约。

再证 C 是闭集，即 $\forall j \in C, k \notin C$ ，有 $j \nrightarrow k$ 。

反证，若 $j \rightarrow k \quad \because i \rightarrow j$ ，必有 $i \rightarrow k$

则： $k \in C$ 与假设 $k \notin C$ 矛盾，因此 C 是闭集。

$\because C$ 是不可约闭集 $\therefore \sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = 1$ ，且 C 是中所有状态全是零常返。

则由定理4.4.1，对 $\forall j \in C$ ，有： $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$

但 C 是有限集，当 $n \rightarrow \infty$ 时有： $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in C} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in C} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ ，矛盾。



推论1 对于有限状态的 $Markov$ 链，必有：

(1)不可能全是非常返状态（已证），也不可能含有零常返态。

(2) D 不是闭集，因而有限不可约 $Markov$ 链只有常返态且为正常返态。

证明(续)： (2) 若 D 是闭集，对 $i \in D$ ，有 $\sum_{j \in D} p_{ij}^{(n)} = 1$,

j 是非常返的，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0 (\forall i \in I)$

而状态空间 I 有限，则 D 有限： $1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j \in D} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in D} \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 矛盾。

所以 D 不是闭集。

于是根据(1)，有限不可约 $Markov$ 链作为一个闭集 C 不可能全是非常返状态，也不可能全是零常返状态，因此只能全是正常返态。



推论2若 $Markov$ 链有一个零常返态，则必有无限多个零常返状态。

证明：若 i 为零常返状态，则 $C = \{j : i \rightarrow j\}$ 是不可约闭集， C 中所有状态全是零常返的，根据推论1，则 C 不可能是有限集，即有无限多个零常返集。

前面讨论的是非常返状态和零常返状态 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 的渐近性质，但当 j 是正常返状态， $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，即使存在也可能与 i 有关。

下面讨论 $p_{ij}^{(nd)} (d \geq 1)$ 及 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)}$ 的极限，记：

$$f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}, 0 \leq r \leq d-1$$

表示系统从 i 出发，在时刻 $n = r \bmod(d)$ 首次到达状态 j 的概率

$$\text{显然: } \sum_{r=0}^{d-1} f_{ij}(r) = \sum_{r=0}^{d-1} \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{d-1} f_{ij}^{(md+r)} = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(m)} = f_{ij}$$



定理4.4.2 若 j 正常返, 周期为 d , 则 $\forall i \in I$ 及 $0 \leq r \leq d-1$, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j}$$

证明 因为 $p_{jj}^{(n)} = 0, n \neq 0 \bmod(d)$, 则:

$$p_{ij}^{(nd+r)} = \sum_{v=0}^{nd+r} f_{ij}^{(v)} p_{jj}^{(nd+r-v)} = \sum_{m=0}^n f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d}$$

则对 $1 \leq N < n$, 有:

$$\sum_{m=0}^N f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d} \leq p_{ij}^{(nd+r)} \leq \sum_{m=0}^N f_{ij}^{(md+r)} p_{jj}^{(n-m)d} + \sum_{m=N+1}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}$$

先固定 N , 令 $n \rightarrow \infty$, 再令 $N \rightarrow \infty$, 由定理4.2.7, 即:

$$f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+r)} \leq f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j}$$

则: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+r)} = f_{ij}(r) \frac{d}{\mu_j}$



推论 设不可约、正常返、周期 d 的马氏链，其状态空间为 C ，则

$$\text{对 } \forall i, j \in C, \text{ 有: } \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd)} = \begin{cases} d/\mu_j & \text{若 } i \text{ 与 } j \text{ 属于同一子集 } G_s \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (4.38)$$

其中 $C = \bigcup_{s=0}^{d-1} G_s$ 由定理4.3.4给出(定理4.2.7是该推论 $j=i$ 的特例)。

$$\text{特别地若 } d=1, \forall i, j \text{ 有: } \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} \quad (4.39)$$

证明: 在定理4.4.2中取 $r=0$ ，得：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd)} = f_{ij}(0) \frac{d}{\mu_j}, \text{ 其中: } f_{ij}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md)}$$

若 i 与 j 不属于同一子集 G_s ，由定理4.3.4有： $p_{ij}^{(nd)}=0$ ，则： $f_{ij}^{(nd)}=0$ ，即：

$f_{ij}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md)} = 0$ ；若 i 与 j 属于 G_s 且 $n \neq 0 \pmod{d}$ ，有 $p_{ij}^{(n)}=0$ ，则：

$f_{ij}^{(n)}=0$ ，故： $f_{ij}(0) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md)} = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(m)} = f_{ij} = 1$ ，则： $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd)} = \frac{d}{\mu_j}$ 得证



由: $f_{ij}(r) = \sum_{m=0}^{\infty} f_{ij}^{(md+r)}, 0 \leq r \leq d-1$, 概率 $f_{ij}(r)$ 似乎与 j 有关,
实际上 $f_{ij}(r)$ 只依赖于 j 所在的子集 G_s 。

对 $\forall j, k \in G_s$, 均有: $f_{ij}(r) = f_{ik}(r)$ 。

$\sum_{k=1}^n p_{jj}^{(k)}$ 表示自 j 出发, 在 n 步之内返回 j 的平均次数, 因此

$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{jj}^{(k)}$ 表示每单位时间内再返回 j 的平均次数, 而 $\frac{1}{\mu_j}$ 也表示

自 j 出发每单位时间内再返回 j 的平均次数, 则: $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{jj}^{(k)} \approx \frac{1}{\mu_j}$

若质点自 i 出发, 则需讨论自 i 出发能否到达 j 的情况, 即要考虑 f_{ij} 的大小。



定理4.4.3 对 $\forall i, j$, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{若 } j \text{ 非常返或零常返} \\ f_{ij} / \mu_j & \text{若 } j \text{ 正常返} \end{cases}$$

证明 若 j 为非常返或零常返, 根据前面的结果有: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$,

$$\text{所以, 有: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = 0$$

j 为正常返, 周期为 d , 应用下列事实: 假设 d 个数列 $\{a_{nd+s}\}$, $s = 0, 1, 2, \dots, d-1$, 若对每一个 s , 存在 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{nd+s} = b_s$, 则必有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} b_s \quad (4.40)$$

在上式中令: $a_{nd+s} = p_{ij}^{(nd+s)}$, 由定理4.4.2, 有:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(nd+s)} = f_{ij}(s) \frac{d}{\mu_j}$$

$$\text{则: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} f_{ij}(s) \frac{d}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j} \sum_{s=0}^{d-1} f_{ij}(s) = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$$



推论 不可约马氏链、常返，则对 $\forall i, j$ ，有： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \frac{1}{\mu_j}$

证明：若 $\forall j$ 为零常返， $\mu_j = \infty$ ，由定理4.4.3成立；

若 $\forall j$ 为正常返， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j}$ ，马氏链不可约 $f_{ij} = 1$

所以： $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_{ij}^{(k)} = \frac{f_{ij}}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$ ，证毕。

由以上定理知，当 j 正常返时，尽管 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$ 不一定存在，但其平均值的极限存在，特别是当马氏链不可约时，其极限与 i 无关，在马氏链理论中 μ_j 是一个重要的量，定理4.4.2和定理4.4.3均给出了 μ_j 的计算公式，下面再通过平稳分布来讨论 μ_j 的计算方法。



二、平稳分布

定义4.4.2 称概率分布 $\{\pi_j, j \in I\}$ 为 $Markov$ 链的平稳分布, 若它满足:

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} \\ \sum_{j \in I} \pi_j = 1, \pi_j \geq 0 \end{cases}$$

写成矩阵形式为:

$$\begin{cases} (\pi_0, \pi_1, \dots) = (\pi_0, \pi_1, \dots) \begin{pmatrix} p_{00} & p_{01} & \dots \\ p_{10} & p_{11} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \\ \sum_{j \in I} \pi_j = 1, \pi_j \geq 0 \end{cases}$$



由定义知：若初始分布 $\{p_j, j \in I\}$ 为平稳分布，则绝对分布 $\{p_j(n), j \in I\}$ 也为平稳分布。

事实上，由 $\{p_j, j \in I\}$ 为平稳分布，则：

$$\begin{cases} p_j = \sum_{i \in I} p_i p_{ij} \\ \sum_{j \in I} p_j = 1, p_j \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{则： } p_j(1) = P\{\xi_1 = j\} = \sum_{i \in I} p_i p_{ij} = p_j$$

$$p_j(2) = P\{\xi_2 = j\} = \sum_{i \in I} p_i(1) p_{ij} = \sum_{i \in I} p_i p_{ij} = p_j$$

根据归纳法，有： $p_j(n) = P\{\xi_n = j\} = \sum_{i \in I} p_i(n-1) p_{ij} = \sum_{i \in I} p_i p_{ij} = p_j$

另外注意到：对平稳分布 $\{\pi_j, j \in I\}$ ，有： $\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}$ ，事实上：

$$\begin{aligned} \pi_j &= \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} = \sum_{i \in I} \left(\sum_{k \in I} \pi_k p_{ki} \right) p_{ij} = \sum_{k \in I} \pi_k \left(\sum_{i \in I} p_{ki} p_{ij} \right) = \sum_{k \in I} \pi_k p_{kj}^{(2)} \\ &= \cdots = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)} \end{aligned}$$



定理4.4.4 不可约非周期 $Markov$ 链是正常返 \Leftrightarrow 存在平稳分布,

且此平稳分布为极限分布 $\left\{ \frac{1}{\mu_j}, j \in I \right\}$ 。

证明: \Leftarrow 设 $\{\pi_j, j \in I\}$ 是平稳分布, 则: $\pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)}$

而: $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$, 而极限分布存在为: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$

$$\begin{aligned} \text{则: } \pi_j &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in I} \pi_i \left(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} \right) \\ &= \sum_{i \in I} \pi_i \left(\frac{1}{\mu_j} \right) = \frac{1}{\mu_j} \end{aligned}$$

因: $\sum_{j \in I} \pi_j = 1$, 所以至少存在一个 $\pi_k > 0$, 即 $\frac{1}{\mu_k} > 0$, 则:

k 为正常返, 故不可约马氏链所有状态全部是正常返。

下页证明必要性 \Rightarrow



若马氏链是不可约非周期正常返的，则： $\forall j \in I, \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j} > 0$

由C-K方程： $p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)} \geq \sum_{k=0}^N p_{ik}^{(m)} p_{kj}^{(n)}, \forall j \in I$

令 $n \rightarrow \infty$ ，则： $\frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{k=0}^N \frac{1}{\mu_k} p_{kj}^{(n)}$

再令 $N \rightarrow \infty$ ，有： $\frac{1}{\mu_j} \geq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} p_{kj}^{(n)} = \sum_{k \in I} \frac{1}{\mu_k} p_{kj}^{(n)}, \forall j$

下面证明上面的式子等号必须成立：

反证：若 $\exists j$ 使得 $\frac{1}{\mu_j} > \sum_{k \in I} \frac{1}{\mu_k} p_{kj}^{(n)}$

则： $\sum_{j \in I} \frac{1}{\mu_j} > \sum_{j \in I} \sum_{k \in I} \frac{1}{\mu_k} p_{kj}^{(n)} = \sum_{k \in I} \frac{1}{\mu_k} \sum_{j \in I} p_{kj}^{(n)} = \sum_{k \in I} \frac{1}{\mu_k}$



则: $\sum_{j \in I} \frac{1}{\mu_j} > \sum_{k \in I} \frac{1}{\mu_k}$ 矛盾, 则: $\frac{1}{\mu_j} = \sum_{k \in I} \frac{1}{\mu_k} p_{kj}^{(n)}$

另: $1 = \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} \rightarrow \sum_{j \in I} \frac{1}{\mu_j} (n \rightarrow \infty)$, 则 $\sum_{j \in I} \frac{1}{\mu_j} = 1$

则 $\left\{ \frac{1}{\mu_j}, j \in I \right\}$ 为平稳分布, 且平稳分布就是极限分布

推论1 有限状态的不可约非周期 $Markov$ 链必存在平稳分布。

推论2 若不可约非周期 $Markov$ 链的所有状态是非常返或零常返, 则不存在平稳分布。

证明: 若所有状态为非常返, 或零常返, 且存在平稳分布。

设 $\{p_j, j \in I\}$ 是平稳分布, 则: $p_j = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^{(n)}$

由所有状态为非常返, 或零常返知: $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = 0$ 。

于是 $p_j = 0$ 。但这不可能。



推论3 若 $\{\pi_j, j \in I\}$ 是不可约非周期马氏链的平稳分布，则：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = \frac{1}{\mu_j} = \pi_j \quad (4.45)$$

证明：由 $p_j(n) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^{(n)}$ 及 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mu_j}$ ，有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_j(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in I} p_i \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \sum_{i \in I} p_i \frac{1}{\mu_j} = \frac{1}{\mu_j}$$

由定理4.4.2知： $\frac{1}{\mu_j} = \pi_j$ ，证毕。



例4.4.1 一非周期不可约正常返 $Markov$ 链, $I = \{0,1\}$, 其转

移概率矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{bmatrix}$, ($p, q > 0$), 求平稳分布。

解: 根据已知条件有: $p_{00} = 1-p$, $p_{01} = p$, $p_{10} = q$,

$$p_{11} = 1-q$$

利用 $C-K$ 方程, 有: $p_{00}^{(n)} = \sum_{i=0}^1 p_{0i}^{(n-1)} p_{i0}$

$$= p_{00}^{(n-1)} p_{00} + p_{01}^{(n-1)} p_{10}$$

$$= p_{00}^{(n-1)} (1-p) + \left[1 - p_{00}^{(n-1)} \right] q$$

$$= q + (1-p-q) p_{00}^{(n-1)} = q + d p_{00}^{(n-1)}, \text{ 其中 } d = 1-p-q$$



由 $p_{00}^{(1)} = 1 - p$, 则: $p_{00}^{(2)} = q + dp_{00}^{(1)} = q + (1 - p)d$

且: $p_{00}^{(3)} = q + dp_{00}^{(2)} = q + qd + (1 - p)d^2 \dots$

一般地, 有: $p_{00}^{(n)} = q \frac{1 - d^{n-1}}{1 - d} + (1 - p)d^{n-1}$

$$= \frac{1}{1 - d} (q + pd^n)$$

$$= \frac{q}{p + q} + \frac{p}{p + q} (1 - p - q)^n$$

同理, 有: $P^{(n)} = \frac{1}{p + q} \begin{bmatrix} q & p \\ q & p \end{bmatrix} + \frac{(1 - p - q)^n}{p + q} \begin{bmatrix} p & -p \\ -q & q \end{bmatrix}$



$$\text{而 } \pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$$

$$\text{则 } \pi_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i0}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{00}^{(n)} = \frac{q}{p+q} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{10}^{(n)}$$

$$\pi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{i1}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{01}^{(n)} = \frac{p}{p+q} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{11}^{(n)}$$

$$\text{则平稳分布为 } \left\{ \frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q} \right\}。$$

本例是利用极限分布求平稳分布的典型例子，但一般地求 $P^{(n)}$ 比较困难，因此这种方法具有一定的局限性。



例4.4.2 设 $Markov$ 链的转移概率矩阵为 $P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix}$, 求平稳

分布及各状态的平均返回时间。

解：由 P 的结构我们知道，该 $Markov$ 链的所有状态均互通，即不可分。显然，该 $Markov$ 链为非周期的不可分的正常返链，则存在平稳分布。

$$\text{由: } \begin{cases} \pi_j = \sum_{i \in I} \pi_i p_{ij} \\ \sum_{j \in I} \pi_j = 1 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} (\pi_1, \pi_2, \pi_3) = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.8 & 0.1 \\ 0.05 & 0.05 & 0.9 \end{bmatrix} \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

解得： $\pi_1 = 0.1765$, $\pi_2 = 0.2353$, $\pi_3 = 0.5882$

由定理4.4.2, 得： $\mu_1 = \frac{1}{\pi_1} = 5.67$, $\mu_2 = \frac{1}{\pi_2} = 4.25$, $\mu_3 = \frac{1}{\pi_3} = 1.7$

事实上，可以先不判断是否存在平稳分布，而是根据平稳分布的定义求解线性方程组。若方程组存在非负解，则存在平稳分布。



例4.4.3 设 $Markov$ 链具有状态空间 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$, 其转移概率矩阵为:

$$p_{ij} = \begin{cases} p_i & j = i + 1 \\ r_i & j = i, i \geq 0 \\ q_i & j = i - 1, i \geq 1 \end{cases} \quad \text{其中 } p_i, q_i \geq 0 \text{ 且 } p_i + r_i + q_i = 1$$

这样的 $Markov$ 链称为生灭链, 它是不可约的。若记: $a_0 = 1$,

$$a_j = \frac{p_0 p_1 \cdots p_{j-1}}{q_1 q_2 \cdots q_j} (j \geq 1), \text{ 试证: } Markov \text{ 链存在平稳分布 } \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$$

证明: $(\pi_0, \pi_1, \pi_2 \cdots) = (\pi_0, \pi_1, \pi_2 \cdots) \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$

则:
$$\begin{cases} \pi_0 = r_0 \pi_0 + q_1 \pi_1 \\ \pi_j = p_{j-1} \pi_{j-1} + r_j \pi_j + q_{j+1} \pi_{j+1} \quad (j \geq 1) \\ p_j + r_j + q_j = 1 \end{cases}$$



$$\text{则: } q_1\pi_1 = \pi_0 - r_0\pi_0 = p_0\pi_0$$

$$q_{j+1}\pi_{j+1} - p_j\pi_j = q_j\pi_j - p_{j-1}\pi_{j-1} (j \geq 1)$$

$$\text{得: } \pi_1 = \frac{p_0}{q_1}\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{p_1}{q_2}\pi_1, \dots$$

$$\pi_j = \frac{p_{j-1}}{q_j}\pi_{j-1} = \frac{p_{j-1}}{q_j} \frac{p_{j-2}}{q_{j-1}}\pi_{j-2} = \dots = \frac{p_0 p_1 \dots p_{j-1}}{q_1 q_2 \dots q_j} \pi_0 (j \geq 1)$$

$$\text{而: } \sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = 1 \Leftrightarrow \pi_0 + a_1\pi_0 + \dots + a_j\pi_0 + \dots = 1,$$

$$\text{即生灭链存在平稳分布} \Leftrightarrow \pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} a_j} \Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} a_j < \infty$$

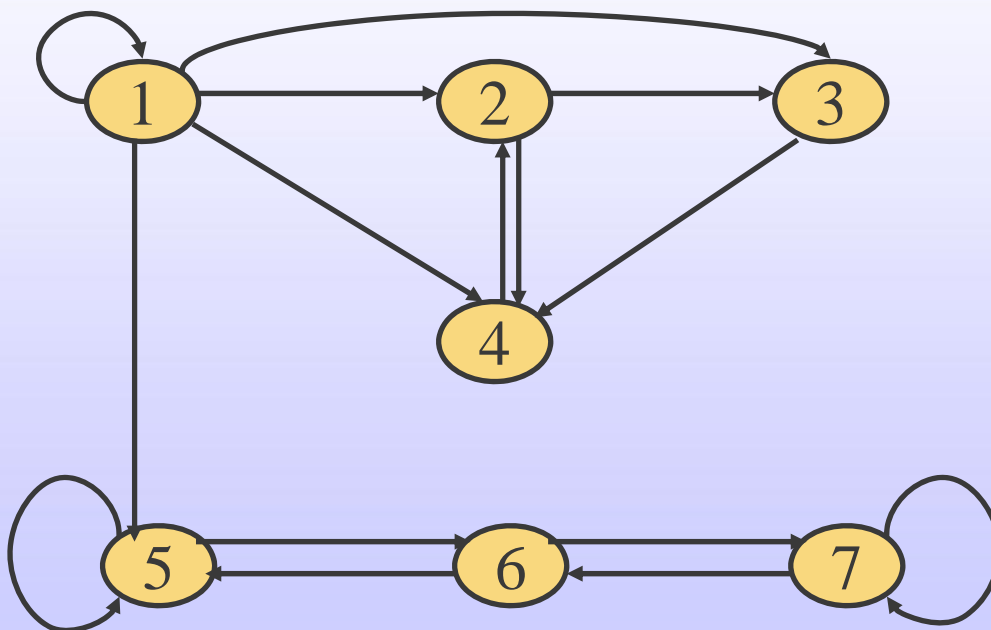


例4.4.4

$$P = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 & 0.2 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

求每一个不可约
闭集的平稳分布；

求 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{13}^{(n)}$



解：1°画出状态转移图
2°由图当 $i \neq 1$ ，有 $i \mapsto 1$
则1为非常返态， $D = \{1\}$
而 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 2$ ，则
 $C_1 = \{2, 3, 4\}$ – 不可约常返
同理： $C_2 = \{5, 6, 7\}$



对 $C_1 = \{2, 3, 4\}$, 有: $P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

得:
$$\begin{cases} (\pi_2, \pi_3, \pi_4) = (\pi_2, \pi_3, \pi_4) \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1 \end{cases}$$

则: $\pi_2 = 2/5, \pi_3 = 1/5, \pi_4 = 2/5$

得平稳分布 $\{0, 2/5, 1/5, 2/5, 0, 0, 0\}$

同理, 对 $C_2 = \{5, 6, 7\}$, 有: $P_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$

得平稳分布 $\{0, 0, 0, 0, 1/3, 1/3, 1/3\}$



$$\begin{aligned} p_{13}^{(n)} &= \sum_{k=1}^7 p_{1k} p_{k3}^{(n-1)} \\ &= 0.1 p_{13}^{(n-1)} + 0.1 p_{23}^{(n-1)} + 0.2 p_{33}^{(n-1)} + 0.2 p_{43}^{(n-1)} + 0.4 p_{53}^{(n-1)} \\ &= 0.1 p_{13}^{(n-1)} + 0.1 p_{23}^{(n-1)} + 0.2 p_{33}^{(n-1)} + 0.2 p_{43}^{(n-1)} \end{aligned}$$

而状态3常返，则：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{23}^{(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{33}^{(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{43}^{(n-1)} = \pi_3 = 0.2$$

$$\text{故: } \lim_{n \rightarrow \infty} p_{13}^{(n)} = 0.1 \lim_{n \rightarrow \infty} p_{13}^{(n-1)} + 0.1, \quad \text{而: } \lim_{n \rightarrow \infty} p_{13}^{(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{13}^{(n-1)}$$

$$\text{则: } \lim_{n \rightarrow \infty} p_{13}^{(n)} = 1/9$$



例4.4.5 独立地重复抛掷一枚硬币，每次抛掷出现正面的概率为 p 。对于 $n \geq 2$ ，令 $X_n = 0, 1, 2, 3$ 分别对应于第 $n-1$ 次和第 n 次抛掷的结果为(正, 正), (正, 反), (反, 正), (反, 反)。

- ① 试问该过程是否为马尔可夫链；
- ② 计算它的一步转移概率矩阵；
- ③ 讨论其状态分类、周期、平稳分布；
- ④ 求 $P\{X_2 = 3, X_3 = 2, X_5 = 0\}$

解: (1) $\forall n \in \mathbb{Z}, I = \{0, 1, 2, 3\}$

对 $\forall i_1, i_2, \dots, i_n, i_{n+1} \in I$ ，且 $P\{X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n\} > 0$ ，有：

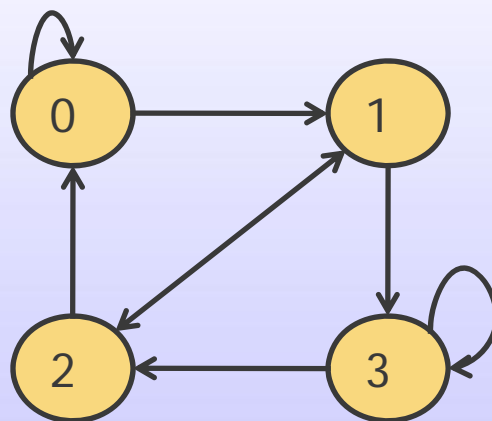
$$P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_1 = i_1, X_2 = i_2, \dots, X_n = i_n\} = P\{X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n\}$$

且与 n 无关，则该过程为齐次马氏链。




$$(2) P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{bmatrix}$$

(3)



- 所有状态均互通。
- 且因状态空间有限，所以所有状态全均为正常返态。
- 周期为1

下面求平稳分布：


$$\begin{cases} (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) = (\pi_0 \quad \pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3) \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ p & 1-p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \end{bmatrix} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

则： $\pi_0 = p^2, \pi_1 = \pi_2 = pq, \pi_3 = q^2$, 其中 $q = 1 - p$

$$(4) P\{X_2 = 3, X_3 = 2, X_5 = 0\}$$

$$= P\{X_2 = 3\} \cdot P\{X_3 = 2 | X_2 = 3\} \cdot P\{X_5 = 0 | X_3 = 2\}$$

$$= q^2 \cdot p_{32} \cdot p_{20}^{(2)} = pq^2 \cdot p^2 = p^3 q^2$$

$$\text{其中： } P\{X_2 = 3\} = q^2$$

$$p_{20}^{(2)} = p_{20} \cdot p_{00} + p_{21} \cdot p_{10} + p_{22} \cdot p_{20} + p_{23} \cdot p_{30} = p^2$$



练习:

书后习题

4.1,4.2,4.4,4.7(1),4.9,4.10(1),4.12,4.15(1),(3)