Escola de Engenharia Mauá

ECM511 – Pesquisa Operacional e ~Métodos de Otimização

Prof. Joyce M Zampirolli
joyce.zampirolli@maua.br

Algoritmo Simplex

Março/2019

Algoritmo simplex

Passo 1: *Converta o PPL para a forma padrão.*

Passo 2: *Obtenha uma solução básica viável (se possível) a partir da forma padrão.*

Passo 3: *Verifique se a base atual é ótima.*

Passo 4: *Se a base atual não for ótima, determine qual variável não básica deve entrar na base, de modo a* ***melhorar*** *o valor atual da função objetivo. Determine, ainda, qual variável básica deve sair da base.*

Passo 5: *Pivote o sistema (utilizando operações elementares) para obter uma nova solução básica viável com o valor melhorado da função objetivo.* ***Volte ao passo 3****.*

Algoritmo simplex

Exemplo - problemas das tintas:

Passo 1: *Converta o PPL para a forma padrão.*

$$\boxed{\max z = 3x_e + 2x_i \quad (\mathbf{0})}$$

$$
\begin{array}{lrl}
\text{suj. a:} & x_e + 2x_i \leq 6 & (\mathbf{1}) \\
& 2x_e + x_i \leq 8 & (\mathbf{2}) \\
& -x_e + x_i \leq 1 & (\mathbf{3}) \\
& x_i \leq 2 & (\mathbf{4}) \\
& x_e, x_i \geq 0 & (\mathbf{5})
\end{array}
$$

$$\boxed{\max z - 3x_e - 2x_i = 0}$$

*Versão **linha 0** da função objetivo*

Passo 2: *Obtenha uma solução básica viável (se possível) a partir da forma padrão.*

SOLUÇÃO BÁSICA
(atribua para todas as VNB: valor = 0)

As variáveis básicas formam a BASE da solução

z - $= 0$

s_1 $= 6$

$+s_2$ $= 8$

$+s_3$ $= 1$

$+s_4$ $= 2$

Variáveis não básicas

Variáveis básicas

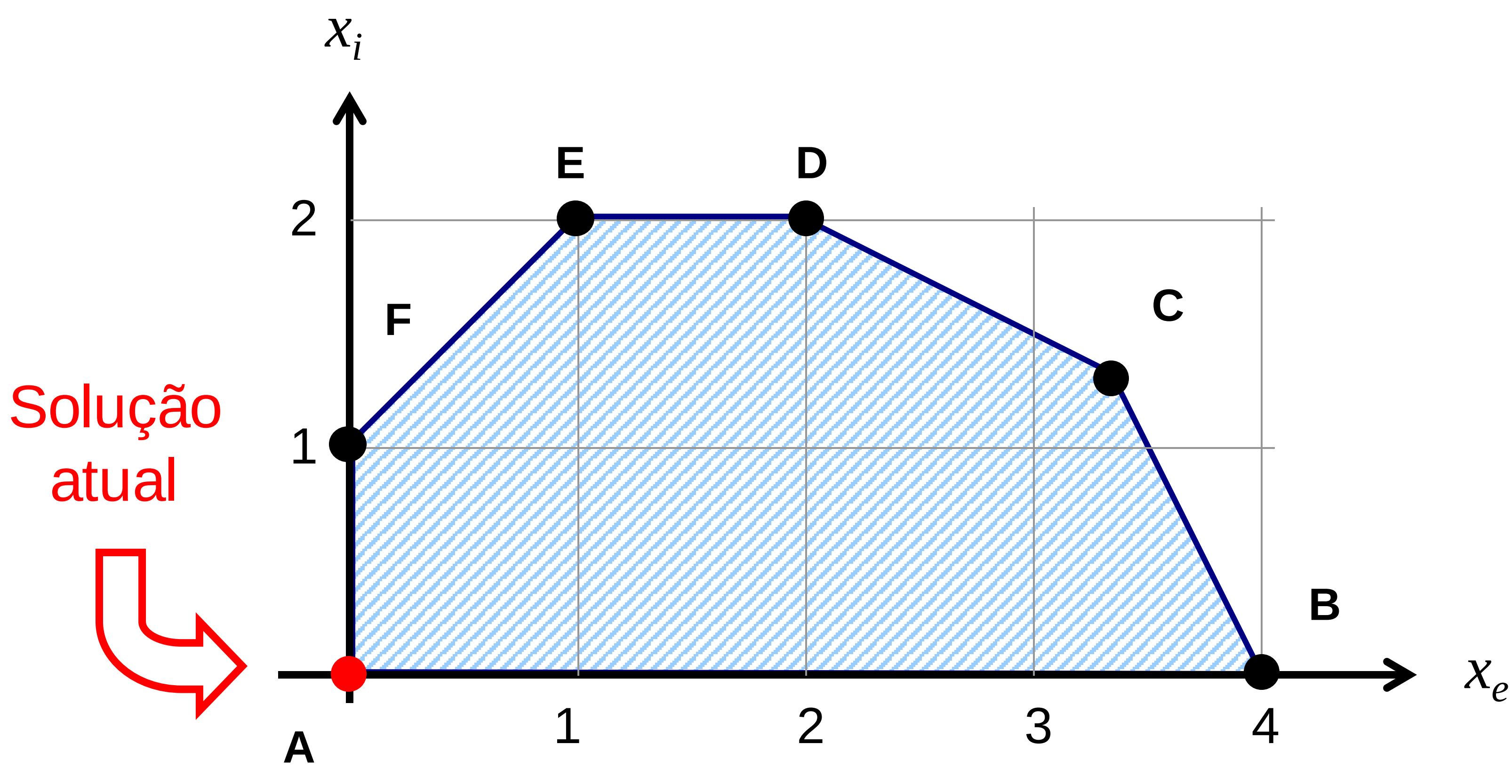
Passo 2: solução básica viável

Solução básica atual

Variáveis não básicas: $x_e = 0, x_i = 0$

Variáveis básicas: $z = 0; s_1 = 6, s_2 = 8, s_3 = 1, s_4 = 2$

No gráfico da região viável... corresponde ao ponto: A



Passo 3: a base atual é ótima?

Observando a linha 0, podemos dizer que:

Se a variável $\boldsymbol{x_e}$ *aumentar em* ***u***
objetivo aumentará em 3 *uni*

Se a variável $\boldsymbol{x_i}$ *aumentar em* … *o*
objetivo aumentará em 2 *unidad*

*De forma aproximada, "**entrar na base**" significa "**receber valor** > 0"*

$$z = 3x_e + 2x_i$$

A solução atual é ótima? Por quê?

Não! Se as variáveis x_e *ou* x_i ***entrarem na base**, o valor da função objetivo **aumentará**.*

Passo 4: quem entra na base?

Quem entra: se alguma variável tiver coeficiente negativo na linha 0, escolha a variável com o coeficiente mais negativo na linha 0 para **entrar na base**.

A variável x_e entra na base

Conforme o valor de x_e aumenta, o valor das variáveis básicas atuais pode aumentar ou diminuir. No entanto, as variáveis que diminuem de valor devem se manter não negativas.

Passo 4: quem sai da base?

***Restrição 1**: $x_e + 2x_i + s_1 = 6$. Como a variável x_i não vai entrar na base, seu valor não será alterado. Assim, conforme x_e aumenta de valor, o valor de s_1 diminui. Portanto:*

Valores atuais: **0** ↑ **6** ↓

$$\underset{0\,\uparrow}{x_e} + \cancel{2x_i} + \underset{6\,\downarrow}{s_1} = 6 \quad (s_1 \geq 0)$$

*O limite imposto pela restrição 1 é de **6** unidades*

Passo 4: quem <u>sai</u> da base?

Restrição 2: *$2x_e + x_i + s_2 = 8$. Neste caso, o limite de crescimento de x_e é dado por s_2.*

Valores atuais: **0** $\uparrow$ **8** $\downarrow$

$$2x_e + \cancel{x_i} + s_2 = 8 \quad (s_2 \geq 0)$$

*O limite imposto pela restrição 2 é de **<u>4</u>** unidades*

Passo 4: quem <u>sai</u> da base?

Restrição 3: $-x_e + x_i + s_3 = 1$. *Neste caso:*

Valores atuais: **0** ↑ **1** ↑

$$-x_e + \cancel{+}x_i + s_3 = 1 \quad (s_3 \geq 0)$$

A restrição 3 ***não limita o aumento da variável x_e***

Restrição 4: $x_i + s_4 = 2$. *Neste caso:*

A restrição 4 não limita o aumento da variável x_e

Passo 4: quem sai da base?

Conclusão:

*O menor limite de crescimento para a variável x_e é de **4** unidades. Como este valor foi determinado pela variável **s_2**, ela deverá **sair da base**.*

Antes do próximo passo
(pivotação): Tabela Simplex

A tabela simplex

Variáveis do problema

Base	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	b
z								
s_1								
s_2								
s_3								
s_4								

Variáveis básicas

Valores do lado direito das equações

Passo 5: pivotação (nova base)

Tabela da iteração atual:

A variável x_e vai entrar na base no lugar da variável s_2

Base	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	b
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8
s_3	0	-1	1	0	0	1	0	1
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Indique ao lado da tabela as operações a serem feitas!

Passo 5: pivotação (nova base)

Tabela da iteração atual:

Base	z	x_e		b
z	1	-3	...	0
s_1	0	1	...	6
s_2	0	2	...	8
s_3	0	-1	...	1
s_4	0	0	...	2

\+ \+ \+

× 3/2 × -1/2 × 1/2 $\boxed{\div 2}$

Indique ao lado da tabela as operações a serem feitas!

Passo 5: pivotação (nova base)

Resultado da iteração:

Base	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	b
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12
s_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2
$\boldsymbol{x_e}$	0	**1**	1/2	0	1/2	0	0	4
s_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2

Passo 5: pivotação (nova base)

Nova solução básica

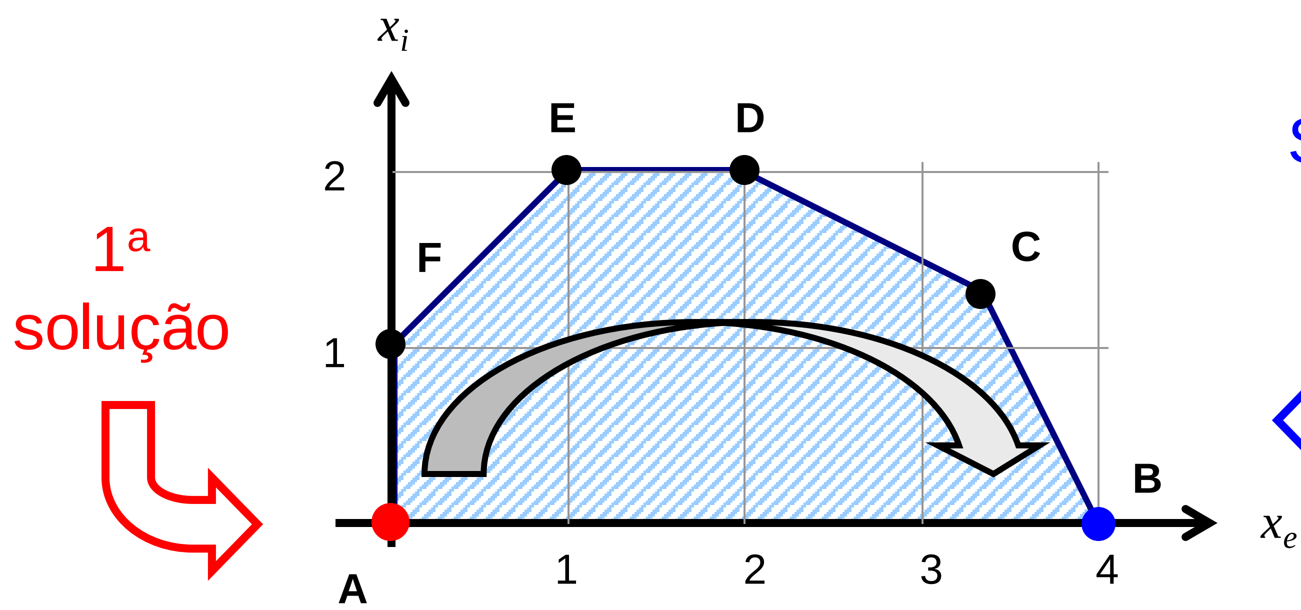
Variáveis não básicas: $x_i = 0$, $s_2 = 0$

Variáveis básicas: $z = 12$; $x_e = 4$, $s_1 = 2$, $s_3 = 5$, $s_4 = 2$

No gráfico da região viável... corresponde ao ponto: ______ B

Em relação ao valor anterior, a solução melhorou

em $(z_{novo}-z_{antigo})$ = 12-0 = **12** *unidades*



Passo 3: a base atual é ótima?

A solução básica atual é ótima? Por quê?

*Não: ainda existem variáveis **fora da base***

*com coeficientes **negativos** na linha 0.*

Passo 4: troca de base

Teste da razão

Base	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	b	T.R.
z	1	0	-1/2	0	3/2	0	0	12	
s_1	0	0	3/2	1	-1/2	0	0	2	2/(3/2) = **4/3** *
x_e	0	1	1/2	0	1/2	0	0	4	4/(1/2) = **8**
s_3	0	0	3/2	0	1/2	1	0	5	5/(3/2) = **10/3**
s_4	0	0	1	0	0	0	1	2	2/1 = **2**

Antes da pivotação, uma observação importante...

Importante: teste da razão

O teste da razão **não é feito** nas linhas em que o **coeficiente** da variável que está entrando na base é **negativo ou igual a zero**.
Exemplo:

Base	z	x_e	x_i	s_1	s_2	s_3	s_4	b	
z	1	-3	-2	0	0	0	0	0	**T.R.**
s_1	0	1	2	1	0	0	0	6	6/1 = **6**
s_2	0	2	1	0	1	0	0	8	8/2 = **4** *
s_3	0	**-1**	1	0	0	1	0	1	$+\infty$
s_4	0	**0**	1	0	0	0	1	2	$+\infty$

Faça esta indicação!

Passo 4: troca de base

Base	z	x_e	x_i		b
z	1	0	-1/2	...	12
s_1	0	0	3/2	...	2
x_e	0	1	1/2	...	4
s_3	0	0	3/2	...	5
s_4	0	0	1	...	2

+ × 1/3 × -1/3 × -1 × -2/3 $\boxed{\div\ 3/2}$

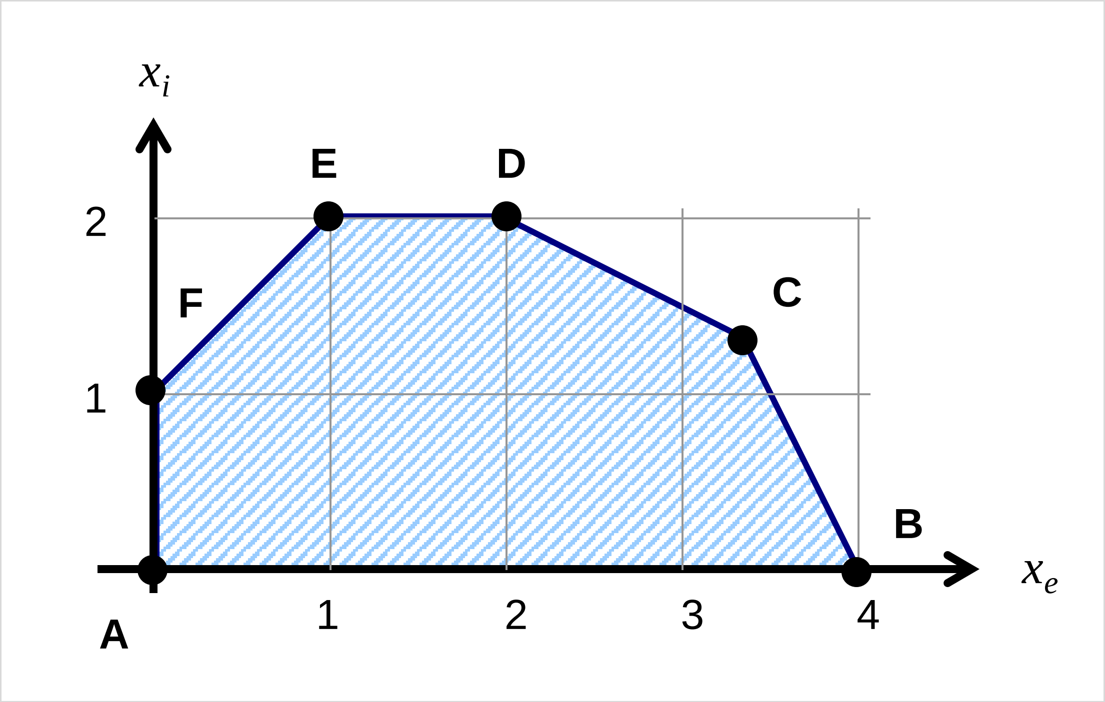
+

+

+

Passo 5: pivotação

Base	z	x
z	1	0
x_i	0	0
x_e	0	1
s_3	0	0
s_4	0	0



Nova solução básica:

Variáveis não básicas: $s_1 = 0,\ s_2 = 0$

Variáveis básicas: $z = 38/3;\ x_i = 4/3,\ x_e = 10/3,\ s_3 = 3,\ s_4 = 2/3$

No gráfico, esta nova solução corresponde ao ponto C

Em relação ao valor anterior, a solução melhorou

em $(z_{novo} - z_{antigo})$ = $(38/3)-12 = \mathbf{2/3}$ *unidades*

Passo 3: a base atual é ótima?

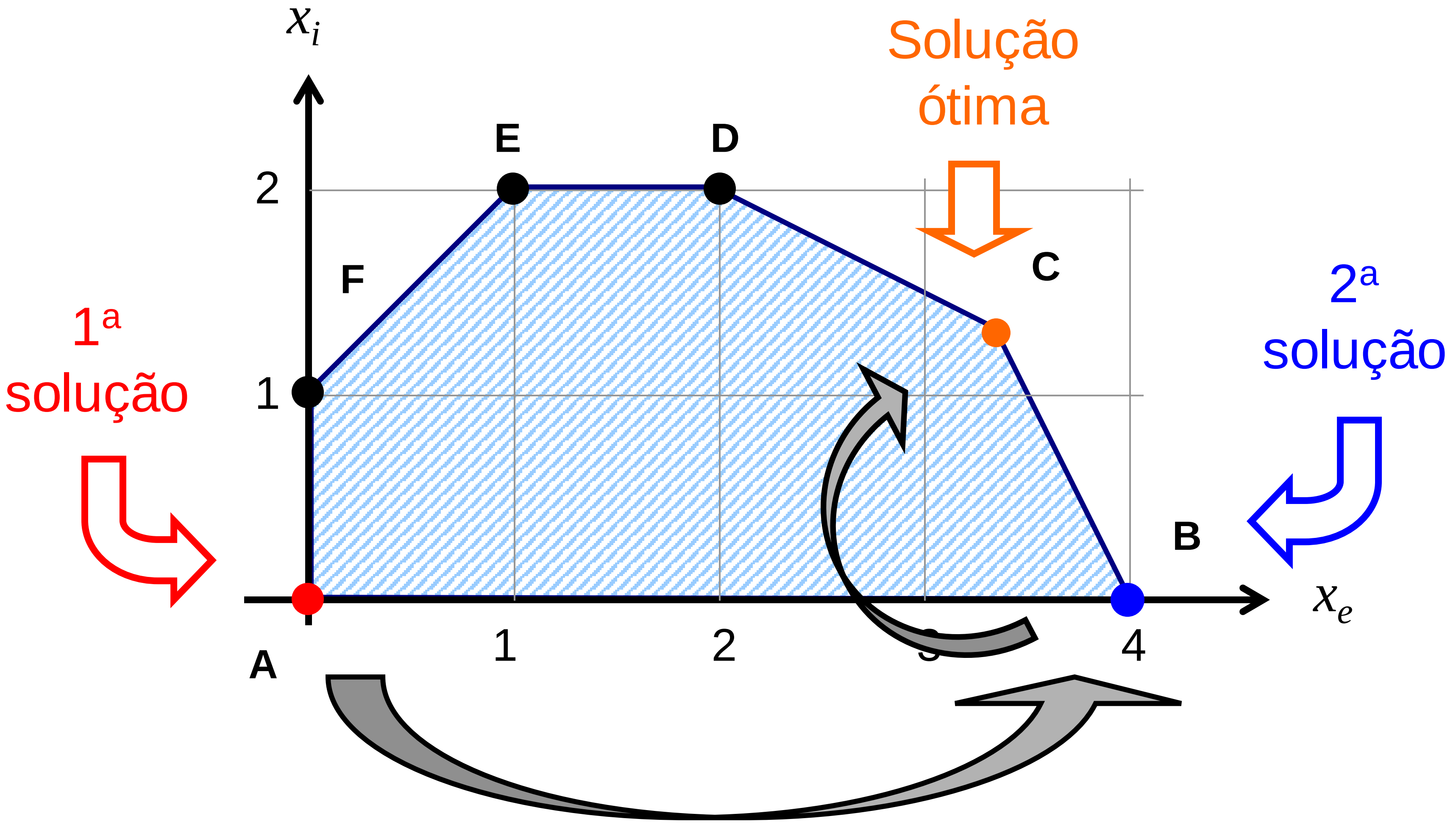
A solução atual é ótima? Por quê?

Sim, porque não existem variáveis não básicas com

coeficientes negativos na linha 0.

Graficamente, o que o algoritmo simplex fez?

Iterações do algoritmo



Passo 3: a base atual é ótima?

A solução atual é ótima? Por quê?

Sim, porque não existem variáveis não básicas com coeficientes negativos na linha 0.

Graficamente, o que o algoritmo simplex fez?

*Percorreu **vértices** da região viável (<u>soluções básicas</u>) até determinar a solução ótima do problema.*

Exercício

$$Max\ Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5$$

$$4x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 11$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Solução ótima

$x_1^* = 2;$

$x_2^* = 0;$

$x_3^* = 1;$

$z^* = 13;$

Exercício

3a) Resolva o modelo a seguir usando o algoritmo simplex.

$$\max z = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\text{suj. a:} \quad \begin{aligned} 3x_1 + x_2 + \quad x_3 &\leq 60 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &\leq 10 \\ x_1 + x_2 - \quad x_3 &\leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solução ótima

$x_1^* = 15;$

$x_2^* = 5$

$x_2^* = 0$

$z^* = 25$

Exercício

$$Max\ Z = 4x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 7$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Solução ótima

$x_1^* = 3;$

$x_2^* = 0;$

$z^* = 12;$