第 13 章 静电场中的导体和电解质

一、选择题

1(D)，2(A)，3(C)，4(B)，5(C)

二、填空题

(1). $\sigma(x，y，z)/\varepsilon_0$，与导体表面垂直朝外($\sigma > 0$) 或 与导体表面垂直朝里($\sigma < 0$).

(2). σ，$\sigma/(\varepsilon_0\varepsilon_r)$；　　(3). $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$ ；

(4). P ，$-P$ ，0；　　(5). ε_r ，ε_r

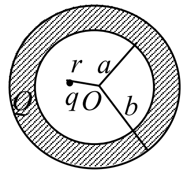
三、计算题

1. 如图所示，一内半径为 a、外半径为 b 的金属球壳，带有电荷 Q，在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q．设无限远处为电势零点，试求：

(1) 球壳内外表面上的电荷．

(2) 球心 O 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势．

(3) 球心 O 点处的总电势．



解：(1) 由静电感应，金属球壳的内表面上有感生电荷$-q$，外表面上带电荷 $q+Q$.

(2) 不论球壳内表面上的感生电荷是如何分布的，因为任一电荷元离 O 点的距离都是 a，所以由这些电荷在 O 点产生的电势为

$$U_{-q}=\frac{\int dq}{4\pi\varepsilon_0 a}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

(3) 球心 O 点处的总电势为分布在球壳内外表面上的电荷和点电荷 q 在 O 点产生的电势的代数和

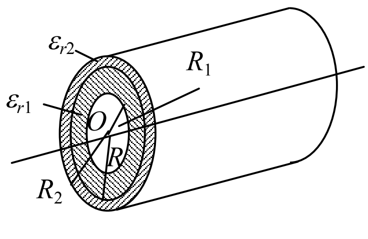
$$U_O=U_q+U_{-q}+U_{Q+q}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 b}\quad=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b})+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

2. 如图所示，一圆柱形电容器，内筒半径为 R_1，外筒半径为 R_2 ($R_2 < 2R_1$)，其间充有相对介电常量分别为ε_{r1}和$\varepsilon_{r2}=\varepsilon_{r1}/2$ 的两层各向同性均匀电介质，其界面半径为 R．若两种介质的击穿电场强度相同，问：

(1) 当电压升高时，哪层介质先击穿？

(2) 该电容器能承受多高的电压？



解：(1) 设内、外筒单位长度带电荷为$+\lambda$和$-\lambda$．两筒间电位移的大小为

$$D=\lambda/(2\pi r)$$

在两层介质中的场强大小分别为

$$E_1=\lambda/(2\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r1}r),\qquad E_2=\lambda/(2\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r2}r)$$

在两层介质中的场强最大处是各层介质的内表面处，即

$$E_{1M}=\lambda/(2\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r1}R_1),\qquad E_{2M}=\lambda/(2\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r2}R)$$

可得　$E_{1M}/E_{2M}=\varepsilon_{r2}R/(\varepsilon_{r1}R_1)=R/(2R_1)$

已知　　$R_1 < 2R_1$，　可见　$E_{1M} < E_{2M}$，因此外层介质先击穿．

(2) 当内筒上电量达到λ_M，使 $E_{2M} = E_M$时，即被击穿，

$$\lambda_M = 2\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_{r2} R E_M$$

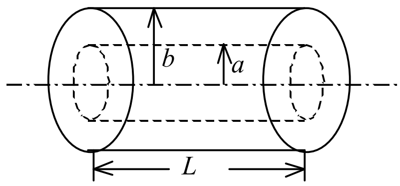
此时．两筒间电压(即最高电压)为：

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R} \frac{\lambda_M}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r}\,\mathrm{d}r + \int_{R}^{R_2} \frac{\lambda_M}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r}\,\mathrm{d}r = \varepsilon_{r2} R E_M \left(\frac{1}{\varepsilon_{r1}} \ln\frac{R}{R_1} + \frac{1}{\varepsilon_{r2}} \ln\frac{R_2}{R} \right)$$

3．如图所示，一电容器由两个同轴圆筒组成，内筒半径为 a，外筒半径为 b，筒长都是 L，中间充满相对介电常量为ε_r的各向同性均匀电介质．内、外筒分别带有等量异号电荷$+Q$和$-Q$．设 $(b-a) \ll a$，$L \gg b$，可以忽略边缘效应，求：

(1) 圆柱形电容器的电容；

(2) 电容器贮存的能量．



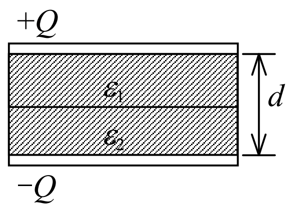
解：由题给条件 $(b-a) \ll a$ 和 $L \gg b$，忽略边缘效应, 应用高斯定理可求出两筒之间的场强为：　　$E = Q/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L r)$

两筒间的电势差　　$U = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{b}{a}$

电容器的电容　　$C = Q/U = (2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L)/[\ln(b/a)]$

电容器贮存的能量　　$W = \frac{1}{2}CU^2 = [Q^2/(4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L)]\ln(b/a)$

4．如图所示，一平板电容器，极板面积为 S，两极板之间距离为 d，其间填有两层厚度相同的各向同性均匀电介质，其介电常量分别为ε_1和ε_2．当电容器带电荷$\pm Q$时，在维持电荷不变下，将其中介电常量为ε_1的介质板抽出，试求外力所作的功．



解：可将上下两部分看作两个单独的电容器串联，两电容分别为

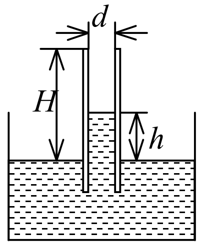
$$C_1 = \frac{2\varepsilon_1 S}{d}\ ,\ C_2 = \frac{2\varepsilon_2 S}{d}$$

串联后的等效电容为　　$C = \frac{2\varepsilon_1\varepsilon_2 S}{d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$

带电荷$\pm Q$时，电容器的电场能量为　$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{4\varepsilon_1\varepsilon_2 S}$

将ε_1的介质板抽去后，电容器的能量为　$W' = \frac{Q^2 d(\varepsilon_0 + \varepsilon_2)}{4\varepsilon_0\varepsilon_2 S}$

外力作功等于电势能增加，即 $A = \Delta W = W' - W = \dfrac{Q^2 d}{4S}\left(\dfrac{1}{\varepsilon_0} - \dfrac{1}{\varepsilon_1}\right)$



5. 如图所示，将两极板间距离为 d 的平行板电容器垂直地插入到密度为ρ、相对介电常量为ε_r的液体电介质中．如维持两极板之间的电势差 U 不变，试求液体上升的高度 h．

解：设极板宽度为 L，液体未上升时的电容为

$$C_0 = \varepsilon_0 HL / d$$

液体上升到 h 高度时的电容为

$$C = \varepsilon_0 \frac{(H-h)L}{d} + \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{hL}{d} = \left[1 + \frac{(\varepsilon_r - 1)h}{H}\right] C_0$$

在 U 不变下，液体上升后极板上增加的电荷为

$$\Delta Q = CU - C_0 U = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) hLU / d$$

电源作功 $A = \Delta QU = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) hLU^2 / d$

液体上升后增加的电能

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2} CU^2 - \frac{1}{2} C_0 U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) hLU^2 / d$$

液体上升后增加的重力势能 $\Delta W_2 = \dfrac{1}{2} L\rho g d h^2$

因 $A = \Delta W_1 + \Delta W_2$，可解出 $h = \dfrac{\varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) U^2}{\rho g d^2}$

思考题 1. 无限大均匀带电平面（面电荷密度为 σ）两侧场强为$E = \sigma / (2\varepsilon_0)$，而在静电平衡状态下，导体表面（该处表面面电荷密度为 σ）附近场强为$E = \sigma / \varepsilon_0$，为什么前者比后者小一半？

参考解答：

关键是题目中两个式中的 σ 不是一回事。下面为了讨论方便，我们把导体表面的面电荷密度改为 σ′，其附近的场强则写为$E = \sigma' / \varepsilon_0$.

对于无限大均匀带电平面(面电荷密度为 σ)，两侧场强为$E = \sigma / (2\varepsilon_0)$. 这里的 σ 是指带电平面单位面积上所带的电荷。

对于静电平衡状态下的导体，其表面附近的场强为$E = \sigma' / \varepsilon_0$.
这里的 σ′ 是指带电导体表面某处单位面积上所带的电荷。

如果无限大均匀带电平面是一个静电平衡状态下的无限大均匀带电导体板，则 σ 是此导体板的单位面积上(包括导体板的两个表面)所带的电荷，而 σ′ 仅是导体板的一个表面单位面积上所带的电荷。

在空间仅有此导体板（即导体板旁没有其他电荷和其他电场）的情形下，导体板的表面上电荷分布均匀，且有两表面上的面电荷密度相等。在此情况下两个面电荷密度间的关系为 σ =2 σ′ 。这样，题目中两个 E 式就统一了。

思考题 2：由极性分子组成的液态电介质，其相对介电常量在温度升高时是增大还是减小？

参考解答：

由极性分子组成的电介质（极性电介质）放在外电场中时，极性分子的固有电矩将沿外电场的方向取向而使电介质极化。由于极性分子还有无规则热运动存在，这种取向不可能完全整齐。

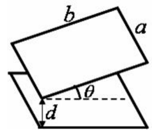
当电介质的温度升高时，极性分子的无规则热运动更加剧烈，取向更加不整齐，极化的效果更差。此情形下，电极化强度 $\vec{P}=\dfrac{\sum \vec{p}_i}{\Delta V}$ 将会比温度升高前减小。

在电介质中的电场 $\vec{E}$ 不太强时，各向同性电介质的 $\vec{P}$ 和 $\vec{E}$ 间的关系为

$$\vec{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\vec{E}\,.$$

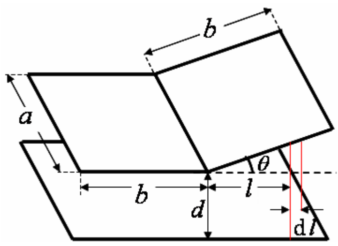
很明显，在同样的电场下，当温度升高后，相对介电常量 ε_r 要减小。

思考题 3：有一上下极板成 θ 角的非平行板电容器（长为 a，宽为 b），其电容如何计算？



参考解答：

设一平行板电容器是由长为 a，宽为 b 的两导体板构成，板间距为 d，则电容为 $C_0=\dfrac{\varepsilon ab}{d}$，若该电容器沿两极板的长度同一方向有 $\mathrm{d}x$ 的长度增量，则电容为 $C'=\dfrac{\varepsilon a(b+\mathrm{d}x)}{d}=C_0+\dfrac{\varepsilon a\,\mathrm{d}x}{d}$，在此基础上推广到如图所示的电容器，可以认为是在 C_0 的基础上，上极板沿与长度方向成 θ 角度连续增加到 b，下极板沿长度方向连续增加到 $b\cos\theta$ 构成，把该电容器看成是由两个电容器并联时，该电容器的电容为

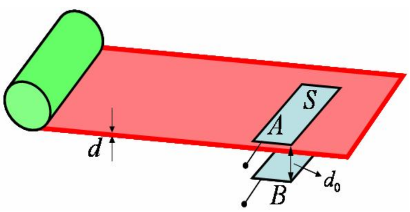


$$C'=C_0+\int_0^{b\cos\theta}\frac{\varepsilon a\,\mathrm{d}l}{d+l\tan\theta}=C_0+\frac{\varepsilon a}{\tan\theta}\ln\frac{d+b\sin\theta}{d}$$

即非平行板电容器的电容，

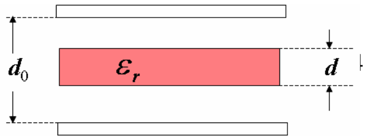
$$C=\frac{\varepsilon a}{\tan\theta}\ln\frac{d+b\sin\theta}{d}$$

思考题 4：为了实时检测纺织品、纸张等材料的厚度（待测材料可视作相对电容率为 ε_r 的电介质），通常在生产流水线上设置如图所示的传感装置，其中 A、B 为平板电容器的导体极板，S 为极板面积，d_0 为两极板间的距离。试说明检测原理，并推出直接测量电容 C 与间接测量厚度 d 之间的函数关系。如果要检测钢板等金属材料的厚度，结果又将如何？



参考解答：

设极板带电 $q=\sigma_0 S$，



两板电势差：$\Delta U = E_{无电介质}(d_0 - d) + E_{有电介质}d$

$$\Delta U = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}(d_0 - d) + \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}d$$

则 $$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r s}{d + \varepsilon_r (d_0 - d)}$$

介质的厚度为：$d = \dfrac{\varepsilon_r d_0 C - \varepsilon_0 \varepsilon_r S}{(\varepsilon_r - 1)C} = \dfrac{\varepsilon_r}{\varepsilon_r - 1}d_0 - \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{(\varepsilon_r - 1)C}$

实时地测量 A、B 间的电容量 C，根据上述关系式就可以间接地测出材料的厚度、通常智能化的仪表可以实时地显示出待测材料的厚度。

如果待测材料是金属导体，其 A、B 间等效电容与导体材料的厚度分别为：

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_0 - d}, \qquad d = d_0 - \frac{\varepsilon_0 S}{C}.$$