普通物理 A （2）练习册 参考解答

第 12 章 真空中的静电场

一、选择题

1(C)，2(A)，3(C)，4(D)，5(B)，

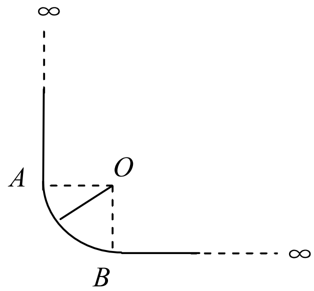
二、填空题

(1). 0，$\lambda/(2\varepsilon_0)$ ； (2). 0 ； (3). -2×10^3 V；

(4). $\dfrac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_a}-\dfrac{1}{r_b}\right)$； (5). 0，$pE\sin\alpha$ ；

三、计算题

1. 将一“无限长”带电细线弯成图示形状，设电荷均匀分布，电荷线密度为λ，四分之一圆弧 AB 的半径为 R，试求圆心 O 点的场强.

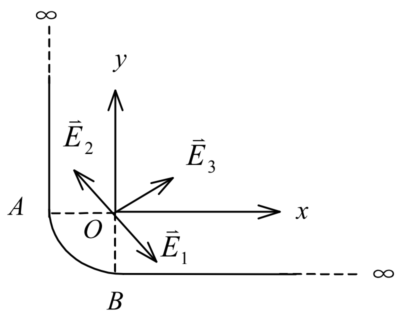


解：在 O 点建立坐标系如图所示.

半无限长直线 $A\infty$ 在 O 点产生的场强：

$$\vec{E}_1=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\vec{i}-\vec{j}\right)$$

半无限长直线 $B\infty$ 在 O 点产生的场强：



$$\vec{E}_2=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(-\vec{i}+\vec{j}\right)$$

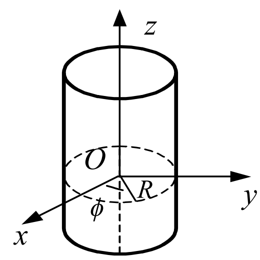
四分之一圆弧段在 O 点产生的场强：

$$\vec{E}_3=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$$

由场强叠加原理，O 点合场强为：

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\vec{i}+\vec{j}\right)$$

2. 一“无限长”圆柱面，其电荷面密度为： $\sigma=\sigma_0\cos\phi$ ，式中ϕ为半径 R 与 x 轴所夹的角，试求圆柱轴线上一点的场强.



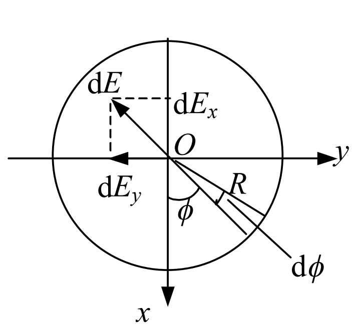
解：将柱面分成许多与轴线平行的细长条，每条可视为“无限长”均匀带电直线，其电荷线密度为

$\lambda=\sigma_0\cos\phi R\mathrm{d}\phi$,

它在 O 点产生的场强为：

$$\mathrm{d}E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}=\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$$

它沿 x、y 轴上的二个分量为：



$$\mathrm{d}E_x=-\mathrm{d}E\cos\phi=-\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi$$

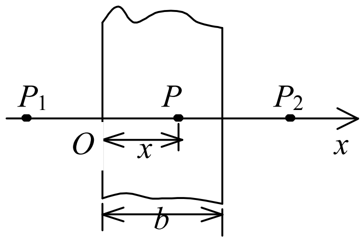
$$\mathrm{d}E_y=-\mathrm{d}E\sin\phi=\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\sin\phi\,\cos\phi\,\mathrm{d}\phi$$

积分：$E_x=-\int_0^{2\pi}\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi=\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}$

$$E_y=-\int_0^{2\pi}\frac{\sigma_0}{2\pi\varepsilon_0}\sin\phi\,\mathrm{d}(\sin\phi)=0$$

$\therefore\qquad \vec{E}=E_x\vec{i}=-\frac{\sigma_0}{2\varepsilon_0}\vec{i}$

3. 如图所示，一厚为 b 的“无限大”带电平板 ， 其电荷体密度分布为$\rho=kx\ (0\leqslant x\leqslant b)$，式中 k 为一正的常量．求：



(1) 平板外两侧任一点 P_1 和 P_2 处的电场强度大小；

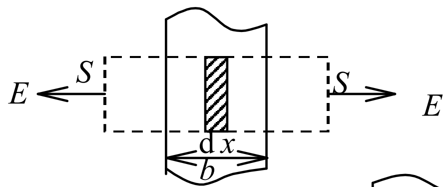
(2) 平板内任一点 P 处的电场强度；

(3) 场强为零的点在何处？

解： (1) 由对称分析知，平板外两侧场强大小处处相等、方向垂直于平面且背离平面．设场强大小为 E．

作一柱形高斯面垂直于平面．其底面大小为 S，如图所示．

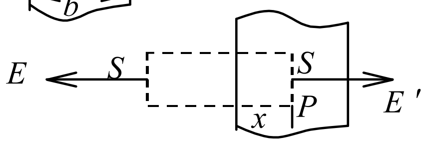
按高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum q/\varepsilon_0$ ，即



$$2SE=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^b \rho S\,\mathrm{d}x=\frac{kS}{\varepsilon_0}\int_0^b x\,\mathrm{d}x=\frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到 $\qquad E=kb^2/(4\varepsilon_0)\qquad$ (板外两侧)

(2) 过 P 点垂直平板作一柱形高斯面，底面为 S．设该处场强为 E'，如图所示．按高斯定理有

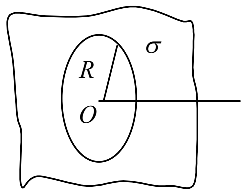


$$\left(E'+E\right)S=\frac{kS}{\varepsilon_0}\int_0^x xdx=\frac{kSb^2}{2\varepsilon_0}$$

得到 $\qquad E'=\frac{k}{2\varepsilon_0}\left(x^2-\frac{b^2}{2}\right)\qquad (0\leqslant x\leqslant b)$

(3) $E'=0$，必须是 $x^2-\frac{b^2}{2}=0$ ， 可得 $x=b/\sqrt{2}$

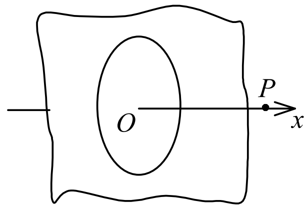
4. 一“无限大”平面，中部有一半径为 R 的圆孔，设平面上均匀带电，电荷面密度为σ．如图所示，试求通过小孔中心 O 并与平面垂直的直线上各点的场强和电势(选 O 点的电势为零)．



解：将题中的电荷分布看作为面密度为σ的大平面和面密度为$-\sigma$的圆盘叠加的结果．选 x 轴垂直于平面，坐标原点 O 在圆盘中心，大平面在 x 处产生的场强为

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0 |x|}\vec{i}$$

圆盘在该处的场强为



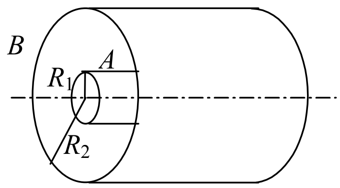
$$\vec{E}_2 = \frac{-\sigma x}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right)\vec{i}$$

$$\therefore \qquad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\sigma x}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}\vec{i}$$

该点电势为

$$U = \int_x^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(R - \sqrt{R^2 + x^2}\right)$$

5．一真空二极管，其主要构件是一个半径 R_1＝5×10^{-4} m 的圆柱形阴极 A 和一个套在阴极外的半径 R_2＝4.5×10^{-3} m 的同轴圆筒形阳极 B，如图所示．阳极电势比阴极高 300 V，忽略边缘效应. 求电子刚从阴极射出时所受的电场力. (基本电荷 e＝1.6×10^{-19} C)



解：与阴极同轴作半径为 r (R_1＜r＜R_2)的单位长度的圆柱形高斯面，设阴极上电荷线密度为 λ．按高斯定理有 $\quad 2\pi rE = \lambda/\varepsilon_0$

得到 $\qquad E = \lambda / (2\pi\varepsilon_0 r) \qquad (R_1 < r < R_2)$

方向沿半径指向轴线．两极之间电势差

$$U_A - U_B = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

得到 $\qquad \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} = \dfrac{U_B - U_A}{\ln(R_2/R_1)}$， $\qquad$ 所以 $\qquad E = \dfrac{U_B - U_A}{\ln(R_2/R_1)}\cdot\dfrac{1}{r}$

在阴极表面处电子受电场力的大小为

$$F = eE(R_1) = e\frac{U_B - U_A}{\mathrm{c}(R_2/R_1)}\cdot\frac{1}{R_1}$$

$$= 4.37\times10^{-14}\ \mathrm{N}$$

方向沿半径指向阳极.

四 研讨题

1. 真空中点电荷 q 的静电场场强大小为

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

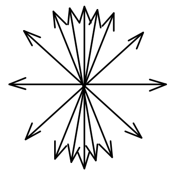
式中 r 为场点离点电荷的距离．当 $r\to0$ 时，$E\to\infty$，这一推论显然是没有物理意义的，应如何解释？

参考解答：

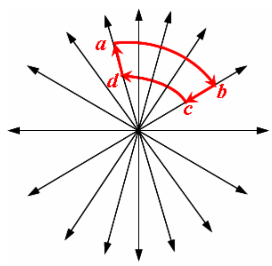
点电荷的场强公式仅适用于点电荷，当 $r\to0$ 时，任何带电体都不能视为点电荷，所以

点电荷场强公式已不适用.
若仍用此式求场强 E，其结论必然是错误的．当 $r\rightarrow 0$ 时，需要具体考虑带电体的大小和电荷分布，这样求得的 E 就有确定值.

2. 用静电场的环路定理证明电场线如图分布的电场不可能是静电场.



参考解答：



证：在电场中作如图所示的扇形环路 $abcda$．在 ab 和 cd 段场强方向与路径方向垂直．在 bc 和 da 段场强大小不相等（电力线疏密程度不同）而路径相等．因而

$$\oint \bar{E}\cdot \mathrm{d}\bar{l} = \int_d^a E\cdot \mathrm{d}\,l - \int_b^c E'\cdot \mathrm{d}\,l \neq 0$$

按静电场环路定理应有 $\oint \bar{E}\cdot \mathrm{d}\bar{l} = 0$，
此场不满足静电场环路定理，所以不可能是静电场.

3. 如果只知道电场中某点的场强，能否求出该点的电势？如果只知道电场中某点的电势，能否求出该点的场强？为什么？

参考解答：

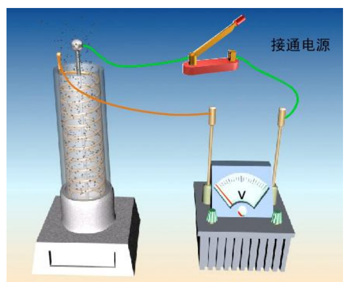
由电势的定义： $U = \int_{\text{场点}}^{\text{零势点}} \bar{E}\cdot \mathrm{d}\,l$

式中 $\bar{E}$ 为所选场点到零势点的积分路径上各点的场强，所以，如果只知道电场中某点的场强，而不知道路径上各点的场强表达式，不能求出该点的电势。

由场强与电势的关系： $\bar{E} = -\mathrm{grad}U$

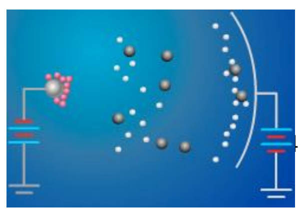
场中某点的电场强度是该点电势梯度的负值。如果只知道电场中某点的电势值，而不知道其表达式，就无法求出电势的空间变化率，也就不能求出该点的场强。

4. 从工厂的烟囱中冒出的滚滚浓烟中含有大量颗粒状粉尘，它们严重污染了环境，影响到作物的生长和人类的健康。静电除尘是被人们公认的高效可靠的除尘技术。先在实验室内模拟一下管式静电除尘器除尘的全过程，在模拟烟囱内，可以看到，有烟尘从“烟囱”上飘出。加上电源，烟囱上面的烟尘不见了。如果撤去电源，烟尘又出现在我们眼前。请考虑如何计算出实验室管式静电除尘器的工作电压，即当工作电压达到什么数量级时，可以实现良好的静电除尘效果。

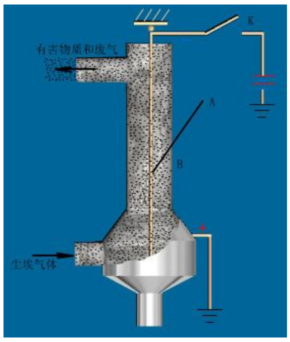


参考解答：

先来看看静电除尘装置的结构：在烟囱的轴线上，悬置了一根导线，称之谓电晕线；在烟囱的四周设置了一个金属线圈，我们称它为集电极。直流高压电源的正极接在线圈上，负极接在电晕线上，如右上图所示。可以看出，接通电源以后，集电极与电晕线之间就建立了一个非均匀电场，电晕线周围电场最大。 改变直流高压电源的电压值，就可以改变电晕线周围的电场强度。当实际电场强度与空



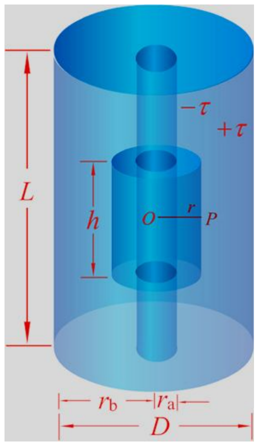
气的击穿电场 $3\times10^{3}\ \mathrm{Vmm^{-1}}$ 相近时空气发生电离，形成大量的正离子和自由电子。 自由电子随电场向正极飘移，在飘移的过程中和尘埃中的中性分子或颗粒发生碰撞，这些粉尘颗粒吸附电子以后就成了荷电粒子，这样就使原来中性的尘埃带上了负电。在电场的作用下，这些带负电的尘埃颗粒继续向正极运动，并最后附着在集电极上。（集电极可以是金属线圈，也可以是金属圆桶壁）当尘埃积聚到一定程度时，通过振动装置，尘埃颗粒就落入灰斗中。 这种结构也称管式静电除尘器。 如右中图所示。



对管式静电除尘器中的电压设置，我们可以等价于同轴电缆来计算。如右下图所示，r_a 与 r_b 分别表示电晕极与集电极的半径，L 及 D 分别表示圆筒高度及直径。一般 L 为 3-5m，D 为 200-300mm，故 $L>>D$，此时电晕线外的电场可以认为是无限长带电圆柱面的电场。 设单位长度的圆柱面带电荷为λ。 用静电场高斯定理求出距轴线任意距离 r 处点 P 的场强为：

$$\vec{E}=-\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\hat{r}\quad ----(1)$$

式中 $\hat{r}$ 为沿径矢的单位矢量。



内外两极间电压 U 与电场强度 E 之关系为

$$U=\int_{r_a}^{r_b}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\quad ----(2)$$

，将式(1)代入式(2)，

积分后得: $\lambda=-\dfrac{2\pi\varepsilon_0 U}{\ln\dfrac{r_b}{r_a}}$， 故 $E=\dfrac{U}{r\ln\dfrac{r_b}{r_a}}$.

由于电晕线附近的电场强度最大，使它达到空气电离的最大电场强度 E_m 时，就可获得高压电源必须具备的电压

$$U=E_m\cdot r_a\ln\frac{r_b}{r_a}$$

代入空气的击穿电场，并取一组实测参数如下：

$E_m=3\times10^{6}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}, r=r_a=0.5\times10^{-2}\ \mathrm{m}, r_b=0.15\mathrm{m}$，计算结果 $U=5.1\times10^{4}\ \mathrm{V}$.

若施加电压 U 低于临界值，则没有击穿电流，实现不了除尘的目的。也就是说，在这样尺寸的除尘器中，通常当电压达到 10^5V 的数量级时，就可以实现良好的静电除尘效果。静电除尘器除了上述的管式结构外还有其它的结构形式，如板式结构等。可以参阅有关资料，仿上计算，也可以自行独立设计一种新型结构的静电除尘器。