

*Escola de Engenharia Mauá*

*ECM511 – Teoria dos Grafos, Pesquisa Operacional e ~Métodos de  
Otimização*

*Prof. Joyce M Zampirolli  
joyce.zampirolli@maua.br*

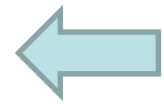
# *Modelagem Matemática*

*Fevereiro/2019*

# Moodle (autoinscrição)

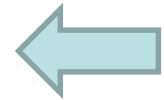
Procure a disciplina:

< >



Chave de inscrição:

<EPM1012019>



# M.Sc. Joyce Zampirolli Scrivano

e-mail: [joyce.zampirolli@maua.br](mailto:joyce.zampirolli@maua.br)

- Engenharia de Produção (Faesa-ES)
- Mestre em Engenharia de Sistemas Logísticos (EPUSP - SP)
- Especialista em *Logistics and Supply Chain Management* (MIT –USA)
- Doutoranda em Engenharia Naval e Oceânica (EPUSP – SP)

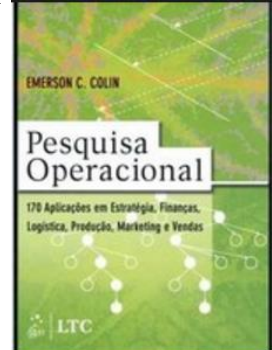
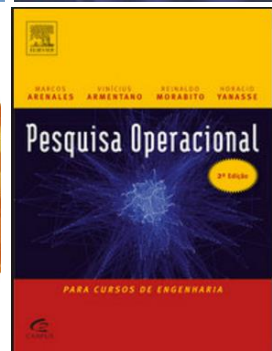
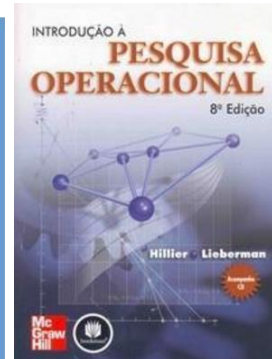
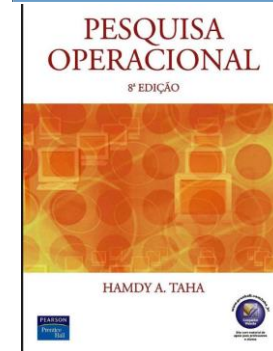
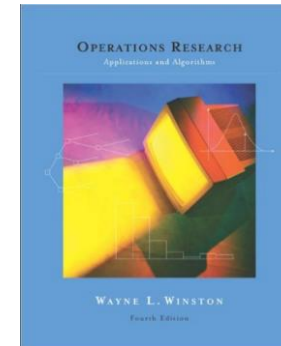


# Ementa 1º semestre

1 L	Modelagem Matemática
2 L	Programação Linear
3 L	Métodos Gráficos
4 L	Resolução no Excel
5 L	Método Simplex
6 L	Otimização em Rede e problema de transporte e de Fluxo Máximo: Método Simplex de Rede e Método de Ford & Fulkerson
7 L	Trabalho em sala
8 L	SEMANA DE PROVAS P1
9 L	Programação Linear Inteira
10 L	Método de Branch & Bound
11 L	Programação Não-linear: Método de Lagrange
12 L	Métodos de Otimização: Teoria das Filas e Cadeias de Markov
13 L	Trabalho em sala
14 L	SEMANA DE PROVAS P2 e PSub1

# Referências Bibliográficas

- Arenales, Marcos, et al. Pesquisa operacional: para cursos de engenharia. Elsevier Brasil, 2015.
- Winston, Wayne L., and Jeffrey B. Goldberg. Operations research: applications and algorithms. Vol. 3. Boston: Duxbury press, 2004.
- Hillier, F. S. A. L., and G. Lieberman. "Introduction to mathematical programming." (1977).
- Taha, Hamdy A. Operations research: an introduction. Vol. 557. Pearson/Prentice Hall, 2007.
- Colin, Emerson Carlos. Pesquisa Operacional: 170 aplicações em estratégia, finanças, logística, produção, marketing e vendas. Livros Técnicos e Científicos, 2007.



# O que é PO?

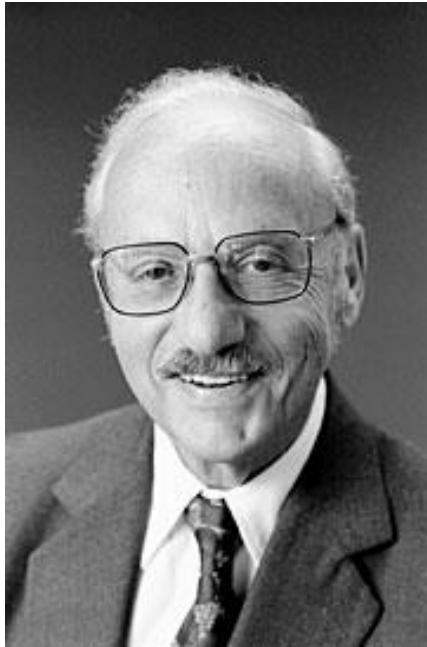
A P.O. é originária da Segunda Guerra Mundial, quando os cientistas de várias disciplinas se reuniram para resolver problemas militares de natureza tática e estratégica.

Por ser uma ferramenta matemática aplicada, a P.O. nos dá condições para:

- Solucionar problemas reais;
- Tomar decisões embasadas em fatos, dados e correlações quantitativas;
- Conceber, planejar, analisar, implementar, operar e controlar sistemas por meio da tecnologia bem como de métodos de outras áreas do conhecimento;
- Minimizar custos e maximizar o lucro;
- Encontrar a melhor solução para um problema, ou seja, a solução ótima

# O que é PO?

Pesquisa  $\Rightarrow$  método científico  
Operacional  $\Rightarrow$  operações



“Eu a chamo de ciência da tomada de decisão. Isto é, todas as maneiras de abstrair um problema e colocá-lo em uma forma matemática.

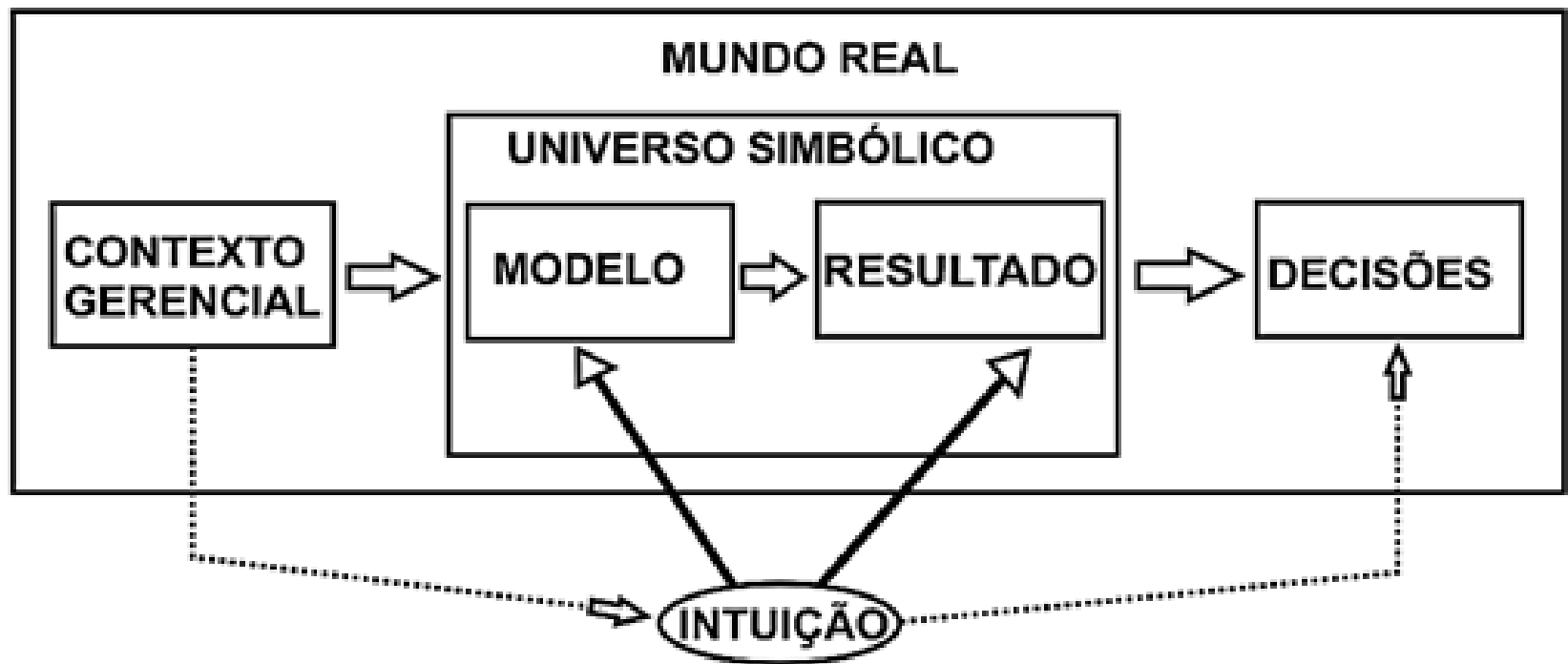
Isso engloba desde os matemáticos que estão tentando resolver esse problema até as pessoas que têm um problema real e precisam dar resposta ao chefe. Pesquisa Operacional é tudo isso e, dependendo de com quem você conversa, você terá uma visão diferente do que é PO.”

George B. Dantzing.

Mas como resolver  
problemas de P.O?









# Modelo Matemático

- Conceitualmente, um modelo matemático ou simplesmente modelo, pode ser apresentado como uma **representação de um sistema real**, o que significa que um modelo deve representar um sistema e a forma como ocorrem as modificações no mesmo. O ato de modelar é conhecido como **modelagem**.

# O que é otimização?

- O propósito da otimização de processos é de reduzir ou eliminar desperdício de tempo e recursos, gastos desnecessários, gargalos e erros, atingindo o objetivo do processo.

# Pra que estudar P.O?

Atualmente, sua principal utilização é como ferramenta nos processos de tomada de decisão no ambiente empresarial e nos negócios, tanto no setor privado como no setor público. A P.O. pode ser utilizada para resolver os seguintes problemas no ambiente organizacional:

- otimização de recursos;
- roteirização;
- localização;
- carteiras de investimento;
- alocação de pessoas;
- previsão de planejamento;
- alocação de verbas de mídia;
- determinação de mix de produtos;
- escalonamento e planejamento da produção;
- planejamento financeiro;
- análise de projetos e etc.

# Tomada de decisões

- Tomar decisões é uma condição da vida humana. Viver é escolher entre apostas viáveis. Seguir pela esquerda ou à direita na bifurcação de uma estrada, casar com Marina ou ir embora com Fernanda, sabendo que nenhuma das duas opções é garantia de felicidade ou fortuna; o melhor que podemos fazer é analisar as chances. Não há como não tomar decisões. Jean Paul Sartre afirmou que “o homem está condenado à liberdade”, talvez considerasse plausível o argumento: O homem está condenado a tomar decisões.

- O foco aqui é o ambiente empresarial. Como em qualquer outra situação, há muitas variáveis que caracterizam as situações-problema. **MAS O QUE SÃO PROBLEMAS?** Os problemas existem quando o estado atual de uma situação é diferente do estado desejado. Em outras palavras, problemas são situações que a empresa precisa resolver para atingir seus objetivos.
- A P.O. é uma ferramenta extremamente qualificável para o trabalho de gestão, seja nos níveis gerencial, operacional ou estratégico, uma vez que fornece condições para melhor comunicação entre decisores e setores de uma organização.

# Modelagem matemática

- **Tipos de modelo**
  - Linear x não linear
  - Inteiro x não inteiro
  - Determinístico x estocástico



# Modelagem matemática

## Passos para construção de um modelo

- **Passo 1: Formulação do problema**
- **Passo 2: Observação do sistema**
- **Passo 3: Formulação matemática do problema**
- **Passo 4: Verificação e testes do modelo**
- **Passo 5: Escolha de alternativas**
- **Passo 6: Apresentação dos resultados e conclusões para a empresa**
- **Passo 7: Implementação e avaliação das políticas apresentadas pelo modelo**

Fonte: Wayne Winston, 2003

# Modelagem matemática

## Exemplo 1

1) Uma fábrica produz tintas para interiores e exteriores, usando como insumos dois tipos de materiais (A e B). As disponibilidades diárias dos materiais e as quantidades utilizadas por tonelada de tinta produzida estão relacionadas na Tabela 1.1.

**Tabela 1.1** - Informações sobre o consumo de materiais

	Consumo de material (t) por 1 t de tinta		Disponibilidade máxima (t)
	Exterior	Interior	
<b>Material A</b>	1	2	6
<b>Material B</b>	2	1	8

Uma pesquisa de mercado estabeleceu que a venda diária de tintas para interiores não pode exceder a de tintas para exteriores em mais de uma tonelada. A demanda máxima de tintas para interiores é limitada em 2 toneladas por dia. O preço de venda das tintas para exteriores e interiores é de R\$ 3.000,00 e R\$ 2.000,00 por tonelada, respectivamente.

# Modelagem matemática

- **Pergunta?**
- Qual o objetivo do problema?
- O que devo encontrar para calcular o objetivo do problema?
- Quais as limitantes desse problema?

# Modelagem de PPL

A modelagem matemática de um **Problema de Programação Linear** (PPL) exige o conhecimento e a descrição de 3 conjuntos de informações:

- 1) Quais são as decisões a serem tomadas? **Variáveis de decisão**
- 2) Qual grandeza deve ser otimizada? (*max/min*) **Função objetivo**
- 3) Quais são as limitações do problema? **Restrições**

# Modelagem de PPL

Ex. 2 (pág. 13): GIAPETTO'S

Variáveis de decisão

**Utilização dos setores**  
(horas/unidade)

**Disponi-  
bilidade  
semanal**

	Soldado	Trem	
ACABAMENTO	2	1	100 horas
CARPINTARIA	1	1	80 horas

Função objetivo

# Giapetto's (ex. 2, pág. 13)

## 1. Variáveis de decisão

$s$  = quantidade de soldados produzidos por semana

$t$  = quantidade de trens produzidos por semana

## 2. Função objetivo

Maximizar o lucro semanal do sr. Giapetto

$$\max z = (27-10-14)s + (21-10-9)t = 3s + 2t$$

## 3. Restrições

3.1. Disponibilidade da mão de obra

ACABAMENTO:  $2s + t \leq 100$

CARPINTARIA:  $s + t \leq 80$

3.2. Demanda máxima por soldados

$$s \leq 40$$

3.3. Não negatividade

$$s, t \geq 0$$

# Modelagem matemática

## Alguns conceitos

- Modelo
- Variável de decisão
- Parâmetro
- Função Objetivo
- Restrição
- Função Linear
- Inequação Linear
- Algoritmo

# Problema da dieta (ex. 8. pág. 19)

8) A minha dieta requer que todo alimento que eu consuma venha de quatro "grupos básicos" alimentares: bolo de chocolate, sorvete, soda e *cheesecake*. No momento, os seguintes alimentos estão disponíveis para consumo: *brownies*, sorvete de chocolate, refrigerante tipo cola e torta de maçã. Um *brownie* custa \$ 0,50, uma bola de sorvete de chocolate custa \$ 0,20, uma garrafa de refrigerante custa \$ 0,30 e um pedaço de torta de maçã custa \$ 0,80. Para a minha subsistência diária eu preciso ingerir 500 calorias, 6 onças (oz) de chocolate (1 oz = 28,35 g), 10 oz de açúcar e 8 oz de gordura. O conteúdo nutricional de cada alimento disponível está representado na Tabela 1.4. Formule um problema de programação linear que possa ser utilizado para satisfazer os meus requisitos diários de nutrientes ao menor custo possível.

**Tabela 1.4** - Conteúdo nutricional dos alimentos

Alimento	Calorias	Chocolate (onças)	Açúcar (onças)	Gordura (onças)
<i>Brownie</i> (unidade)	400	3	2	2
Sorvete de chocolate (1 bola)	200	2	2	4
Cola (1 garrafa)	150	0	4	1
Torta de maçã (1 pedaço)	500	0	4	5



# Programação de mão de obra (ex. 9. pág. 19)

9) Uma agência dos correios precisa de quantidades distintas de empregados em tempo integral nos diferentes dias da semana, conforme mostra a Tabela 1.5. As regras da União determinam que cada empregado em tempo integral deve trabalhar 5 dias consecutivos e, então, receber dois dias de folga. Por exemplo, um empregado que trabalhe de segunda a sexta deve folgar no sábado e no domingo. Apesar de ser possível alocar trabalhadores em regime parcial, a chefia da agência deseja atender as necessidades diárias apenas com empregados em tempo integral. Formule um modelo matemático de programação linear que atenda às necessidades da agência, alocando a menor quantidade total possível de empregados em tempo integral.

**Tabela 1.5** - Número de empregados necessários para o escritório dos correios

Empregados necessários	
Dia 1 = Segunda	17
Dia 2 = Terça	13
Dia 3 = Quarta	15
Dia 4 = Quinta	19
Dia 5 = Sexta	14
Dia 6 = Sábado	16
Dia 7 = Domingo	11

# Problema de portfólio (ex. 10. pág. 20)

**10)** A Companhia Petrolífera Estrela Solitária está analisando a possibilidade de cinco oportunidades diferentes de investimento. O fluxo de caixa dos investimentos e o retorno de capital na data 0 (em milhões de dólares) estão apresentados na Tabela 1.6. A E. S. tem \$ 40 milhões para investir na data 0 e estima que poderá investir outros \$ 20 milhões dali a um ano (data 1). A Estrela Solitária pode comprar qualquer *fração* de cada investimento, sendo que o fluxo de caixa e os retornos de capital serão ajustados de acordo. Por exemplo, se a E. S. comprar um quinto do investimento 4, terá que investir  $(1/5) \times 5 = \$ 1$  milhão na data 0 e  $(1/5) \times 1 = \$ 0,2$  milhões na data 1, obtendo um retorno, em valor presente, de  $(1/5) \times 14 = \$ 2,8$  milhões. A E. S. deseja maximizar o valor presente do retorno do investimento feito nas opções de 1 a 5. Formule um PPL que ajude a empresa a atingir este objetivo, assumindo que o capital não investido na data 0 não pode ser utilizado na data 1 (o que mudaria no modelo sem essa hipótese?).

**Tabela 1.6** - Investimentos exigidos e retorno de capital

	Investimento (mi de \$)				
	1	2	3	4	5
Investido na data 0	11	53	5	5	29
Investido na data 1	3	6	5	1	34
Valor presente do retorno de capital	13	16	16	14	39

## Problema da mistura (ex. 12. pág. 21)

**12)** A Companhia Petrolífera Estrela Solitária possui 5.000 barris de petróleo do tipo 1 e 10.000 barris de petróleo do tipo 2 à disposição. A E. S. vende gasolina e óleo para aquecimento, produzidos a partir da mistura dos dois tipos de petróleo. Cada barril do petróleo tipo 1 tem um "nível de qualidade" igual a 10 e cada barril do tipo 2 tem um nível de qualidade igual a 5. A gasolina vendida deve ter um nível médio de qualidade de, no mínimo, 8, enquanto o óleo para aquecimento deve ter um nível médio de qualidade de, no mínimo, 6. A gasolina é vendida por \$ 25,00 o barril e o óleo para aquecimento é vendido por \$ 20,00 o barril. O custo de publicidade necessário para vender um barril de gasolina é de \$ 0,20; para vender um barril de óleo para aquecimento este custo é de \$ 0,10. Escreva um modelo de maximização de lucros para a E. S., assumindo que as demandas pelos produtos finais sejam ilimitadas.