Escola de Engenharia Mauá

ECM501 – Teoria dos Grafos, Pesquisa Operacional e ~Métodos de Otimização

Prof. Joyce M Zampirolli
joyce.zampirolli@maua.br

Cadeia de Markov

Créditos: Fernando Nogueira
Maio/2019

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Um Processo Estocástico é definido como uma coleção de variáveis randômicas (X(t)) indexadas por um parâmetro t pertencente a um conjunto T. Frequentemente T é tomado para ser o conjunto dos inteiros não-negativos (porém, outros conjuntos são perfeitamente possíveis) e X(t) representa uma característica mensurável de interesse no tempo t. Exemplificando, X(t) pode representar o nível de estoque de um produto no fim da semana t.

Processos Estocásticos são de interesse para descrever o procedimento de um sistema operando sobre algum período de tempo, com isso, em termos formais, a variável randômica X(t) representa o estado do sistema no parâmetro (geralmente tempo) t.

Portanto, pode-se afirmar que X(t) é definido em um espaço denominado Espaço de Estados.

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

Os Processos Estocásticos podem ser classificados como:

a) Em relação ao Estado

- Estado Discreto (cadeia): X(t) é definido sobre um conjunto enumerável ou finito.
- Estado Contínuo (seqüência): X(t) caso contrário.

b) Em relação ao Tempo (Parâmetro)

- Tempo Discreto: t é finito ou enumerável.
- Tempo Contínuo: t caso contrário.

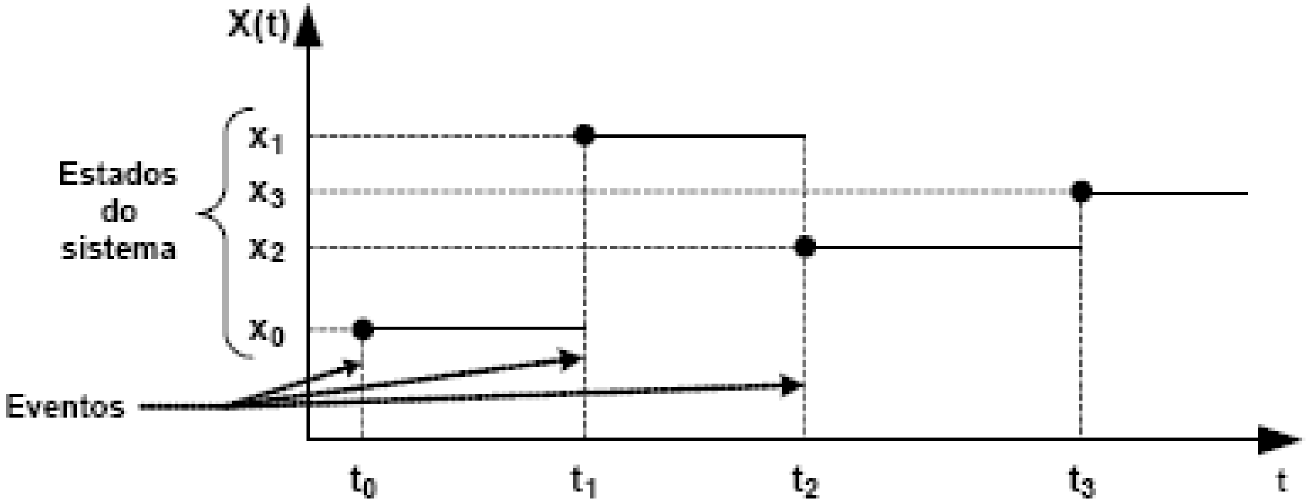
Exemplos:

1. Número de usuários em uma fila de banco em um determinado instante: Estado Discreto e Tempo Contínuo.
2. Índice pluviométrico diário: Estado Contínuo e Tempo Discreto.
3. Número de dias chuvosos: Estado Discreto e Tempo Discreto.

Existem vários "tipos" de Processos Estocásticos, porém, nestas notas de aula será apenas abordado um tipo de Processo Estocástico denominado **Processo Markoviano**.

PROCESSOS ESTOCÁSTICOS

O comportamento estocástico (probabilístico) de um sistema pode ser definido através de uma variável aleatória X(t) que representa o estado do sistema no instante t.



A família de variáveis aleatórias **X(t)** constitui um **Processo Estocástico**.

Quando ocorre um **evento** o processo muda de estado.

PROCESSOS MARKOVIANOS

Um Processo Estocástico é dito ser um Processo Markoviano se:

$$P\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \ldots, X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0\} = P\{X(t_{k+1}) \leq x_{k+1} | X(t_k) = x_k\} \quad (1)$$

para $t_0 \leq t_1 \leq \ldots t_k \leq t_{k+1} = 0,1,\ldots$ e toda seqüência $k_0, k_1, \ldots, k_{t-1}, k_t, k_{t+1}$

A expressão (1) pode ser "traduzida" por: a probabilidade condicional de qualquer evento futuro, dado qualquer evento passado e o estado presente $X(t_k) = x_k$, é independente do evento passado e depende somente do estado presente.

Em termos mais resumidos: um Processo Estocástico é dito ser um Processo Markoviano se o estado futuro depende apenas do estado presente e não dos estados passados.

Este tipo de Processo Estocástico é também denominado de *memoryless process* (processo sem memória), uma vez que o passado é "esquecido" (desprezado).

As probabilidades condicionais $P\{X(t_{k+1}) = x_{k+1} | X(t_k) = x_k\}$ são denominadas **Probabilidades de Transição** e representam, portanto, a probabilidade do estado $X(t_{k+1})$ ser x_{k+1} no instante t_{k+1} dado que o estado $X(t_k)$ é x_k no instante t_k.

PROCESSOS MARKOVIANOS

<u>Exemplo A</u>

O estado no ano de 1993 do uso da terra em uma cidade de 50 quilômetros quadrados de área é:

Tabela 1 - Estado do uso da terra em 1993.		
I	uso residencial	30%
II	uso comercial	20%
III	uso industrial	50%

Os valores da tabela 1 podem ser dispostos em um vetor x, denominado **Vetor de Estados**:

$$x = \begin{bmatrix} I & II & III \end{bmatrix} \quad (2)$$

As probabilidades de cada Estado (probabilidade não-condicional) podem também ser dispostos em um vetor π, denominado **Vetor de Probabilidade de Estado** (para distingui-las das probabilidades de transição):

$$\pi = \begin{bmatrix} 0.30 & 0.20 & 0.50 \end{bmatrix} \quad (3)$$

PROCESSOS MARKOVIANOS

Assumindo que as probabilidades de transição para intervalos de 5 anos são dadas pela seguinte tabela:

Tabela 2 - Probabilidades de Transição			
	para I	**para II**	**para III**
de I	0.8	0.1	0.1
de II	0.1	0.7	0.2
de III	0	0.1	0.9

As probabilidades condicionais na tabela 2, em termos informais, podem ser entendidas como:

PROCESSOS MARKOVIANOS

- **de I para I** $\Rightarrow$ a probabilidade do estado ser I após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é I é 0.8, ou $P\{X(t+5)=I|X(t)=I\}=0.8$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=I|X(1993)=I\}=0.8$.
- **de I para II** $\Rightarrow$ a probabilidade do estado ser II após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é I é 0.1, ou $P\{X_{t+5}=II|X_t=I\}=0.1$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=II|X(1993)=I\}=0.1$.
- **de I para III** $\Rightarrow$ a probabilidade do estado ser III após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é I é 0.1, ou $P\{X(t+5)=III|X(t)=I\}=0.1$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=III|X(1993)=I\}=0.1$.
- **de II para I** $\Rightarrow$ a probabilidade do estado ser I após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é II é 0.1, ou $P\{X(t+5)=I|X(t)=II\}=0.1$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=I|X(1993)=II\}=0.1$.
- **de II para II** $\Rightarrow$ a probabilidade do estado ser II após 5 anos, dado que o estado atual (presente) é II é 0.7, ou $P\{X(t+5)=II|X(t)=II\}=0.7$. Para t =1993, fica $P\{X(1998)=II|X(1993)=II\}=0.7$.
- o raciocínio é análogo para as demais.

PROCESSOS MARKOVIANOS

Os valores da tabela 2 podem ser então dispostos em uma matriz P, denominada **Matriz de Transição**:

$$P = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Assim, a partir de P e o vetor de probabilidade de estado π para 1993, denominado $\pi^{(0)}$, pode-se calcular o vetor de probabilidade de estado π para 1998, denominado $\pi^{(1)}$:

$$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}P = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.0 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 26 & 22 & 52 \end{bmatrix} \tag{5}$$

PROCESSOS MARKOVIANOS

Um Processo Estocástico é dito ser um Processo Markoviano se:

$$P\{X(t_{k+1}) \le x_{k+1} | X(t_k) = x_k, X(t_{k-1}) = x_{k-1}, \ldots, X(t_1) = x_1, X(t_0) = x_0\} = P\{X(t_{k+1}) \le x_{k+1} | X(t_k) = x_k\}$$

para $t_0 \le t_1 \le \ldots t_k \le t_{k+1} = 0,1,\ldots$ e toda seqüência $k_0, k_1, \ldots, k_{t-1}, k_t, k_{t+1}$

Um Processo Markoviano é uma Cadeia de Markov em Tempo Discreto se:

$$P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k, X(k-1) = x_{k-1}, \ldots, X(1) = x_1, X(0) = x_0\} = P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k\}$$

Probabilidade de Transição $\Rightarrow P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k\}$

Probabilidade de Transição é dita Estacionária se:

$P\{X(k+1) = x_{k+1} | X(k) = x_k\} = P\{X(1) = x_1 | X(0) = x_0\} \Rightarrow$ Probabilidade de transição de passo 1

Probabilidade de Transição de passo 1 implica que:

$P\{X(k+n) = x_{k+n} | X(k) = x_k\} = P\{X(n) = x_n | X(0) = x_0\} \Rightarrow$ Probabilidade de transição de passo n

Notação simplificada $\Rightarrow p_{ij}^{(n)} = P\{X(k+n) = j | X(k) = i\}$

Matriz de Transição de Passo n $\Rightarrow$ $P^{(n)} = \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} & \ldots & p_{0M}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} & \ldots & p_{1M}^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ p_{M0}^{(n)} & p_{M1}^{(n)} & \ldots & p_{MM}^{(n)} \end{bmatrix}$

CADEIA DE MARKOV

Andrei Andreyevich Markov
(*1856, Ryazan, Russia; †1922, São Petersburgo, Russia).

CADEIA DE MARKOV

Andrei Andreyevich Markov nasceu no dia 14 de junho de 1856 em Ryazan, na Rússia. Morreu no dia 20 de julho de 1922 em Petrograd (agora St Petersburg), Rússia. Se formou na universidade de St Petersburg (1878), onde se tornou professor em 1886. Os primeiros trabalhos de Markov foram principalmente em teoria dos números e análise, frações contínuas, limites de integrais, teoria da aproximação e a convergência de séries.

Após 1900 Markov aplicou o método das frações contínuas, inicialmente desenvolvido por Pafnuty Chebyshev, na teoria da probabilidade. Ele também estudou sequências de variáveis mutuamente independentes, esperando estabelecer as leis da probabilidade de forma mais geral. Ele também provou o teorema do limite central.

Markov é particularmente lembrado pelo seu estudo de cadeias de Markov. Cadeias de Markov são um formalismo de modelagem de sistemas que descrevem o sistema como um processo estocástico. Deste ponto de vista o sistema modelado é caracterizado pelos seus estados e a forma pela qual eles se alternam.

Em 1923 Norbert Winter se tornou o primeiro a tratar rigorosamente um processo contínuo de Markov. A fundação da teoria geral ocorreu em 1930 por Andrei Kolmogorov.

Markov teve um filho (de mesmo nome) que nasceu em 9 de Setembro de 1903, que seguiu seu pai e também se tornou um renomado matemático.

CADEIA DE MARKOV

Um Processo Markoviano é dito ser uma Cadeia de Markov quando as variáveis randômicas X(t) estão definidas em um espaço de estados discreto E. O exemplo dado acima é então uma Cadeia de Markov porque o espaço de estados é discreto.

Quando o tempo é discreto, a Cadeia de Markov é dita ser uma **Cadeia de Markov em Tempo Discreto**. Neste caso, tem-se:

$$P\{X(k+1)=x_{k+1} \mid X(k)=x_k, X(k-1)=x_{k-1}, \ldots, X(1)=x_1, X(0)=x_0\} = P\{X(k+1)=x_{k+1} \mid X(k)=x_k\} \qquad (6)$$

$$\forall \quad \text{seqüência} \quad 0,1,\ldots,k-1,k,k+1$$

As Probabilidades de Transição $P\{X(k+1)=x_{k+1} \mid X(k)=x_k\}$ representam, portanto, a probabilidade do estado $X(k+1)$ ser x_{k+1} no tempo k + 1 dado que o estado $X(k)$ é x_k no tempo k.

Se para cada x_{k+1} e x_k, tem-se:

$$P\{X(k+1)=x_{k+1} \mid X(k)=x_k\} = P\{X(1)=x_1 \mid X(0)=x_0\}$$

$$\forall \quad \text{seqüência} \quad 1,2,\ldots,k-1,k,k+1$$

CADEIA DE MARKOV

então, as Probabilidades de Transição são ditas **Estacionárias**. Assim, tendo-se Probabilidades de Transição Estacionárias implica que as Probabilidades de Transição não mudam em relação ao tempo. Ainda, de acordo com a expressão (7), as Probabilidades de Transição são denominadas **Probabilidades de Transição de Passo 1**.

A existência de Probabilidades de Transição Estacionárias de Passo 1 implica que para cada x_{k+n} e x_k e n (n = 0, 1, 2,...), tem-se:

$$P\left\{X(k+n) = x_{k+n} \middle| X(k) = x_k\right\} = P\left\{X(n) = x_n \middle| X(0) = x_0\right\} \qquad (8)$$

$$\forall \quad \text{seqüência} \quad 1,2,\dots,k-1,k,k+1$$

CADEIA DE MARKOV

Equações de Chapman - Kolmogorov

$\Rightarrow$ Permite computar a matriz de transição para n passos (de t para t + n).

para todo i, j = 0, 1, ..., M

qualquer m = 1, 2, ..., n-1

qualquer n = m+1, m+2, ...

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{m} p_{kj}^{n-m} \Rightarrow P^{(n)} = P^{m}.P^{n-m} \Rightarrow P^{(n)} = P^{n}$$

notação matricial

Classificação de Estados em Cadeias de Markov

Estado Alcançável $\Rightarrow$ j é alcançável a partir de i se $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 0$

Estado Comunicante $\Rightarrow$ j é comunicante com i se j é alcançável a partir de i e vice-versa

$$P = \begin{array}{c|cccc} \text{Estado} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

1 é comunicante com 2

2 não é alcançável a partir de 3 $\Rightarrow p_{32}^{(n)} = 0, \forall n \geq 0$

Se todos estados são comunicantes $\Rightarrow$ Cadeia Irredutível

Estado Transiente $\Rightarrow$ i é transiente se e somente se existe um estado $j\,(j \neq i)$ que é alcançável a partir do estado i mas não vice-versa.

Estado Recorrente $\Rightarrow$ i é recorrente se não é transiente.

Estado Absorvente $\Rightarrow$ i é recorrente se $p_{ii} = 1$.

CADEIA DE MARKOV

Um conjunto C de estados é dito ser um <u>Conjunto Fechado</u> se o processo ao entrar em um destes estados de C, este irá permanecer nos estados de C indefinidamente.

Um conjunto C_m de estados é dito ser um <u>Conjunto Fechado Mínimo</u> se este conjunto não possui sub-conjuntos fechados.

$$
\begin{array}{cc}
\text{Estado} & \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

0 e 1 são recorrentes	0, 1 e 2 formam um Conj. Fechado
2 é absorvente	0 e 1 formam um Conj. Fechado Mínimo
3 e 4 são transientes	2 Conj. Fechado Mínimo

<u>Estado Periódico</u> $\Rightarrow$ i é periódico com período t se um retorno a este estado é possível somente em t, 2t, 3t,... passos para t>1. $p_{ii}^{(n)} = 0$ sempre quando n não é divisível por t.

<u>Estado Aperiódico</u> $\Rightarrow$ se t = 1.

$$
\begin{array}{cc}
\text{Estado} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

1e 2 são periódicos com t = 2

$$
\begin{array}{cc}
\text{Estado} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\
P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\end{array}
$$

todos estados são periódicos com t = 2

Em uma Cadeia de Markov de estado finito, estados recorrentes aperiódicos são chamados de estados <u>Ergódicos</u>. Uma Cadeia de Markov é <u>Ergódica</u> se todos os estados são ergódicos.

CADEIA DE MARKOV

Probabilidades de Estados Estavéis (*Steady-State*)

$\Rightarrow$ Se a Cadeia de Markov é Ergódica e Irredutível, a distribuição de probabilidade dos estados a longo período $\pi^{(\infty)}$ independe da distribuição de probabilidade inicial dos estados $\pi^{(0)}$.

$$P^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \\ 0.632 & 0.368 & 0 & 0 \\ 0.264 & 0.368 & 0.368 & 0 \\ 0.080 & 0.184 & 0.368 & 0.368 \end{bmatrix} \quad P^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \\ 0.283 & 0.252 & 0.233 & 0.233 \\ 0.351 & 0.319 & 0.233 & 0.097 \\ 0.249 & 0.286 & 0.300 & 0.165 \end{bmatrix} \quad P^{(4)} = \begin{bmatrix} 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \\ 0.282 & 0.285 & 0.268 & 0.166 \\ 0.284 & 0.283 & 0.263 & 0.171 \\ 0.289 & 0.286 & 0.261 & 0.164 \end{bmatrix}$$

$$P^{(8)} = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \end{bmatrix} \quad P^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.264 & 0.166 \end{bmatrix}$$

$$\pi^{(0)}.P^{(\infty)} = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \end{bmatrix}$$

para qualquer $\pi^{(0)}$

Equações de Estados Estavéis

$$\left.\begin{array}{ll} \pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij} \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \ldots, M & \Rightarrow \pi^{(\infty)} = \pi^{(\infty)}.P \\ \sum_{j=0}^{M} \pi_j = 1 \quad \text{para } j = 0, 1, 2, \ldots, M & \end{array}\right\} \text{M+2 equações em M+1 incógnitas}$$

$$\begin{cases} \pi_0 = \pi_0 p_{00} + \pi_1 p_{10} + \pi_2 p_{20} + \pi_3 p_{30} \\ \pi_1 = \pi_0 p_{01} + \pi_1 p_{11} + \pi_2 p_{21} + \pi_3 p_{31} \\ \pi_2 = \pi_0 p_{02} + \pi_1 p_{12} + \pi_2 p_{22} + \pi_3 p_{32} \\ \pi_3 = \pi_0 p_{03} + \pi_1 p_{13} + \pi_2 p_{23} + \pi_3 p_{33} \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \pi_0(0.080-1) + \pi_1 0.632 + \pi_2 0.264 + \pi_3 0.080 \\ 0 = \pi_0 0.184 + \pi_1(0.368-1) + \pi_2 0.368 + \pi_3 0.184 \\ 0 = \pi_0 0.368 + \pi_2(0.368-1) + \pi_3 0.368 \\ 0 = \pi_0 0.368 + \pi_3(0.368-1) \\ 1 = \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \end{cases}$$

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^{(\infty)} = \begin{bmatrix} \pi^{(\infty)} \\ \pi^{(\infty)} \\ \pi^{(\infty)} \\ \pi^{(\infty)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \\ 0.286 & 0.285 & 0.263 & 0.166 \end{bmatrix}$$

CADEIA DE MARKOV

<u>Custo Médio Esperado por Unidade de Tempo</u>

$\Rightarrow$Se a Cadeia de Markov é Irredutível, o limite $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)}\right) = \pi_j, \forall i$ sempre irá existir.

Seja $C(X_t)$ uma função de custo ($C(\bullet)$ é uma variável randômica independente de t). O custo médio esperado por unidade de tempo é: $\lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right] = \sum_{j=0}^{M} \pi_j C(j)$

<u>Exemplo</u>

$$C(X_t) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad X_t = 0 \\ 2 & \text{se} \quad X_t = 1 \\ 8 & \text{se} \quad X_t = 2 \\ 18 & \text{se} \quad X_t = 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \lim_{n\to\infty} E\left[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} C(X_t)\right] = 0.286(0) + 0.285(2) + 0.263(8) + 0.166(18) = 5.66$$

custo médio esperado do estoque por semana

Se $C(X_t) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad X_t = j \\ 0 & \text{se} \quad X_t \neq j \end{cases}$ $\Rightarrow$Fração do tempo em que o processo está no estado j

<u>Tempos de Primeira Passagem</u> $\Rightarrow$ tempo demandado para o processo atingir o estado j a partir do estado i. Quando j = i $\Rightarrow$ <u>Tempo de Recorrência</u> para o estado i.

Denominando $f_{ij}^{(n)}$ **a probabilidade do Tempo de Primeira Passagem a partir do estado i para o estado j ser n**, pode-se escrever que:

$$f_{ij}^{(1)} = p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$$

$$f_{ij}^{(2)} = \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}^{(1)}$$

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{k\neq j} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)}$$

<u>Exemplo</u>: Probabilidade do Tempo de Primeira Passagem a partir do estado 3 (estoque cheio) para o estado 0 (estoque vazio) ser n:

$$f_{30}^{(1)} = p_{30} = 0.080$$

$$f_{30}^{(2)} = p_{31} f_{10}^{(1)} + p_{32} f_{20}^{(1)} + p_{33} f_{30}^{(1)} = 0.184(0.632) + 0.368(0.264) + 0.368(0.080) = 0.243$$

CADEIA DE MARKOV

$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1 \Rightarrow$ processo inicialmente no estado i, pode nunca alcançar o estado j

$\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \Rightarrow f_{ij}^{(n)}$ é a distribuição de probabilidade para a variável aleatória Tempo de Primeira Passagem

<u>Tempo de Primeira Passagem Esperado</u>

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & \text{se} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \end{cases}$$

Sempre quando $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \Rightarrow \mu_{ij}$ unicamente satisfaz

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} p_{ik} \mu_{kj}$$

<u>Exemplo</u>: Tempo de Primeira Passagem Esperado a partir do estado 3 (estoque cheio) para o estado 0 (estoque vazio):

$\mu_{30} = 1 + p_{31}\mu_{10} + p_{32}\mu_{20} + p_{33}\mu_{30}$ $\quad \mu_{30} = 1 + 0.184\mu_{10} + 0.368\mu_{20} + 0.368\mu_{30}$ $\quad \mu_{10} = 1.58$ semanas

$\mu_{20} = 1 + p_{21}\mu_{10} + p_{22}\mu_{20} + p_{23}\mu_{30}$ $\quad \mu_{20} = 1 + 0.368\mu_{10} + 0.368\mu_{20}$ $\quad \mu_{20} = 2.51$ semanas

$\mu_{10} = 1 + p_{11}\mu_{10} + p_{12}\mu_{20} + p_{13}\mu_{30}$ $\quad \mu_{10} = 1 + 0.368\mu_{10}$ $\quad \mu_{30} = 3.50$ semanas

<u>Tempo de Recorrência Esperado</u>

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}$$

$\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = 3.50$ semanas

$\mu_{11} = \frac{1}{\pi_1} = 3.51$ semanas

$\mu_{22} = \frac{1}{\pi_2} = 3.80$ semanas

$\mu_{33} = \frac{1}{\pi_3} = 6.02$ semanas

CADEIA DE MARKOV

<u>Classificação de Estados segundo a probabilidade do Tempo de Primeira Passagem</u>

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1 \Rightarrow \mu_{ii} = \infty \Rightarrow \text{Transiente}$$

Um estado recorrente é **Nulo** se $\mu_{ii} = \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1 \Rightarrow \text{Recorrente}$$

Um estado recorrente é **Não-Nulo ou Positivo** se $\mu_{ii} < \infty$

Um estado é **Ergódico** se é não-nulo e aperiódico

<u>Estados Absorventes</u>

f_{ik} **probabilidade de absorção** para o estado k dado que o sistema iniciou no estado i.
Seja k um estado absorvente, então o conjunto de probabilidades de absorção f_{ik} satisfaz o seguinte sistema de equações:

$$f_{ik} = \sum_{j=0}^{M} p_{ij} f_{jk}$$

sujeito a:

$$f_{kk} = 1$$

$f_{ik} = 0$ se i é recorrente e $i \neq k$

Exemplo: f_{20} e f_{24} ?

$$P = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} f_{10} = p_{10} f_{00} + p_{11} f_{10} + p_{12} f_{20} + p_{13} f_{30} + p_{14} f_{40} \\ f_{20} = p_{20} f_{00} + p_{21} f_{10} + p_{22} f_{20} + p_{23} f_{30} + p_{24} f_{40} \\ f_{30} = p_{30} f_{00} + p_{31} f_{10} + p_{32} f_{20} + p_{33} f_{30} + p_{34} f_{40} \end{cases}$$

$$f_{20} = \frac{4}{5}$$

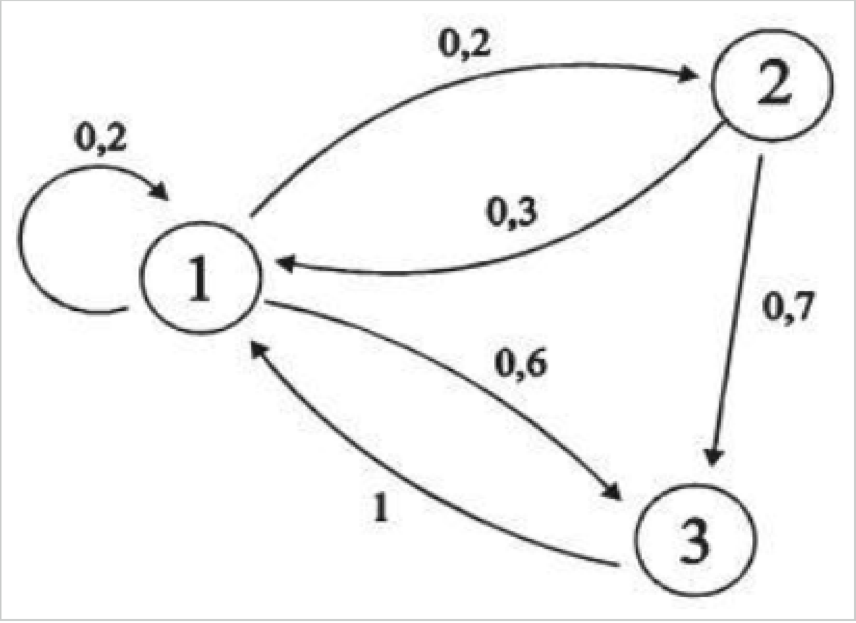
$$f_{24} = \frac{1}{5}$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Questão 1 (CESPE 2011 – Analista de Correios – Estatístico). Uma cadeia de Markov é denominada irredutível (ou ergódica) caso qualquer estado possa ser transformado em qualquer outro estado, não necessariamente em um único passo. Uma cadeia de Markov com matriz de transição P é regular caso exista um número inteiro positivo n tal que todos os elementos da matriz potência P^n sejam estritamente positivos.

Julgue o seguinte item a respeito desses conceitos.

"O dígrafo abaixo representa uma cadeia de Markov regular."



EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Resolução

O dígrafo pode ser representado pela seguinte matriz de transição:

$$P = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0 & 0,7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem dúvidas acerca da formação da matriz de transição?

Note que o elemento p_{23} é igual a probabilidade de chegar em 3, saindo de 2.

Por definição, uma cadeia de Markov é regular se existe um natural r_0 tal que para todo $r \geq r_0$, $(p_{ij})^r > 0$, $\forall i,j \in S$. Ou seja, se existe uma potência de P com todas as entradas positivas.

Observe que para qualquer valor de n, P^n terá todos os elementos maiores que zero, ou seja, matriz regular.

Resposta: Certo

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Questão 2 (CNJ 2013 – CESPE – Analista Judiciário). A população de um país é dividida em classes alta (A), média (M) e baixa (B). Um estudo estatístico mostra que, atualmente, 10% da população pertence à classe A, 40% à classe M e 50% à classe B. Considera-se um modelo simplificado para as mudanças de classes, na forma de uma cadeia de Markov, em que as mudanças de uma geração para a próxima acontecem de acordo com a seguinte matriz de transição:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \mathbf{M} & \mathbf{B} \end{array} \\
M = \begin{array}{c} \mathbf{A} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{B} \end{array} & \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Assim, por exemplo, as probabilidades dos filhos de uma família da classe M pertencerem às classes A, M ou B são iguais a 10%, 60% e 30%, respectivamente.

Com base nessa situação hipotética, julgue os itens subsequentes.

a) Se o modelo descrito valer por tempo indeterminado, então as proporções das classes A, M e B tenderão para as probabilidades estacionárias 2/7, 2/7 e 3/7, respectivamente.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Sejam a, m e b as probabilidades estacionárias referentes as classes A, M e B.

As probabilidades dos filhos de uma família da classe A pertencerem às classes A, M ou B são iguais a 90%, 10% e 0%, respectivamente.

$$a = 0{,}9a + 0{,}1m$$

As probabilidades dos filhos de uma família da classe M pertencerem às classes A, M ou B são iguais a 10%, 60% e 30%, respectivamente.

$$m = 0{,}1a + 0{,}6m + 0{,}2b$$

As probabilidades dos filhos de uma família da classe B pertencerem às classes A, M ou B são iguais a 0%, 30% e 80%, respectivamente.

$$b = 0{,}3m + 0{,}8b$$

Temos também que:

$$a + m + b = 1$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

O nosso objetivo será resolver o sistema de equações abaixo:

$a = 0{,}9a + 0{,}1m$ (I)

$m = 0{,}1a + 0{,}6m + 0{,}2b$ (II)

$b = 0{,}3m + 0{,}8b$ (III)

$a + m + b = 1$ (IV)

Manipulando as equações I, II e III:

$a - m = 0$

$a - 4m + 2b = 0$

$3m - 2b = 0$

$a + b + m = 1$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Como o nosso objetivo é estudar as Cadeias de Markov, a resolução do sistema linear será omitida.

Temos:

a = 2/7

m = 2/7

b = 3/7

Resposta: Certo

b) Na próxima geração, 13% da população pertencerá à classe A, 35% à classe M e 52% à classe B.

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Resolução

Resolveremos a questão analisando agora as colunas da matriz de transição.

As colunas 1, 2 e 3 nos informam as chances de um indivíduo da próxima geração pertencer às classes A, M e B. Utilizaremos a informação do enunciado, que diz "atualmente, 10% da população pertence à classe A, 40% à classe M e 50% à classe B"

Classe A (coluna 1):

0,9 . 10% + 0,1 . 40% + 0 . 50% = 9% + 4% + 0% = 13%

Classe M (coluna 2):

0,1 . 10% + 0,6 . 40% + 0,2 . 50% = 1% + 24% + 10% = 35%

Classe B (coluna 3):

0 . 10% + 0,3 . 40% + 0,8 . 50% = 0% + 12% + 40% = 52%

Resposta: Certo

c) Na hipótese de que o modelo tenha sido válido para a formação da geração atual, então as classes A, M e B na geração anterior eram formadas por 5%, 30% e 65% da população, respectivamente.

Resolução

A resolução do item c é praticamente igual ao item b, a diferença é que agora nós queremos saber a geração anterior, e não a próxima.

Sejam x, y e z os valores referentes as classes A, M e B na geração anterior, e 0,1, 0,4 e 0,5 os valores referentes a geração atual.

Classe A (coluna 1):

$0,9x + 0,1y + 0z = 0,1$

Classe M (coluna 2):

$0,1x + 0,6y + 0,2z = 0,4$

Classe B (coluna 3):

$0x + 0,3y + 0,8z = 0,5$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

O nosso objetivo será verificar se {5%, 30%, 65%} é a solução do sistema abaixo.

$0,9x + 0,1y = 0,1$

$0,1x + 0,6y + 0,2z = 0,4$

$0,3y + 0,8z = 0,5$

Basta analisarmos a primeira equação para termos certeza que {5%, 30%, 65%} não é o conjunto solução.

Resposta: Errado