Lógica Fuzzy

Sergio Ribeiro Augusto

Objetivos

Apresentar os fundamentos da Lógica *Fuzzy (Nebulosa)*

Estudo da implementação de controladores *Fuzzy*

Tópicos

- apresentação dos conceitos fundamentais da lógica Fuzzy
- Exemplo Controladores Fuzzy
- Aplicações
- Simulação utilizando SW Matlab
- Seminários

Avaliação

- Apresentação de um seminário na última aula

MAUÁ

Bibliografia

1. **Ross, Timothy J.; Fuzzy Logic with Engineering Applications, 4th Edition: Wiley 2016**

2. **An Introduction to Fuzzy Control.**2. ed. New York: Springer, 1996.

3. **Fuzzy Control and Modelling.** New York: IEEE Press, 2000.

4. **Studies in Fuzziness and Soft Computing.** New York: Physica-Verlag, 2003.

O que é Lógica Fuzzy?

✓ Basicamente é uma lógica multi-valorada que permite valores intermediários serem definidos entre avaliações convencionais como sim/não , verdadeiro/falso, preto/branco, quente/frio. Noções como *morno*, *ligeiramente frio,* podem ser formuladas matematicamente e processadas por computador.

✓Foi iniciada em 1965 por Lotfi A. Zadeh (Berkeley –CA)

O que é Lógica Fuzzy? (cont.)

Permite expressar o conhecimento de um especialista ou de um “operador”de um sistema em linguagem natural

Exemplos de Aplicações

- ✓Controle de Sistemas Dinâmicos
- ✓Otimização (ex: elevadores)
- ✓Análise de Sinais
  - ✓TV
  - ✓Câmeras (autofocus)

Conjuntos Fuzzy

Conjuntos Fuzzy : Foco

Introdução

Terminologia

Operações com conjuntos Fuzzy

Construção das funções de pertinência

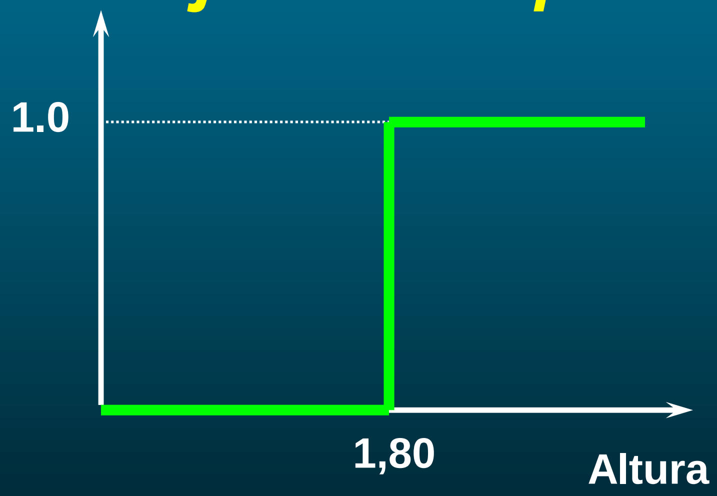
MAUÁ

Conjuntos Fuzzy

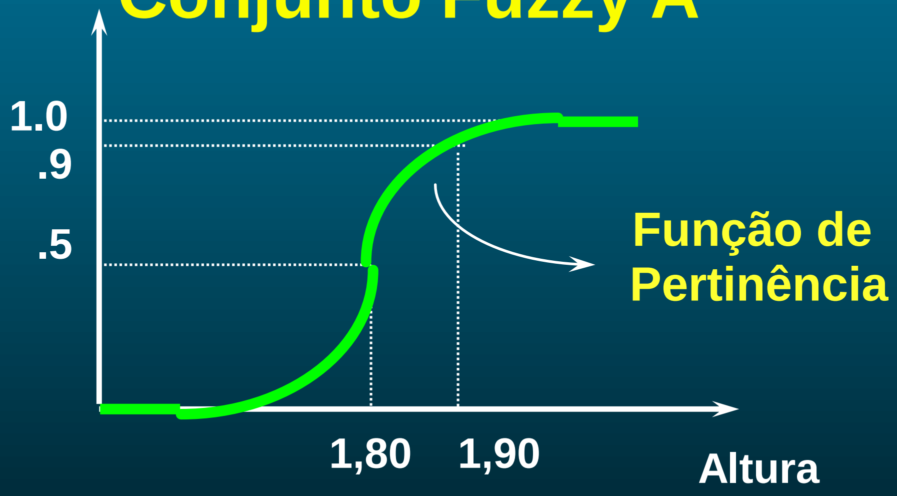
Conjuntos com Fronteiras Fuzzy

A = Conjunto das Pessoas Altas

Conjunto"Crisp" A



Conjunto Fuzzy A



Conjuntos Fuzzy (cont.)

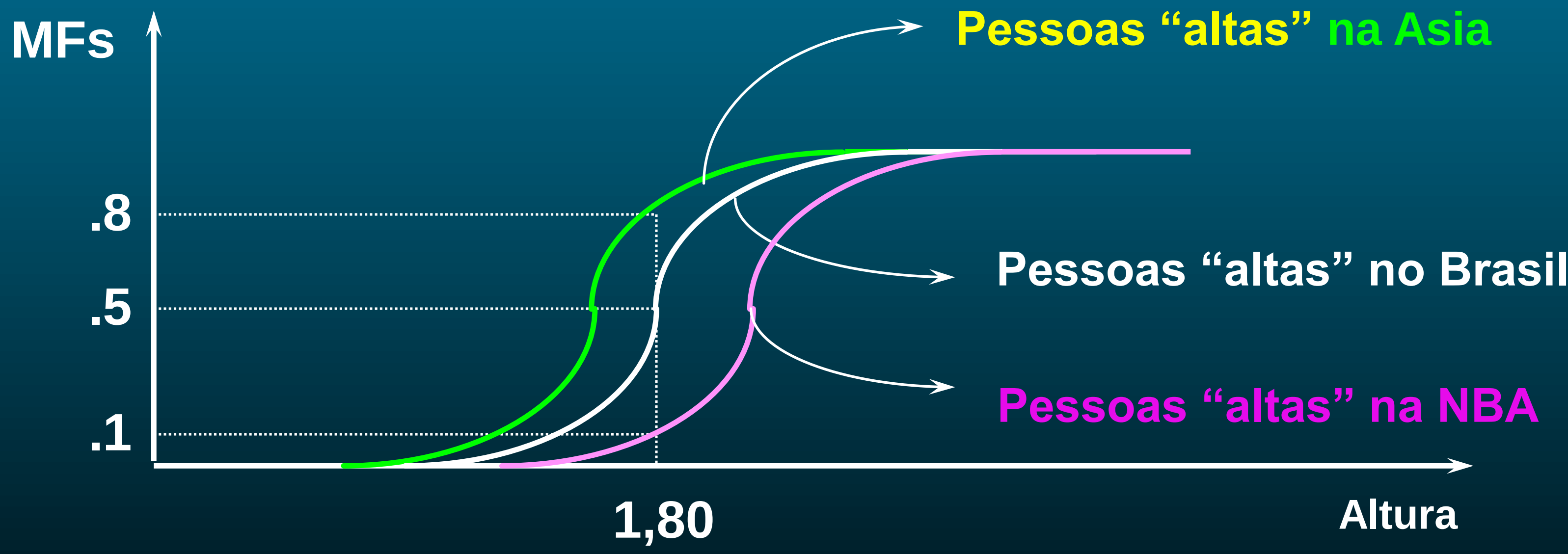
✓ consiste de um universo de discurso *X e uma função de pertinência* $\mu_A(x)$ Є [0,1];

✓Pessoas têm diferentes visões do conjunto fuzzy e função de pertinência pode ser diferente dependendo do contexto/aplicação.

Funções de pertinência

Características Subjetivas

membership functions - MFs



Conjuntos Fuzzy

Definição formal:

Um conjunto fuzzy A em X é expresso como um conjunto de pares ordenados:

$$\underbrace{A}_{\text{Conjunto Fuzzy}} = \{(x, \underbrace{\mu_A(x)}_{\text{Função de Pertinência (MF)}}) \mid x \in \underbrace{X}_{\text{Universo ou universo de discurso}}\}$$

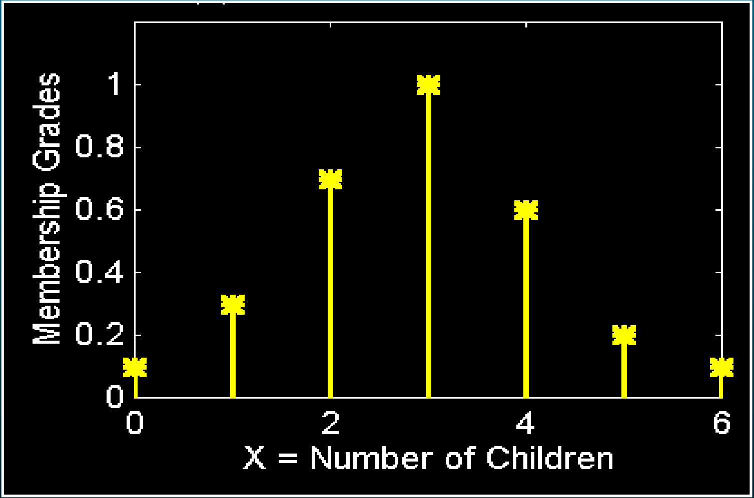
Um conjunto Fuzzy é totalmente caracterizado pela função de pertinência - MF

Conjuntos Fuzzy com Universos Discretos

Conjunto Fuzzy A = “número ideal de crianças”

X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} (discreto)

A = {(0, .1), (1, .3), (2, .7), (3, 1), (4, .6), (5, .2), (6, .1)}



Número ideal de crianças

Conjuntos Fuzzy com Universos Discretos (cont.)

Conjunto dos inteiros aproximadamente igual a 6

A ={ 0.1/3, 0.3/4, 0.6/5, 1/6, 0.6/7, 0.3/8, 0.1/9 }

Representação

- *X discreto*

$$\{(x, \mu_A(x))\} = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \ldots \mu_A(x_m)/x_{m1}$$

$$A = \sum_X \mu_A(x)/x$$

- *X* contínuo

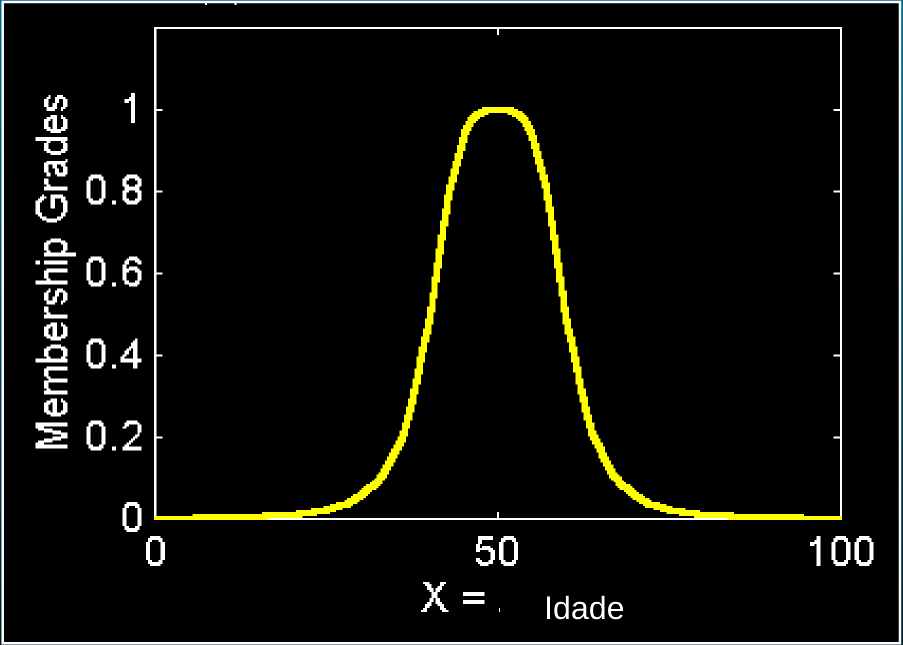
$$A = \int \mu_A(x)/(x)$$

Conjuntos Fuzzy com Universos Contínuos

Conjunto Fuzzy B = “em torno de 50 anos”

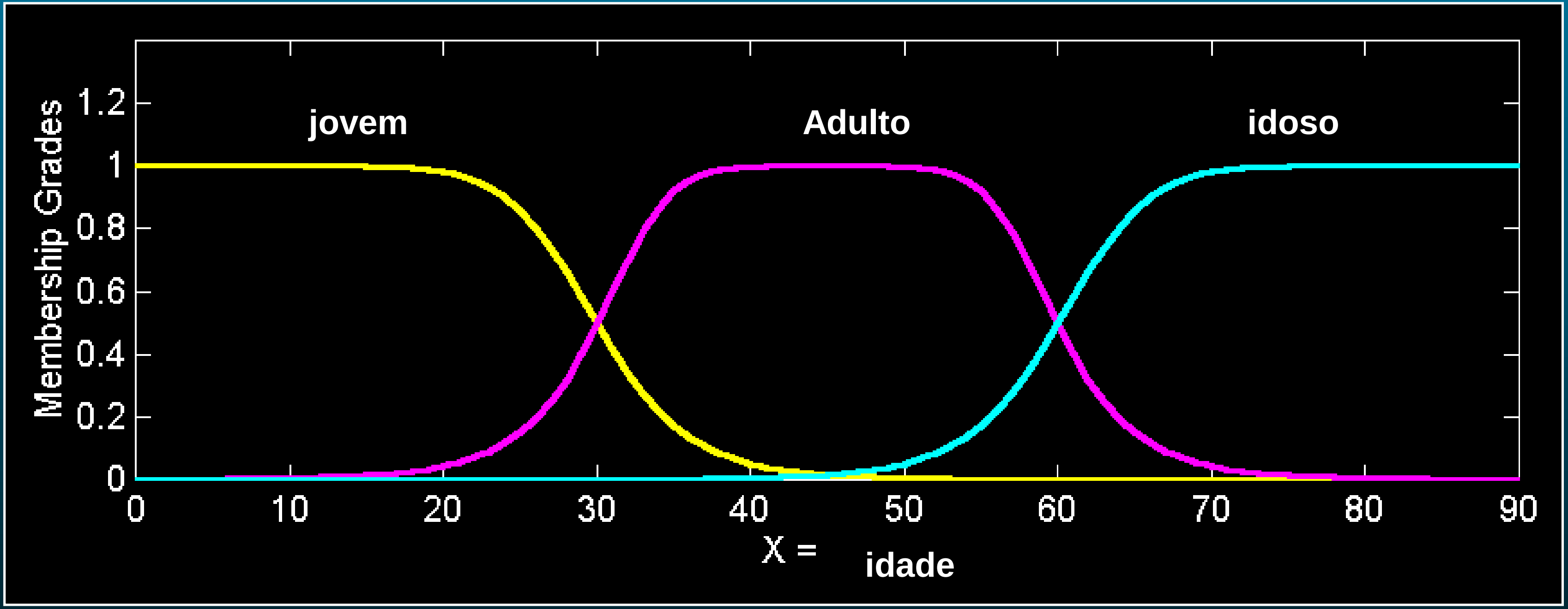
- X = conjunto dos números reais positivos (contínuo)
- B = {(x, μ_B(x)) | x em X}

$$\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x - 50}{10}\right)^2}$$

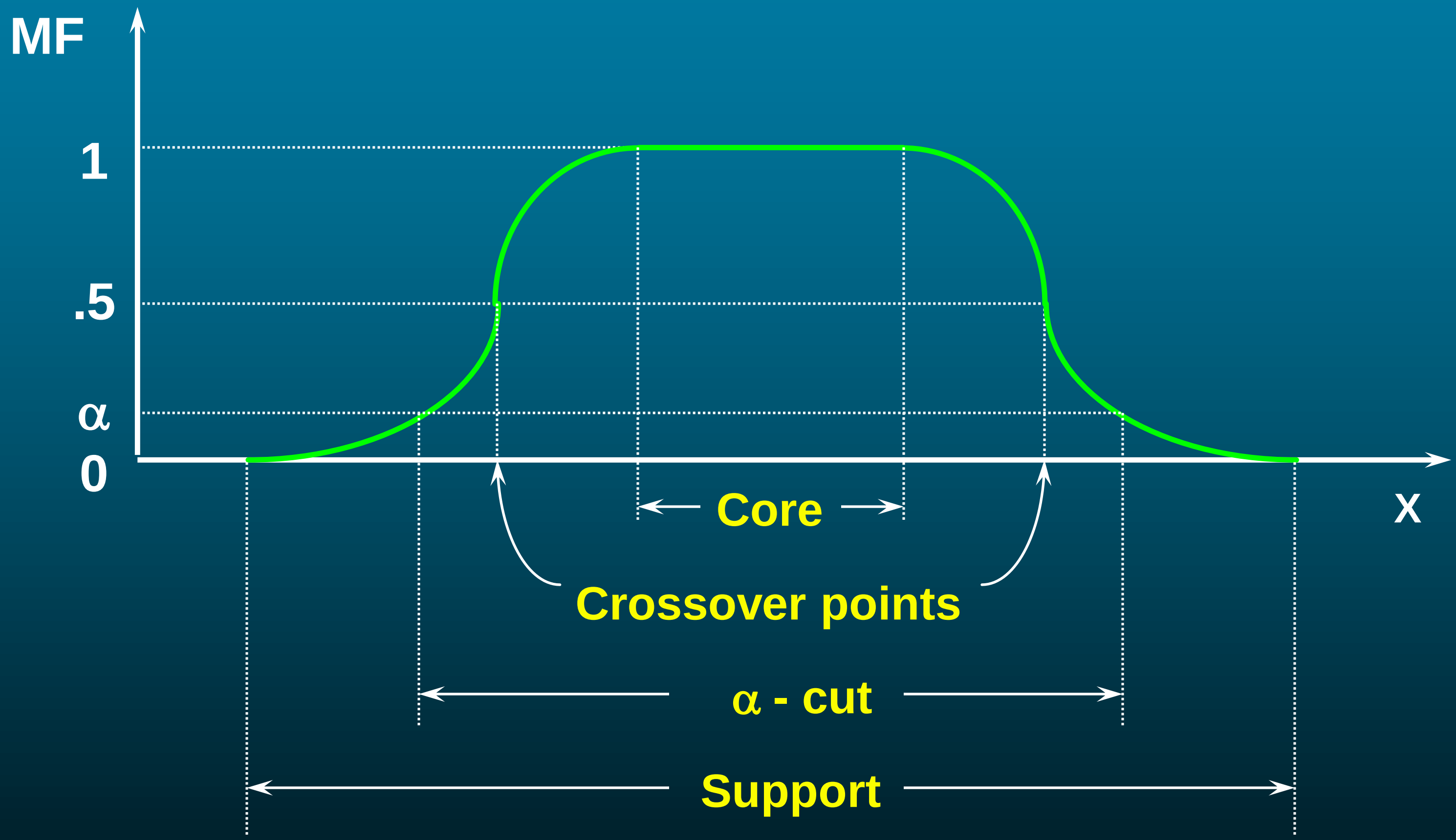


Separação Fuzzy

Separação Fuzzy formada por valores linguísticos "jovem", "adulto", e "idoso":



Terminologia das funções de pertinência



Operações com conjuntos Fuzzy (definições mais comuns)

Sub-conjunto:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \mu_A \leq \mu_B$$

Complemento:

$$\overline{A} = X - A \Leftrightarrow \mu_{\overline{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

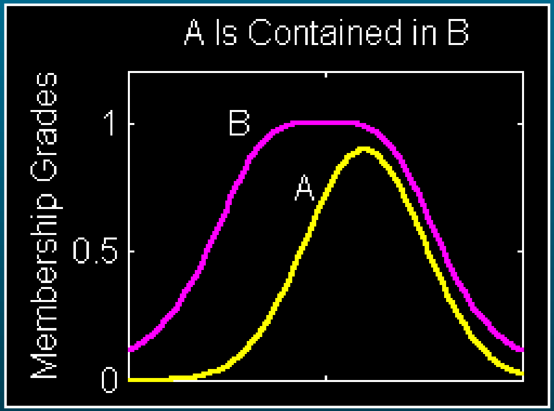
União (OR):

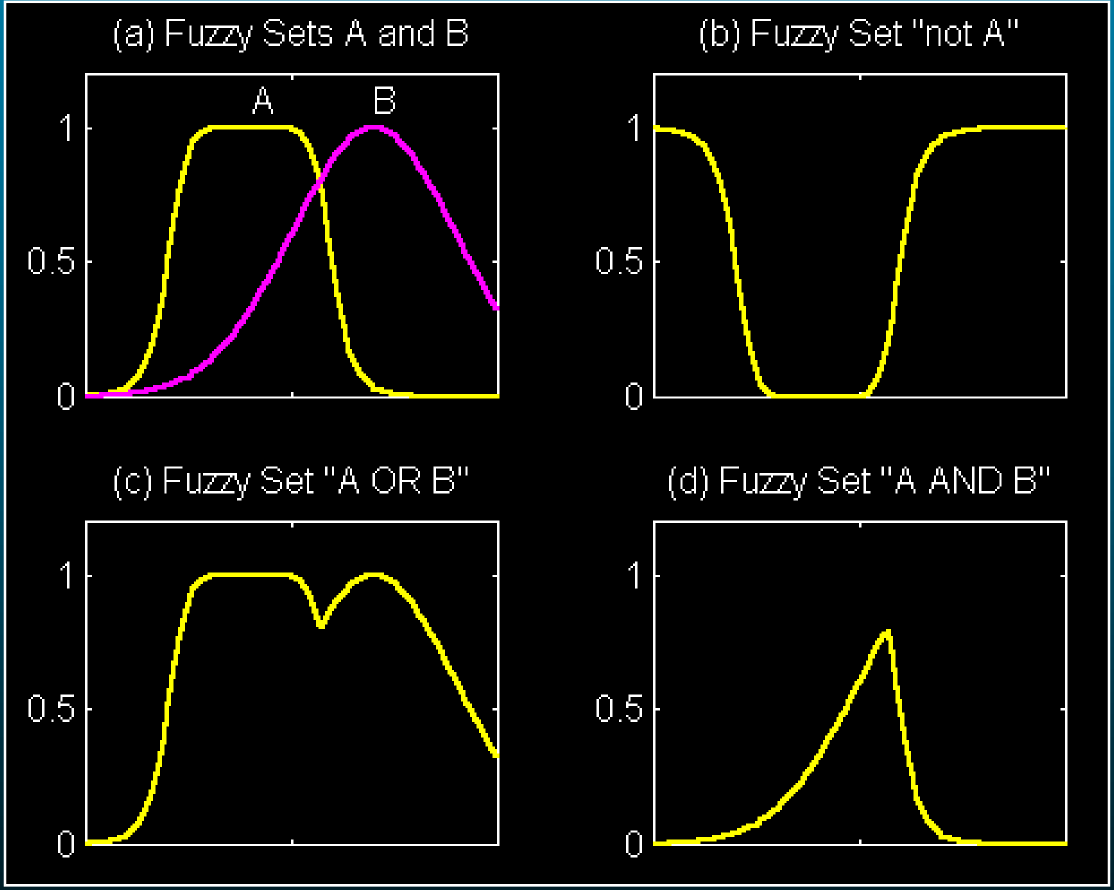
$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$$

Intersecção (AND):

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)$$

Operações com conjuntos Fuzzy





fuzsetop.m

Operações com conjuntos Fuzzy

Outras definições são possíveis

OR (Lukasiewicz):

$$C = A \cup B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \min(1, \mu_A(x) + \mu_B(x))$$

AND (produto):

$$C = A \cap B \Leftrightarrow \mu_c(x) = \mu_A(x) \times \mu_B(x)$$

MAUÁ

Funções de Pertinência

Triangular MF:

$$trimf(x;a,b,c) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b}\right), 0\right)$$

Trapezoidal MF:

$$trapmf(x;a,b,c,d) = \max\left(\min\left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c}\right), 0\right)$$

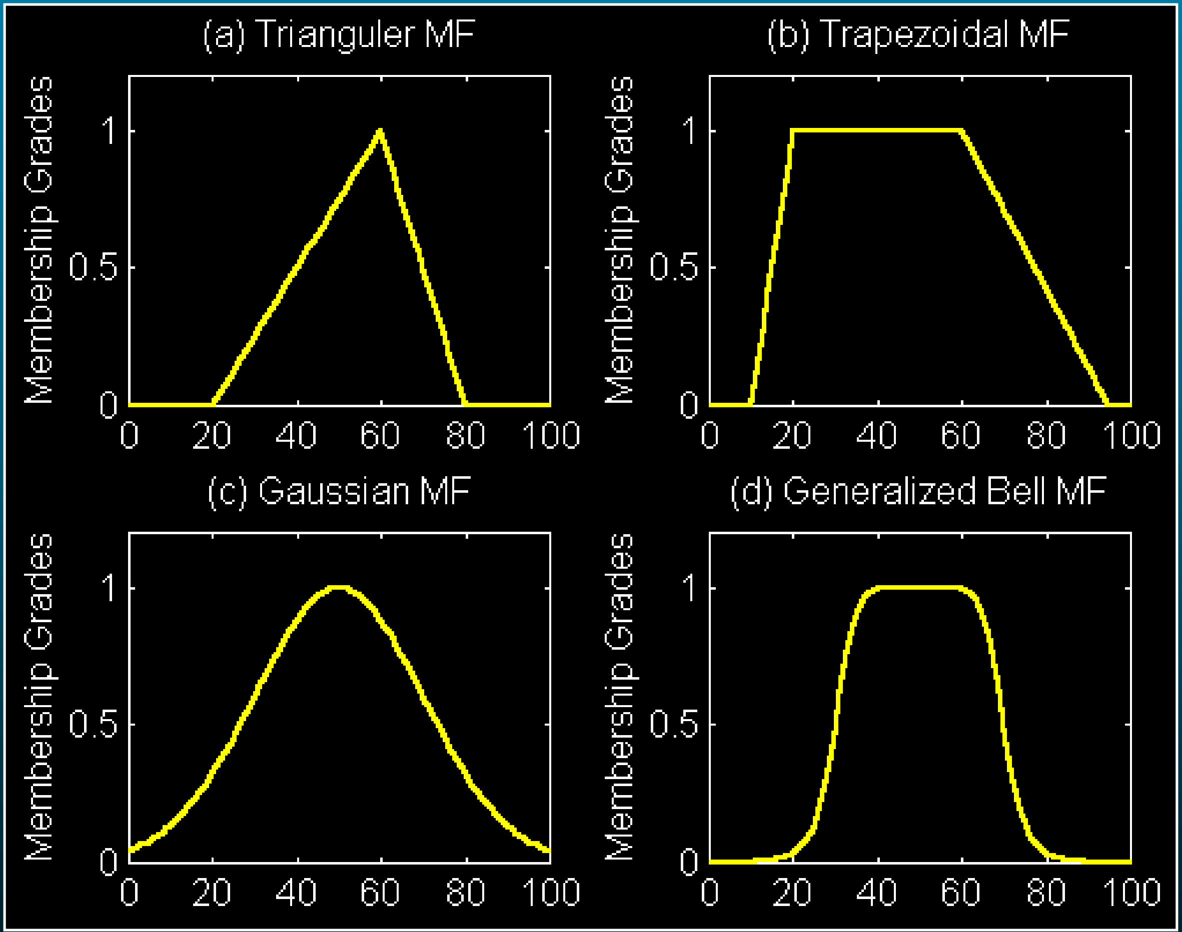
Gaussiana MF:

$$gaussmf(x;\sigma,c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$$

Sino "bell" MF:

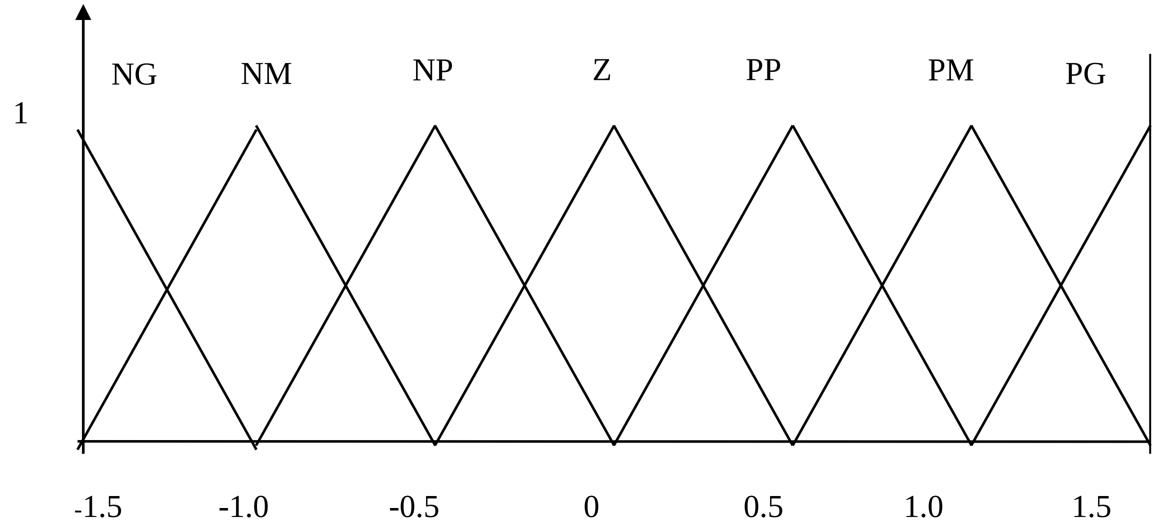
$$gbellmf(x;a,b,c) = \frac{1}{1+\left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$$

Funções de Pertinência



disp_mf.m

Funções de Pertinência de um universo de discurso (Exemplo)



Regras Fuzzy e Lógica Fuzzy

Focos de estudo

•Relações Fuzzy

•Regras Fuzzy : Se - então

•Composição Fuzzy

•Lógica Fuzzy

Relação Fuzzy

✓Estabelece uma relação entre dois ou mais conjuntos fuzzy.

✓Caso discreto:

$$R = \sum_{X \times Y} \mu_A(x, y) \big/ (x, y)$$

Exemplo Relação binária discreta

$X = Y = \{1,2,3\}$ (universo de discurso)

Relação aproximadamente igual (R(x,y)):

1/(1,1) + 1/(2,2) + 1/(3,3)

+ 0.8/(1,2) + 0.8/(2,3) + 0.8/(2,1) + 0.8/(3,2)

+ 0.3/(1/3) + 0.3/(3,1)

Função de pertinência:

$\mu_R(x,y) = 1$ se x = y

0.8 se |x-y| =1

0.3 se |x-y| = 2

Exemplo Relação (cont.)

Em forma matricial:

		Y		
		1	2	3
	1	1	0.8	0.3
X	2	0.8	1	0.8
	3	0.3	0.8	1

MAUÁ

Operações sobre relações

Defini-se as operações AND, OR e complemento de maneira similar às definidas quando do estudo dos conjuntos fuzzy.

Variáveis Linguísticas

Variável numérica recebe um valor numérico:

Temperatura = 65

Variável Linguística recebe um "valor linguístico":

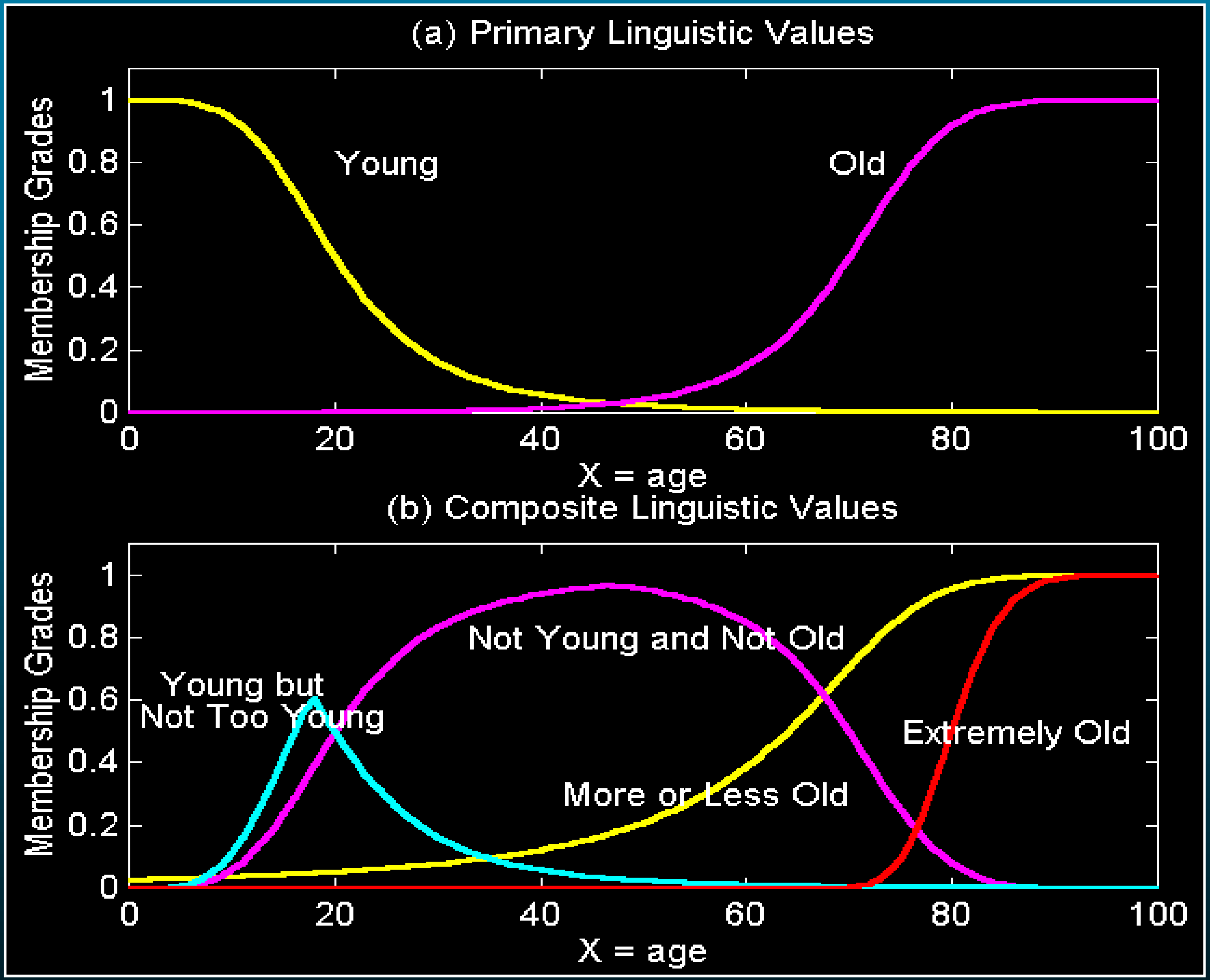
Temperatura é baixa

Conjunto de termos:

T(idade) = {jovem, não jovem, muito jovem, ...

Idoso, não idoso, muito idoso ...}

Termos



complv.m

Regras Fuzzy - Se (....) / então (....)

Formato Geral (expressão simbólica):

Se x é A então y é B (implicação fuzzy)

Exemplos:

- Se a pressão é alta, então o volume é pequeno.
- Se a estrada está molhada, então ela é perigosa.

Implicação Fuzzy

- A declaração: Se x é A então y é B , com x Є X e y Є Y tem uma função de pertinência dada pela relação de implicação $\mu_{A\text{->}B}(x,y)$ Є [0,1];

- $\mu_{A\text{->}B}(x,y)$ mede o grau de verdade da relação de implicação entre *x* e *y.*

- Existem várias relações possiveis na literatura.

- Exemplos:

$\mu_R(x,y) = \mu_{A\text{->}B}(x,y) = \min(\mu_A(x) , \mu_B(y))$ (MAMDANI)

$\mu_R(x,y) = \mu_{A\text{->}B}(x,y) = \mu_A(x) \text{ X } \mu_B(y)$ (LARSEN)

MAUÁ

Exemplo Mamdani

$A = 0.1/x_1 + 0.4/x_2 + 0.7/x_3 + 1/x_4$

$B = 0.2/y_1 + 0.5/y_2 + 0.9/y_3$

R(x,y) =

	y_1	y_2	y_3
x_1	0.1	0.1	0.1
x_2	0.2	0.4	0.4
x_3	0.2	0.5	0.7
x_4	0.2	0.5	0.9

Composição Fuzzy (Generalized Modus Ponens)

Como determinar y Є Y dado x Є X?

Resp: Composição Fuzzy.

Uma possibilidade (Zadeh):

$$\mu_B(y) = \sup_x \min(\mu_A(x), \mu_{A->B}(x, y))$$

Usando a implicação Mandami:

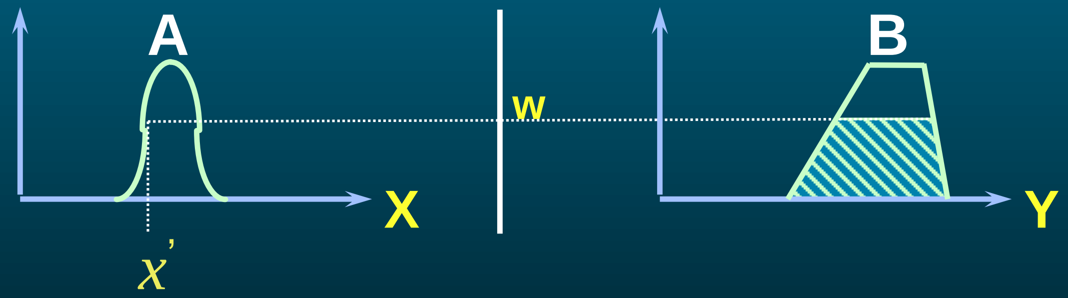
$$\mu_B(y) = \sup_x \min(\mu_A(x), \min(\mu_A(x), \mu_B(x)))$$

Lógica Fuzzy

Regra única com um único antecedente

Regra: Se x é A então y é B

Representação Gráfica:

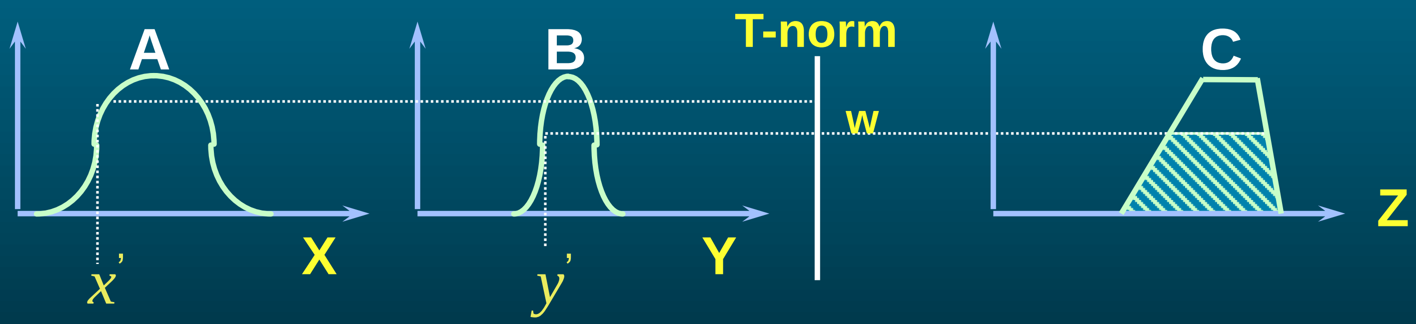


Lógica Fuzzy

Regra única com múltiplos antecedentes:

Regra: Se x é A e y é B então z é C

Representação Gráfica:



Lógica Fuzzy

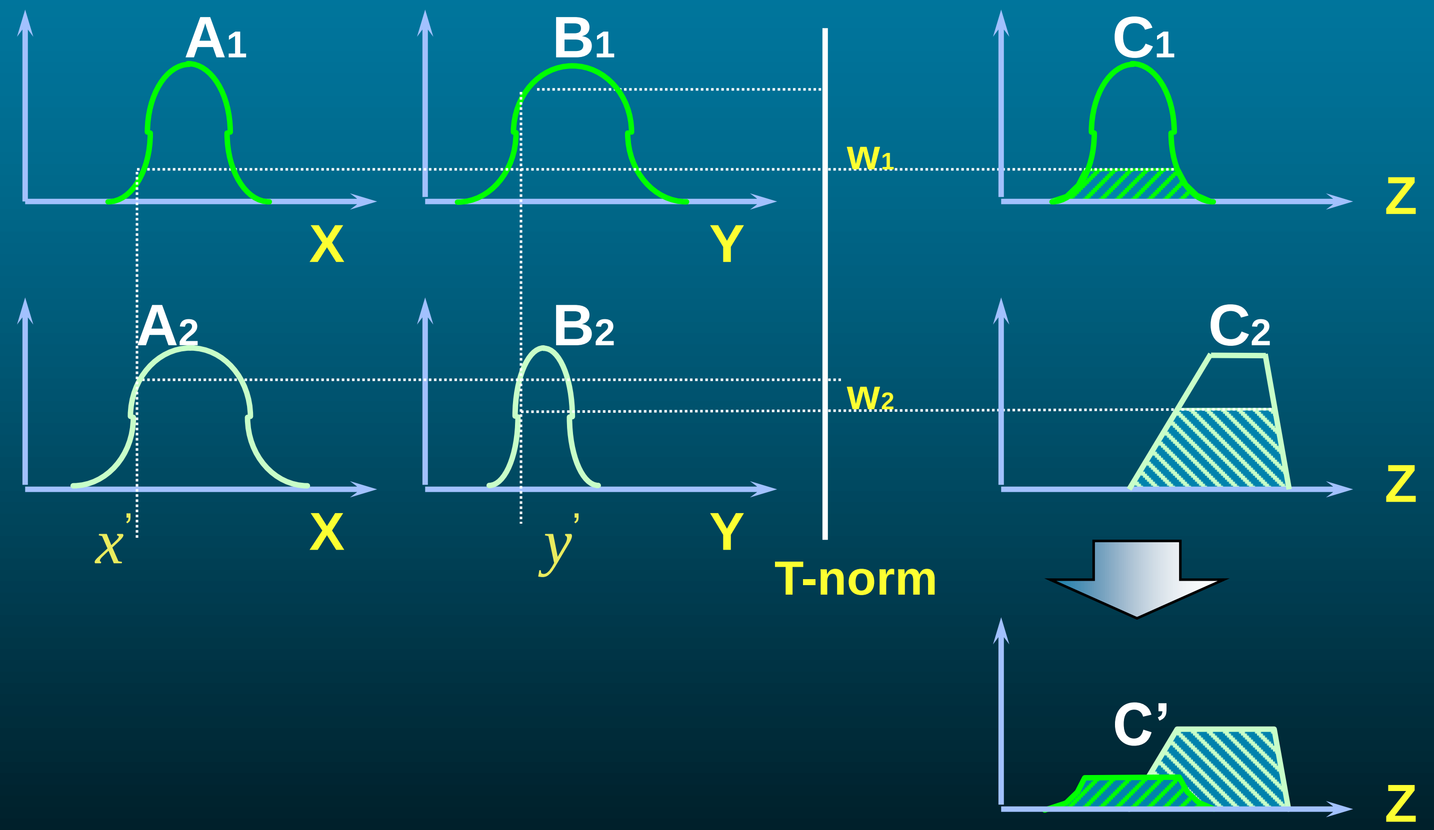
Múltiplas regras com múltiplos antecedentes

Regra 1: Se x é A_1 e y é B_1 então z é C_1

Regra 2: Se x é A_2 e y é B_2 então z é C_2

Lógica Fuzzy

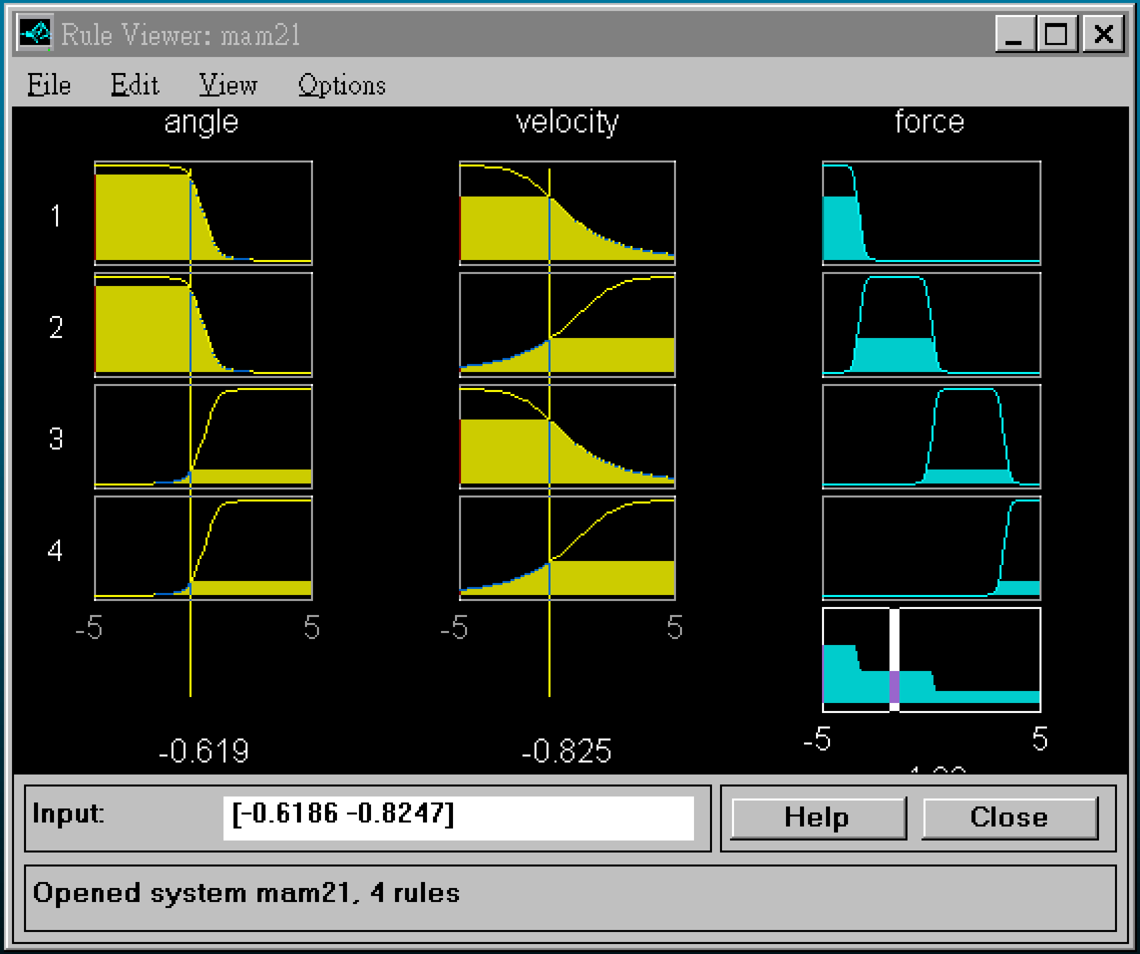
Representação gráfica:



z é C'

Lógica Fuzzy: MATLAB Demo

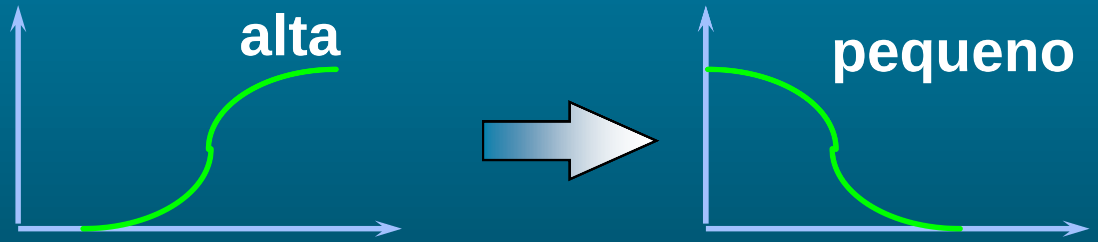
>> ruleview mam21



Regras Fuzzy – Mamdani e Sugeno (Motivação)

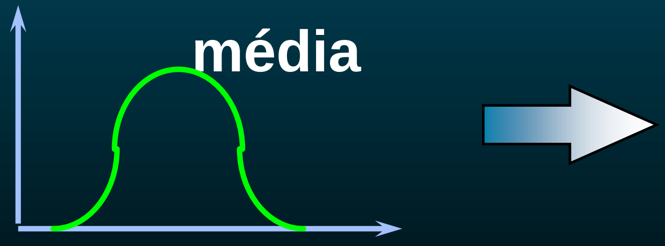
- **Mamdani**

  Se a pressão é alta então o volume é pequeno



- **Sugeno**

  Se a velocidade é média então a resistência = 5*velocidade



resistência = 5*speed