ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΕΙΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ
ΤΜΗΜΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

ΕΡΓΑΣΙΑ ΤΡΙΤΗ

Πηγή Παπανικολάου

Δεκέμβριος 2023

Περιεχόμενα

1 Περιγραφή Προβλήματος

Στην εργασία αυτή θα μελετηθεί η εύρεση ελαχίστου μίας δοσμένης συνάρτησης πολλών μεταβλητών $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αρχικά με τη Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου για σταθερή τιμή του βήματος γ_k και έπειτα με τη Μέθοδο Μέγιστης καθόδου με Προβολή παρουσία περιορισμών.

Η αντικειμενική συνάρτηση που θα μελετηθεί είναι η:

$$f(x) = \frac{1}{3}{x_1}^2 + 3{x_2}^2, x = [x_1\ x_2]^T \tag{1}$$

Η τρισδιάστατη γραφική παράσταση της f όπως προκύπτει από το matlab φαίνεται στο Figure 1. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση έχει ολικό ελάχιστό στην αρχή των αξόνων. Ακόμα δίνεται στο Figure 2 και το διάγραμμα των ισοβαρών καμπυλών της f για καλύτερη εποπτεία.

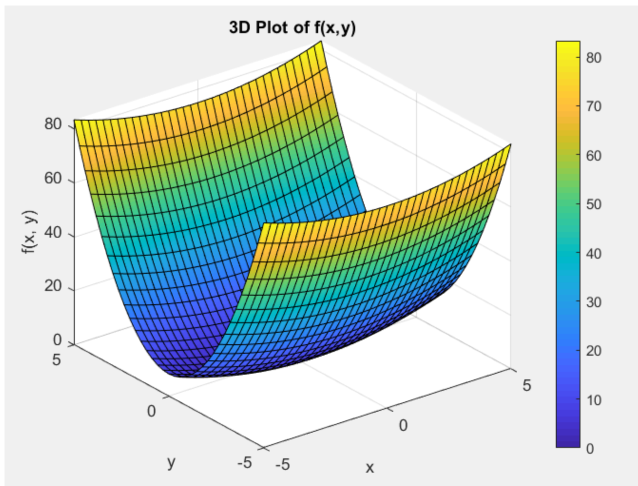

Figure 1. Τρισδιάστατη απεικόνιση της f

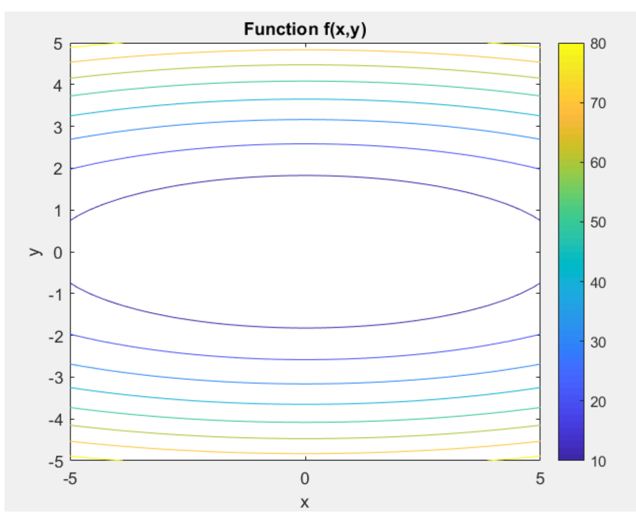

Figure 2. Ισοβαρείς καμπύλες της f

Η $f(x)$ είναι συνάρτηση συνεχής, με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης στο $\mathbb{R}^n$.

2 Επίλυση

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου

Θέμα 1ο

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε τη Μέθοδο Μέγιστης Καθόδου που αναπτύχθηκε στην δεύτερη εργασία, ώστε να βρούμε το ελάχιστο της (1). Θέτουμε την ακρίβεια $\varepsilon = 0.001$, διαλέγουμε βήμα i) $\gamma_k = 0.1$, ii) $\gamma_k = 0.3$, iii) $\gamma_k = 3$, iv) $\gamma_k = 5$ και αρχικό σημείο $(2{,}3)$.

Τα αποτελέσματα από την αναζήτηση του ελαχίστου που προέκυψαν για τις διάφορες τιμές του βήματος γ_k φαίνονται παρακάτω στα :

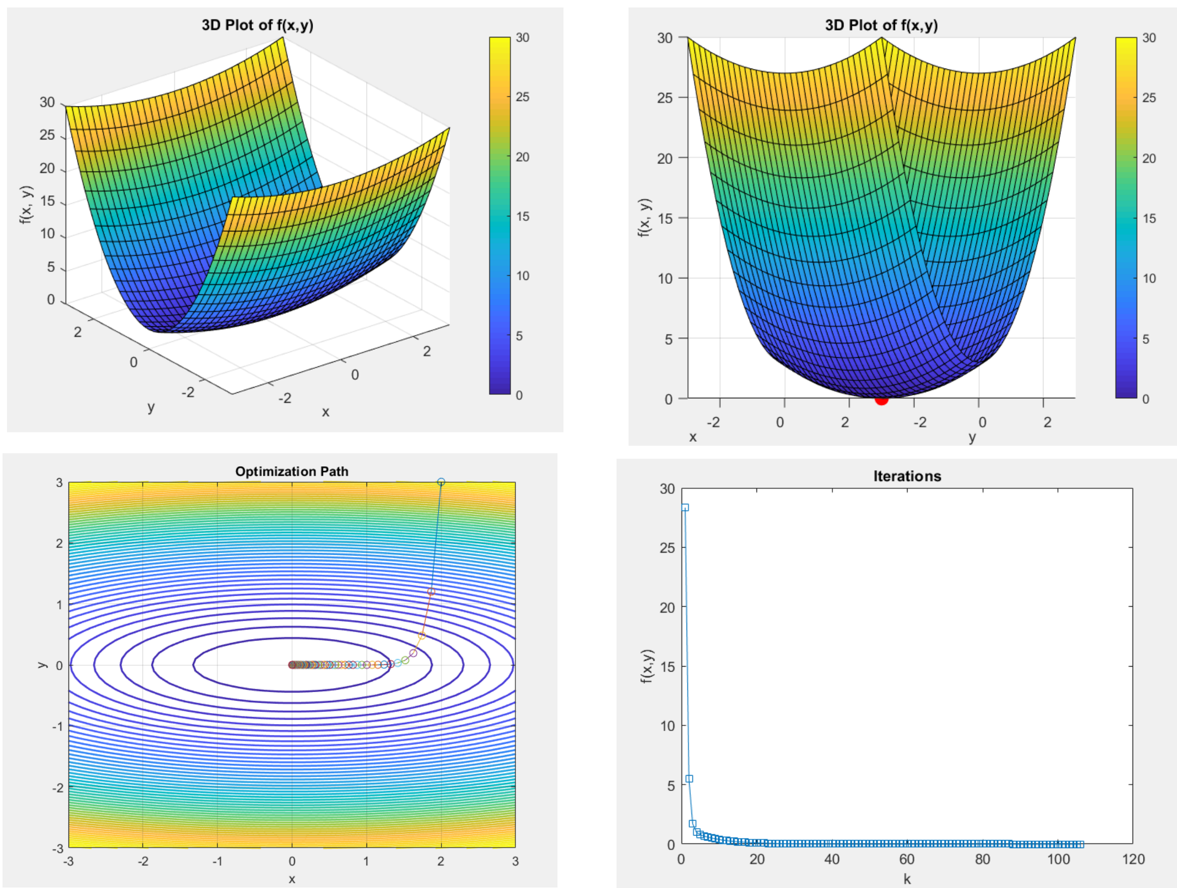

Figure 3. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για γ_k=0.1

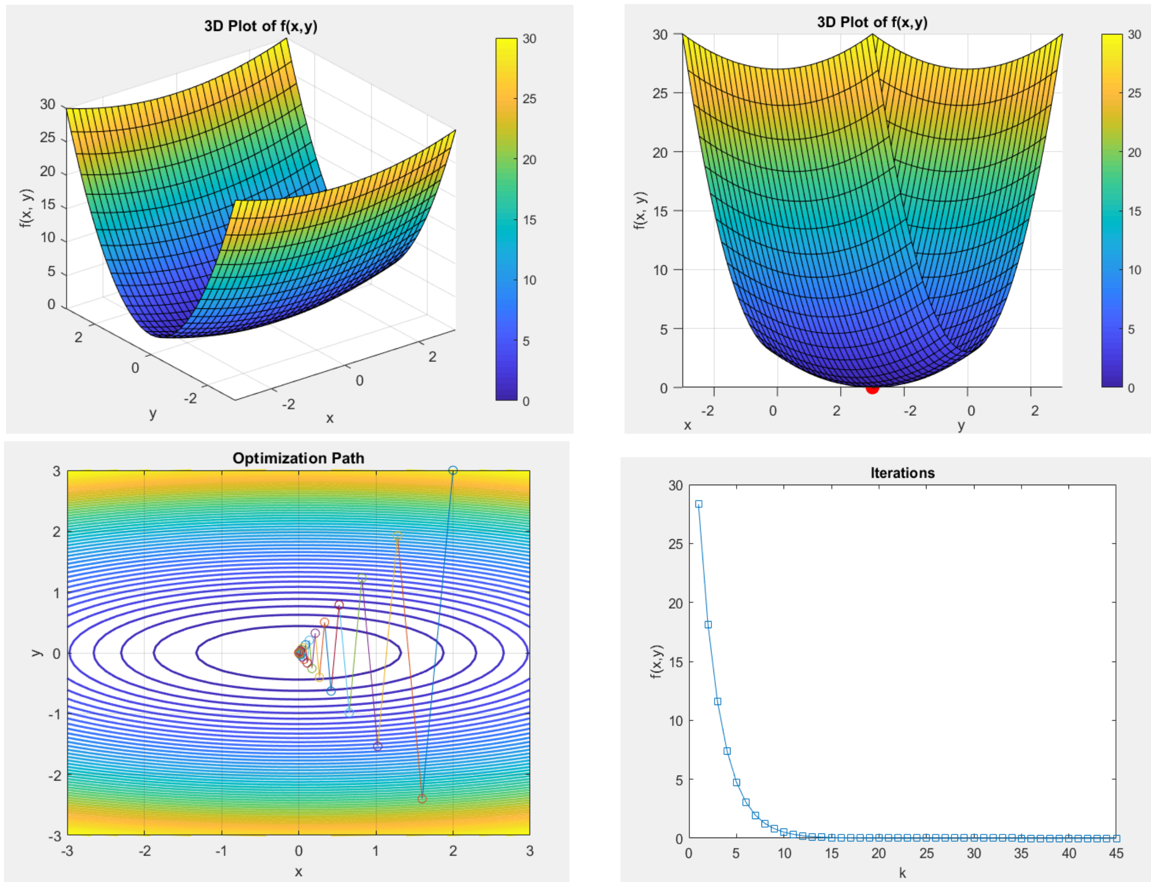

Figure 4. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για γ_k=0.3

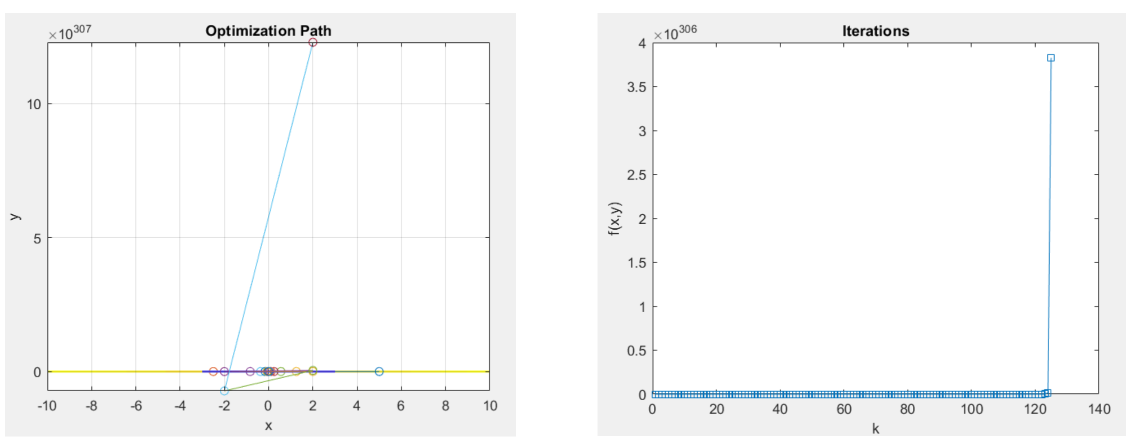

Figure 5. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου γ_k=3

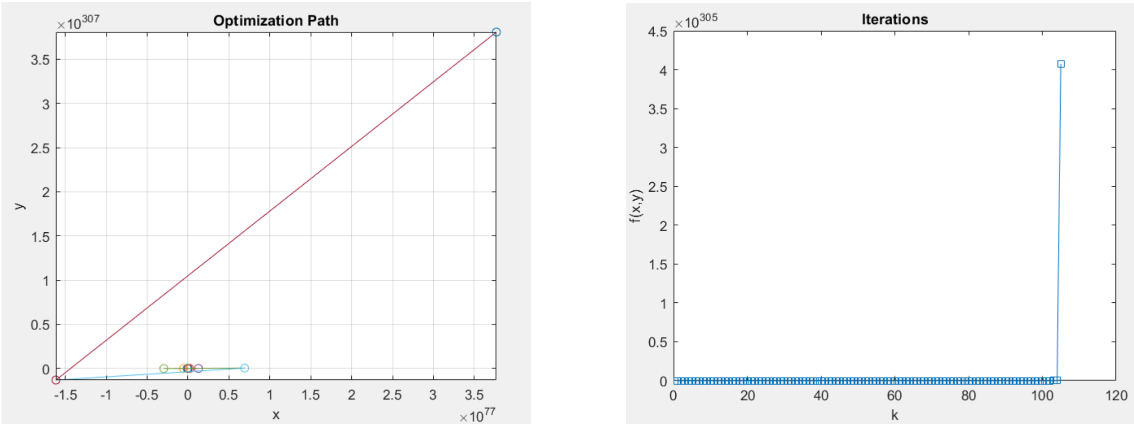

Figure 6. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για γ_k=5

Παρατηρούμε ότι για $\gamma_k = 0.1$ οι επαναλήψεις είναι πάνω από 100 και για $\gamma_k = 0.3$ χρειάζονται 45 επαναλήψεις ώσπου μα προσεγγίσουμε με επαρκή ακρίβεια το ελάχιστο. Για $\gamma_k = 0.1$ οι επαναλήψεις είναι περισσότερες επειδή το βήμα είναι μικρότερο. Για τις τιμές $\gamma_k = 3,\ \gamma_k = 5$, όπως διαπιστώνουμε στα Figure 5, Figure 6, η μέθοδος αδυνατεί να προσεγγίσει το ελάχιστο. Σύγκλιση δεν επιτυγχάνεται και προσεγγίζεται ένας πολύ μεγάλος αριθμός, που δεν προφανώς ορθό.

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα και θεωρητικά με μαθηματική αυστηρότητα.

Από τη θεωρία ισχύει:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k \nabla f(x_k) \tag{2}$$

και το gradient της f είναι:

$$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{2}{3}x_1, 6x_2\right] \tag{3}$$

Έχουμε άρα, από τις (2) και (3) ότι:

$$\begin{aligned} x_{k+1} = (x_{1k}, x_{2k}) - \gamma_k\left(\frac{2}{3}x_{1k}, 6x_{2k}\right) &= \left(x_{1k} - \frac{2}{3}\gamma_k x_{1k}, x_{2k} - 6\gamma_k x_{2k}\right) \\ &= \left(\left(1 - \frac{2}{3}\gamma_k\right)x_{1k}, (1 - 6\gamma_k)x_{2k}\right) \end{aligned} \tag{4}$$

Για να υπάρχει σύγκλιση πρέπει:

$$\left|1 - \frac{2}{3}\gamma_k\right| < 1 \ \kappa\alpha\iota\ |1 - 6\gamma_k| < 1 \Rightarrow$$

$$-1 < 1 - \frac{2}{3}\gamma_k < 1 \ \kappa\alpha\iota\ -1 < 1 - 6\gamma_k < 1 \Rightarrow$$

$$0 < \gamma_k < 3 \; \kappa\alpha\iota \; 0 < \gamma_k < \frac{1}{3} \tag{5}$$

Άρα, για να ικανοποιούνται και οι δύο συνθήκες καταλήγουμε στο εύρος επιτρεπτών τιμών βήματος $0 < \gamma_k < \frac{1}{3}$. Πράγματι, πραγματοποιώντας έλεγχο, ο αλγόριθμος δεν λειτουργεί για τιμές εκτός αυτού του συνόλου.

Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή

Η Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή εφαρμόζεται στην περίπτωση ύπαρξης περιορισμών. Η μέθοδος αυτή εξασφαλίζει την αναζήτηση του ελαχίστου χρησιμοποιώντας την έννοια της προβολής για την αποφυγή της εξόδου από τα όρια του δυνατού συνόλου X, με την προϋπόθεση ότι το σημείο εκκίνησης είναι εφικτό.

Τα εφικτά σημεία είναι της μορφής:

$$x_{k+1} = x_k - \gamma_k(\overline{x_k} - x_k), \gamma_k \in (0,1] \tag{6}$$

όπου

$$x_{k+1} = Pr_X\{x_k - s_k \nabla f(x_k)\}, s_k > 0 \tag{7}$$

Για τη συνάρτηση (1) που μελετούμε θεωρούμε του περιορισμούς:

$$-10 \leq x_1 \leq 5 \tag{8}$$

$$-8 \leq x_2 \leq 12 \tag{9}$$

Ο αλγόριθμος τερματίζει εάν καταλήξει σε στάσιμο σημείο ή εάν ξεπεράσει το μέγιστο αριθμό επαναλήψεων που έχει οριστεί 1500.

Θέμα 2ο

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται η Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή, με $s_k = 5$, $\gamma_k = 0.5$, ακρίβεια $e = 0.01$ και σημείο εκκίνησης $(5, -5)$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Figure 7.

Το αρχικό σημείο είναι εφικτό και ο αλγόριθμος δεν συγκλίνει στο ελάχιστο και τερματίζει στις 1500 επαναλήψεις που είναι το όριο μέγιστων επαναλήψεων που θέσαμε. Στο Figure 7 φαίνεται η τιμή που παίρνει η συνάρτηση στις 80 πρώτες επαναλήψεις για να γίνει εμφανής η ταλάντωση μεταξύ δύο σημείων.

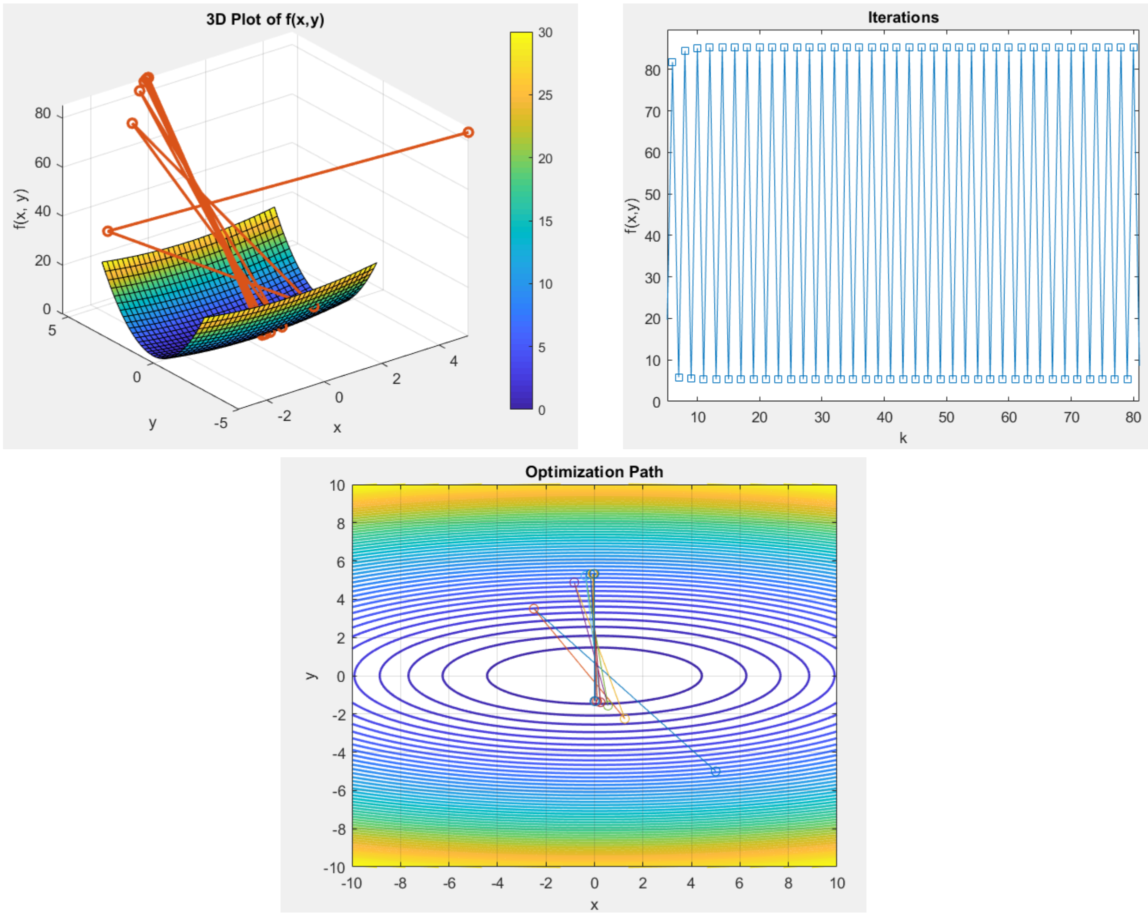

Figure 7. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για s_k=5, γ_k=0.5, αρχικό σημείο (5,-5), e=0.01

Θέμα 3ο

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται η Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή, με $s_k = 15$, $\gamma_k = 0.1$, ακρίβεια $e = 0.01$ και σημείο εκκίνησης $(-5,10)$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Figure 8.

Το αρχικό σημείο είναι εφικτό και ο αλγόριθμος συγκλίνει στο περίπου ελάχιστο μετά από αρκετές επαναλήψεις (1216). Ο αλγόριθμος πολύ γρήγορα πλησιάζει σε μια περιοχή κοντά στο ολικό ελάχιστο, και έπειτα ταλαντώνεται γύρω από αυτή, και εν τέλει συγκλίνει (τερματίζει από μόνος του).

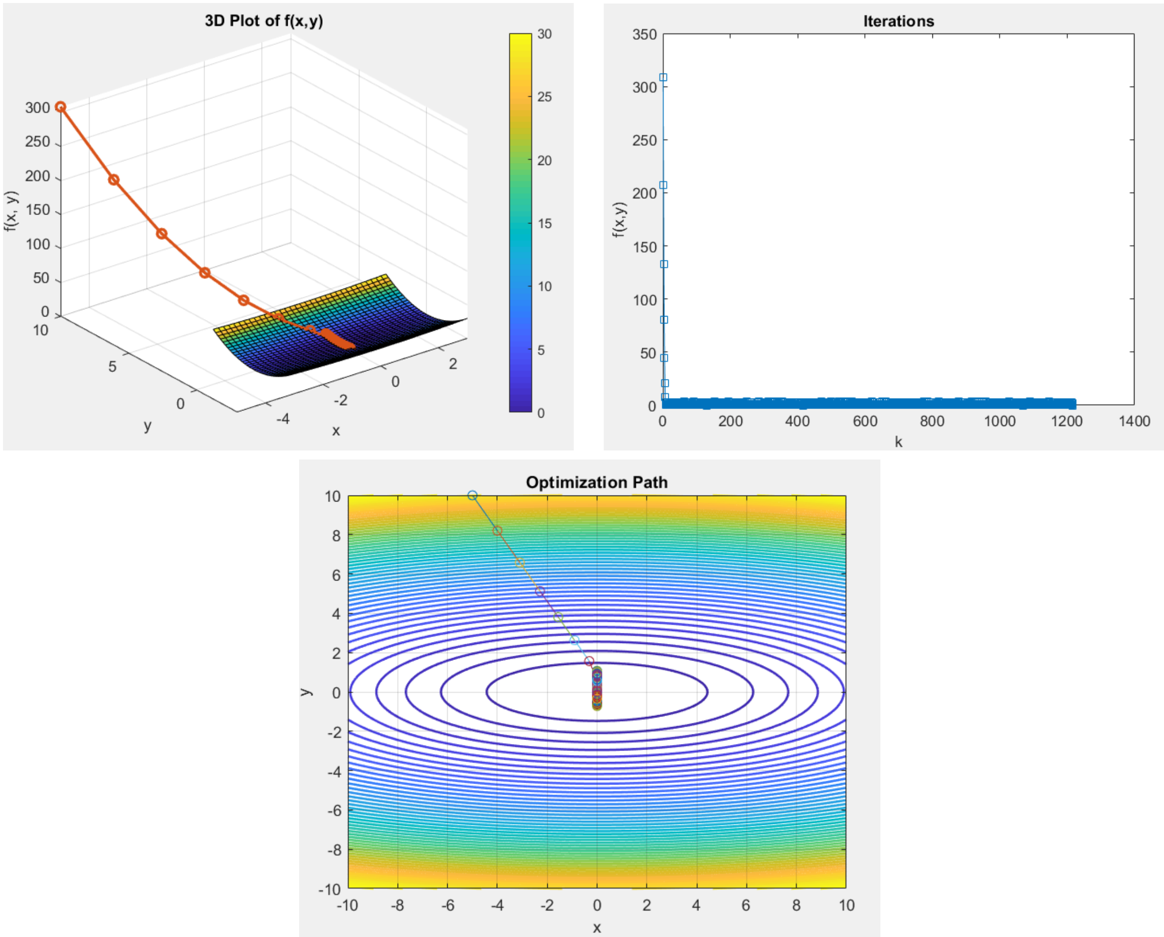

Figure 8. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για s_k=15, γ_k=0.1, αρχικό σημείο (-5,10), e=0.01

Θέμα 4ο

Σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιείται η Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου με Προβολή, με $s_k = 0.1$, $\gamma_k = 0.2$, ακρίβεια $e = 0.01$ και σημείο εκκίνησης $(8, -10)$. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Figure 9.

Το αρχικό σημείο είναι μη εφικτό, οπότε η προβολή μας επαναφέρει στο δυνατό σύνολο X, και ο αλγόριθμος συγκλίνει στο ελάχιστο μετά από αρκετές επαναλήψεις (449). Η σύγκλιση είναι εμφανής στο Figure 9.

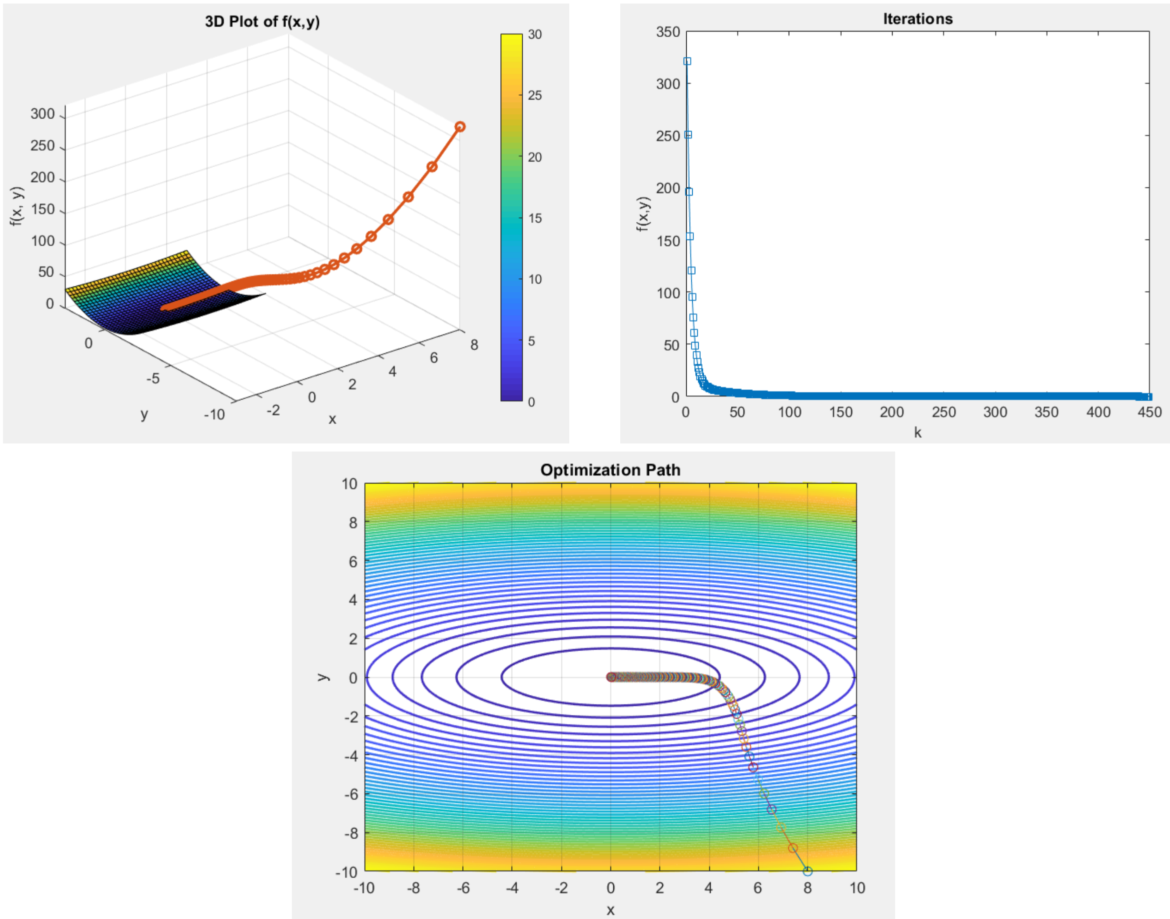

Figure 9. Μέθοδος Μέγιστης Καθόδου για s_k=0.1, γ_k=0.2, αρχικό σημείο (8,-10), ε=0.01

3 Παρατηρήσεις, Συμπεράσματα και Συγκρίσεις

Θέμα 1ο : Στην πρώτη αυτή εφαρμογή μελετούμε την επιρροή που έχει η επιλογή του βήματος γ_k στη σύγκλιση του αλγορίθμου της Μέγιστης Καθόδου. Αποδείξαμε προηγουμένως, θεωρητικά, ότι για να συγκλίνει η μέθοδος πρέπει $\gamma_k \in (0, \frac{1}{3})$, διαφορετικά η μέθοδος οδηγεί σε λανθασμένο σημείο. Όσο πιο μικρό το βήμα τόσες περισσότερες επαναλήψεις χρειάζονται.

Θέμα 2ο : Σε αυτό το θέμα εξετάζουμε την σύγκλιση με τη Μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου με Προβολή. Παρατηρούμε, ότι το βήμα, καθώς μένουμε μέσα στο δυνατό σύνολο, είναι ίσο με $s_k * \gamma_k = 2.5 > \frac{1}{3}$, άρα σύμφωνα με την ανάλυση παραπάνω ο αλγόριθμος θα αποκλίνει. Αυτό πράγματι συμβαίνει, και μάλιστα ταλαντώνεται μεταξύ δύο σημείων μακριά από το ολικό ελάχιστο.

Σε σύγκριση με το Θέμα 1ο η εκτέλεση της μεθόδου εδώ είναι αποτυχημένη στην εύρεση του ολικού ελαχίστου. Εάν όμως προσαρμόσουμε κατάλληλα τα s_k και γ_k τότε μπορούμε να πετύχουμε σύγκλιση με ίδια ακρίβεια και με ίδιο σημείο εκκίνησης.

Θέμα 3ο : Σε αυτό το θέμα εξετάζουμε τη σύγκλιση με τη Μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου με Προβολή αλλά με διαφορετικές παραμέτρους από πριν. Παρατηρούμε, ότι το βήμα, καθώς μένουμε μέσα στο δυνατό σύνολο, είναι ίσο με $s_k * \gamma_k = 1.5 > \frac{1}{3}$, άρα σύμφωνα με την ανάλυση παραπάνω ο αλγόριθμος δεν θα συγκλίνει. Αυτό πράγματι συμβαίνει, και μάλιστα πλησιάζει σε μια περιοχή κοντά στο ολικό ελάχιστο και έπειτα ταλαντώνεται γύρω από αυτό.

Σε αντίθεση με το Θέμα 1ο δεν καταλήγει στο ολικό ελάχιστο, αλλά σε σύγκριση με το Θέμα 2ο πλησιάζει αρκετά στο ολικό ελάχιστο και ταλαντώνεται γύρω από αυτό και όχι ανάμεσα σε μακρινά σημεία. Εάν όμως προσαρμόσουμε κατάλληλα τα s_k και γ_k ώστε το βήμα να είναι μικρότερο του άνω ορίου που υπολογίσαμε, τότε μπορούμε να πετύχουμε σύγκλιση με ίδια ακρίβεια και με ίδια σημείο εκκίνησης.

Θέμα 4ο : Σε αυτό το θέμα εξετάζουμε τη σύγκλιση με τη Μέθοδο της Μέγιστης Καθόδου με Προβολή αλλά με διαφορετικές παραμέτρους από πριν. Κύρια διαφορά σε αυτό το θέμα είναι πως το σημείο εκκίνησης δεν βρίσκεται εντός του συνόλου που ορίζεται από τους περιορισμούς (8) και (9). Η προβολή μας επαναφέρει στο δυνατό σύνολο. Παρατηρούμε, ότι το βήμα, καθώς μένουμε μέσα στο δυνατό σύνολο, είναι ίσο με $s_k * \gamma_k = 0.02 < \frac{1}{3}$, και άρα αναμένουμε η μέθοδος να συγκλίνει στο ολικό ελάχιστο επιτυχώς. Αυτό πράγματι συμβαίνει, ο αλγόριθμος προσεγγίζει επιτυχώς το ολικό ελάχιστο.