例 1 只要函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且有零点 α，就可以用反插值法求方程 $f(x)=0$ 在该区间上根的近似值．该叙述_______（正确、错误）;

例 2 设关于节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的 Lagrange 插值基函数为 $\{l_i(x)\}_{i=0}^n$，则有

$$\sum_{i=0}^{n} x_i^3 l_i(3.5) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_ \quad (n \geq 3);$$

例 3 设函数 $f(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$，求差商 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]$ 之值，其中 $x_0,x_1,\cdots,x_k$ 是互异节点．

解 (1）当 $k \leq n$ 时，$f(x_j)=0$，$j=0,1,\cdots,k$.

根据公式 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{j=0}^{k}\frac{f(x_j)}{\omega'_{n+1}(x_j)}$，故有 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=0$；

（2）当 $k \geq n+1$ 时，考虑差商与导数的关系式 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}$.

如果 $k=n+1$，则 $f^{(k)}(\xi)=(n+1)!$，故此时 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=1$；

如果 $k>n+1$，则 $f^{(k)}(\xi)=0$，故此时 $f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=0$.

例 4 设关于互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^n$ 的 Lagrange 插值基函数组为 $\{l_i(x)\}_{i=0}^n$. 试证明对不超过 n 的非负整数 k 有如下恒等式成立

$$x_0^k l_0(x)+x_1^k l_1(x)+\cdots+x_n^k l_n(x)\equiv x^k$$

证明 由 n 次插值公式的插值余项

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

知，当被插值函数是次数不超过 n 的多项式时，有插值余项 $R_n(x)\equiv 0$，即插值函数与被插值函数恒等. 因而需要证明的恒等式成立.

例 5 构造三次多项式 $p_3(x)$，使曲线 $y=p_3(x)$ 在 $x=0$ 与 $x=\pi/2$ 处与曲线 $y=\cos x$ 具有相同的切线，并写出 $p_3(x)$ 近似 $\cos x$ 的截断误差.

解 依据题设知，需要构造函数 $f(x)=\cos x$ 的三次 Hermite 插值多项式，使之满足如下插值条件

$$p_3(0)=f(0)=\cos 0=1,\quad p_3(\pi/2)=p(\pi/2)=\cos(\pi/2)=0$$

$$p_3'(0)=f'(0)=(\cos x)'\big|_{x=0}=0,\quad p_3'(\pi/2)=f'(\pi/2)=(\cos x)'\big|_{x=\pi/2}=-1$$

利用 Hermite 插值多项式的公式有

$$p_3(x)=f(x_0)\left(1+2\frac{x_0-x}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+f(x_1)\left(1+2\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+f'(x_0)(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+f'(x_1)(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

将节点 $x_0=0$， $x_1=\pi/2$ 以及相关数据代入，整理后得

$$p_3(x)=(1+\frac{4}{\pi}x)(\frac{2}{\pi}x-1)^2-(x-\frac{\pi}{2})\frac{4x^2}{\pi^2}$$

$p_3(x)$ 近似 $\cos x$ 的插值余项为

$$R_3(x)=\frac{\cos\xi}{4!}x^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2$$

式中 ξ 依赖于 x 、0 和 $\frac{\pi}{2}$.

例 6 已知三阶连续可导函数 $y=f(x)$ 的如下数据

x_i	**0.25**	**1.0**
$f(x_i)$	**0.50**	**1.0**
$f'(x_i)$		**0.5**

（1）试求满足插值条件 $p_2(x_i)=f(x_i)$， $p_2'(1.0)=f'(1.0)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$，并推导截断误差 $R(x)=f(x)-p_2(x)$ 的导数型表达式.

（2）在区间[0，1]上用分段二次插值多项式 $p_2^{(h)}(x)$ 来近似 $f(x)$ 时，为了使截断误差 $\left|f(x)-p_2^{(h)}(x)\right|\le 10^{-6}$，问当 $\left|f'''(x)\right|\le 2$ 时至少需要用到 $f(x)$ 在多少个节点处的值？

解 （1） 以已知函数值为插值条件的一次插值多项式为

$$N_1(x)=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{4}-1}(x-\frac{1}{4})=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}(x-\frac{1}{4})=\frac{1}{3}(2x+1)$$

设待求插值函数为 $p_2(x)=N_1(x)+A(x-\frac{1}{4})(x-1)$． 由 $p_2'(1)=\frac{1}{2}$， 得参数

$$A=-\frac{2}{9}.\ \text{故}\ p_2(x)=\frac{1}{3}(2x+1)-\frac{2}{9}(x-\frac{1}{4})(x-1)=-\frac{2}{9}x^2+\frac{17}{18}x+\frac{5}{18}$$

$$=-0.2222x^2+0.9444x+0.2778$$

设余项

$$R(x)=f(x)-p_2(x)=k(x)(x-\frac{1}{4})(x-1)^2$$

当 $x\in(0.25\,,1)$ 时，构造如下关于 t 的函数

$$g(t)=f(t)-p_2(t)-k(x)(t-\frac{1}{4})(t-1)^2$$

函数 $g(t)$ 充分光滑，且有如下零点 $g(0.25)=g(1)=g(x)=0$， $g'(1)=0$.

在互异节点 0.25，1 和 x 形成的两个区间上反复使用 Rolle 定理，则有

$$g^{(3)}(\xi)=0，\ \xi\in(0.25,1)$$

从而解得 $k(x)=\dfrac{f^{(3)}(\xi)}{3!}$，于是插值余项为

$$R(x)=f(x)-p_2(x)=\frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(x-\frac{1}{4})(x-1)^2，\ \xi\in(0.25\,,1)\,.$$

（2） 设在[0,1]上，用分段二次多项式 $p_2^{(h)}(x)$ 近似 $f(x)$ 的 Lagrange 插值余项为 $R_2^{(h)}(x)$.

对任意 $x\in[x_i,x_{i+1}]$，中点记为 $x_{i+\frac{1}{2}}$， 则在子区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的插值余项为

$$R_2^{(i)}(x)=f(x)-L_2^{(i)}(x)=\frac{f'''(\xi_i)}{3!}(x-x_i)(x-x_{i+\frac{1}{2}})(x-x_{i+1}),\quad \xi_i\in(x_i,x_{i+1})$$

设 $h=x_{i+1}-x_i$， $x=x_{i+\frac{1}{2}}+s\dfrac{h}{2}\quad(-1\le s\le 1)$，则

$$R_2^{(i)}(x)=\frac{f'''(\xi_i)}{3!}(s+1)s(s-1)\frac{h^3}{8},\quad x_i<\xi_i<x_{i+1},-1\le s\le 1$$

又设 $M_3=\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f'''(x)\right|$，则 $\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\dfrac{M_3h^3}{48}\max\limits_{-1\le s\le 1}\left|(s+1)s(s-1)\right|$. 易知

$$\max_{-1\le s\le 1}\left|(s+1)s(s-1)\right|=\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

故 $\left|R_2^{(i)}(x)\right|\le\dfrac{M_3h^3}{48}\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$. 由于这一估计与 i 无关，故对 $\forall x\in[0,1]$，有

$$\left|R_2^{(h)}(x)\right|\le\frac{M_3}{48}h^3\max_{-1\le s\le 1}\left|s(s-1)(s+1)\right|=\frac{M_3}{48}h^3\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

当 $\left|f'''(x)\right|\le 2$ 时，即得

$$\left|f(x)-p_2^{(h)}(x)\right|\le\ \frac{2h^3}{48}\frac{2\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{3}h^3}{108}$$

要使误差不超过 $\varepsilon=10^{-6}$，只需 $\dfrac{\sqrt{3}h^3}{108}\le\varepsilon$，即 $\dfrac{(b-a)^3}{n^3}\dfrac{\sqrt{3}}{108}\le\varepsilon$，解得 $n\ge 25.2$.

取 $n=26$，则所需节点数 $N=2n+1\ge 53$. 即至少需要用到 53 个节点处的值.

例 7 用分段二次插值公式计算 $[0,1]$ 区间上非节点处的函数值 e^x 的近似值，要使误差不超过 10^{-6}，需要使用多少个等分节点处的函数值.

解 记函数 e^x 在区间 $[0,1]$ 上以 h 为步长的等距节点分段二次插值函数为 $L_h(x)$，余项为 $R_h(x)$. 对任意 $x\in[x_{i-1},x_i]$，中点记为 $x_{i-1/2}$，有误差余项

$$R_h(x)=R_h^{(i)}(x)\overset{\Delta}{=}\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_{i-1})(x-x_{i-1/2})(x-x_i)$$

$$=\frac{e^{\xi}}{6}(s-1)s(s+1)\frac{h^3}{8}\qquad \xi\in(x_{i-1},x_i)$$

式中 $x=x_{i-\frac{1}{2}}+s\frac{h}{2}\quad(-1\le s\le 1)$，近而有

$$|R_h(x)|\le\frac{e}{48}h^3\max_{-1\le s\le 1}|s(s-1)(s+1)|=\frac{e}{48}h^3\frac{2\sqrt{3}}{9}$$

要使误差不超过10^{-6}，只需

$$\frac{e}{48}h^3\frac{2\sqrt{3}}{9}\le 10^{-6}$$

即
$$\frac{e}{48}\left(\frac{1-0}{n}\right)^3\frac{2\sqrt{3}}{9}\le 10^{-6}$$

解得 $n=27.934$，取 $n=28$，所需的节点数为 $N=2n+1=57$.

例 8 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(a)=f(b)=0$. 证明如下不等式成立

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

证明　由已知条件 $f(a)=f(b)=0$ 知，函数 $f(x)$ 关于节点 a 和 b 的不超过 1 次的 Lagrange 插值函数 $L_1(x)\equiv 0$，它的插值余项

$$R_1(x)=f(x)-L_1(x)=f(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$$

式中当 $x\in[a,b]$ 时，$\xi\in(a,b)$.
进而有

$$\max_{a\le x\le b}|f(x)|\le\max_{a\le x\le b}\left|\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|\max_{a\le x\le b}|(x-a)(x-b)|\le\frac{(b-a)^2}{8}\max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

例 9 设有函数 $y=f(x)$ 的如下数据：

x_i	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$f''(x_i)$
0	1	1	1
1	1	1	

试建立满足插值条件的不超过 4 次的插值多项式 $p(x)$，并写出插值余项.

解: 建立带重节点的差商表

1	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0	1				
0	1	$f'(0)=1$			
0	1	$f'(0)=1$	$\frac{1}{2!}f''(0)=\frac{1}{2}$		
1	1	0	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{-\frac{3}{2}}$	
1	1	$f'(1)=1$	1	2	$\mathbf{\frac{7}{2}}$

由 Newton 插值公式得

$$
\begin{aligned}
p(x) = 1 + 1\cdot(x-0) & \\
& +\frac{1}{2}\cdot(x-0)(x-0) \\
& -\frac{3}{2}\cdot(x-0)(x-0)(x-0) \\
& +\frac{7}{2}(x-0)(x-0)(x-0)(x-1) \\
& = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - 5x^3 + \frac{7}{2}x^4
\end{aligned}
$$

其插值余项为: $f(x)-p(x)=\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!}x^3(x-1)^2$