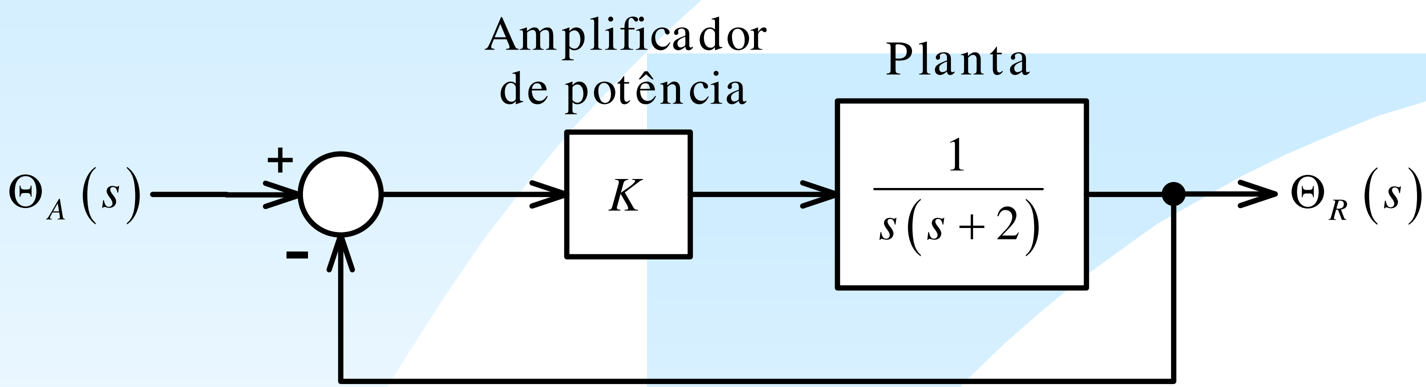
ECA402 – Sistemas de Controle

Aula 08 – Diagrama do Lugar das Raízes

Princípios do Lugar das Raízes

*** *Exemplo:* Sistema de rastreamento por radar**



Sistema em malha fechada:

$$G_{mf}(s) = \frac{K\,G_p(s)}{1 + K\,G_p(s)} = \frac{\dfrac{K}{s(s+2)}}{1 + \dfrac{K}{s(s+2)}} = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

Princípios do Lugar das Raízes

Sistema em malha fechada: $G_{mf}(s) = \dfrac{K}{s^2 + 2s + K}$

Equação característica: $\underbrace{s^2 + 2s + K = 0}$

Critério de Routh-Hurwitz: Sistema estável para *K* > 0

É possível calcular um valor adequado para o ganho *K* que atenda *apenas uma* especificação de desempenho acerca do sistema em estudo

O atendimento a mais de um critério de desempenho leva à uma solução de compromisso

Princípios do Lugar das Raízes

O Critério de Routh-Hurwitz não investiga o efeito do ganho *K* na resposta transitória

Cálculo das raízes da equação característica (pólos do sistema)

$$s^2 + 2s + K = 0 \quad \xrightarrow{\text{Raízes}} \quad s = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4K}}{2} = -1 \pm \sqrt{1 - K}$$

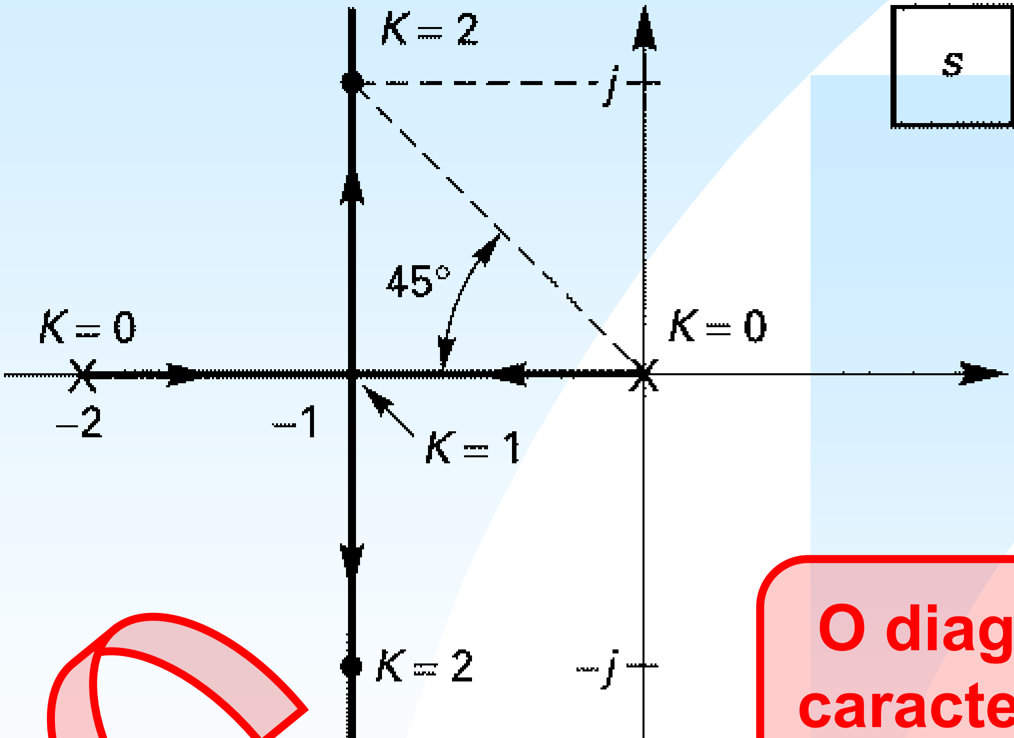
$0 \le K < 1:$ **Raízes reais negativas distintas (sobreamortecido)**

$K = 1:$ **Raízes reais negativas iguais (criticamente amortecido)**

$K > 1:$ **Raízes complexas conjugadas (subamortecido)**
Neste caso, τ = 1 s e ζ diminui com o aumento de *K*

Princípios do Lugar das Raízes

Graficamente:



Trajetória descrita pelas raízes da equação característica, construída a partir da variação de um parâmetro do sistema (ganho *K*)

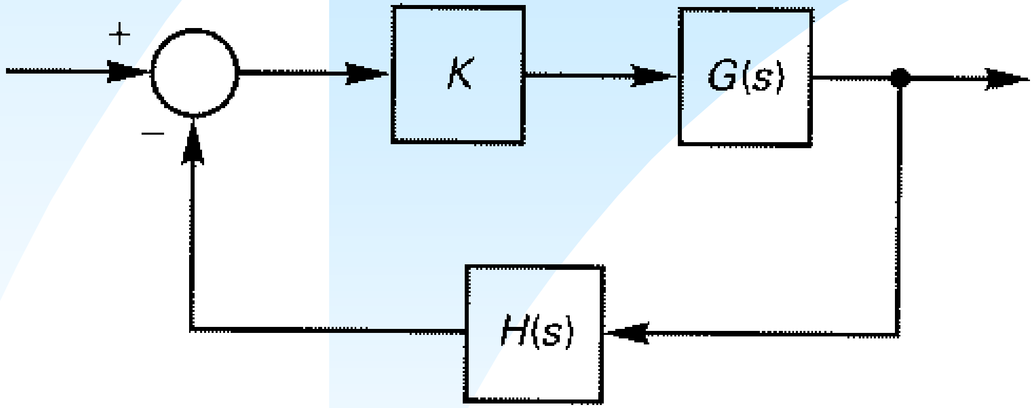
O diagrama permite obter características qualitativas da resposta temporal

Lugar das Raízes do Sistema

Princípios do Lugar das Raízes

Quando o parâmetro é variado de forma contínua em um sistema de ordem *n*, o lugar das raízes é constituído de uma família de *n* ramos ou caminhos traçados a partir das *n* raízes da equação característica

Sistema Base:



Equação característica: $1 + K\,G(s)H(s) = 0$

Um ponto *s* do plano complexo ∈ ao LR $\Leftrightarrow \quad K = -\dfrac{1}{G(s)H(s)}$

Princípios do Lugar das Raízes

$$K = -\frac{1}{G(s)H(s)}$$

A função de malha aberta é, geralmente, complexa

Daí:

$$\left| K \right| = \frac{1}{\left| G(s)H(s) \right|}$$

Critério de magnitude

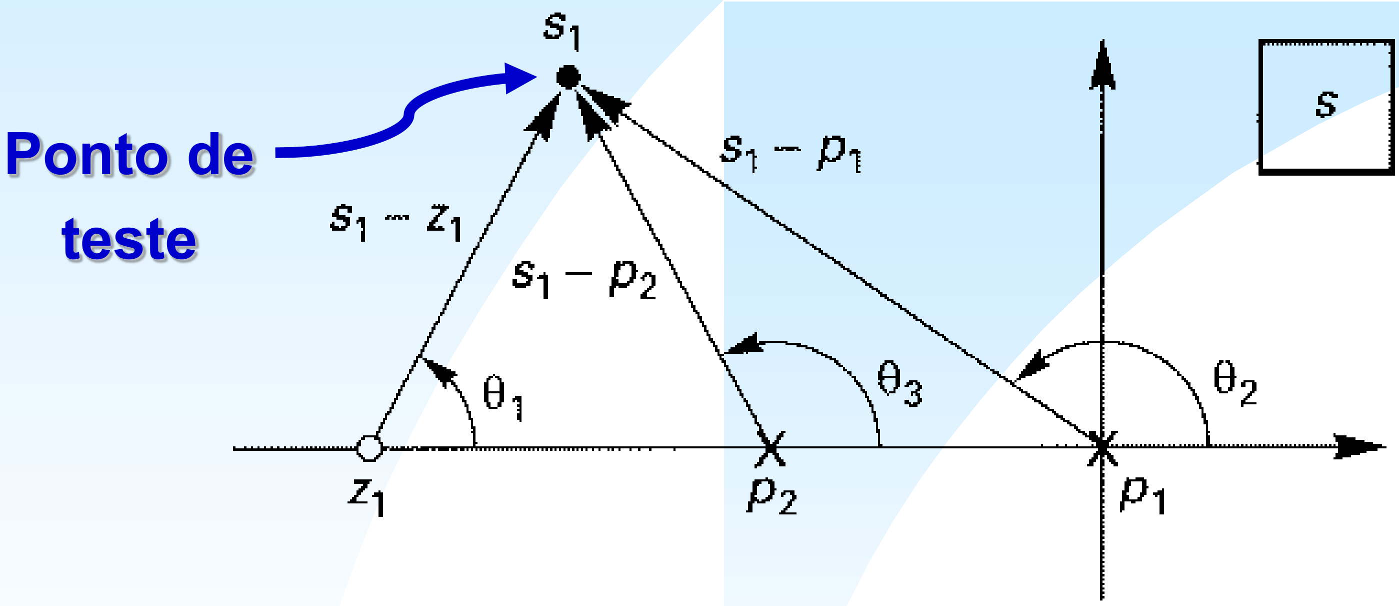
$$\angle G(s)H(s) = arg\, G(s)H(s) = r\,\left(180^\circ\right)$$

com $r = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots$

Critério dos ângulos

Princípios do Lugar das Raízes

Exemplo: $KG(s)H(s) = \dfrac{K\cdot(s-z_1)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)}$



- **O ponto *s_1* $\in$ LR $\Leftrightarrow$** $\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 = \pm 180^\circ$
- **O valor de *K* que determina *s_1* é** $K = -\dfrac{1}{G(s_1)H(s_1)}$

Princípios do Lugar das Raízes

Assim, a condição de pertinência de um ponto do plano complexo *s* ao lugar das raízes de um sistema é dada por

$$\sum(\text{ângulos a partir dos zeros finitos}) - \sum(\text{ângulos a partir dos pólos finitos}) =$$
$$= r\left(180^\circ\right), \text{com } r = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \ldots$$

Importante: Os pólos e zeros da condição de pertinência são aqueles da malha aberta G(s)H(s)

Técnicas de Construção do LR

Regra 1. **O diagrama do lugar das raízes é simétrico em relação ao eixo real.**

- **Sistemas físicos são representados por modelos descritos por funções racionais a coeficientes reais**
- **Caso a equação característica admita uma raiz complexa, o complexo conjugado desta será também uma raiz**

Expandindo a equação característica:

$$1 + K\,G(s)H(s) = 1 + \frac{K\,b_m \cdot (s - z_1)\cdot(s - z_2)\cdots(s - z_m)}{(s - p_1)\cdot(s - p_2)\cdots(s - p_n)} = 0$$

Técnicas de Construção do LR

$$1+\frac{K\,b_m\cdot(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdots(s-p_n)}=0$$

$$(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdots(s-p_n)+K\,b_m\cdot(s-z_1)\cdot(s-z_2)\cdots(s-z_m)=0$$

Regra 2. **O diagrama do lugar das raízes se origina nos pólos de G(s)H(s) (*K* = 0) e termina nos zeros de G(s)H(s) (*K* → ∞), incluindo os zeros que ocorrem no infinito.**

A função de malha aberta pode ser reescrita como:

$$K\,G(s)H(s)=\frac{K\cdot\left(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots\right)}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots}=\frac{K\cdot\left(b_m s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots\right)}{s^{m+\alpha}+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots}$$

com $\alpha=n-m>0$ **(diferença entre o número de pólos e zeros)**

Técnicas de Construção do LR

$$KG(s)H(s) = \frac{K\cdot\left(b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots\right)}{s^{m+\alpha} + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots}$$

A função de malha aberta possui α zeros que ocorrem no infinito

A partir do $\lim_{s\to\infty} KG(s)H(s) = \lim_{s\to\infty} \frac{K\,b_m s^m}{s^n} = \lim_{s\to\infty} \frac{K\,b_m}{s^\alpha}$

conclui-se que, para valores elevados da variável complexa *s*, o diagrama do lugar das raízes satisfaz a relação

$$\lim_{s\to\infty}\left[\,1 + KG(s)H(s)\,\right] = \lim_{s\to\infty}\left[\,1 + \frac{K\,b_m}{s^\alpha}\,\right] = 0$$

Com raízes dadas por:

$$s^\alpha + K\,b_m = 0 \;\Rightarrow\; s^\alpha = -K\,b_m = K\,b_m \angle r180^\circ,\ \text{com } r = \pm1,\ \pm3,\ \cdots$$

Técnicas de Construção do LR

$$s^{\alpha} = -K\,b_m = K\,b_m\ \angle\ r180^{\circ}$$

- **A magnitude destas raízes tende ao infinito à medida que *s* e *K* tendem ao infinito**
- **Os ângulos destas raízes são os valores principais dos ângulos** $\theta = \dfrac{r180^{\circ}}{\alpha}$, com $r = \pm 1,\ \pm 3,\ \pm 5,\ \cdots$

Ângulos das assíntotas do Lugar das Raízes

Exemplo 7.1

Exemplo 7.2

Técnicas de Construção do LR

Regra 3. **Se a função de malha aberta possui α zeros no infinito ($\alpha \geq 1$), o diagrama do lugar das raízes se aproxima de α assíntotas à medida que *K* tende ao infinito. Os ângulos destas assíntotas são dados por**

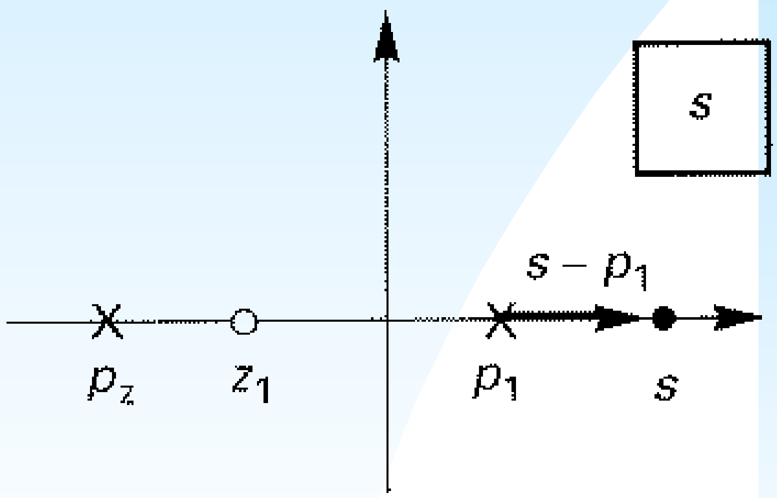
$$\theta = \frac{r180^{\circ}}{\alpha}, \text{ com } r = \pm 1, \ \pm 3, \ \pm 5, \ \cdots$$

O intercepto das assíntotas no eixo real ocorre no ponto

$$\sigma_a = \frac{(\text{soma dos pólos finitos}) - (\text{soma dos zeros finitos})}{(\text{número de pólos finitos}) - (\text{número de zeros finitos})}$$

Técnicas Adicionais

Seja $KG(s)H(s) = \dfrac{K \cdot (s - z_1)}{(s - p_1) \cdot (s - p_2)}$ **(Pólos e zeros supostos reais)**



- **Ponto *s* à direita de *p_1***

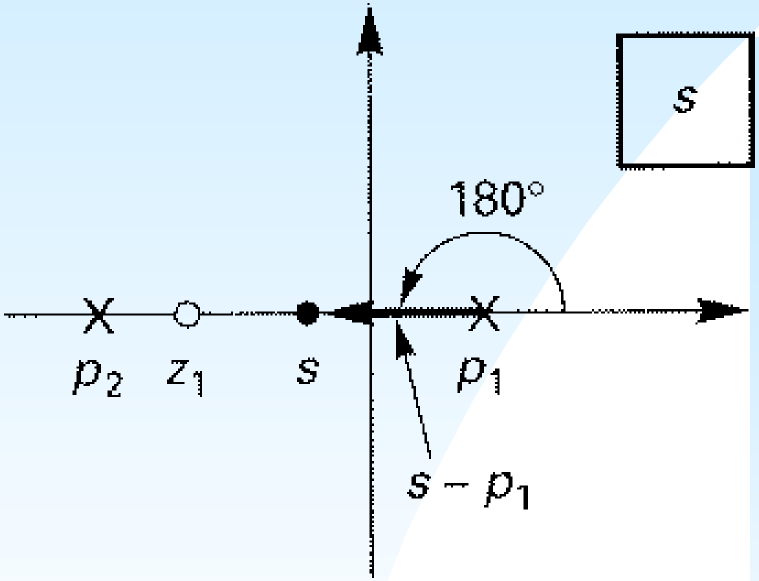
Critério dos ângulos:

$$\left.\begin{array}{l}(s - p_1)\\[1em](s - p_2)\\[1em](s - z_1)\end{array}\right\}\ \textbf{contribuem com 0º}$$

O critério dos ângulos não é satisfeito. Portanto, nenhum ponto à direita de *p_1* pertence ao LR

Técnicas Adicionais

- **Ponto *s* entre o pólo p_1 e o zero z_1**



Critério dos ângulos:

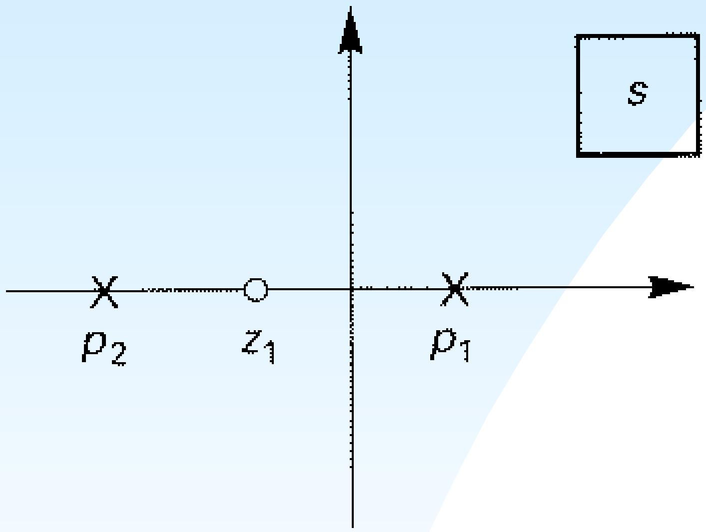
$(s - p_1)$ **contribui com 180º**

$$\left.\begin{array}{l}(s-p_2)\\(s-z_1)\end{array}\right\}$$ **contribuem com 0º**

O critério dos ângulos é satisfeito. Logo, qualquer ponto situado entre p_1 e z_1 pertence ao LR

Técnicas Adicionais

- Ponto *s* entre o pólo p_2 e o zero z_1



Critério dos ângulos :

$\left(s - p_1\right)$ **contribui com 180º**

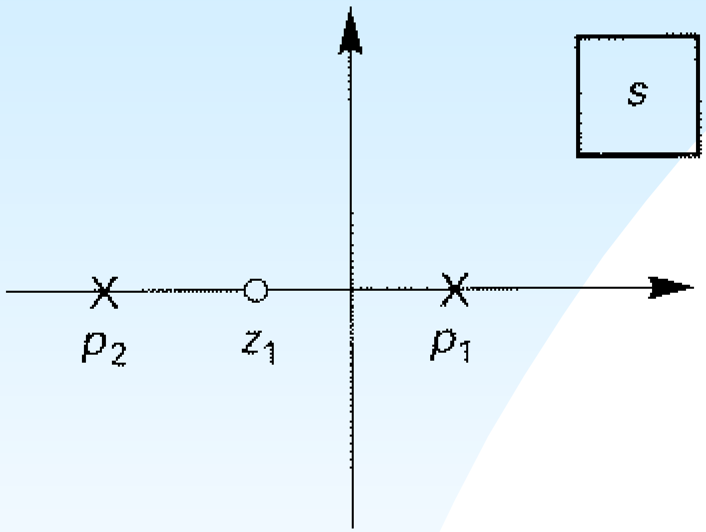
$\left(s - p_2\right)$ **contribui com 0º**

$\left(s - z_1\right)$ **contribui com 180º**

O critério dos ângulos não é satisfeito. Portanto, qualquer ponto situado entre p_2 e z_1 não pertence ao LR

Técnicas Adicionais

- **Ponto *s* à esquerda do pólo p_2**



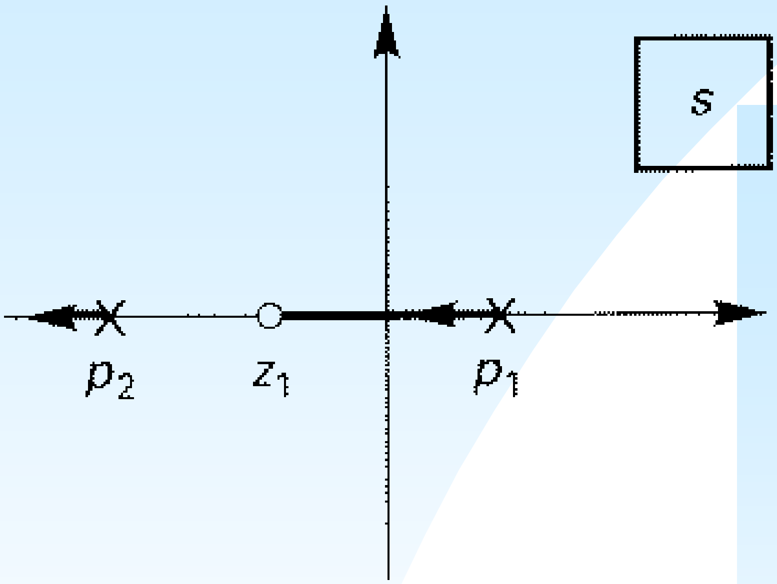
Critério dos ângulos :

$$\left.\begin{array}{l}(s-p_1)\\(s-p_2)\\(s-z_1)\end{array}\right\}$$ **contribuem com 180º**

O critério dos ângulos é satisfeito. Portanto, qualquer ponto situado à esquerda de p_2 pertence ao LR

Técnicas Adicionais

Lugar das raízes do sistema:

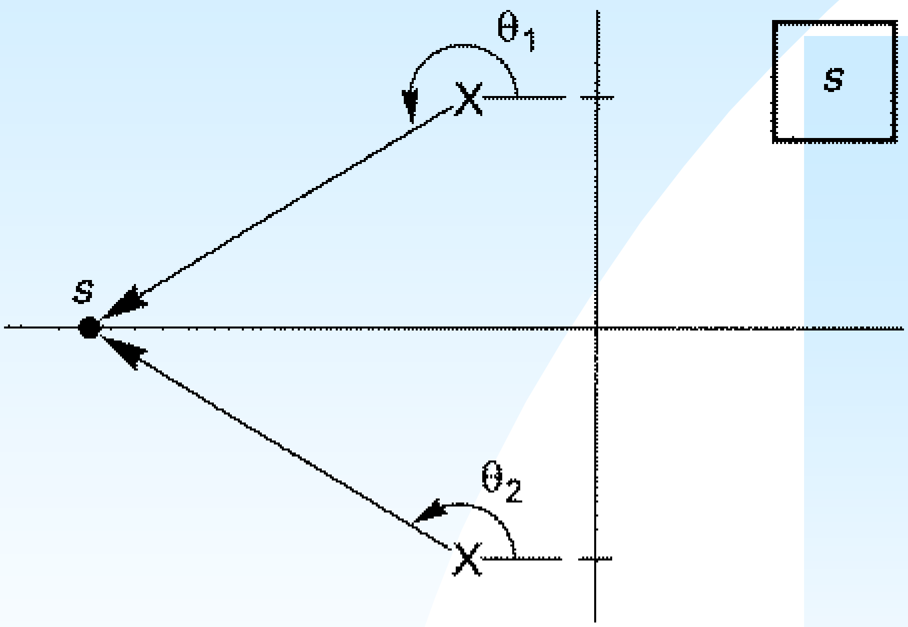


Definindo ***freqüência crítica*** como sendo os pólos e zeros de malha aberta, tem-se:

Caso uma freqüência crítica localize-se à esquerda de um ponto de teste, sua contribuição para o critério dos ângulos será de 0º. Em contrapartida, se uma freqüência crítica localiza-se à direita de um ponto de teste, sua contribuição para o critério dos ângulos será de 180º.

Técnicas Adicionais

Na ocorrência de pólos complexos conjugados:



A soma das contribuições de ângulos do par de pólos (ou zeros) para um ponto no eixo real será sempre de 0º (ou 360º). Portanto, pólos ou zeros complexos não afetam a porção do lugar das raízes que ocorre sobre o eixo real.

Regra 4. **O diagrama do lugar das raízes inclui todos os pontos do eixo real à esquerda de um número ímpar de freqüências críticas reais.**

Técnicas Adicionais

Regra 5. **Os pontos de quebra ou ruptura do diagrama do lugar das raízes são obtidos a partir do conjunto das raízes do polinômio gerado por**

$$\frac{d\left[\ G(s)H(s)\ \right]}{ds}=0$$

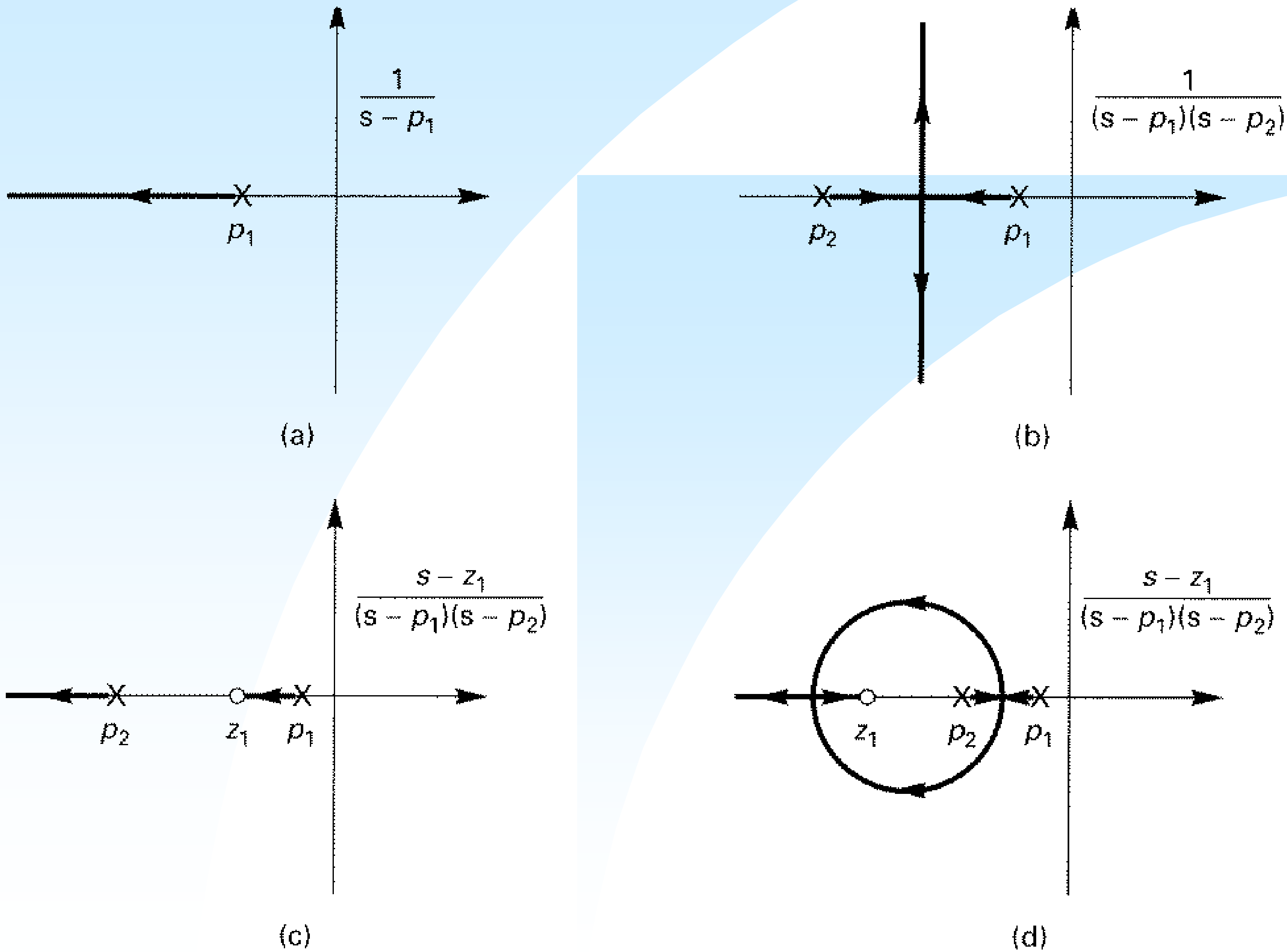
Ou, equivalentemente,

$$N(s)D'(s)-N'(s)D(s)$$

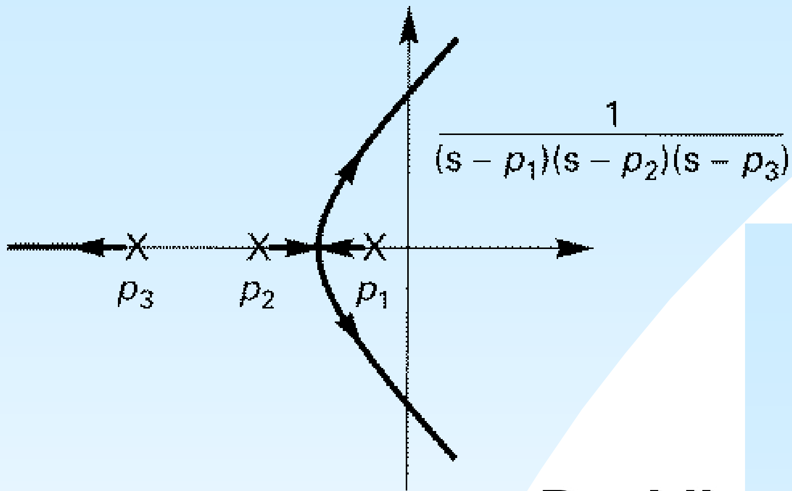
em que N(s) e D(s) são os polinômios do numerador e do denominador de G(s)H(s), respectivamente

→ **Exemplo 7.4** → **Exemplo 7.5**

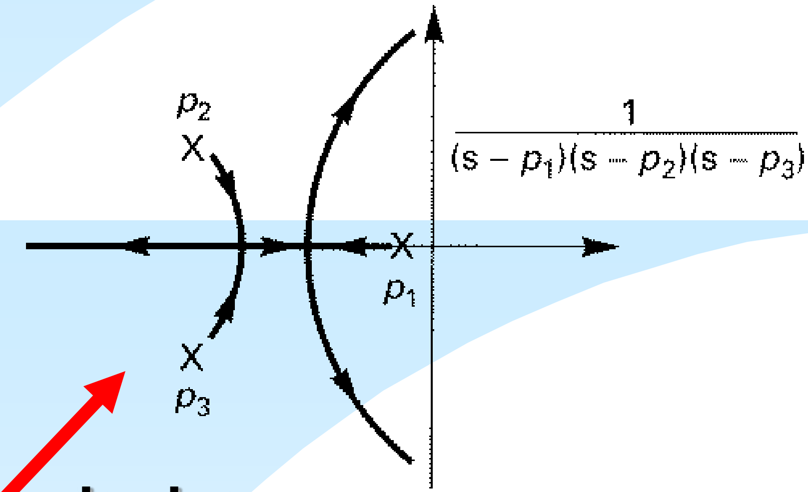
Configurações Típicas



Configurações Típicas

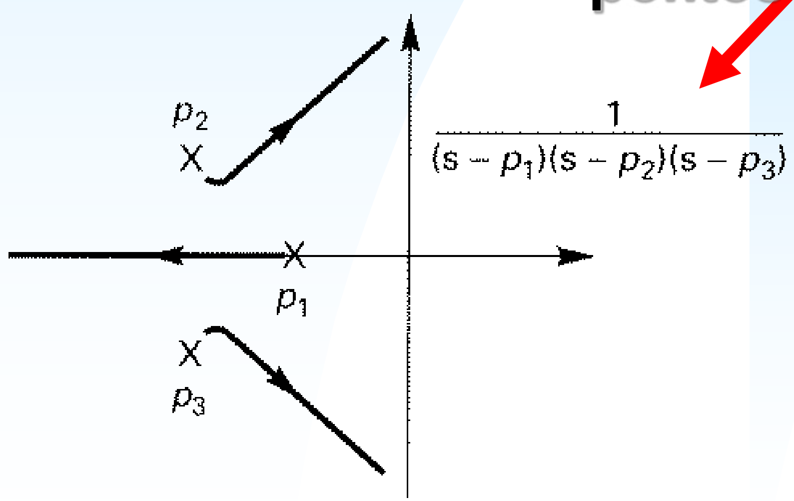


(e)

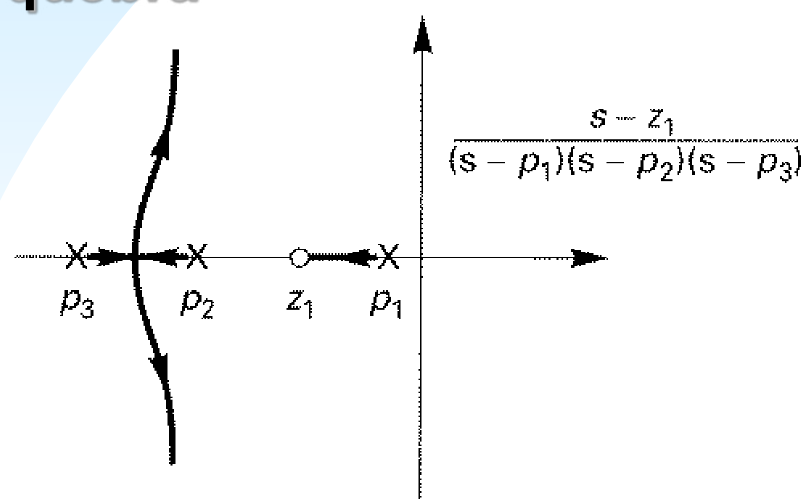


(f)

Decidir por meio dos pontos de quebra



(g)



(h)

FIM