Escola de Engenharia Mauá

ECM511 – Teoria dos Grafos, Pesquisa Operacional e ~Métodos de Otimização

Prof. Joyce M Zampirolli
joyce.zampirolli@maua.br

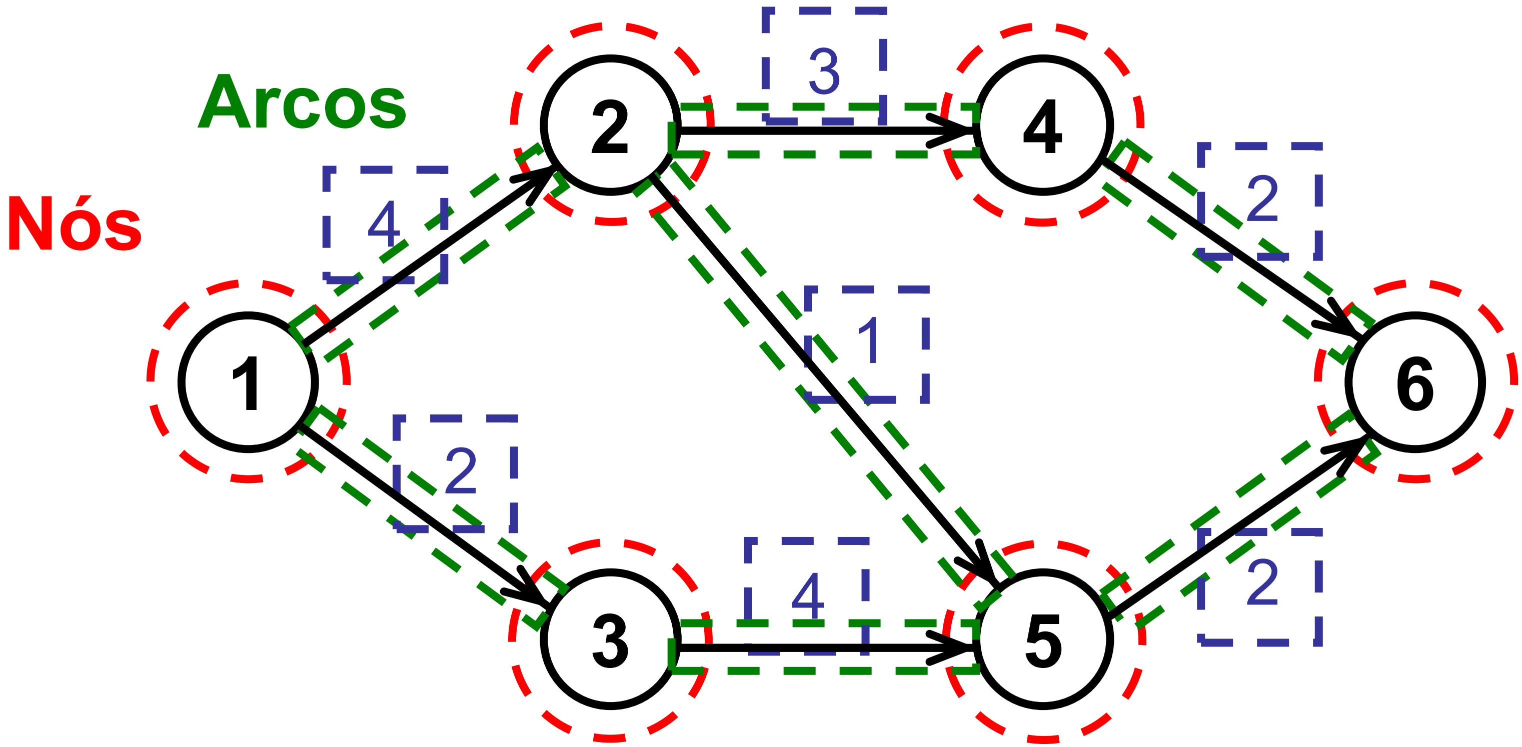
Otimização em Rede

Abril/2019

Introdução: grafos

Um **grafo** é um conjunto de **nós** e **arcos**:

Se existem pesos (ou custos) associados aos arcos, o grafo se torna uma **rede**.

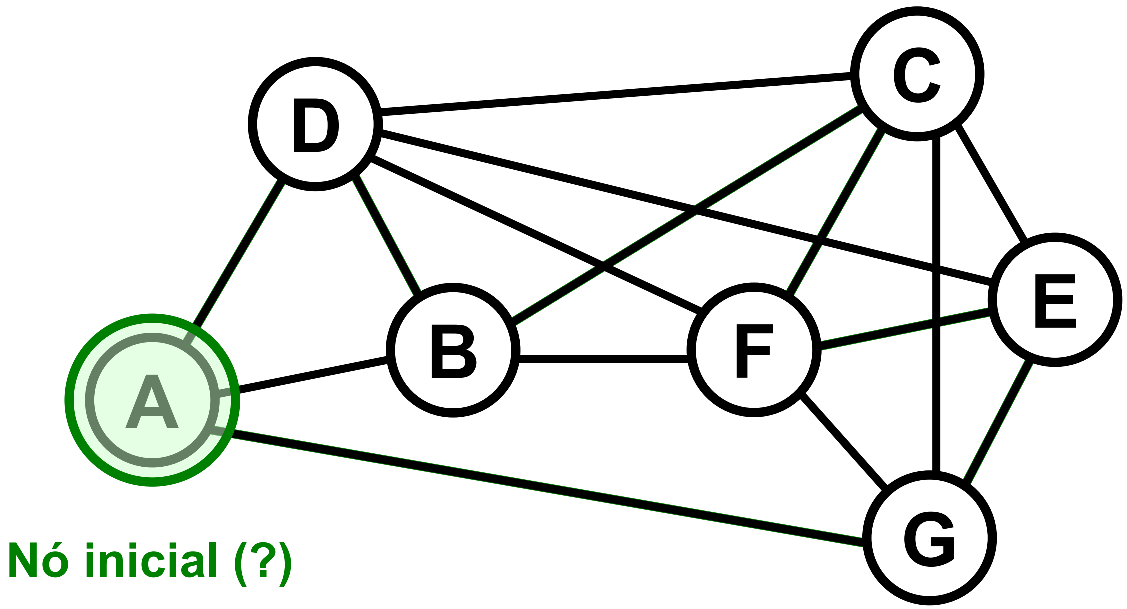


Por fim, os arcos podem ser **orientados**.

Problema do Caixeiro Viajante

Determinação de um **circuito de custo mínimo** sobre um grafo (orientado ou não), tal que:

- O circuito inicia e termina em um nó específico.
- O circuito passa uma vez em cada nó do grafo.



Problema do Caixeiro Viajante

1) Resolução por **busca exaustiva**: determinação de todos os circuitos <u>viáveis</u> possíveis

Circuito	**Início**	**1**	**2**	**3**	**4**	**Final**	**Custo total**
1	A	B	C	D	E	A	462,00
2	A	B	C	E	D	A	**530,00**
3	A	B	D	C	E	A	484,00
4	A	B	D	E	C	A	606,00
5	A	B	E	C	D	A	461,00
6	A	B	**E**	**D**	**C**	A	515,00
7	A	C	B	D	E	A	**602,00**
8	A	C	B	E	D	A	579,00
...	...					...	...

Problema do Caixeiro Viajante

1) Resolução por **busca exaustiva**: determinação de todos os circuitos viáveis possíveis

Circuito	Início	1	2	3	4	Final	Custo total
9	A	C	**D**	**B**	**E**	A	**533,00**
10	A	C	**D**	**E**	**B**	A	**515,00**
11	A	C	E	B	D	A	601,00
12	A	C	E	D	B	A	606,00
13	A	D	B	C	E	A	**548,00**
14	A	D	B	E	C	A	601,00
15	A	**D**	**C**	**B**	**E**	A	**457,00**
16	A	D	C	E	B	A	461,00
...	...					...	...

Problema do Caixeiro Viajante

1) Resolução por **busca exaustiva**: determinação de todos os circuitos viáveis possíveis

Circuito	Início	1	2	3	4	Final	Custo total
17	A	D	E	B	C	A	579,00
18	A	D	E	C	B	A	530,00
19	A	**E**	**B**	**C**	**D**	A	**457,00**
20	A	E	B	D	C	A	533,00
21	A	E	C	B	D	A	548,00
22	A	E	C	D	B	A	484,00
23	A	E	D	B	C	A	602,00
24	A	**E**	**D**	**C**	**B**	A	**462,00**

4) Total de circuitos:

$$R = (n-1)!$$

Grafo simétrico:

$$RU = \frac{(n-1)!}{2}$$

Problema do Caixeiro Viajante

1) Resolução por **busca exaustiva**: determinação de todos os circuitos viáveis possíveis

4) Total de circuitos:

$$R = (n-1)!$$

Grafo simétrico:

$$RU = \frac{(n-1)!}{2}$$

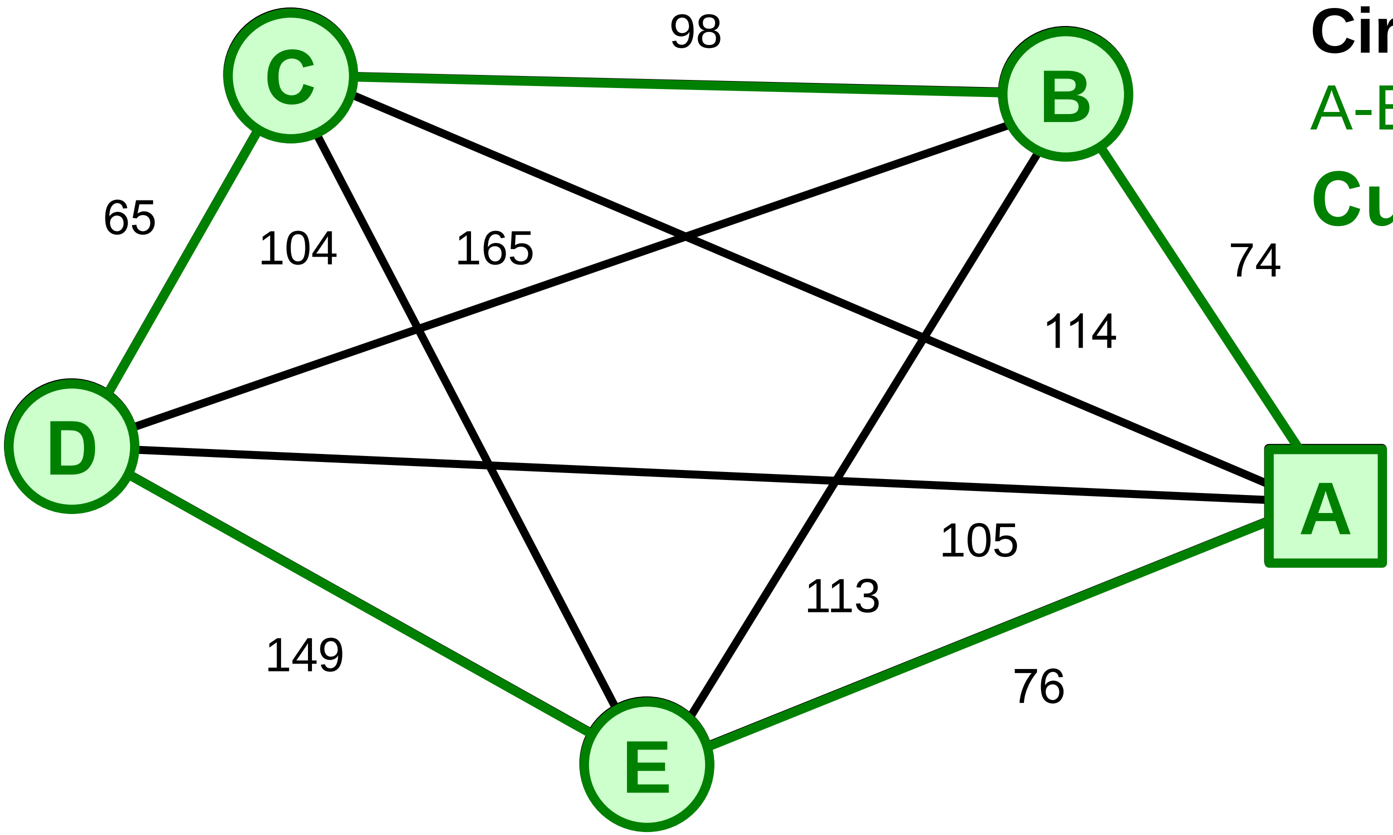
5) 27 capitais brasileiras.

RU = $2 \cdot 10^{26}$ circuitos

6) Se for possível gerar e avaliar 1 bilhão (10^9) circuitos por segundo, o tempo gasto na aplicação da busca exaustiva será de 64 milhões de séculos!

Problema do Caixeiro Viajante

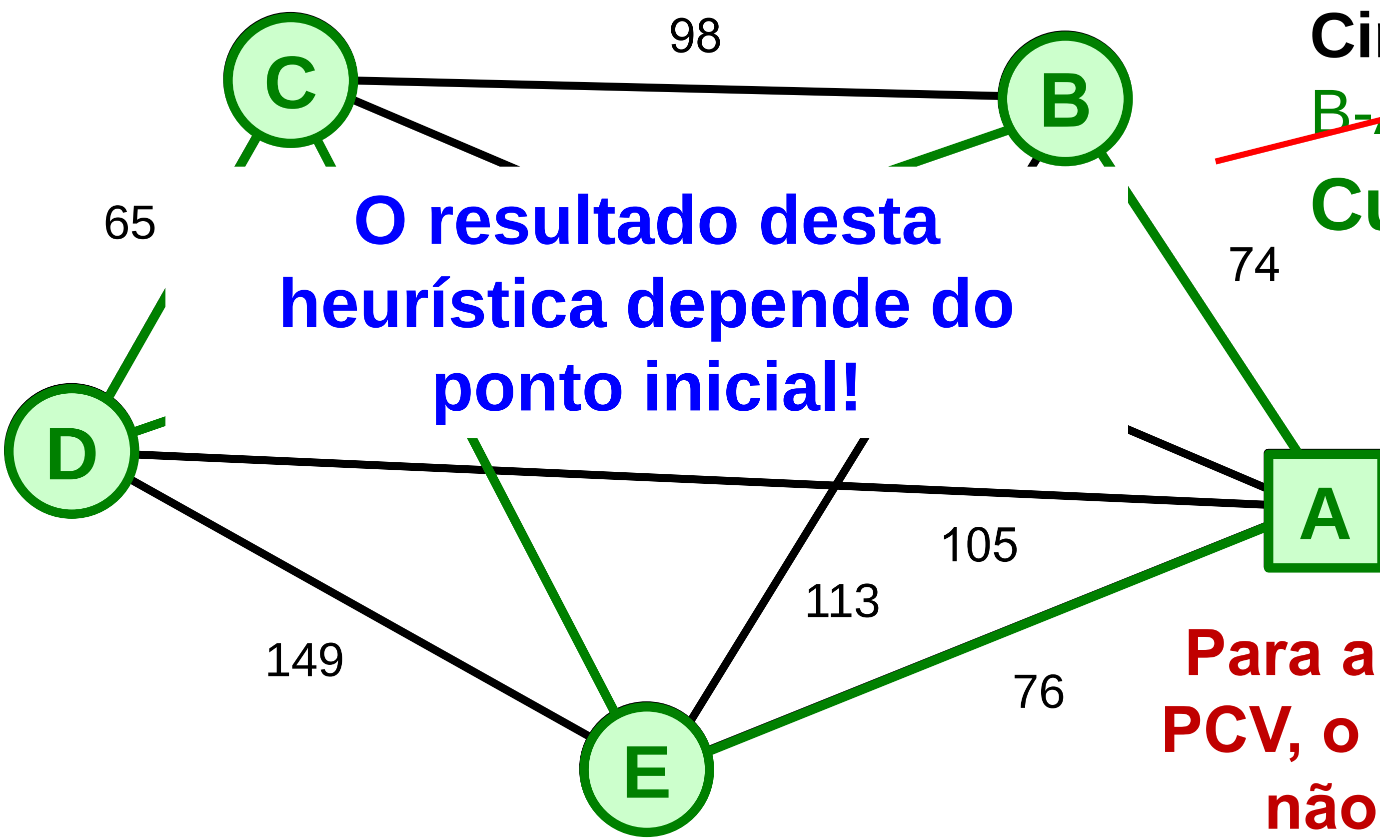
7) Resolução por **heurísticas** (técnicas de resolução que não garantem a obtenção de soluções ótimas): heurística do **vizinho mais próximo**. Exemplo (iniciando pelo nó **A**):



Circuito:
A-B-C-D-E-A
Custo = 462

Problema do Caixeiro Viajante

7) Resolução por **heurísticas** (técnicas de resolução que não garantem a obtenção de soluções ótimas): heurística do **vizinho mais próximo**. Exemplo (iniciando pelo nó **B**):



O resultado desta heurística depende do ponto inicial!

Circuito:
~~B-A-E-C-D-B~~

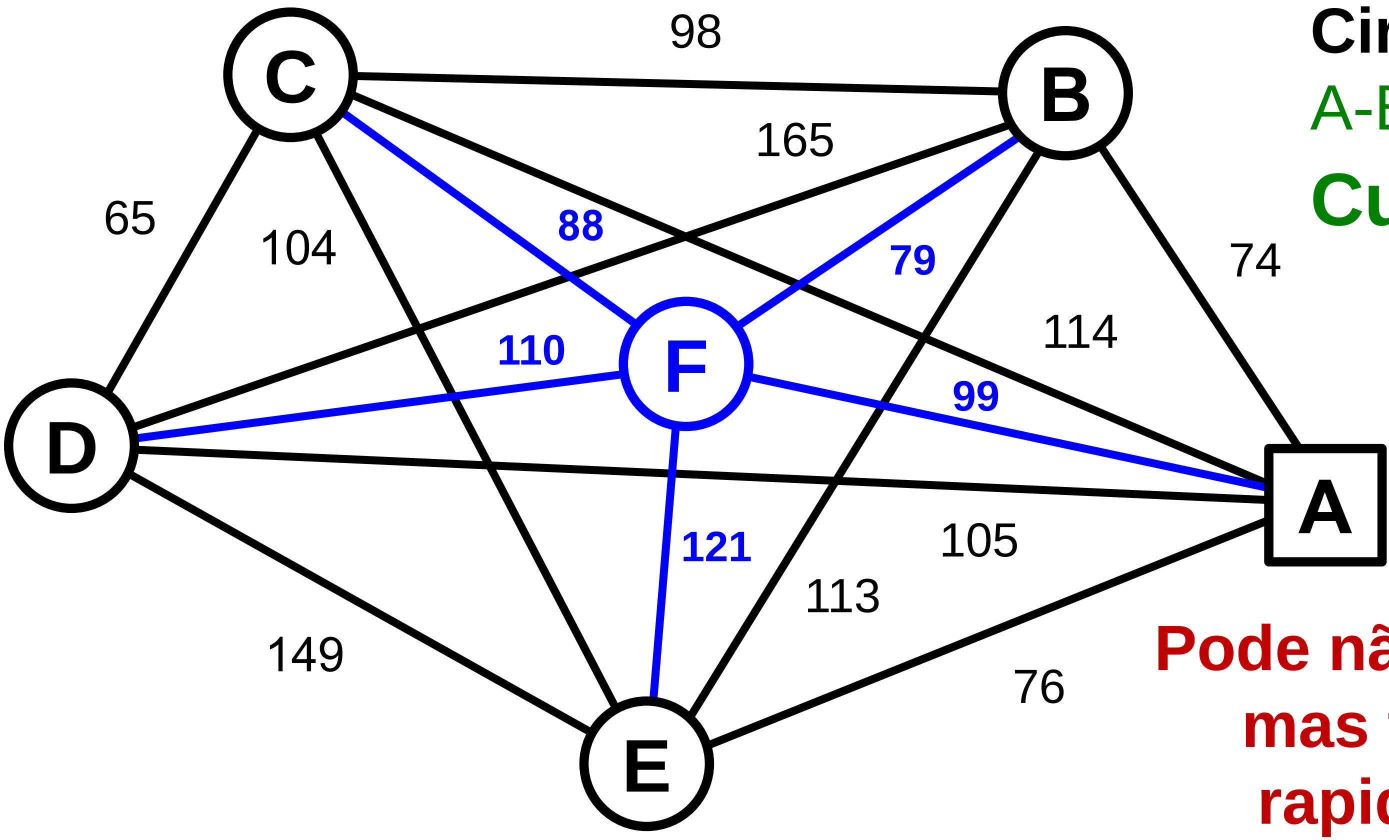
Custo = 484

Equivalente:
A-E-C-D-B-A

Para a solução do PCV, o ponto inicial não importa!

Problema do Caixeiro Viajante

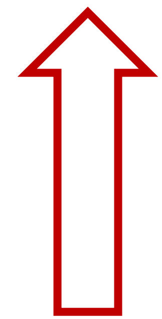
8) Resolução por **heurísticas** (técnicas de resolução que não garantem a obtenção de soluções ótimas): heurística do **vizinho mais próximo**. Exemplo (7 nós):



Circuito:

A-B-F-C-D-E-A

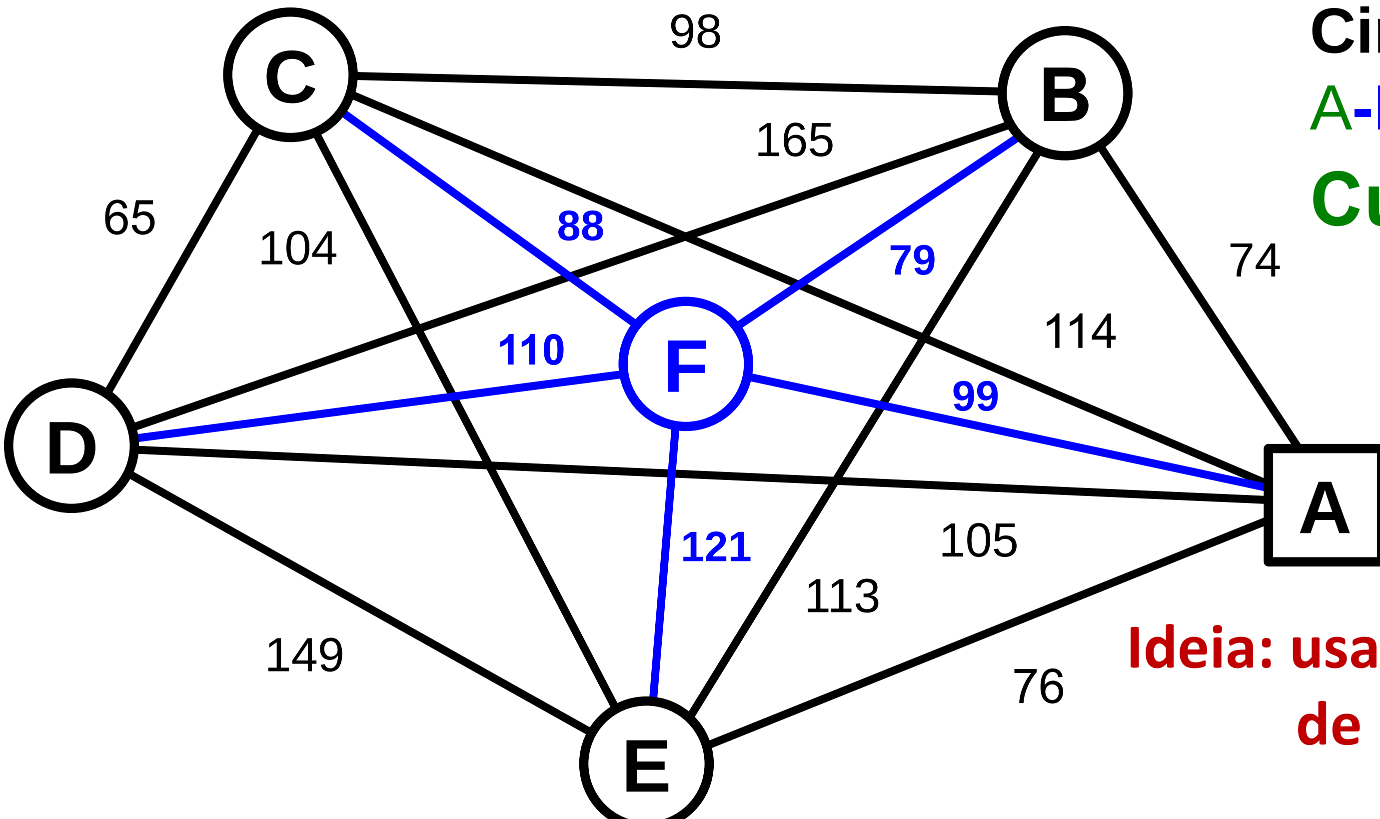
Custo = 531



Pode não ser ótima, mas foi obtida rapidamente!

Problema do Caixeiro Viajante

9) Resolução por **heurísticas** (técnicas de resolução que não garantem a obtenção de soluções ótimas): heurística de **inserção**. Partindo da solução <u>ótima</u> para o problema com 5 nós:



Circuito:
A-**F-**D-C-B-E-A
Custo = 561

Ideia: usar outros pontos de inserção!

Exemplo: Junior Wells

1) A Junior Wells Eletric Co. possui três plantas de geração de energia que devem atender a quatro cidades. A capacidade de geração de energia em cada planta, em milhões de kwh, é dada na Tabela 8.1. As demandas mínimas exigidas em cada cidade estão representadas na Tabela 8.2.

Tabela 8.1 - Capacidade de geração

Planta	Capacidade (mi kwh)
1	35
2	50
3	40

Tabela 8.2 - Consumo de energia

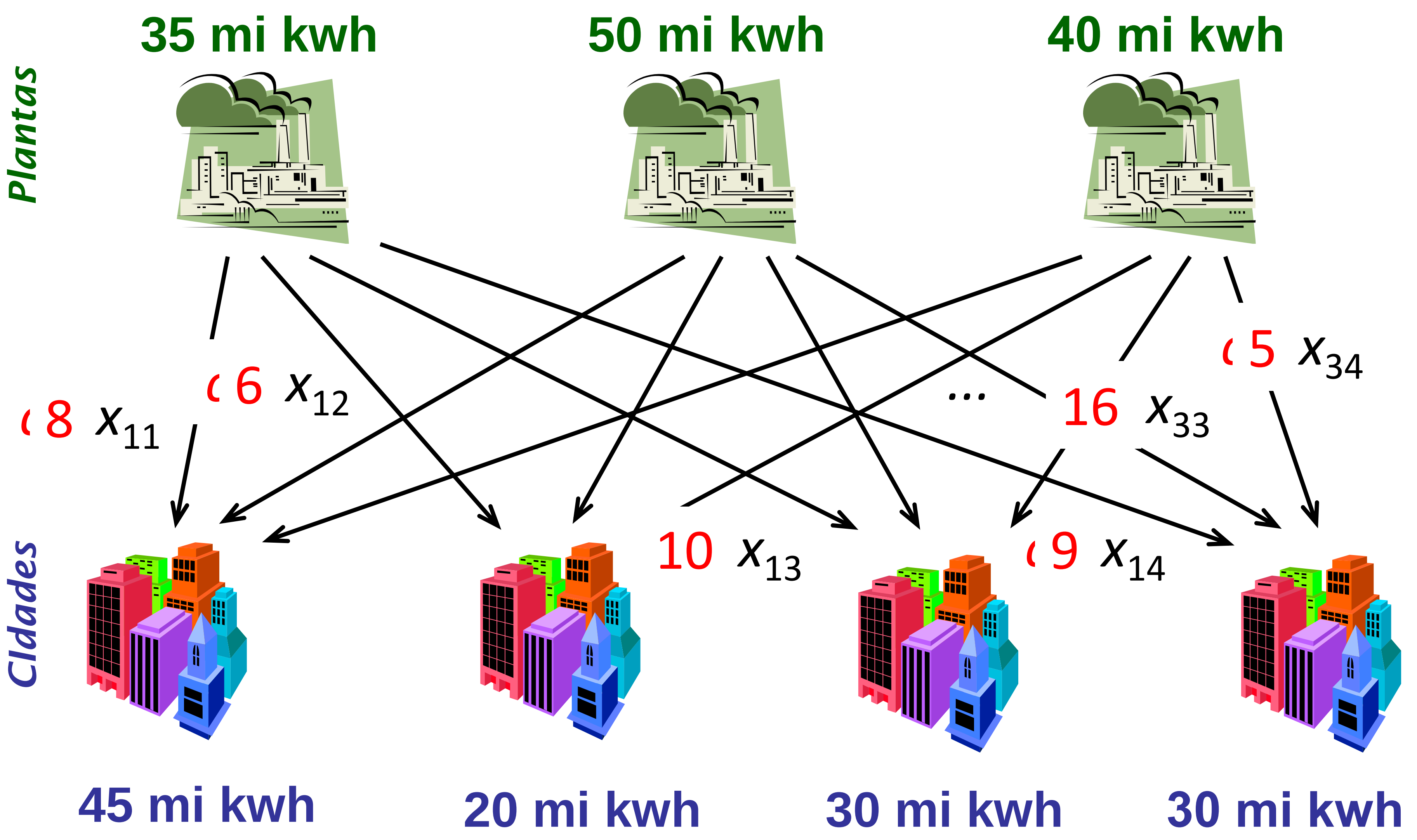
Cidade	Consumo (mi kwh)
1	45
2	20
3	30
4	30

Os custos de fornecimento de cada milhão de kwh dependem da distância que a energia deve percorrer (Tabela 8.3). Formule um PPL que permita à Junior Wells minimizar o custo de atendimento da demanda por energia das quatro cidades.

Tabela 8.3 - Custos unitários de transporte de energia (em $)

	Cidade 1	Cidade 2	Cidade 3	Cidade 4
Planta 1	8,00	6,00	10,00	9,00
Planta 2	9,00	12,00	13,00	7,00
Planta 3	14,00	9,00	16,00	5,00

Exemplo: Junior Wells



Exemplo: Junior Wells

Modelo matemático:

1. Variáveis de decisão

x_{ij} = energia (em milhões de kwh) <u>transportada</u> da planta *i* (*i* = 1,2,3) para a cidade *j* (*j* = 1,2,3,4)

2. Função objetivo

Minimizar o custo de atendimento da demanda por energia

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}\,x_{ij}$$

, sendo c_{ij} = custo (em $) do transporte de 1 milhão de kwh da planta *i* (*i* = 1,2,3) para a cidade *j* (*j* = 1,2,3,4)

$$\min \quad z = 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + \ldots + 16x_{33} + 5x_{34}$$

Exemplo: Junior Wells

Modelo matemático:

3. Restrições

3.1. Oferta

Planta 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$

Planta 2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$

Planta 3: $x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$

3.2. Demanda

Cidade 1: $x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45$

Cidade 2: $x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$

Cidade 3: $x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$

Cidade 4: $x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$

3.3. Não negatividade: $x_{ij} \geq 0$, para $i = 1,2,3$ e para $j = 1,2,3,4$

Exemplo: Junior Wells

Modelo matemático RESUMIDO:

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} c_{ij} x_{ij}$$, sendo c_{ij} = custo do transporte de 1 milhão de kwh entre a planta *i* (*i* = 1,2,3) e a cidade *j* (*j* = 1,2,3,4)

suj. a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 35$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 50$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 40$$

Restrições de oferta

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 45$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 30$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \ge 30$$

Restrições de demanda

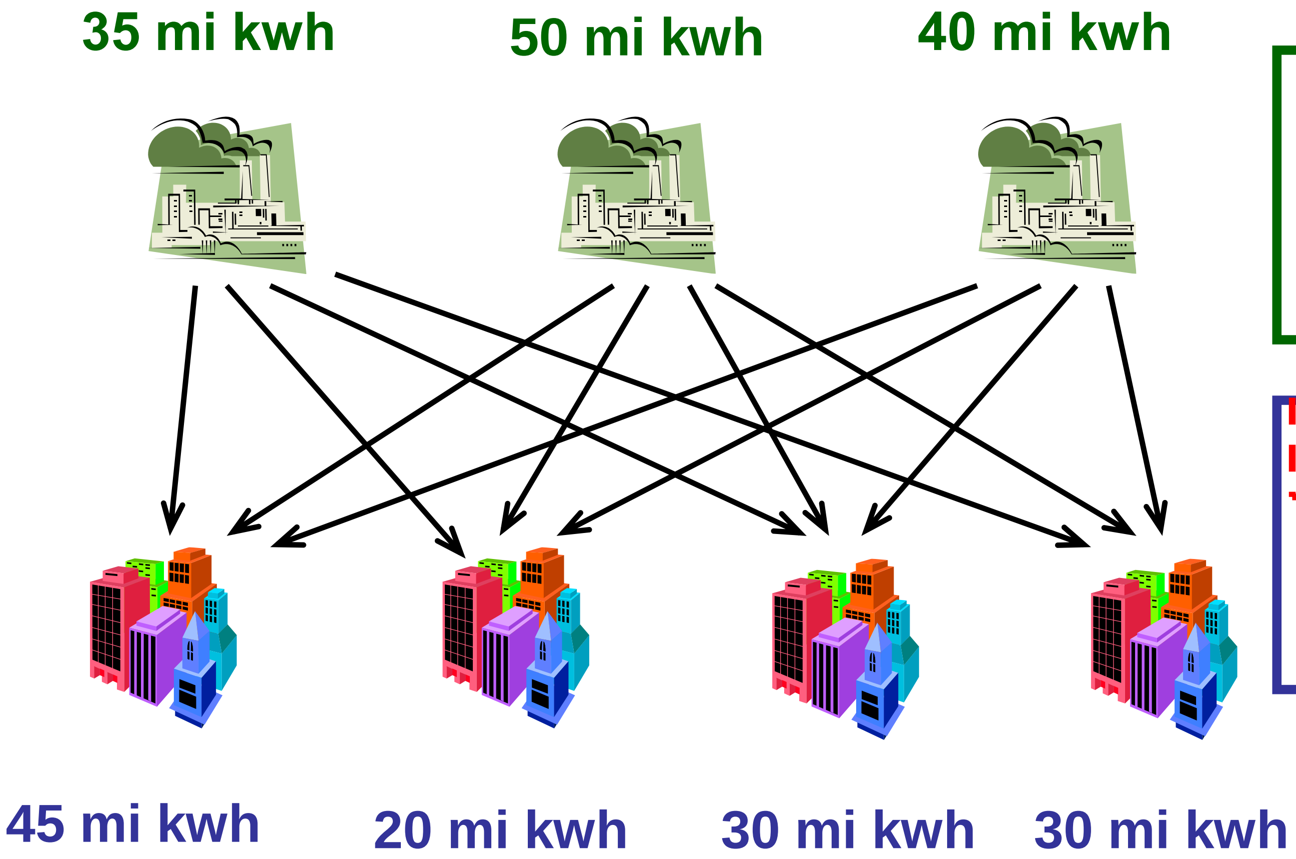
$$x_{ij} \ge 0 \text{ , para } \quad i = 1,2,3 \text{ e para } \quad j = 1,2,3,4$$

Exemplo: Junior Wells

Problema de transporte desbalanceado

2) (Oferta > demanda) Remodele o problema anterior como um problema balanceado, supondo que a demanda da cidade 1 passou a ser de 40 milhões de kwh.

Problema balanceado



Oferta Total =

35+50+40 =

125 mi kwh

Demanda Total =

45+20+30+30 =

125 mi kwh

Exemplo: Junior Wells

Modelo matemático (RESUMIDO e REFORMULADO):

$$\min \quad z = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}x_{ij}$$

, sendo c_{ij} = custo do transporte de 1 milhão de kwh entre a planta i (i = 1,2,3) e a cidade j (j = 1,2,3,4)

suj. a:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 35$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 50$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 40$$

Restrições de oferta

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = \mathbf{40}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 30$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30$$

Proposta - inserir "cliente fictício":

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 5$$

$$c_{15} = c_{25} = c_{35} = 0$$

Além disso, inserir as novas variáveis nas restrições de oferta e de não negatividade.

Prob. desbalanceado

3) (Oferta < demanda) Três cidades devem ser abastecidas por dois reservatórios de água. Cada reservatório pode fornecer 50 milhões de m^3 de água por dia e cada cidade precisa receber 40 milhões de m^3 de água por dia. Para cada milhão de m^3 de água não entregue, existe uma penalidade. Na cidade 1, a penalidade é de \$ 20,00, na cidade 2, a penalidade é de \$ 22,00 e na cidade 3 a penalidade é de \$ 23,00. O custo do transporte de 1 milhão de m^3 de água entre cada reservatório e cada cidade é apresentado na Tabela 8.4. Formule um problema de transporte balanceado que possa ser utilizado para minimizar os custos de atendimento da demanda por água.

Tabela 8.4 - Custos unitários de transporte de água (em \$)

	Cidade 1	Cidade 2	Cidade 3
Reservatório 1	7,00	8,00	10,00
Reservatório 2	9,00	7,00	8,00

Prob. desbalanceado

Caracterização do modelo:

Tabela 8.4 - Custos unitários de transporte de água (em $)

	Cidade 1	Cidade 2	Cidade 3	*Ofertas*
Reservatório 1	7,00	8,00	10,00	**50**
Reservatório 2	9,00	7,00	8,00	**50**
Reservatório 3	**20,00**	**22,00**	**23,00**	**20**
Demandas	**40**	**40**	**40**	

Tabela do problema de transporte

Forma preferida de modelagem

					Oferta
	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	c_{14} x_{14}	o_1
	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	c_{24} x_{24}	o_2
	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	c_{34} x_{34}	o_3
Demanda	d_1	d_2	d_3	d_4	

Tabela do problema de transporte

Forma <u>preferida</u> de modelagem

	Cidade 1	Cidade 2	Cidade 3	
Reserv. 1	7	8	10	50
Reserv. 2	9	7	8	50
Reserv. 3	20	22	23	**20**
	40	40	40	

Balanceamento

Oferta > Demanda *- cria-se um centro fictício de demanda. O custo de transporte associado a este centro é* ***nulo****.*

Oferta < Demanda *- cria-se um centro fictício de oferta. Os custos de transporte associados correspondem a* ***multas*** *ou* ***penalidades****.*

Na prática, cada caso é um caso...

Fatos:

- *Modelos de transporte podem ser usados em vários tipos de problemas, incluindo alguns que* ***não envolvem transportes****!*
- *Existe uma versão (bastante eficiente) do* ***algoritmo simplex****, específica para problemas de transporte balanceados.*
- *Um problema de transporte em que as todas as ofertas e demandas tenham valores* ***inteiros****, sempre terá* ***solução ótima inteira****, mesmo que não existam restrições à respeito.*