例 1: 试用三角分解求解线性方程组

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \\ 6 & -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 18 \\ 5 \end{bmatrix}$$

解 由矩阵 Doolittle 分解的紧凑记录形式有

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 4 & 18 \\ 6 & -3 & 5 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & 6 \\ 2 & 3 & 0 & 6 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

回代求解得 $x_3=\dfrac{-1}{-1}=1$， $x_2=\dfrac{1}{3}(6-0\cdot x_3)=2$， $x_1=\dfrac{1}{2}(6-2x_3-x_2)=1$.

例 2: 若简单迭代格式 $\mathbf{x}^{(k+1)}=\mathbf{B}\mathbf{x}^{(k)}+\mathbf{f}$ 中迭代矩阵的谱半径大于 1，则对任意的初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}$（解向量除外），该迭代格式均发散. 该论断________（正确、**错误**）.

例 3 对于方程组 $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -12 \\ 20 \\ 3 \end{bmatrix}$,

1) 写出求解上述方程组的雅可比对应的高斯赛德尔迭代法 ；

2) 讨论该高斯赛德尔迭代法收敛性；

3) 取初始向量 $\mathrm{x}=(-3.9,2.9,1.9)^T$，用该方法求近似解 $\mathbf{x}^{(k+1)}$，使 $\max\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right|<0.05$。

解 1) 写出迭代格式

$$\begin{cases} x_1^{k+1}=-\dfrac{2}{5}x_2^k-\dfrac{1}{5}x_3^k-\dfrac{12}{5} \\ x_2^{k+1}=\dfrac{1}{4}x_1^{k+1}-\dfrac{2}{4}x_3^k+5 \\ x_3^{k+1}=-\dfrac{1}{5}x_1^{k+1}+\dfrac{3}{10}x_2^{k+1}+\dfrac{3}{10} \end{cases}$$

2) 收敛性分析

由于系数矩阵严格对角占优所以 Jacobi 对应的 G_S 方法收敛。

3) 迭代计算

k	$x^{(k)}$	$\max\left\|x_i^{(k)}-x_i^{(k-1)}\right\|$
0	[-3.9　2.9　1.9]	

1	[-3.9400,3.0650, 2.0075]	0.1650
2	[-4.0275, 2.9894,2.0023]	0.0875
3	[-3.9962,2.9998,1.9992]	0.0313

例 4. 设有方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

证明解此方程组的 Jacobi 方法对任意初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}$ 收敛，而相应的 Gauss-Seidel 方法不是对 任意 $\mathbf{x}^{(0)}$ 收敛.取 $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)^T$，用 Jacobi 方法进行求解，要求 $\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\|_\infty \le 10^{-5}$.

证明 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_J = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{B}_J\right| = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3$$

所以 $\mathbf{B}_J$ 的特征值为 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$，谱半径 $\rho(\mathbf{B}_J) = 0 < 1$，故 Jacobi 迭代法对任意初始向量都收敛

Gauss-Seidel 迭代法的迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_s = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

其特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 2$，谱半径 $\rho(\mathbf{B}_s) = 2 > 1$，所以 Gauss-Seidel 迭代法不是对任意初始向量都收敛.

Jacobi 迭代法的计算公式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -3 - 2x_2^{(k)} + 2x_3^{(k)} \\ x_2^{(k+1)} = 1 - x_1^{(k)} - x_3^{(k)} \\ x_3^{(k+1)} = 1 - 2x_1^{(k)} - 2x_2^{(k)} \end{cases}$$

当 $\mathbf{x}^{(0)} = (0\,,0\,,0)^T$ 时可算得

$$\mathbf{x}^{(1)} = (-3\,,1\,,1)^T$$

$$\mathbf{x}^{(2)} = (-3\,,3\,,5)^T$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = (1\,,-1\,,1)^T$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = (1\,,-1\,,1)^T$$

显然 $\mathbf{x}^{(3)} = (1\,,-1\,,1)^T$ 已满足精度要求，它恰好是精确解.

例 5. 设有方程组

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

证明 Jacobi 方法求解此方程组不是对任意初始向量都收敛，而相应的 Gauss-Seidel 方法对任意初始向量都收敛.

证明 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_J = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda\mathbf{I} - \mathbf{B}_J\right| = \left(\lambda^2 + \frac{5}{4}\right)\lambda$$

故谱半径 $\rho(\mathbf{B}_J) = \frac{\sqrt{5}}{2} > 1$，所以 Jacobi 迭代法不是对任意初始向量都收敛.

Gauss-Seide 迭代法的迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_s = -(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}_s\right| = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda+\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \lambda+\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+\frac{1}{2})^2$$

谱半径 $\rho(\mathbf{B}_s)=\frac{1}{2}<1$，故 Gauss-Seide 迭代法对任意初始向量都收敛.

例 6: 对系数矩阵严格对角占优的如下三对角方程组

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

试用 Doolittle 三角分解法导出求其解的追赶法公式.

解　令

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ l_2 & 1 & & & \\ & l_3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & & \\ & u_2 & c_2 & & \\ & & u_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & & u_n \end{bmatrix}$$

比较等式两端第 1 行第 1 列的元素，得 $b_1=u_1$.

比较等式两端第 i 行第 i–1 列的元素，得 $a_i=l_iu_{i-1}$，

比较等式两端第 i 行第 i 列的元素，得 $b_i=l_ic_{i-1}+u_i$，从而有

$$\begin{cases} u_1=b_1 \\ l_i=\dfrac{a_i}{u_{i-1}} \\ u_i=b_i-l_ic_{i-1} \end{cases}, \quad i=2,3,\cdots,n$$

$\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 等价于 $\mathbf{LUx}=\mathbf{b}$. 令 $\mathbf{y}=\mathbf{Ux}$，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 等价于 $\mathbf{Ly}=\mathbf{b}$ 及 $\mathbf{Ux}=\mathbf{y}$.

由 $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & l_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$， 得 $\begin{cases} y_1=b_1 \\ y_i=b_i-l_iy_{i-1}, \quad i=2,3,\cdots,n \end{cases}$.

由 $\begin{bmatrix} u_1 & c_1 & & \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & c_{n-1} \\ & & & u_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$， 得 $\begin{cases} x_n = y_n / u_n \\ x_i = (y_i - c_i x_{i+1}) / a_i\,, \quad i = n-1,\cdots,2,1 \end{cases}$.

例 7: 设线性方程组的系数矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 10 & a & 0 \\ b & 10 & b \\ 0 & a & 5 \end{bmatrix}$.

试给出 Jacobi 迭代格式与相应的 Gauss-seidel 迭代格式对于任意初始向量都收敛的充要条件.

解 Jacobi 迭代格式的迭代矩阵为 $\mathbf{B}_J = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L}+\mathbf{U})$，即

$$\mathbf{B}_J = -\begin{bmatrix} 10 & & \\ & 10 & \\ & & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} & a & \\ b & & b \\ & a & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ -\frac{b}{10} & 0 & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a}{5} & 0 \end{bmatrix}$$

由 $\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}_J\right| = \lambda(\lambda^2 - \frac{3ab}{100})$，得 $\rho(B_J) = \frac{\sqrt{3|ab|}}{10}$.

所以，Jacobi 迭代格式关于任意初始向量收敛的充要条件为 $|ab| < \frac{100}{3}$.

Gauss-seidel 迭代格式的迭代矩阵为 $\mathbf{B}_S = -(\mathbf{D}+\mathbf{L})^{-1}\mathbf{U}$，即

$$\mathbf{B}_s = -\begin{bmatrix} 10 & & \\ b & 10 & \\ & a & 5 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{100} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{ab}{500} & -\frac{a}{50} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a}{10} & 0 \\ 0 & \frac{ab}{100} & -\frac{b}{10} \\ 0 & -\frac{a^2 b}{500} & \frac{ab}{50} \end{bmatrix}$$

由 $\left|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}_S\right| = \lambda[(\lambda - \frac{ab}{100})(\lambda - \frac{ab}{50}) - \frac{a^2b^2}{5000}] = \lambda^2(\lambda - \frac{3ab}{100})$，得 $\rho(\mathbf{B}_S) = \frac{3|ab|}{100}$.

所以，Gauss-seidel 迭代格式关于任意初始向量收敛的充要条件为 $|ab| < \frac{100}{3}$.

例 8: 设有线性方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

（1）讨论松弛因子$\omega = 0.8$时，用超松弛迭代(SOR)法求解该方程组的收敛性；

（2）取初始向量$\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0.5, 0)^T$，求该方程组的近似解$\mathbf{x}^{(k+1)}$，要求

$\left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\right\|_\infty \le 10^{-3}$.

解 （1） 因为方程组系数矩阵的各阶顺序主子式 Δ_1= 4，Δ_2= 15，Δ_3= 56 均大于零，

故系数矩阵为对称正定矩阵．所以$0 < \omega < 2$时，SOR 迭代收敛．

（2） SOR 迭代求解上述方程组之迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = x_1^{(k)} + \dfrac{\omega}{4}(-4x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + 1) \\ x_2^{(k+1)} = x_2^{(k)} + \dfrac{\omega}{4}(x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k)} + x_3^{(k)} - 4) \qquad k = 0,1,2,\cdots \\ x_3^{(k+1)} = x_3^{(k)} + \dfrac{\omega}{4}(x_2^{(k+1)} - 4x_3^{(k)} + 3) \end{cases}$$

取初始向量 $\mathbf{x}^{(0)}$ = (0, 0.5, 0)^T，用 SOR 迭代求解方程组之计算过程列表如下

n	$x_1^{(n)}$	$x_2^{(n)}$	$x_3^{(n)}$
0	0	0.5	0
1	0.3	–0.64	0.472
2	0.132	–0.8072	0.53296
3	0.06496	–0.841856	0.5382208
4	0.0446208	–0.85180288	0.537283584
5	0.038563584	–0.855191142	0.536418488
6	0.036674488	–0.856419633	0.535999771
7	0.036050971	–0.856873778	0.535825198

因$\left\|\mathbf{x}^{(7)} - \mathbf{x}^{(6)}\right\|_\infty \approx 0.624 \times 10^{-3}$，已满足误差要求，故近似解为

$$x_1^* = 0.0361，\ x_2^* = -0.8569，\ x_3^* = 0.5358$$