

第四章 *Markov*链

- ◆ 内容

*Markov*链的概念及转移概率（包括一步和 n 步转移概率）的概念； n 步转移概率与一步转移概率的关系；*Markov*链的状态分类；状态空间的分解；平稳分布。

- ◆ 重点

*Markov*链的定义、一步转移概率及状态分类

- ◆ 难点

状态分类



前面讨论的随机过程是按照其数字特征来进行分类的，在本章我们将对Markov过程按其状态空间 I 和参数集 T 进行分类。

- 1、 I 和 T 均离散，即为本章将要讨论的Markov链；
 - 2、 I 离散、但 T 连续，即为纯不连续的Markov过程（间断型Markov 过程；
 - 3、 I 和 T 均连续，即为连续型Markov过程
- 不妨假设

$$I = \{x_0, x_1, \dots\}, \text{以后令 } I = \{i\}, \quad T = \{0, 1, 2, \dots\}$$



第一节 Markov链的概念及转移概率

一、Markov链的定义

定义4.1.1 若随机过程 $\{\xi_n, n \in T\}$, 对 \forall 正整数 $n \in T$ 和 $i_0, i_1, \dots, i_{n+1} \in I$, 有:

$$P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_0 = i_0, \dots, \xi_n = i_n\} = P\{\xi_{n+1} = i_{n+1} | \xi_n = i_n\} \quad (4.1.1)$$

则称 $\{\xi_n\}$ 为**Markov链**, 上式所表达的性质称为**Markov性** (无后效性)。

解释: 若把时刻 n 看成“现在”, 把时刻 $0, 1, \dots, n-1$ 看成“过去”, 把时刻 $n+1$ 看成“将来”, 那么**Markov性** (无后效性) 说: 在已知系统“现在”所处状态的情况下, 系统将来的状态与“过去”所经历的状态无关。



定理 随机过程 $\{\xi_n, n \in T\}$ 为 *Markov* 链的充要条件是对任意的正整数 m, k 及任意的非负整数 $n_1 < n_2 < \cdots < n_r < m$, 以及任意的 $i_1, i_2, \cdots, i_r, i, j \in I$ 有:

$$P\{\xi_{m+k} = j \mid \xi_{n_1} = i_1, \cdots, \xi_{n_r} = i_r, \xi_m = i\} = P\{\xi_{m+k} = j \mid \xi_m = i\}$$

定义4.1.2 称条件概率 $p_{ij}(n) = P\{\xi_{n+1} = j \mid \xi_n = i\}$ 为 *Markov* 链 $\{\xi_n, n \in T\}$ 的 **一步转移概率**, 其中 $i, j \in I$.

一般地, $p_{ij}(n)$ 不仅与 i, j 有关, 而且也与 n 有关, 若 $p_{ij}(n)$ 不依赖于 n , 则 *Markov* 链具有平稳的转移概率, 即转移概率具有平稳性。



定义4.1.3 若 $Markov$ 链具有平稳的转移概率, 即 $p_{ij}(n)$ 与 n 无关, 则称马氏链是**齐次**的, 记 $p_{ij}(n)$ 为 p_{ij} .

本章只讨论齐次的 $Markov$ 链。

定义4.1.4 $I = \{1, 2, \dots\}$, 称

$$P = (p_{ij}) = \begin{bmatrix} p_{11} & \dots & p_{1n} & \dots \\ p_{21} & \dots & p_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

为系统的一步转移概率矩阵 (随机矩阵), 它具有如下性质:

- (1) $p_{ij} \geq 0 (i, j \in I)$
- (2) $\sum_{j \in I} p_{ij} = 1 (i \in I)$ (从状态 i 出发转移到系统各个状态的概率之和为1)

简单证明(2): $\sum_{j \in I} p_{ij} = \sum_{j \in I} P\{\xi_{n+1} = j | \xi_n = i\} = P\{\Omega | \xi_n = i\} = 1$



例4.1.1 质点在1、2、3、4四个整数点上随机游动，当质点在2、3时分别以1/3的概率向左、向右、或停留在原地；当质点在1时以概率1返回原地；质点在4时以概率1返回到3，若以 X_n 表示质点在时刻 n 所处的位置，求其转移概率矩阵。

解：由题意知，状态空间为 $\{1,2,3,4\}$ ，且：

$$p_{11} = 1 \quad p_{12} = p_{13} = p_{14} = 0$$

$$p_{21} = p_{22} = p_{23} = 1/3 \quad p_{24} = 0$$

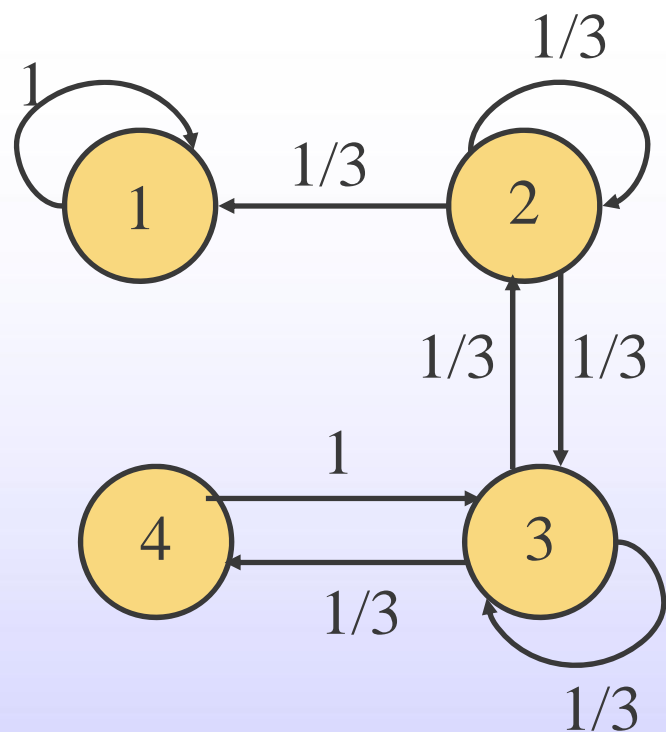
$$p_{32} = p_{33} = p_{34} = 1/3 \quad p_{31} = 0$$

$$p_{43} = 1 \quad p_{41} = p_{42} = p_{44} = 0$$

$$\text{则： } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



试画出状态转移图如下：



由状态转移图，我们知道：1、4是质点游动不可越过的壁，因此1为**吸收壁**，即质点到达该点后就被完全吸住，不再转移；4为**反射壁**，即质点一旦到达该状态，必然被反射回去。



例4.1.2(排队模型) 设服务系统由一个服务员和只容纳两个人的等候室组成，服务规则是：先到先服务，后来者需在等候室依次排队，假定一个顾客到达系统时发现系统内已有三个顾客，则该顾客即离去。设时间间隔 Δt 内将有一个顾客进入系统的概率为 q ，原来被服务的顾客离开系统（即服务完毕）的概率为 p ；又设当 Δt 充分小时，在 Δt 的时间间隔内多于一个顾客进入或离开系统实际上是不可能的；再设有无顾客来到与服务是否完毕是相互独立的。现用马氏链来描述该系统，设 $\xi_n = \xi(n\Delta t)$ 表示时刻 $n\Delta t$ 时系统内的顾客数。计算其一步转移概率矩阵。

分析： $I = \{0, 1, 2, 3\}$



解：根据题意， $p_{00} = P\{\xi_{n+1} = 0 | \xi_n = 0\}$ —系统内原本没有顾客，经过 Δt 的时间间隔后仍然没有顾客的概率，即无人进入该系统，因此 $p_{00} = 1 - q$ ；同理： $p_{01} = q$

$p_{02} = p_{03} = 0$ — Δt 的时间间隔内不可能有多于一个的顾客离开。

$p_{10} = P\{\xi_{n+1} = 0 | \xi_n = 1\}$: 系统原有一个顾客，经过 Δt 的时间间隔后没有顾客的概率，即 Δt 的时间间隔内原有顾客因服务完毕而离开，且没有任何人进入该系统，因此 $p_{10} = p(1 - q)$

$p_{11} = P\{\xi_{n+1} = 1 | \xi_n = 1\}$ —系统原有一个顾客，经过 Δt 的时间间隔后仍为一个顾客的概率，这里有两种情况：或者原有顾客因服务完毕而离开，且有一个新的顾客进入该系统；或者原有顾客没有离开，同时无新的顾客进入系统。所以 $p_{11} = pq + (1 - p)(1 - q)$



$p_{12} = P\{\xi_{n+1} = 2 | \xi_n = 1\}$ —系统原有一个顾客，经过 Δt 的时间间隔后系统有两个顾客的概率，即 Δt 的时间间隔内原有顾客未服务完毕离开，且有一人进入该系统的概率，显然： $p_{12} = q(1-p)$

$p_{13} = P\{\xi_{n+1} = 3 | \xi_n = 1\}$ ——因 Δt 的时间间隔内不可能有多于一个顾客离开， $p_{13} = 0$

类似地有： $p_{20} = 0$ — Δt 的时间间隔内不可能有多于一个的顾客进入。

而 $p_{21} = p_{10} = p(1-q)$, $p_{22} = p_{11} = pq + (1-p)(1-q)$, $p_{23} = p_{12} = p(1-q)$

同理： $p_{30} = p_{31} = 0$, $p_{32} = p_{21} = p(1-q)$, $p_{33} = 1 - p_{32} = pq + (1-p)$

则：

$$P = \begin{bmatrix} 1-q & q & 0 & 0 \\ p(1-q) & pq + (1-p)(1-q) & q(1-p) & 0 \\ 0 & p(1-q) & pq + (1-p)(1-q) & q(1-p) \\ 0 & 0 & p(1-q) & pq + (1-p) \end{bmatrix}$$



二、马尔可夫链的 n 步转移概率

定义4.1.5 称条件概率 $p_{ij}^{(n)} = P\{\xi_{m+n} = j | \xi_m = i\} (i, j \in I, n \geq 1)$ 为Markov链 $\{\xi_n, n \in T\}$ 的 n 步转移概率，并称 $P^{(n)} = (p_{ij}^{(n)})$ 为Markov链 $\{\xi_n\}$ 的 n 步转移概率矩阵，其中：

$$(1) p_{ij}^{(n)} \geq 0; (2) \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1$$

即 $P^{(n)}$ 为随机矩阵，当 $n=1$ 时， $P^{(1)} = P$ ，补充定义： $p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

定理4.1.1 设 $\{\xi_n, n \in T\}$ 为Markov链，则对 $\forall n \geq 0, 1 \leq l < n, i, j \in I$ ， $p_{ij}^{(n)}$ 有如下性质：

$$(1) p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)} \quad (\text{Chapman-Kolmogorov方程, 简称C-K方程})$$

$$(2) p_{ij}^{(n)} = \sum_{k_1 \in I} \cdots \sum_{k_{n-1} \in I} p_{ik_1} p_{k_1 k_2} \cdots p_{k_{n-1} j} \quad (3) P^{(n)} = P \cdot P^{(n-1)} \quad (4) P^{(n)} = P^n$$



证明：(1) 利用全概率公式和 $Markov$ 性，有：

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= P\{\xi_{m+n} = j | \xi_m = i\} = \frac{P\{\xi_m = i, \xi_{m+n} = j\}}{P\{\xi_m = i\}} \\ &= \frac{P\left\{\xi_m = i, \bigcup_{k \in I} \xi_{m+l} = k, \xi_{m+n} = j\right\}}{P\{\xi_m = i\}} = \frac{\sum_{k \in I} P\{\xi_m = i, \xi_{m+l} = k, \xi_{m+n} = j\}}{P\{\xi_m = i\}} \\ &= \sum_{k \in I} \frac{P\{\xi_m = i, \xi_{m+l} = k, \xi_{m+n} = j\}}{P\{\xi_m = i, \xi_{m+l} = k\}} \cdot \frac{P\{\xi_m = i, \xi_{m+l} = k\}}{P\{\xi_m = i\}} \\ &= \sum_{k \in I} P\{\xi_{m+n} = j | \xi_m = i, \xi_{m+l} = k\} \cdot P\{\xi_{m+l} = k | \xi_m = i\} \\ &= \sum_{k \in I} P\{\xi_{m+n} = j | \xi_{m+l} = k\} \cdot P\{\xi_{m+l} = k | \xi_m = i\} (Markov性) \\ &= \sum_{k \in I} p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n-l)} \end{aligned}$$



(2) 利用(1), 令 $l = 1$, $k = k_1$, 得:

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(n)} &= \sum_{k_1 \in I} p_{ik_1}^{(1)} p_{k_1j}^{(n-1)} = \sum_{k_1 \in I} p_{ik_1} \sum_{k_2 \in I} p_{k_1k_2}^{(1)} p_{k_2j}^{(n-2)} \\ &= \cdots = \sum_{k_1 \in I} \cdots \sum_{k_{n-1} \in I} p_{ik_1} p_{k_1k_2} \cdots p_{k_{n-1}j} \end{aligned}$$

(3) 利用(1), 令 $l = 1$, 得: $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in I} p_{ik}^{(1)} p_{kj}^{(n-1)}$

上式改写为矩阵的表示形式, 有: $\mathbf{P}^{(n)} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{P}^{(n-1)}$

(4) 由(3)可利用归纳法加以证明。

注意:

1. $\mathbf{C} - \mathbf{K}$ 方程最重要;
2. n 步转移概率完全由一步转移概率确定;
3. 由(4)齐次 Markov 链的 n 步转移概率矩阵是一步转移概率矩阵的 n 次幂, 可见一步转移概率矩阵尤为重要。



三、*Markov*链的有限维分布

定义4.1.6 设 $\{\xi_n, n \in T\}$ 为*Markov*链, 分别称 $p_i = P\{\xi_0 = i\}$ 和 $p_j(n) = P\{\xi_n = j\} (i, j \in I)$ 为*Markov*链的初始概率和绝对概率。

记: 初始概率向量 $P^T(0) = (p_1, p_2 \cdots)$

n 时刻的绝对概率向量 $P^T(n) = (p_1(n), p_2(n) \cdots), n > 0$



定理4.1.2 设 $\{\xi_n, n \in T\}$ 为Markov链, 则对 $\forall n \geq 1, j \in I$, $p_j(n)$ 有如下性质:

$$(1) \quad p_j(n) = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^{(n)} \quad (2) \quad p_j(n) = \sum_{i \in I} p_i(n-1) p_{ij}$$

$$(3) \quad P^T(n) = P^T(0) \cdot P^{(n)} \quad (4) \quad P^T(n) = P^T(n-1) \cdot P$$

证明:(3)和(4)分别是(1)和(2)的矩阵形式, 因此只须证明(1)和(2)

$$\begin{aligned} (1) \quad p_j(n) &= P\{\xi_n = j\} = P\left\{\bigcup_{i \in I} \xi_0 = i, \xi_n = j\right\} = \sum_{i \in I} P\{\xi_0 = i, \xi_n = j\} \\ &= \sum_{i \in I} P\{\xi_0 = i\} P\{\xi_n = j | \xi_0 = i\} = \sum_{i \in I} p_i p_{ij}^{(n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad p_j(n) &= P\{\xi_n = j\} = P\left\{\bigcup_{i \in I} \xi_{n-1} = i, \xi_n = j\right\} = \sum_{i \in I} P\{\xi_{n-1} = i, \xi_n = j\} \\ &= \sum_{i \in I} P\{\xi_{n-1} = i\} P\{\xi_n = j | \xi_{n-1} = i\} = \sum_{i \in I} p_i(n-1) p_{ij} \end{aligned}$$



定理4.1.3 设 $\{\xi_n, n \in T\}$ 为 *Markov* 链, 则对 $\forall i_1, \dots, i_n \in I$ 和 $n \geq 1$, 有:
$$P\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\} = \sum_{i \in I} p_i p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

证明:
$$P\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\} = P\left\{\bigcup_{i \in I} \xi_0 = i, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\right\}$$
$$= \sum_{i \in I} P\{\xi_0 = i, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\} \text{ (概率的可加性)}$$
$$= \sum_{i \in I} P\{\xi_0 = i\} P\{\xi_1 = i_1 | \xi_0 = i\} \cdots P\{\xi_n = i_n | \xi_0 = i, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\} \text{ (乘法公式)}$$
$$= \sum_{i \in I} P\{\xi_0 = i\} P\{\xi_1 = i_1 | \xi_0 = i\} \cdots P\{\xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1}\} \text{ (Markov性)}$$
$$= \sum_{i \in I} p_i p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

结论: *Markov* 链的有限维分布完全由其初始分布和转移概率确定, 即 *Markov* 链的统计特性完全由其初始分布和转移概率确定。



推论 在定理4.1.3的条件下, 有:

$$(1) P\{\xi_0 = i, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\} = p_i p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

$$(2) P\{\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n | \xi_0 = i\} = p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

证明: $P\{\xi_0 = i, \xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n\}$

$$= P\{\xi_0 = i\} \cdot P\{\xi_1 = i_1 | \xi_0 = i\} \cdots P\{\xi_n = i_n | \xi_0 = i, \dots, \xi_{n-1} = i_{n-1}\}$$
$$= p_i p_{i i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$



例4.1.4（天气预报问题） 设昨日、今日都下雨，明日有雨的概率为**0.7**；昨日无雨，今日有雨，明日有雨的概率为**0.5**；昨日有雨，今日无雨，明日有雨的概率为**0.4**；昨日、今日均无雨，明日有雨的概率为**0.2**。若星期一、星期二均下雨，求星期四下雨的概率。

解： 设昨日有雨、今日有雨为状态0(RR),

昨日无雨、今日有雨为状态1 (NR),

昨日有雨、今日无雨为状态2 (RN),

昨日无雨、今日无雨为状态3 (NN),

于是天气预报模型可看做一个四状态的 $Markov$ 链。



根据已知条件其转移概率为：

$$\begin{aligned} p_{00} &= P\{R_{\text{今}}R_{\text{明}}|R_{\text{昨}}R_{\text{今}}\} = P\{\text{连续三天有雨}\} \\ &= P\{R_{\text{明}}|R_{\text{昨}}R_{\text{今}}\} = 0.7 \end{aligned}$$

$$p_{01} = P\{N_{\text{今}}R_{\text{明}}|R_{\text{昨}}R_{\text{今}}\} = 0 \text{ (不可能事件)}$$

$$p_{02} = P\{R_{\text{今}}N_{\text{明}}|R_{\text{昨}}R_{\text{今}}\} = P\{N_{\text{明}}|R_{\text{昨}}R_{\text{今}}\} = 1 - 0.7 = 0.3$$

$$p_{03} = P\{N_{\text{今}}N_{\text{明}}|R_{\text{昨}}R_{\text{今}}\} = 0 \text{ (不可能事件)}$$

其中 R 代表有雨， N 代表无雨。

类似地得到所有状态的一步转移概率矩阵，即：

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} & p_{03} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{30} & p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned}
 P^{(2)} = PP &= \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.49 & 0.12 & 0.21 & 0.18 \\ 0.35 & 0.20 & 0.15 & 0.30 \\ 0.20 & 0.12 & 0.20 & 0.48 \\ 0.10 & 0.16 & 0.10 & 0.64 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(2)} & p_{01}^{(2)} & p_{02}^{(2)} & p_{03}^{(2)} \\ p_{10}^{(2)} & p_{11}^{(2)} & p_{12}^{(2)} & p_{13}^{(2)} \\ p_{20}^{(2)} & p_{21}^{(2)} & p_{22}^{(2)} & p_{23}^{(2)} \\ p_{30}^{(2)} & p_{31}^{(2)} & p_{32}^{(2)} & p_{33}^{(2)} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

由于星期四下雨，星期三可能下雨也可能不下雨，即过程所处状态为**0**或**1**，而星期一、星期二连续下雨，初始状态为**0**，则星期四下雨的概率为： $p = p_{00}^{(2)} + p_{01}^{(2)} = 0.49 + 0.12 = 0.61$



第二节 *Markov*链的状态分类

一、状态的互通

设 $Markov$ 链 $\{\xi_n, n \geq 0\}$ 具有可数的状态空间 $I = \{0, 1, 2, \dots\}$, 转移概率矩阵为 $P = (p_{ij})$, 初始分布为 $\{p_i, i \in I\}$ 。

定义4.2.1 若 $\exists n \geq 1$, 使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$, 则称状态 i 可达 j , 记为 $i \rightarrow j$;

反之, $\forall n$, 均有: $p_{ij}^{(n)} = 0$, 则称状态 i 不可达 j , 记为 $i \nrightarrow j$;

若 $i \rightarrow j$ 且 $j \rightarrow i$, 则称状态 i, j 互通, 记为 $i \leftrightarrow j$ 。

通常将状态空间中互通的状态构成的集合称为类, 互通的状态为同类。



例4.2.1 设Markov链具有转移概率矩阵 $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 则:

$$P^{(n)} = P^n = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则 $p_{12}^{(n)} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, 则 $1 \rightarrow 2$; 但 $p_{21}^{(n)} = 0$, 则 $2 \nrightarrow 1$

由此例我们知道: 尽管 $i \rightarrow j$, 但确实有 $j \nrightarrow i$.

例4.2.2(无限制随机游动) $I = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $p_{ij} = \begin{cases} p & j = i + 1 \\ q & j = i - 1 \end{cases}$

$$(p + q = 1, i, j \in I)$$

解: 由于 $p_{i+1,i} = q \neq 0$ $i + 1 \rightarrow i$ ($i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$)
 $p_{i,i+1} = p \neq 0$ $i \rightarrow i + 1$

则无限制随机游动的任意两个状态互通。



定理4.2.1(传递性) 若 $i \rightarrow k$ 且 $k \rightarrow j$, 则 $i \rightarrow j$ 。

证明: 由 $i \rightarrow k$, 则 $\exists l \geq 1$, 使得 $p_{ik}^{(l)} > 0$

由 $k \rightarrow j$, 则 $\exists n \geq 1$, 使得 $p_{kj}^{(n)} > 0$

由C-K方程, $p_{ij}^{(n+l)} = \sum_{r \in I} p_{ir}^{(l)} p_{rj}^{(n)} \geq p_{ik}^{(l)} p_{kj}^{(n)} > 0$

则: $i \rightarrow j$ 。

推论: 若 $i \rightarrow k_1, k_1 \rightarrow k_2, \dots, k_n \rightarrow j$, 则 $i \rightarrow j$

定理4.2.2 (1) 对称性: 若 $i \leftrightarrow j$, 则 $j \leftrightarrow i$

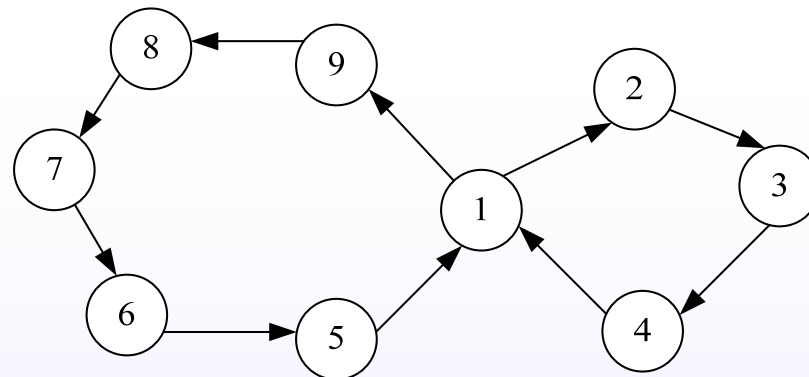
(2) 传递性: 若 $i \leftrightarrow k$ 且 $k \leftrightarrow j$, 则 $i \leftrightarrow j$

注: 显然, 对有限制随机游动, 若带有吸收壁, 则吸收壁与其它状态都不互通, 即除吸收壁外, 其它状态互通; 对无限制随机游动, 则任何状态都互通。



二、状态的分类

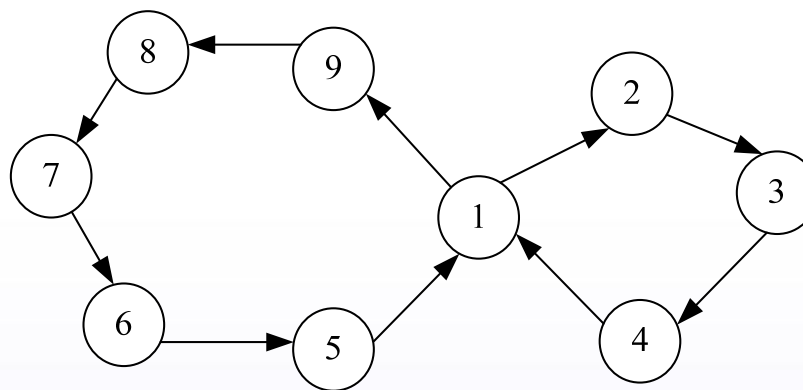
例4.2.3 设 $Markov$ 链的状态空间为 $I = \{1, \dots, 9\}$, 状态转移图如右图所示, 求1状态的周期。



$$d(1) = G.C.D\{n : p_{11}^{(n)} > 0\} = G.C.D\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\} = 2$$

定义4.2.2 若 $p_{ii}^{(n)} > 0$ 的所有正整数 $n \geq 1$ 存在最大公约数 d , 则称状态 i 是**周期**为 d 的, 记为 $d(i) = d$; 若 $d(i) = 1$, 则称状态 i 是非周期的。

$$\text{记: } d(i) = G.C.D\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$$



注:

(1)如果 $d(i) = d$, 则当 $n \neq 0 \bmod(d)$ 时, $p_{ii}^{(n)} = 0$, 但不一定对所有的 n , 有 $p_{ii}^{(nd)} > 0$, 如上例, $d = 2$, 但 $p_{11}^{(2)} = 0$ 。

(2)如果 $\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$ 不空, 就一定包含无穷多个 n , 属于这个集合。



引理4.2.1 如果 $d(i) = d$, 则存在正整数 M , 使对一切 $n \geq M$, 有

$$p_{ii}^{(nd)} > 0。$$

证明: 设 $\{n: n \geq 1, p_{ii}^{(n)} > 0\} = \{n_1, n_2, \dots\}$, 令:

$$t_k = G.C.D\{n_1, n_2, \dots, n_k\}, \text{ 则: } t_1 \geq t_2 \geq \dots \geq d \geq 1,$$

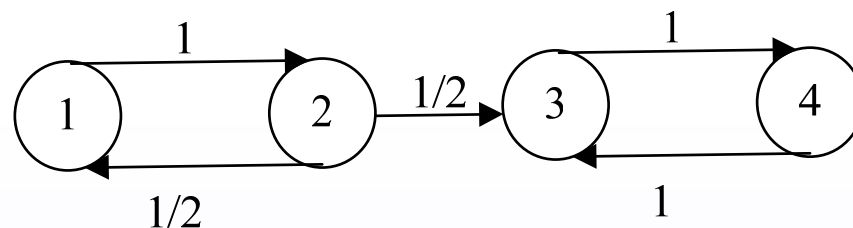
则必有正整数 N , 使得: $t_N = t_{N+1} = \dots = d$, 因此,

$$d = G.C.D\{n_1, n_2, \dots, n_N\}, \text{ 则存在正整数 } M, \text{ 对一切 } n \geq M,$$

有: $nd = \sum_{k=1}^N \alpha_k n_k$, 其中 α_k 为正整数, 因此:

$$\begin{aligned} \text{当 } n \geq M \text{ 时, } p_{ii}^{(nd)} &= p_{ii}^{(\sum_{k=1}^N \alpha_k n_k)} \geq p_{ii}^{(\alpha_1 n_1)} p_{ii}^{(\alpha_2 n_2)} \dots p_{ii}^{(\alpha_N n_N)} \\ &\geq \prod_{k=1}^N \left[p_{ii}^{(n_k)} \right]^{\alpha_k} > 0 \end{aligned}$$

其中, $p_{ii}^{(\alpha_1 n_1)} \geq p_{ii}^{(n_1)} p_{ii}^{(n_1)} \dots p_{ii}^{(n_1)}$ (α_1 项联乘)



例4.2.4 设 $I = \{1, 2, 3, 4\}$ ，转移概率如图，显然状态2和状态3有相同的周期 $d = 2$ ，但是从状态3出发经过两步必然返回到3，而状态2则不然。

为区别这两种状态，下面讨论常返性概念。



定义4.2.3 对 $Markov$ 链任意两个状态 $i, j \in I$, 定义:

(1) 称 T_{ij} 是系统从状态 i 出发, 首次到达状态 j 的时间:

$$T_{ij} = n \Leftrightarrow \{\xi_0 = i, \xi_1 \neq j, \dots, \xi_{n-1} \neq j, \xi_n = j\}$$

(2) 称 $f_{ij}^{(n)} = P\{T_{ij} = n | \xi_0 = i\} \geq 0$ 是系统从状态 i 出发, 经 n 步首次到达状态 j 的(条件)概率, 即:

$$f_{ij}^{(n)} = P\{\xi_n = j, \xi_s \neq j, s = 1, \dots, n-1 | \xi_0 = i\}$$

(3) 称 $f_{ij} = P\{T_{ij} < \infty | \xi_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{T_{ij} = n | \xi_0 = i\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}$ 是系统从状态 i 出发, 经有限步终于到达状态 j 的概率。

显然: $0 \leq f_{ij}^{(n)} \leq f_{ij} \leq 1, \forall n \geq 1$, 且补充: $f_{ij}^{(0)} = 0, \forall i, j$

特别地, 当 $i = j$, T_{ii} 是指从状态 i 出发, 首次返回状态 i 的时间;
 f_{ii} 是指系统从状态 i 出发, 经有限步终于返回状态 i 的概率。

定理4.2.3 $\forall i, j \in I$ 及 $n \geq 1$, 有

$$p_{ij}^{(n)} = P\{\xi_n = j | \xi_0 = i\} = \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)} \quad (4.16)$$

证明: $p_{ij}^{(n)} = P\{\xi_n = j | \xi_0 = i\} (T_{ij} \leq n) = P\left\{\bigcup_{l \leq n} T_{ij} = l, \xi_n = j | \xi_0 = i\right\}$

$$= \sum_{l \leq n} P\{T_{ij} = l, \xi_n = j | \xi_0 = i\} = \sum_{l \leq n} P\{T_{ij} = l | \xi_0 = i\} \cdot P\{\xi_n = j | \xi_0 = i, T_{ij} = l\}$$
$$= \sum_{l=1}^n P\{T_{ij} = l | \xi_0 = i\} \cdot P\{\xi_n = j | \xi_0 = i, \xi_1 \neq j, \dots, \xi_{l-1} \neq j, \xi_l = j\}$$
$$= \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$

上式体现的是 $p_{ij}^{(n)}$ 与 $f_{ij}^{(n)}$ 的关系如下:

$$p_{ij}^{(n)} = f_{ij}^{(n)} + \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}, \text{ 所以: } f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$$



例4.2.5 设Markov链 $I = \{1, 2, 3\}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, f_{13}^{(n)}$

解法1: 利用递推公式: $f_{ij}^{(n)} = p_{ij}^{(n)} - \sum_{l=1}^{n-1} f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$

$$\therefore f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)}$$

$$\therefore f_{11}^{(1)} = p_{11} = 0 \quad f_{12}^{(1)} = p_{12} = p_1 \quad f_{13}^{(1)} = p_{13} = q_1$$



$$P^{(2)} = P^2 = P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1 q_2 + p_3 q_1 & q_1 q_3 & p_1 p_2 \\ p_2 p_3 & p_1 q_2 + p_2 q_3 & q_1 q_2 \\ p_3 q_2 & p_1 p_3 & p_3 q_1 + p_2 q_3 \end{bmatrix}$$

而: $f_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(2)} - f_{ij}^{(1)} p_{jj}^{(1)} \quad \therefore f_{11}^{(2)} = p_{11}^{(2)} - f_{11}^{(1)} p_{11}^{(1)} = p_1 q_2 + p_3 q_1$

$$f_{12}^{(2)} = p_{12}^{(2)} - f_{12}^{(1)} p_{22}^{(1)} = q_1 q_3 \quad f_{13}^{(2)} = p_{13}^{(2)} - f_{13}^{(1)} p_{33}^{(1)} = p_1 p_2$$

同理可求: 当 $n \geq 3$, $f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, f_{13}^{(n)}$



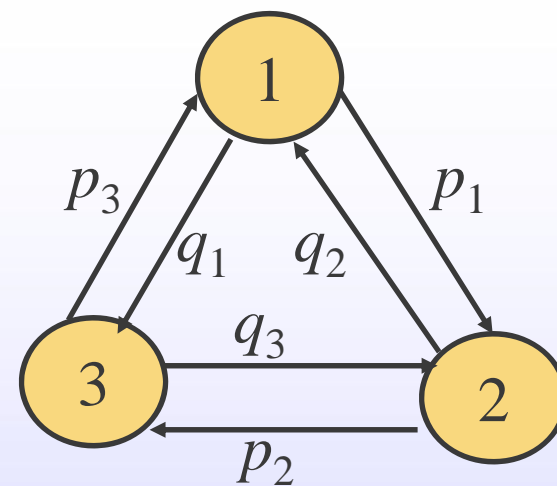
例4.2.5 设Markov链 $I = \{1, 2, 3\}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & q_1 \\ q_2 & 0 & p_2 \\ p_3 & q_3 & 0 \end{bmatrix}$, 求 $f_{11}^{(n)}, f_{12}^{(n)}, f_{13}^{(n)}$

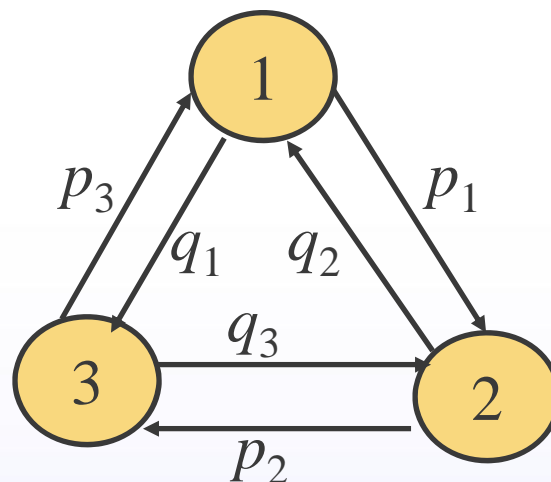
解法2: 根据题意, 画出状态转移图如下:

由状态转移图, 有:

若 n 为偶数, 则: $1 \xrightarrow{m-1} 3 \xrightarrow{m-1} 1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 2$, 即:

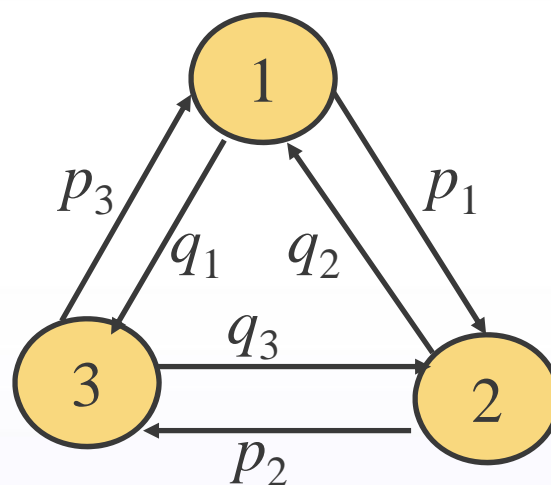
$$f_{12}^{(n)} = \begin{cases} (q_1 p_3)^{m-1} q_1 q_3 \left(1 \xrightarrow{m-1} 3 \xrightarrow{m-1} 1 \xrightarrow{1} 3 \xrightarrow{1} 2 \right) & n = 2m, m \geq 1 \\ (q_1 p_3)^m p_1 \left(1 \xrightarrow{m} 3 \xrightarrow{m} 1 \xrightarrow{1} 2 \right) & n = 2m+1, m \geq 0 \end{cases}$$





同理，有：

$$f_{13}^{(n)} = \begin{cases} (p_1 q_2)^{m-1} p_1 p_2 \left(\overset{m-1}{1} \rightarrow \overset{m-1}{2} \rightarrow \overset{1}{1} \rightarrow \overset{1}{2} \rightarrow 3 \right) & n = 2m, m \geq 1 \\ (p_1 q_2)^m q_1 \left(\overset{m}{1} \rightarrow \overset{m}{2} \rightarrow \overset{1}{1} \rightarrow 3 \right) & n = 2m + 1, m \geq 0 \end{cases}$$



$$f_{11}^{(n)} = \begin{cases} p_1 (p_2 q_3)^{m-1} q_2 + q_1 (p_2 q_3)^{m-1} p_3 \left(\begin{array}{l} \overset{1}{1} \rightarrow \overset{m-1}{2} \rightarrow \overset{m-1}{3} \rightarrow \overset{1}{2} \rightarrow \overset{1}{1} \text{或} \\ \overset{1}{1} \rightarrow \overset{m-1}{3} \rightarrow \overset{m-1}{2} \rightarrow \overset{1}{3} \rightarrow \overset{1}{1}, n = 2m, m \geq 1 \end{array} \right) \\ p_1 (p_2 q_3)^{m-1} p_2 p_3 + q_1 (p_1 q_3)^{m-1} q_3 q_2 \left(\begin{array}{l} \overset{1}{1} \rightarrow \overset{m-1}{2} \rightarrow \overset{m-1}{3} \rightarrow \overset{1}{2} \rightarrow \overset{1}{3} \rightarrow \overset{1}{1} \text{或} \\ \overset{1}{1} \rightarrow \overset{m-1}{3} \rightarrow \overset{m-1}{2} \rightarrow \overset{1}{3} \rightarrow \overset{1}{2} \rightarrow \overset{1}{1}, n = 2m + 1, m \geq 0 \end{array} \right) \end{cases}$$



利用定理4.2.3，有如下结论：

定理4.2.4 $f_{ij} > 0 \Leftrightarrow i \rightarrow j$ 。

证明：" \Leftarrow " 因 $i \rightarrow j$ ，则 $\exists n \geq 1$ ，使得 $p_{ij}^{(n)} > 0$ 。

由 $p_{ij}^{(n)} = \sum_{l=1}^n f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(n-l)}$ 得： $\exists k, f_{ij}^{(k)} > 0$ ，于是 $f_{ij} > 0$ 。

" \Rightarrow " 因 $f_{ij} > 0$ ，则 $\exists k \geq 1$ ，使得 $f_{ij}^{(k)} > 0$

由 $p_{ij}^{(k)} = \sum_{l=1}^k f_{ij}^{(l)} p_{jj}^{(k-l)} \geq f_{ij}^{(k)} > 0$ ，于是 $i \rightarrow j$ 。

推论： $i \leftrightarrow j \Leftrightarrow f_{ij} > 0$ 且 $f_{ji} > 0$ 。



引理4.2.2 $G.C.D\{n : n \geq 1, p_{\ddot{u}}^{(n)} > 0\} = G.C.D\{n : n \geq 1, f_{\ddot{u}}^{(n)} > 0\}$ 。

证明 令： $d = G.C.D\{n : n \geq 1, p_{\ddot{u}}^{(n)} > 0\}$, $t = G.C.D\{n : n \geq 1, f_{\ddot{u}}^{(n)} > 0\}$

由(4.16)式： $p_{\ddot{u}}^{(n)} = \sum_{l=1}^n f_{\ddot{u}}^{(l)} p_{\ddot{u}}^{(n-l)}$, 有： $p_{\ddot{u}}^{(n)} \geq f_{\ddot{u}}^{(n)}$, 则： $1 \leq d \leq t$ 。

若 $t = 1$, 则必有： $d = 1 = t$ 。

若 $t > 1$, 以下证： $d \geq t$, 只需证明 t 也是 $\{n : n \geq 1, p_{\ddot{u}}^{(n)} > 0\}$ 的公约数即可。

即：若 $\{n : n \geq 1, p_{\ddot{u}}^{(n)} > 0\} \Rightarrow t | n$ 。等价于：若 t 不能整除 $n \Rightarrow p_{\ddot{u}}^{(n)} = 0$ 。

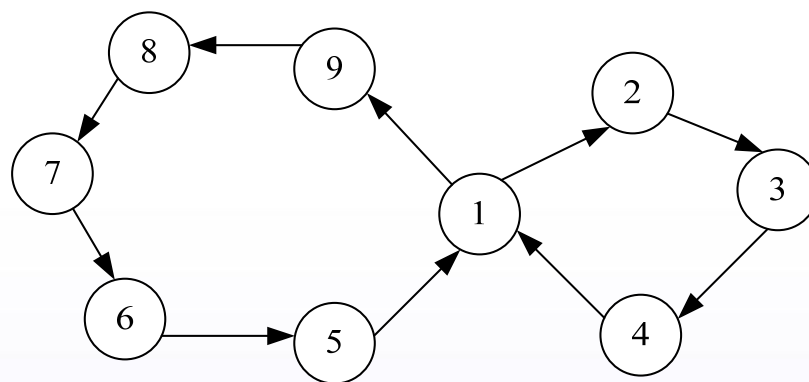
(1) 当 $n < t$, 对 $k \leq n < t$, 必有： $f_{\ddot{u}}^{(k)} = 0$, 则 $p_{\ddot{u}}^{(n)} = \sum_{k=1}^n f_{\ddot{u}}^{(k)} p_{\ddot{u}}^{(n-k)} = 0$

(2) 当 $n = mt + r$ ($r \neq 0$), 不妨假设当 $m = 0, 1, 2, \dots, N-1$ 时, 有： $p_{\ddot{u}}^{(n)} = 0$,
则：当 $n = Nt + r$, $f_{\ddot{u}}^{(n)} = 0$, 且：

$$p_{\ddot{u}}^{(Nt+r)} = \sum_{k=1}^{Nt+r} f_{\ddot{u}}^{(k)} p_{\ddot{u}}^{(Nt+r-k)} = f_{\ddot{u}}^{(t)} p_{\ddot{u}}^{((N-1)t+r)} + f_{\ddot{u}}^{(2t)} p_{\ddot{u}}^{((N-2)t+r)} + \dots + f_{\ddot{u}}^{(Nt)} p_{\ddot{u}}^{(r)} = 0$$

由数学归纳法得证：若 $\{n : n \geq 1, p_{\ddot{u}}^{(n)} > 0\} \Rightarrow t | n$, 即： $d \geq t$ 。

综上所述, 有： $d = t$ 。



$$\begin{aligned} d(1) &= G.C.D\{n : p_{11}^{(n)} > 0\} = G.C.D\{4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots\} = 2 \\ &= G.C.D\{n : f_{11}^{(n)} > 0\} = G.C.D\{4, 6\} = 2 \end{aligned}$$

利用引理4.2.4，大大地简化了计算！



当 $f_{ij}=1$ 时, $\{f_{ij}^{(n)}, n=1,2,\dots\}$ 构成一个概率分布。而 $T_{ij}=n$ 为随机变量, 其概率为 $f_{ij}^{(n)}$, 于是我们考虑从状态 i 出发最后到达状态 j 的平均时间:

$$\mu_{ij} = E(T_{ij}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)}$$

当 $i=j$, 称 $\mu_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$ 为状态 i 的**平均返回时间**。

定义4.2.4 若 $f_{ii}=1$, 则称状态 i **常返** (迟早必然会返回状态 i)
若 $f_{ii}<1$, 则称状态 i **非常返**

定义4.2.5 对常返状态 i , 若 $\mu_i < \infty$, 则为**正常返**;
若 $\mu_i = \infty$, 则为**零常返**。

定义4.2.6 非周期的正常返态, 称为**遍历态**。