1. 确定下列求积公式中的特定参数，使其代数精度尽量高，并指明所构造出的求积公式所具有的代数精度：

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx \approx A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

解： 分别令 $f(x)=1,x,x^2$，则有

$$\begin{cases} 2h = A_{-1} + A_0 + A_1 \\ 0 = -A_{-1}h + A_1 h \\ \dfrac{2}{3}h^3 = h^2 A_{-1} + h^2 A_1 \end{cases}$$

从而解得 $\begin{cases} A_0 = \dfrac{4}{3}h \\ A_1 = \dfrac{1}{3}h \\ A_{-1} = \dfrac{1}{3}h \end{cases}$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^3 dx = 0 \qquad A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = 0$$

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$$

令 $f(x)=x^4$，则

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \int_{-h}^{h} x^4 dx = \frac{2}{5}h^5$$

$$A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h) = \frac{2}{3}h^5$$

此时， $\int_{-h}^{h} f(x)dx \neq A_{-1} f(-h) + A_0 f(0) + A_1 f(h)$

故所给求积公式具有 3 次代数精度。

2.推导下列三种矩形求积公式：

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2;$$
$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$$

解：(1) $\because f(x)=f(a)+f'(\eta)(x-a),\eta\in(a,b)$

两边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+f'(\eta)\int_a^b(x-a)dx$$

即 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(a)+\frac{f'(\eta)}{2}(b-a)^2$

(2) $\because f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{2}(x-\frac{a+b}{2})^2,\eta\in(a,b)$

两连边同时在$[a,b]$上积分，得

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})dx+\frac{f''(\eta)}{2}\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx$$

即 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{f''(\eta)}{24}(b-a)^3;$

3. 若用复化辛普生公式计算积分$I=\int_0^1 e^x dx$，问区间$[0,1]$取多少个等距节点才能使截断误差不超过$\frac{1}{2}\times10^{-5}$？

解：采用复化辛普生公式时，余项为

$$R_n(f)=-\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4 f^{(4)}(\eta),\eta\in(a,b)$$

$\because f(x)=e^x,$

$\therefore f^{(4)}(x)=e^x,$

$\therefore |R_n(f)|=-\frac{1}{2880}h^4\,|\,f^{(4)}(\eta)|\le\frac{e}{2880}h^4$

若$|R_n(f)|\le\frac{1}{2}\times10^{-5}$，则 $h^4\le\frac{1440}{e}\times10^{-5}$

当对区间[0,1]进行等分时 $n=\frac{1}{h}$

故有 $n \geq (\frac{1440}{e} \times 10^5)^{\frac{1}{4}} = 3.71$

因此，取 9 个节点可以满足误差要求。

4．分别用复化梯形公式、复化辛浦生公式计算积分 $\int_1^2 \ln x dx$ 的近似值（最终计算结果中小数点后保留 5 位）。

解：取 7 个等距节点（包括区间端点），将函数值列表如下：

x	1	7/6	8/6	9/6	10/6	11/6	2
$f(x)$	0	0.15415	0.28768	0.40547	0.51083	0.60614	0.69315

用复化梯形公式计算：

T_6=1/2×1/6[0+2×(0.15415+0.28768+0.40547+0.51083+0.60614)+0.69315]

≈0.38514

用复化辛浦生公式计算

S_3=1/6×1/3[0+4×(0.15415+0.40547+0.60614)+2×(0.28768+0.51083)+0.69315]

≈0.38629

5．已知数值求积公式 $\int_a^b f(x)dx \approx A_0 f(a) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$ 有四次代数精确度。试论证该公式有如下形式的截断误差：

$$R(f) = c(b-a)^6 f^{(5)}(\xi), \quad \xi \in (a, b)$$

（不必确定常数 c）.

解 设函数 $H_4(x)$ 满足插值条件

$$H_4(a) = f(a), H_4(x_1) = f(x_1), H_4(x_2) = f(x_2)$$
$$H_4'(x_1) = f'(x_1), H_4'(x_2) = f'(x_2)$$

则插值误差为

$$f(x)-H_4(x)=\frac{f^{(5)}(\eta)}{5!}(x-a)(x-x_1)^2(x-x_2)^2$$

于是所给求积公式的截断误差为

$$R(f)=\int_a^b f(x)dx-(A_0 f(a)+A_1 f(x_1)+A_2 f(x_2))$$

$$=\int_a^b f(x)dx-(A_0 H_4(a)+A_1 H_4(x_1)+A_2 H_4(x_2))$$

当求积公式有四次代数精确度时有，

$$R(f)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b H_4(x)dx$$

$$=\int_a^b\left(f(x)-H_4(x)\right)dx=\int_a^b\frac{f^{(5)}(\eta)}{5!}(x-a)(x-x_1)^2(x-x_2)^2dx$$

由积分中值定理，有$\xi\in(a,b)$，使

$$R(f)=\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\int_a^b(x-a)(x-x_1)^2(x-x_2)^2dx$$

$$=c(b-a)^6 f^{(5)}(\xi)，\quad \xi\in(a,b)$$