例 1. 对方程$e^x+x=2$，建立求根近似值的迭代格式．要求（1）写出隔根区间；（2）给出迭代格式收敛的初值x_0的范围，并证明迭代格式的收敛性．

解（1）设$f(x)=e^x+x-2$.

由$f(0)<0$, $f(0.8)>0$，$f'(x)=e^x+1>0$，得隔根区间为[0,0.8].

（2）将$e^x+x=2$等价变形为$x=ln(2-x)$，取$\phi(x)=ln(2-x)$.

则当$0\le x\le 0.8$时，有$0<\phi(x)<0.8$，且$\left|\phi'(x)\right|=\left|\frac{1}{x-2}\right|\le\frac{1}{1.2}<1$，故

$$x_{n+1}=ln(2-x_n),\ n=0,1,\cdots$$

对$\forall x_0\in[0\ ,\rightleftarrows\ 0.8]$均收敛.

例 2. 对于迭代函数$\phi(x)=x+c(x^2-3)$，试讨论

1．当 c 满足什么条件时，$x_{k+1}=\phi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}$收敛于$\sqrt{3}$；

2．c 取何值时，收敛速度最快？

3．按 2 中选取的 c 计算$\phi(x)$的不动点，要求取初值$x_0=1.7$，当$|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$时结束迭代（小数点后至少保留六位）.

解 1． 设$\alpha=\sqrt{3}$，显然$\phi(\alpha)=\alpha$.

由 $\phi(x)=x+c(x^2-3)$，得 $\phi'(x)=1+2cx$.

令$\left|\phi'(\alpha)\right|<1$，即 $\left|1+2c\sqrt{3}\right|<1$，解得$\frac{-1}{\sqrt{3}}<c<0$.

故当 $\frac{-1}{\sqrt{3}}<c<0$时，$x_{k+1}=\phi(x_k)$产生的序列$\{x_k\}$收敛于$\sqrt{3}$.

2．若$\phi'(\alpha)=0$，则迭代至少可达到二阶收敛.

令$\phi'(\alpha)=1+2c\alpha=0$，解得$c=-\frac{1}{2\alpha}$. 即$c=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$时迭代收敛最快.

3. 由 $\phi(x)=x+c(x^2-3)$得迭代格式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{1}{2\sqrt{3}}(x_k^2-3)$, $k=0,1,2,\cdots$

取$x_0=1.7$，计算得 $x_1=1.7317542648$，$x_2=1.7320507822$，$x_3=1.7320508076$

由于$|x_3-x_2|<10^{-6}$, 故取$\alpha\approx x_3=1.7320508076$.

例 3. 当常数 c 取适当值时，两条抛物线$y=x^2+x+c$与$y=2\sqrt{x}$将在某点$(\bar{x},\bar{y})$相切．试用 Newton 迭代格式求切点横坐标$\bar{x}$的近似值x_n，要求取初值$x_0=0.3$，讨论 Newton 迭代格式在初始点附近的收敛性，并当满足误差条件$|x_n-x_{n-1}|<10^{-4}$时终止计算.

解: 1）两条曲线$y_1(x)$、$y_2(x)$相切，则切线斜率$y_1'(x)=2x+1$与$y_2'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$相同，

故切点的横坐标$\bar{x}$满足$2x+1=\frac{1}{\sqrt{x}}$，即$4x^3+4x^2+x-1=0$.

设$f(x)=4x^3+4x^2+x-1$,则在区间[0.3, 0.4]内,$f'(x)=12x^2+8x+1>0$.

注意$f(0.3)=-0.232$，$f(0.4)=0.296$，知$f(\bar{x})$在[0.3, 0.4]内有唯一零点.

又由于在[0.3, 0.4]内

$$f'(x)=12x^2+8x+1\neq 0,\quad f''(x)=24x+8\neq 0$$

$$\left|\frac{f(0.3)}{f'(0.3)}\right|\leq 0.4-0.3\ ,\ \left|\frac{f(0.4)}{f'(0.4)}\right|\leq 0.4-0.3$$

故当初值$x_0\in[0.3,\ 0.4]$时，Newton 迭代收敛.

（注意：此处用的是另一种牛顿迭代收敛定理，按教材的上的非局部收敛定理证明如下：由于$f'(x)=12x^2+8x+1>0$. $f''(x)=24x+8>0, x\in[0.3,0.4]$. 取$x_0=0.3$时，尽管有$f(0.3)f''(0.3)<0$, 但迭代一步后有$f(x_1)f''(x_1)>0$,故牛顿迭代法收敛）

（2）Newton 迭代格式为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{4x_n^3+4x_n^2+x_n-1}{12x_n^2+8x_n+1},\qquad n=0,1,2,\cdots$$

取$x_0=0.3$，计算得$x_1=0.351785714$，$x_2=0.347834854$，$x_3=0.347810385$.

由于$|x_3-x_2|\approx 0.24468\times 10^{-4}<10^{-4}$，得切点的横坐标 $\bar{x}\approx 0.3478$.

例 4. 设$x=\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}$. 试写出求$x$的迭代格式，讨论该格式的收敛性，并求$x$的值.

解: （1）设

$$x_0=0\ ,\ x_1=\frac{1}{2}\ ,\ x_2=\frac{1}{2+\frac{1}{2}}\ ,\ \cdots$$

则可建立迭代格式

$$x_{k+1}=\frac{1}{2+x_k},\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

且$x=\lim\limits_{k\to\infty}x_{k+1}$.

（2）收敛性讨论：设$\phi(x)=\frac{1}{2+x}$. 显然$\phi(x)$在[0 , 1]上满足

封闭性：当$0\leq x\leq 1$时，$0\leq\phi(x)\leq 1$；

压缩性：当$0\leq x\leq 1$时，$|\phi'(x)|=\left|-\frac{1}{(2+x)^2}\right|\leq\frac{1}{2}<1$.

故对任意初值$x_0\in[0\ ,\ 1]$，迭代格式$x_{k+1}=\frac{1}{2+x_k}$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$必收敛到[0 , 1]上的惟一不动点x.

（3）因为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$，故有$x=\frac{1}{2+x}$，解之得

$$x=\sqrt{2}-1\quad（-\sqrt{2}-1\text{不合题意，舍去}）$$

附录：几种常见的计算结果精度要求形式

1．当满足误差条件$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-4}$时终止计算.

2．计算结果精确到小数点后第 4 位。

说明：该形式等价于 $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2} \times 10^{-4}$

3．结果保留 4 位有效数字

说明：这种情况最复杂，需要判断结果的具体形式，

当结果写成：$0.x_1 x_2 x_3 x_4 \times 10^{\mathrm{m}}$,

则计算停止的条件为：$|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2} \times 10^{m-4}$

另外，中间计算结果至少比最终要求的满足精度的结果多一位小数。