

**Escola de Engenharia Mauá**

**ECM511 –Pesquisa Operacional e ~Métodos  
de Otimização**

Prof. Joyce M Zampirolli

joyce.zampirolli@maua.br

# **Simplex de Transporte**

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

## Passo 1: Solução básica inicial

	1	2	3	4	
1	8	6	10	9	35
2	9	12	13	7	50
3	14	9	16	5	40
	45	20	30	30	

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

**Passo 1:** Solução básica inicial (método do mínimo custo)

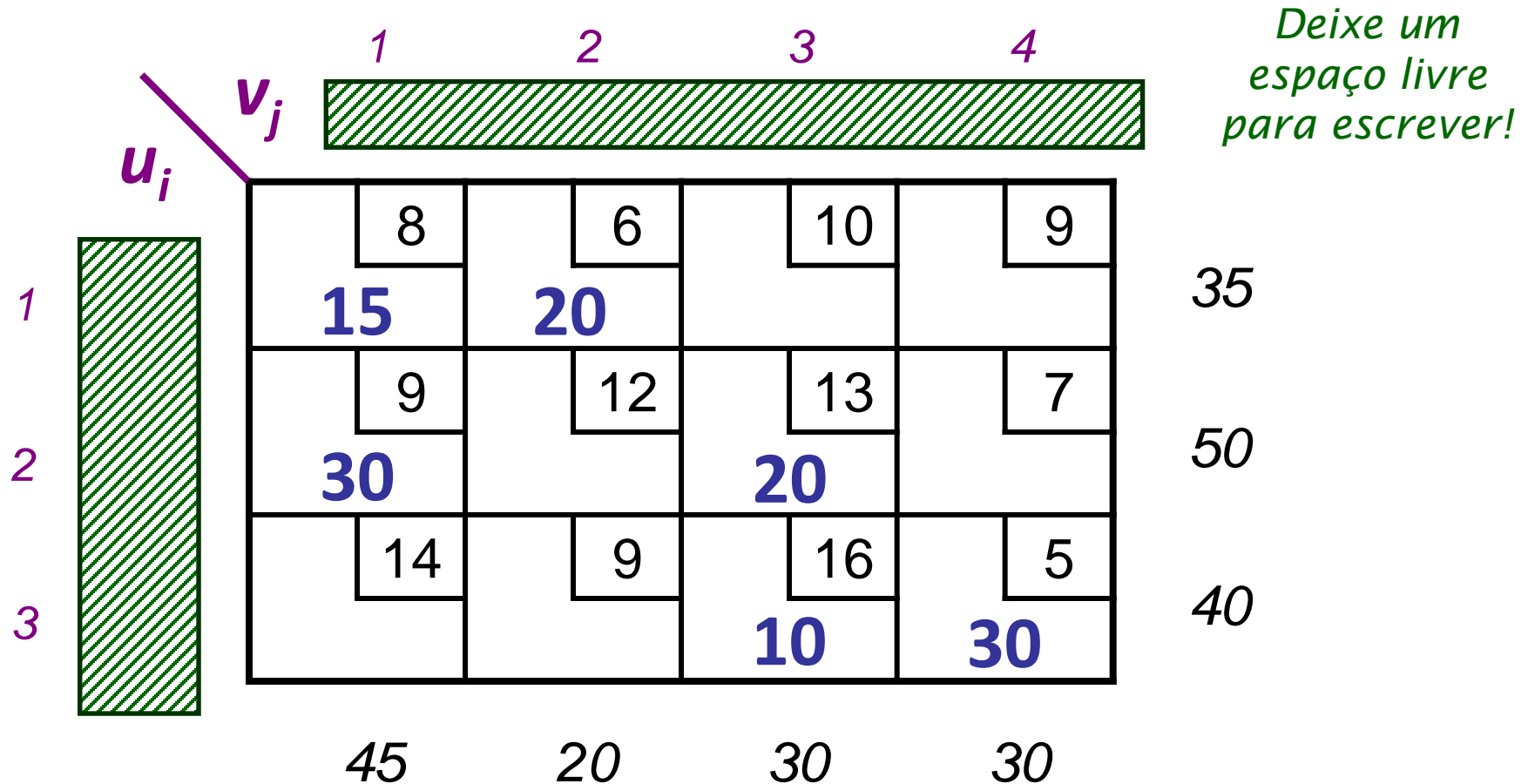
6 variáveis básicas para 7 equações!

	1	2	3	4	
	8	6	10	9	
1	15	20			35
	9	12	13	7	
2	30		20		50
	14	9	16	5	
3			10	30	40

$$\text{Custo} = 8 \times 15 + 6 \times 20 + 9 \times 30 + 13 \times 20 + 16 \times 10 + 5 \times 30$$

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

## Passo 2: Definição das variáveis auxiliares



# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

**Passo 3:** Cálculo das variáveis auxiliares:  $u_i + v_j = c_{ij}$

		1	2	3	4
		8	6	12	1
1	0	8	6	10	9
2	1	9	12	13	7
3	4	14	9	16	5
		45	20	30	30

$$u_1 + v_1 = 8$$

35

Para cada  
variável  
básica da  
solução atual

40

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

**Passo 4:** Cálculo dos custos reduzidos:  $\overline{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

		1	2	3	4		
		8	6	12	1		
1	0	8	6	-2	10	8	9
	15		20				
	30	9	5	12	13	5	7
	2	14	-1	9	16		5
2	1						
	20						
3	4						
	10						
		45	20	30	30		

$$\overline{c}_{13} = c_{13} - u_1 - v_3$$

$$\overline{c}_{13} = 10 - 0 - 12$$

$$\overline{c}_{13} = -2$$

35

A variável  $x_{13}$   
entra na base

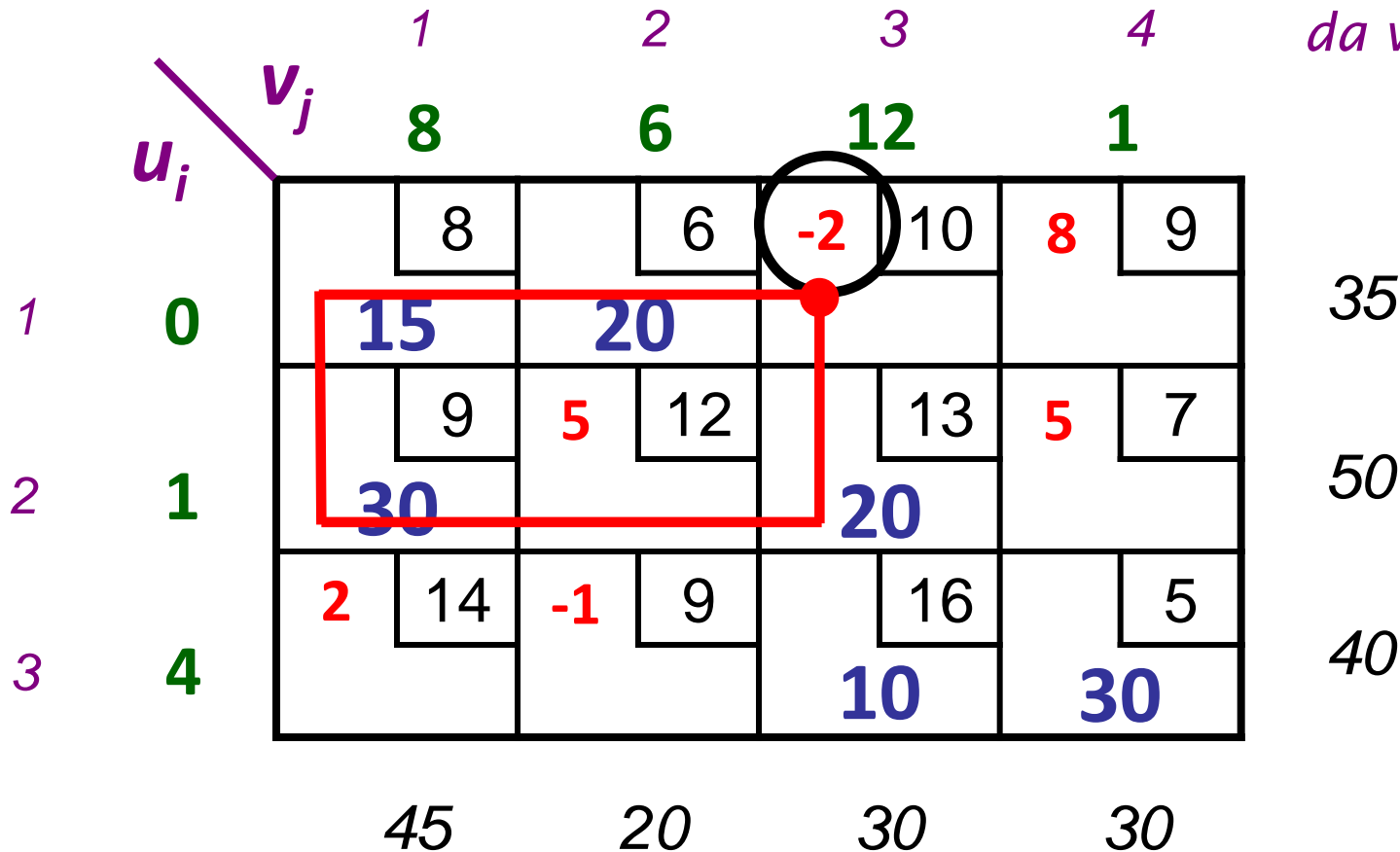
40

Como existe (ao menos) uma variável com custo reduzido negativo, a solução atual **ainda não é ótima!**

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

## Passo 5: Construção do loop

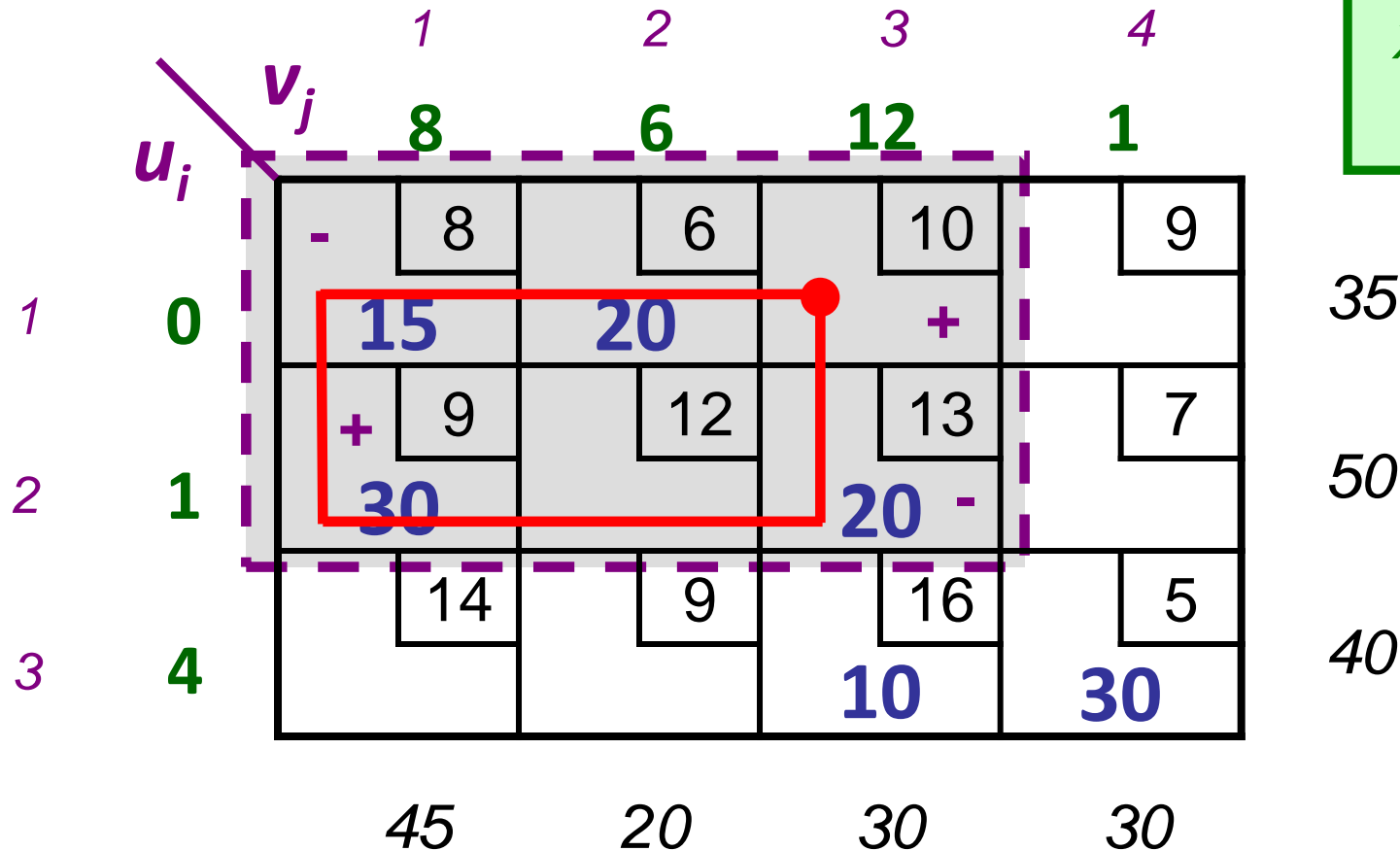
*O loop começa e termina na célula da variável  $x_{13}$*



A **pivotação** (no próximo passo) vai afetar somente as variáveis básicas que estão nos **VÉRTICES** do loop.

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

## Passo 6: Mudança de base



$\theta = 15$   
 $x_{11}$  sai da base

As células nos vértices do loop vão ter seus valores **aumentados** e **reduzidos**, de forma alternada.



# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

## Passo 6: Mudança de base

		1	2	3	4	
		$v_j$	8	6	12	1
1	$u_i$	-	8	6	10	9
0		15	20	15+		
2		+	9	12	13	7
1		30		20-		
3			14	9	16	5
4				10	30	
		45	20	30	30	

$\theta = 15$   
 $x_{11}$  sai da base

É preciso repetir os passos de 3 a 6, até determinar a solução ótima do problema.

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

**Passo 3:** Cálculo das variáveis auxiliares:  $u_i + v_j = c_{ij}$

		1	2	3	4		
		$v_j$	6	6	10	-1	
$u_i$	1	0	8	6	10	9	35
			20	15			
	2	3	9	12	13	7	50
			45		5		
3	6		14	9	16	5	40
				10	30		
			45	20	30	30	

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

**Passo 4:** Cálculo dos custos reduzidos:  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

		1	2	3	4		
		$v_j$					
		6	6	10	-1		
1	$u_i$	2	8	6	10	10	9
	0		20	15		35	
		9	3	12	13	5	7
2	3	45		5			
3	6	2	14	-3	9	16	5
				10	30		
		45	20	30	30		

A variável  $x_{32}$   
entra na base

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

## Passo 5: Construção do loop

*O loop começa e termina na célula da variável  $x_{32}$*

		$v_j$					
		1	2	3	4		
$u_i$		6	6	10	-1		
1	0	2 8 - 6 + 10 10 9	20 15		35		
2	3	9 3 12 13 5 7	45 5		50		
3	6	2 14 -3 9 16 5	10 - 30		40		
		45	20	30	30		

## Passo 6: Mudança de base

$\theta = 10$ ;  $x_{32}$  sai da base

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

**Passo 3:** Cálculo das variáveis auxiliares:  $u_i + v_j = c_{ij}$

		1	2	3	4				
		$v_j$	6	6	10	2			
1	$u_i$	0	2	8	6	10	7	9	35
2	3		9	3	12	13	2	7	50
3	3		5	14	9	3	16	5	40
			45	10	5	30			
			45						

Todos > 0: SOLUÇÃO ÓTIMA

Todos  $\geq 0$ : SOLUÇÃO ÓTIMA!

**Passo 4:** Cálculo dos custos reduzidos:  $\bar{c}_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$

# Recordação: simplex p/ transporte

Passo 1      2      3      4      5      6

$x_{24}$  entra na base

$\theta = 4$

$x_{23}$  sai da base

		$v_j$		1	2	3	4	<div><math>x_{23}</math> S</div>	
		$u_i$	-2	2	3	0			
1	0	22	20	9	11		3	6	6
						5			5
2	7		5		9	-	10	-5	2
			3		3		4	+	10
3	1	19	18	4	7	+	4	-	1
							3		15
			3	3	12		12		

# Recordação: simplex p/ transporte

**Passo 1            2            3            4            5            6**

$x_{24}$  entra na base

 $\theta = 4$ 

$x_{23}$  sai da base

Diagram illustrating a grid structure with various numerical values and annotations. The grid is a 3x4 matrix of cells, each containing a number. The numbers are color-coded: red, green, blue, and black. A red path is highlighted, starting from a red dot at (2,3) and ending at a red dot at (3,4). The path goes from (2,3) to (2,4) to (3,4). Annotations include purple labels  $u_i$  and  $v_j$ , green labels 1, 2, 3, and 4, and a green box with  $x_{23} S$ . The grid is surrounded by numbers 1, 2, 3, 4, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100.

	1	2	3	4	
	-2	2	3	0	
1	22	20	9	11	3
2	5	9	-	10	-5
3	19	18	4	7	4
	3	3	12	12	

# Recordação: simplex p/ transporte

## Problema de transporte com ofertas e demandas inteiras: Passo 1

- Admite solução inicial inteira;
- As pivotações envolvem apenas somas e subtrações de valores inteiros;
- **Solução ótima inteira!**


	20	11	3	6	
			5		5
	5	9	10	2	10
3		3		4	
	18	7	4	1	15
			7	8	
3	3	12	12		



# Exercício proposto:

Construa a tabela Simplex dos dados abaixo.

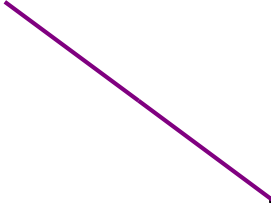
1ª tabela:



8	6	3	7	5	20 0
5	M	8	4	7	30 20 0
6	3	9	6	8	30 5 0
0	0	0	0	0	20 0
25 5	25 0	20 0	40 0	20	

# Exercício proposto: ex. 6, pág. 121

1ª tabela:



	8		6		3		7		5	20 0
	5		M		8		4		7	30 20 0
	6		3		9		6		8	30 5 0
	0		0		0		0		0	20 0
25 5		25 0		20 0		40 0		20		

## Exercício proposto: ex. 6, pág. 121

## 1ª tabela:

$x_{41}$  *entra*

$$\theta = 0$$

$x_{42}$  sai

Diagram illustrating a 2D spatial domain (grid) with various numerical values and annotations. The grid is divided into 20 cells. The top row contains values 8, 6, 3, 7, 5. The second row contains 5, 'M', 8, 4, 7. The third row contains 6, 3, 9, 6, 8. The bottom row contains 0, 0, 0, 0, 0. Annotations include a red circle around the bottom-left cell, a red path connecting several cells, and various blue and purple numbers and symbols. A purple line with labels  $v_j$  and  $u_i$  is in the top-left corner. A green box in the top-right corner contains the text  $x_{42} S$ .

# Exercício proposto:

Após a 1ª iteração (2ª tabela):

$x_{31}$  entra  
 $\theta = 5$   
 $x_{34}$  sai

$v_j$       1      2      3      4      5

$u_i$

1	8	6	3	7	5	20
2	5	M	8	4	7	30
3	6	3	9	6	8	30
4	0	0	0	0	0	20
	25	25	20	10	20	

Annotations: A red circle highlights the cell (3,1) with value 6. A red rectangle highlights the cells (3,1), (3,2), (3,3), and (3,4) with values 6, 3, 9, and 6 respectively. Blue numbers 25, 25, 20, 10, and 20 are placed below the columns. Blue numbers 20, 25, 25, 5, and 5 are placed to the right of the rows. A purple minus sign is at (2,1) and a purple plus sign is at (2,4). A purple plus sign is at (3,1) and a purple minus sign is at (3,4).

# Exercício proposto:

Após a 2ª iteração (3ª tabela):

		$v_j$						
		1	2	3	4	5		
$u_i$	1	8	6	3	7	5	20	
	2	5	M	8	4	7	30	
	3	6	3	9	6	8	30	
	4	0	0	0	0	0	20	
		25	25	20	10	20		

*Solução ótima!*

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

Solução básica inicial: método do mínimo custo (pág. 117)

	1	2	3	4	
	2	3	5	7	5
	2	1	6	4	10
	3	8	5	6	15
12	8	4	6		

# Algoritmo simplex p/ prob. do transporte

Solução básica inicial: método do mínimo custo

	1	2	3	4
1	2 5	3 —	5 —	7 —
2	2 2	1 8	6 —	4 —
3	3 5	8 —	5 4	6 6

6 variáveis básicas  
para 7 equações...



OK: uma das  
restrições é  
redundante!

~~12~~  
~~10~~  
~~5~~  
~~0~~  
~~8~~  
~~0~~  
~~4~~  
~~0~~  
~~6~~  
~~0~~

$$\text{Custo} = 2 \times 5 + 2 \times 2 + 1 \times 8 + 3 \times 5 + 5 \times 4 + 6 \times 6$$

# Solução básica inicial

Cuidado com o número de variáveis básicas!

	3		1		2	<del>10</del>	<del>0</del>
<del>—</del>		10		<del>—</del>			
	4		6		8	<del>10</del>	<del>5</del>
5		0		5			
<del>5</del>		<del>10</del>		<del>5</del>			
<del>0</del>		<del>0</del>					

*4 variáveis básicas para 5 equações!*

**Obs:** solução degenerada



# Solução básica inicial

Cuidado com o número de variáveis básicas!

outra solução!

	3		1		2	<del>10</del>	<del>8</del>
<del>—</del>		10		0			
	4		6		8	<del>10</del>	<del>5</del>
5		<del>—</del>		5			
<del>5</del>		<del>10</del>		<del>5</del>			
<del>0</del>		<del>0</del>					

# Exercício proposto

apenas a solução inicial!

	1	2	3	4	
1	<div><div>20</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div>11</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div>3</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div>6</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div><del>5</del></div><div><del>0</del></div></div>
2	<div><div>5</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div>9</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div>10</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div>2</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div><del>10</del></div><div><del>7</del></div><div><del>4</del></div><div><del>0</del></div></div>
3	<div><div>18</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div>7</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div>4</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div>1</div><div><div></div><div></div></div></div>	<div><div><del>15</del></div><div><del>3</del></div><div><del>0</del></div></div>
	<div><div><del>3</del></div><div><del>0</del></div></div>	<div><div><del>3</del></div><div><del>0</del></div></div>	<div><div><del>12</del></div><div><del>7</del></div><div><del>0</del></div></div>	<div><div><del>12</del></div><div><del>0</del></div></div>	