Наталья Басимова

Москва, школа 2007, 11 класс

О семействах касающихся шаров, лежащих на плоскости.

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор Протасов В.Ю.,
механико-математический ф-т
МГУ им. Ломоносова.

Учитель математики:

Чулков Павел Викторович.

Москва
2015

СОДЕРЖАНИЕ:

§ 1. Введение.

В работе рассматривается следующая общая задача. На плоскости лежат несколько шаров (не обязательно равных), которые касаются друг друга в некотором порядке. Например, все шары попарно касаются, или шары касаются по циклу: «первый – второго, второй – третьего, и так далее». Вид касания заранее указан. После этого все шары убрали, оставив лишь плоскость, на которой они лежали и точки касания их с этой плоскостью. Возникают два вопроса:

1) Какими особыми свойствами обладает конструкция точек касания?
2) Как по точкам касания шаров с плоскостью восстановить эти шары? И сколько решений имеет эта задача?

Таким образом, мы изучаем, какой «след» может оставлять на плоскости конструкция шаров и как по ней восстановить сами шары.

Аналогичная конструкция в меньшей размерности – про круги, лежащие на прямой и касающиеся друг друга, изучалась книге А.А. Кириллова «Повесть о двух фракталах» [1]. В этой книге выведены интересные соотношения на радиусы кругов. Величины, обратные радиусам, могу образовывать последовательность квадратов, а также могут быть напрямую связаны с последовательностью Фибоначчи.

Мы начнем со случая трех шаров на плоскости. В § 2 мы докажем, что по «следу» из трех точек единственным образом восстанавливаются три шара. Их радиусы задаются формулой, связывающей три точки на плоскости.

Далее, для четырех шаров, мы рассмотрим два случая. В одном случаем с циклическим касанием, в § 3, мы докажем, что если решения есть, то их бесконечно много. Радиус первого шара можно выбрать произвольным, а остальные радиусы однозначно восстанавливаются. А так же рассмотрим некоторые свойства четырехугольника, образованного точками касания шаров с плоскостью. Другой случай - попарное касание шаров - не менее интересен. В нем мы получим, что «след» образует четверку Аполлония (подробнее в § 4), а из этого вытекает несколько важных свойств.

Затем мы начнем обобщать доказанные ранее задачи и теоремы. Первое обобщение, разобранное в § 5, – несколько шаров лежат на плоскости и касаются друг друга по циклу. Это обобщения разбивается на два случая: четное или нечетное количество шаров. С четным количеством шаров мы так же получаем, что при определенном условии решений бесконечное количество, но если условие не выполнено, то решений нет. При нечетном количестве решение всегда будет единственным.
Второе обобщение – три шара пересекают плоскость по трем окружностям. По этим окружностям надо восстановить шары. В § 6 мы докажем, что шары восстанавливаются однозначно. Но из-за сложности выведенных формул мы не будем обобщать эту задачу дальше для количества шаров, большего 3.

В § 4 мы узнаем, что существуют всего два шара, касающиеся плоскости и данных трех шаров, которые попарно касаются друг друга и касаются той же плоскости. Отсюда возникает вопрос. А можно ли восстановить три данных шара по двум, которые их касаются? Этот вопрос

подробно изучен в § 7. Оказывается, что восстановить три шара не всегда возможно. Но если это возможно, то восстановить их можно бесконечным количеством способов, причем точки касания трех шаров с плоскость всегда будут лежать на фиксированной окружности.
Мы получим некоторую замыкающуюся конструкцию из трех шаров. В § 8 мы обобщим это утверждение для общего количество шаров. И, таким образом, получим теорему о замыкании, типа теорем Понселе, Штейнера, для шаров, циклически касающихся друг друга и касающихся данного шара. В следующем параграфе мы разберем некоторые частные случаи этой теоремы.

В заключительном, десятом, параграфе мы рассмотрим общее положение шаров относительно плоскости, касающихся данных трех. Оказывается, что окружности, образованные пересечением этих шаров с плоскостью, принадлежат одному пучку. Причем этот пучок содержит описанную окружность треугольника, образованного точками касания трех данных шаров с плоскостью.

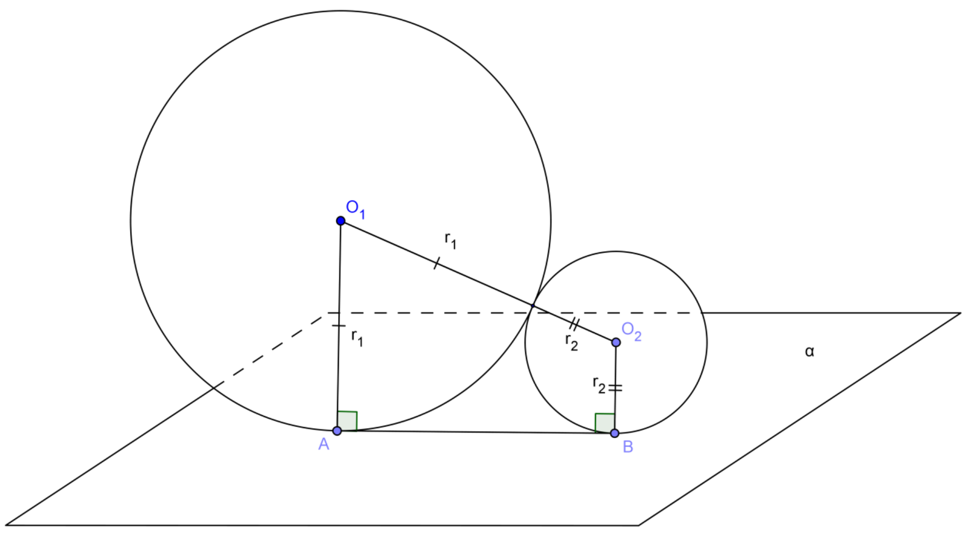
В общем в работе разобраны задача о трех касающихся шарах, лежащих на плоскости, и все возможные ее обобщения.

§ 2. Задача о трех шара.

Задача 1. *Три шара касаются друг друга и плоскости в точках A, B и C. Шары убрали, оставив только их точки касания с плоскостью. Восстановите шары.*

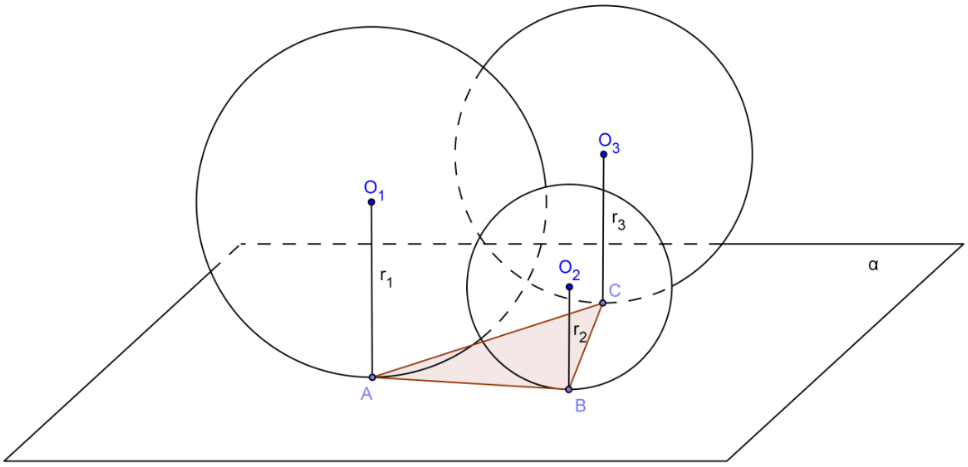
Решение. Для решения этой задачи нам потребуется одна лемма.

Лемма 1. *Пусть два шара с радиусами r_1, r_2 касаются друг друга и плоскости α в точках A и B. Тогда $AB^2 = 4 \cdot r_1 \cdot r_2$.*
Доказательство. Расстояния между центрами шаров – $r_1 + r_2$. Тогда
$AB^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = 4 \cdot r_1 \cdot r_2$.



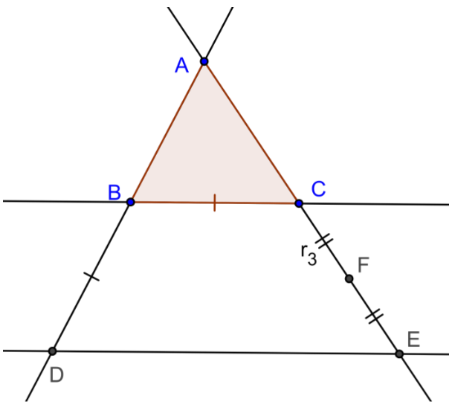
■

Обозначим плоскость через α, шары через ω_1, ω_2 и ω_3, их радиусы через r_1, r_2 и r_3 соответственно.



Из леммы 1 следует, что $\begin{cases} AB^2 = 4 \cdot r_1 \cdot r_2, \\ AC^2 = 4 \cdot r_1 \cdot r_3,. \\ CB^2 = 4 \cdot r_3 \cdot r_2. \end{cases}$ Решив эту систему и переобозначив стороны треугольника ABC за a, b, c, получим, что $\begin{cases} r_1 = \dfrac{bc}{2a}, \\ r_2 = \dfrac{ac}{2b},. \\ r_3 = \dfrac{ab}{2c}. \end{cases}$ Таким образом, для трех точек на плоскости существуют только одна тройка возможных шаров.

Попробуем выяснить, как связаны радиусы этих шаров со сторонами треугольника. Для начала построим эти радиусы в плоскости α с помощью циркуля и линейки. Сделать это довольно просто. Для этого на прямой AB за точкой B отложим отрезок BD, равный a. Через точку D проведем прямую DE (см. рис.), параллельную прямой BC. Пусть точка F середина отрезка CE. Тогда $FC = r_3$. (Для остальных радиусов аналогично)

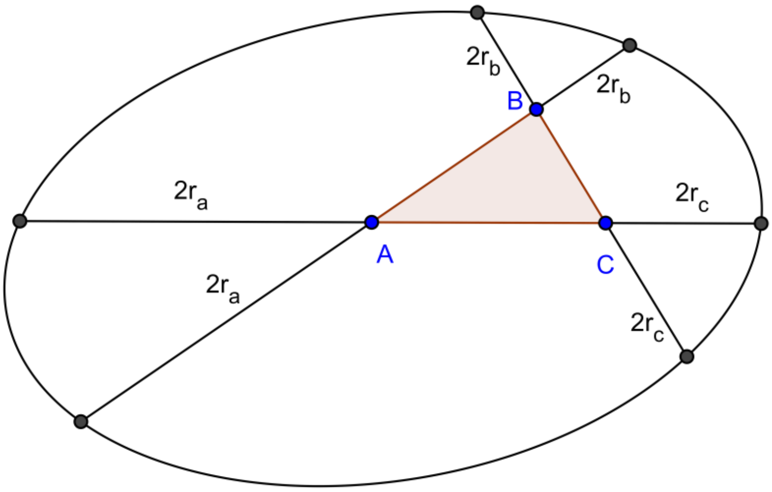


■

Решив эту задачу, можно сформулировать теорему.

Теорема 1. *Для любой тройки точек A, B, C существует единственное решение задачи 1, дающееся такой формулой:* $r_1 = \frac{bc}{2a}, r_2 = \frac{ac}{2b}, r_3 = \frac{ab}{2c}$.

Построив шесть отрезков вышеописанным способом (три радиуса по два на прямой, содержащей сторону треугольника, каждый), можно заметить, такой факт:
Предложение 1. *Шесть концов удвоенных радиусов (точка E и остальные) лежат на одном эллипсе.*
Доказать этот факт можно координатным методом.



Также можно заметить, что для некоторых частных случаев радиусы принимают определенные значения.

Следствие 1. *Если треугольник ABC – прямоугольный (пусть с гипотенузой a), то r_1 – половина высоты, проведенной гипотенузе.*

Доказательство. Так как высота, проведенная к гипотенузе a равна $\frac{bc}{a}$, то радиус r_1 – половина этой высоты. ■

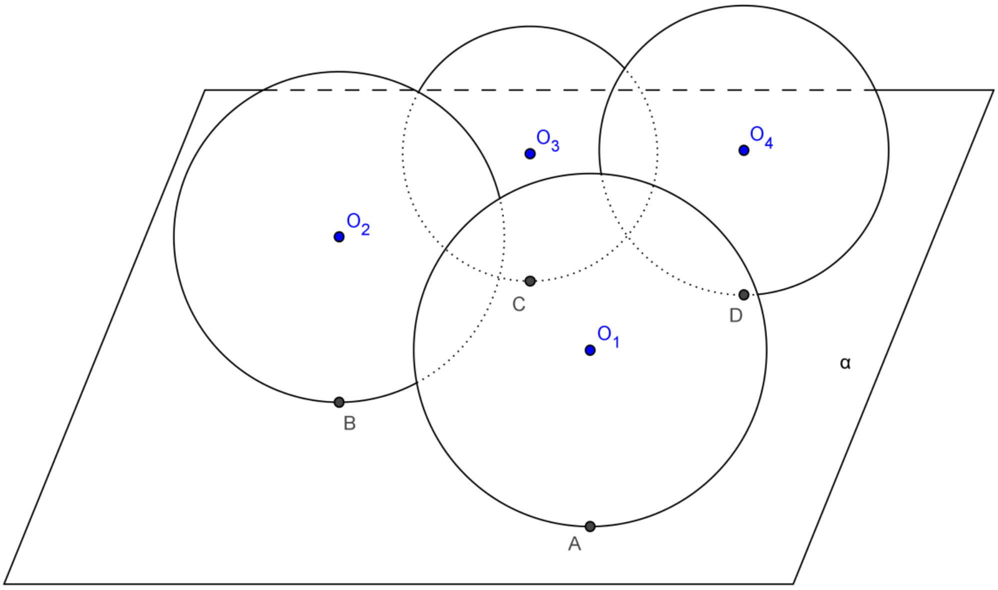
Следствие 2. *Если треугольник ABC – равнобедренный (пусть с основанием a), то r_2 и r_3 равны половине основания.*

Доказательство. Так как $b = c$, то $r_2 = r_3 = \frac{a}{2}$. ■

§ 3. Четыре шара с циклическим касанием.

Теперь исследуем эту же задачу, но только для четырех шаров.
Задача 2. *Четыре шара касаются друг друга по циклу (т.е. «первый – второго, второй – третьего, и так далее») и плоскости в точках A, B, C и D. Шары убрали, оставив только их точки касания с плоскостью. Восстановите шары.*

Решение. Обозначим плоскость за α, шары за $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4, их радиусы за r_1, r_2, r_3 и r_4 соответственно.



Аналогично задаче 1 напишем систему, связывающую радиусы и стороны четырехугольника

$$ABCD: \begin{cases} AB^2 = 4 \cdot r_1 \cdot r_2, \\ BC^2 = 4 \cdot r_2 \cdot r_3, \\ CD^2 = 4 \cdot r_3 \cdot r_4, \\ AD^2 = 4 \cdot r_1 \cdot r_4. \end{cases}.$$

Решая эту систему, поочередно выражая r_i, получим, что $AB^2 \cdot CD^2 = BC^2 \cdot AD^2$. Откуда следует вывод, что решение задачи существует тогда лишь, когда произведение противолежащих сторон четырехугольника равны. Если это условие выполнено, то решений бесконечно много.

Построить радиусы (при одном известном) можно используя метод пропорциональных отрезков (см. задачу 1).

■

Теорема 2. *Четыре точки A, B, C и D, лежащие на одной плоскости, являются точками касания четырех шаров, касающихся плоскости и касающихся друг друга по циклу, тогда и только тогда, когда $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. Если это условие выполняется, то решений бесконечно много, один радиус выбирается произвольным, остальные однозначно восстанавливаются.*

Можно заметить несколько свойств, связанных с четырехугольниками с равными произведениями противолежащих сторон.

Свойство 1. *Биссектрисы противолежащих углов четырехугольника, с равными произведениями противолежащих сторон, (как внутренние, так и внешние) пересекаются на* *диагонали.*

Доказательство. Пусть у четырехугольника $ABCD$ произведения противолежащих сторон равны. Биссектриса угла ABC делит диагональ AC в отношении $\frac{AB}{BC}$, биссектриса угла ADC делит ту же диагональ в отношении $\frac{AD}{DC}$. Эти отношения равны, значит, биссектрисы пересекаются на диагонали.

■

Свойство 2. *Частным случаем четырехугольника, с равными произведениями противолежащих сторон, является гармонический четырехугольник.*

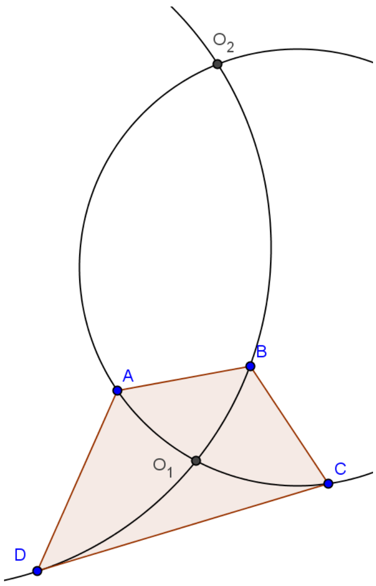
Напомним определение гармонического четырехугольника.

Определение 1. *Вписанный в окружность четырехугольник называется гармоническим, если произведения его противоположных сторон равны.*

Так же можно заметить такой факт. Любые четыре точки инверсией можно перевести в вершины параллелограмма. Центров инверсий два, это точки пересечения двух окружностей, каждая из которых проходит через противоположные вершины четырехугольника и через точку пересечения биссектрис соответствующих углов. Тогда можно заметить еще одно свойство.

Свойство 3. *Окружности, проходящие через противоположные вершины четырехугольника $ABCD$ и точку пересечения биссектрис соответствующих углов, ортогональны.*

Доказательство.



Пусть точки A, B, C и D перейдут в точки A', B', C' и D'. Тогда $A'B' \cdot C'D' = B'C' \cdot A'D'$, так как $\frac{A'B'}{AB} = \frac{R_i^2}{OA \cdot OB}$, где O и R_i – центр и радиус инверсии. Поэтому $A'B' = C'D' = B'C' = A'D'$ и, соответственно, этот четырехугольник ромб. То есть $A'C' \perp B'D'$. До инверсии эти прямые были окружностями, проходящими через противоположные вершины и точку пересечения биссектрис соответствующих углов (так как эти окружности содержат O). При инверсии ортогональные окружности остаются ортогональными. Значит, это окружности ортогональны.

■

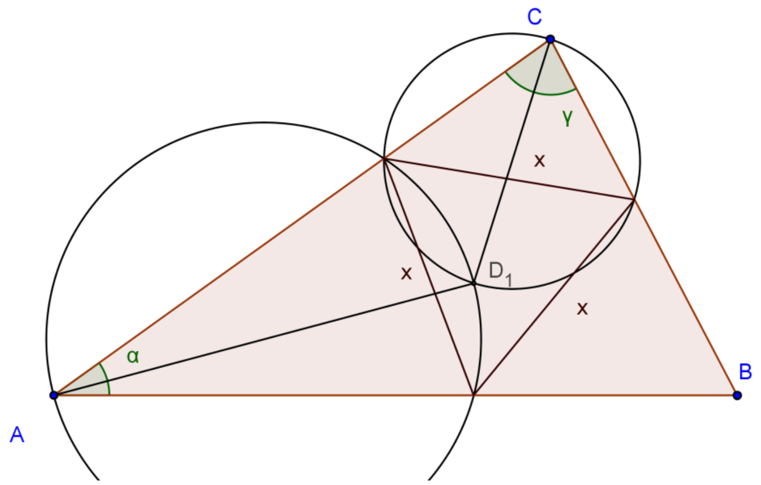
§ 4. Четыре шара, попарно касающиеся друг друга.

Четыре шара могут касаться друг друга и по-другому. А именно каждый шар касается каждого.
Поэтому давайте разберемся с такой задачей:

Задача 3. *Четыре шара касаются каждый каждого и плоскости в точках A, B, C и D. Шары убрали, оставив только их точки касания с плоскостью. Восстановите шары.*

Решение. Аналогично задачи 3 обозначим плоскость за α, шары – $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ и ω_4, их радиусы – r_1, r_2, r_3 и r_4 соответственно.
Рассмотрим сначала три первых шара. Из задачи 1 ясно, что их радиусы напрямую зависят от сторон. То есть существуют единственные возможные шары. Рассмотрев первый, второй и четвертый шары, мы найдем радиус четвертого шара. $r_4 = \dfrac{AD^2}{4 \cdot r_1} = \dfrac{BD^2}{4 \cdot r_2}$, а $r_3 = \dfrac{AC^2}{4 \cdot r_1} = \dfrac{BC^2}{4 \cdot r_2}$.

Следовательно, $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{AD}{BD}$. Это значит, что точка D лежит на окружности Аполлония точки C для треугольника ABC. Аналогично точка D лежит на двух других окружностях Аполлония. То есть решение может существовать только тогда, когда D – точка Аполлония треугольника ABC.



Педальный треугольник точки D – правильный, пусть его сторона x. По теореме синусов $x = AD \cdot \sin\alpha = CD \cdot \sin\gamma$, то есть $CD = \dfrac{AD \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} = \dfrac{AD \cdot BC}{AB}$ и соответственно

$CD^2 = \dfrac{AD^2 \cdot BC^2}{AB^2} = \dfrac{4 \cdot r_1 \cdot r_4 \cdot 4 \cdot r_2 \cdot r_3}{4 \cdot r_1 \cdot r_2} = 4 \cdot r_3 \cdot r_4$. Значит, если четвертый шар касается плоскости в точке Аполлония треугольника ABC и касается одного из шаров, то он касается всех трех.

Точек Аполлония две (доказательство для второй аналогичное), поэтому для тройки шаров, лежащих на плоскости и касающихся друг друга, существуют два шара, касающихся их трех и плоскости.

■

Напомним определение точек Аполлония и пару свойств, которые нам понадобятся в дальнейшем. Доказательства этих свойств можно найти в книге [9].

Определение 2. *Точка Аполлония — точка, расстояния от которой до вершин треугольника обратно пропорциональны сторонам, которые противолежат этим вершинам.*
Для любого неравностороннего треугольника точек Аполлония две. Одна из них лежит внутри описанной окружности, другая вне.

Свойство 1 [2]. *Точки Аполлония инверсны относительно описанной окружности треугольника.*

Свойство 2 [2]. *Если из точки Аполлония P опустить перпендикуляры PK, PL, PM на стороны треугольника ABC, то треугольник KLM (педальный треугольник точки Аполлония) будет равносторонним.*

Свойство 3 [2]. *Точка Аполлония изогонально сопряжена точке Торричелли. Из точки Торричелли стороны треугольника видны под углом в* 120° .

Определение 3. *Четыре точки A, B, C, D называются четверкой Аполлония, если* $AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$.
Треугольник и его точка Аполлония образуют четверку Аполлония.

Приведем одно свойство четверок Аполлония.

Свойство 1. *Четверка Аполлония никогда не образует вписанный четырехугольник.*
Доказательство. Для вписанного четырехугольника верна теорема Птолемея: произведение диагоналей равно сумме произведений противолежащих сторон. Очевидно, для четверки Аполлония это не выполняется.

■

Теперь сформулируем такую теорему, вытекающую из задачи 3:

Теорема 3. *Если на плоскости лежат четыре шара, попарно касающиеся друг друга и плоскости, то точки касания их с плоскостью образуют четверку Аполлония. Верно и обратное. То есть если на плоскости дана четверка Аполлония, то можно восстановить четыре шара (причем единственным образом), касающиеся друг друга и плоскости.*

Доказательство. Пусть A, B, C, D – точки касания данных шаров с плоскостью. Посмотрим на четвертый шар, касающийся первых трех. Из задачи 3 следует, что D – точка Аполлония треугольника ABC. Значит, A, B, C, D образуют четверку Аполлония.

■

Связав эту теорему и некоторые свойства точек Аполлония, можно получить интересные следствия.

Следствие 1. *На плоскости лежат четыре шара, попарно касающиеся друг друга. Если из центра четвертого шара опустить перпендикуляры на стороны треугольника, образованного точками касания первых трех шаров с плоскостью, то полученные точки будут образовывать равносторонний треугольник.*

Доказательство. Пусть A, B, C, D – точки касания данных шаров с плоскостью. Пусть K, L, M – основания перпендикуляров из центра четвертого шара на стороны AB, BC, AC соответственно. Перпендикуляр из центра четвертого шара к плоскости пройдет через точку D, значит, по теореме о трех перпендикулярах $DK \perp AB, DL \perp BC, DM \perp AC$. Получаем, что KLM – педальный треугольник точки D, являющейся точкой Аполлония треугольника ABC. Поэтому треугольник KLM – равносторонний.

■

Для следующего следствия нам потребуется вспомнить два определения.

Определение 4. *Точка Лемуана – это точка пересечения симедиан треугольника.*

Определение 5. *Прямая Брокара – это прямая, проходящая через точки Аполлония, точку Лемуана и центр описанной окружности данного треугольника.*

Следствие 2. *На плоскости лежат пять шаров, три из них попарно касаются друг друга, последние два касаются первых трех. Прямая, проходящая через точки касания четвертого и пятого шаров с плоскостью, проходит через точку Лемуана треугольника, образованного точками касания первых трех шаров с плоскостью.*

Доказательство. Пусть точки касания шаров с плоскостью – A, B, C, D, E. Тогда по теорема 3, A, B, C, D и A, B, C, E образуют четверки Аполлония. Поэтому D и E – точка Аполлония треугольника ABC. Из определений 4 и 5 следует требуемое.

■

Для упрощения некоторых дальнейших формулировок и доказательств введем такое определение:

Определение 6. *Будем называть шар, касающейся трех данных шаров, шаром Аполлония.*

Следствие 3. *Существуют всего два центра инверсии, при которой три касающихся шара, лежащих на плоскости, переходят в три равных касающихся шара, лежащих на той же плоскости.*

Доказательство. Посмотрим, что происходит с двумя шарами Аполлония после инверсии. Раз до инверсии они касались трех шаров, то и после инверсии будут их касаться. Так как шары после инверсии превратились в равные, то один из шаров Аполлония теперь касается плоскости в центре треугольника, образованного точками касания шаров с плоскостью (этот треугольник равносторонний, так как шары равны). А другой шар Аполлония должен тогда перейти во вторую плоскость, касающуюся шаров. Значит, его точка касания с плоскостью ушла в бесконечность. Поэтому его точка касания была центром инверсии. Шаров Аполлония два, следовательно, и центров инверсии два.

■

§ 5. n шаров с циклическим касанием.

Разобравшись с малым количеством шаров, посмотрим, что будет, когда шаров n и касаются они друг друга по циклу.

Задача 4. *n шаров касаются друг друга по циклу и касаются плоскости в точках A_1, A_2 ... A_n. Шары убрали, оставив только их точки касания с плоскостью. Восстановите шары. (Шары могут пересекаться.)*

Решение. Обозначим шары через $\omega_1, \omega_2 \ \dots \ \omega_n$, их радиусы – $r_1, r_2 \ \dots \ r_n$, а плоскость – α. Эта задача разбивается на две подзадачи, когда n четно и нечетно:
1) **Если n четно**, тогда решая аналогичную систему (из задачи 2), получаем, что $A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}A_n = A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot \ldots \cdot A_nA_1$. То есть, если пронумеровать стороны n-угольника, произведение сторон с четным номером должно быть равно произведению сторон с нечетным номером. Если это так, то решений бесконечно много.

2) **Если n нечетно,** мы получим, что $r_1 = \dfrac{A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot \ldots \cdot A_nA_1}{2 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}A_n}$. То есть, если пронумеровать стороны n-угольника, начиная с A_iA_{i+1}, то r_i будет равен половине отношения произведения нечетных сторон к произведению четных. Таким образом, при нечетном n всегда существует решение. Причем единственное.
Построить радиусы можно применяю метод из задачи 1 несколько раз (то есть сначала строится $\dfrac{A_1A_2 \cdot A_3A_4}{2 \cdot A_2A_3}$, затем $\dfrac{A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6}{2 \cdot A_2A_3 \cdot A_4A_5}$ и так далее)

■

Теорема 4. *Для нечетного количество точек на плоскости всегда существует решение задачи 4. Причем единственное. Если же n четно, то решение существует тогда, когда произведение сторон многоугольника, образованного точками касания шаров с плоскостью, с четным номером равно произведение сторон с нечетным. Если это условие выполнено, то решение бесконечно много, один радиус выбирается произвольно, остальные однозначно восстанавливаются.*

Теперь с циклическим касанием все понятно. Разумно приступить к разбору случая с попарным касанием. Интуиция подсказывает, что не может существовать много шаров, попарно касающихся друг друга и лежащих на плоскости. Давайте докажем это строго.

Теорема 5. *На плоскости не может лежать* $n \geq 5$ *шаров, попарно касающихся друг друга.* Доказательство. Пусть это не так, и существует пять шаров, попарно касающиеся друг друга и касающиеся плоскости. Пусть точки касания шаров с плоскостью – $A, B, C, D, E.$ Из теоремы 3 следует, что D, E – точки Аполлония треугольника ABC. Из задачи 7, которая разобрана в §7, следует, что $DE^2 = 12 \cdot r_4 \cdot r_5$, где r_4 и r_5 – радиусы четвертого и пятого шаров. Это противоречит лемме 1. Значит, четвертый и пятый шары не касаются.

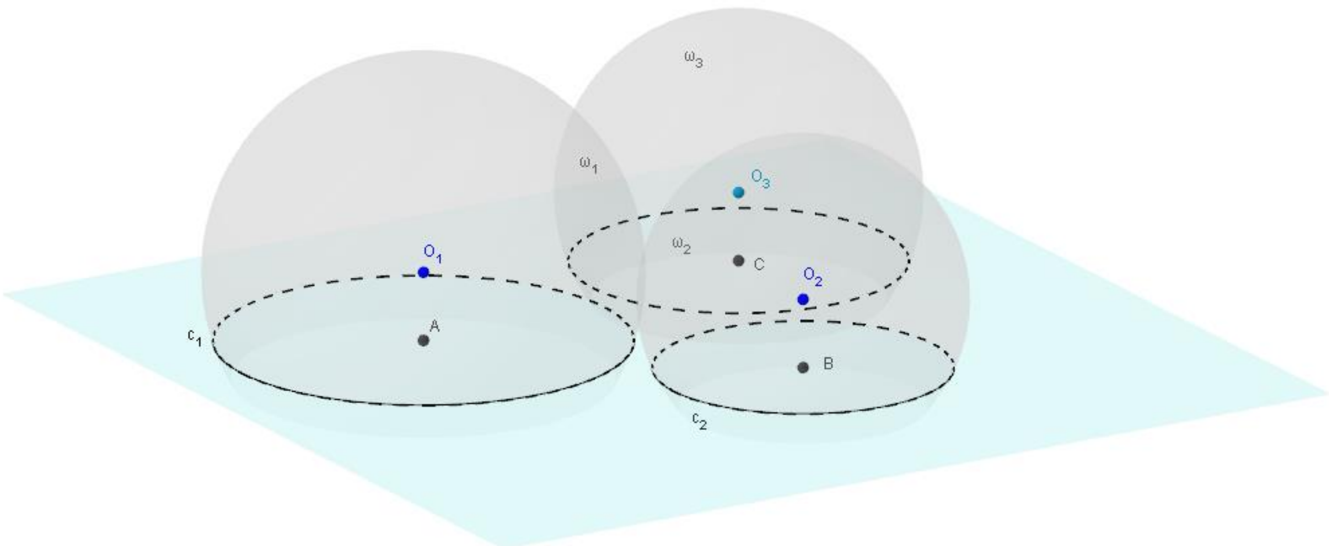
■

§ 6. Обобщение задачи 1. Три шара, пересекающие плоскость.

Давайте попробуем обобщить задачу 1 таким образом:

Задача 6. *Три шара касаются друг друга и пересекают плоскость по окружностям* c_1, c_2 *и* c_3. *Шары убрали, оставив окружности. Восстановите шары.*

Решение. Обозначим плоскость через α, шары через ω_1, ω_2 и ω_3, их радиусы через R_1, R_2 и R_3 соответственно. Пусть центры этих окружностей – A, B и C, а радиусы – r_1, r_2 и r_3. А расстояние от центров шаров до плоскости – h_1, h_2 и h_3 (h_2 или h_3 меньше нуля, если центр шара лежит в другом полупространстве, чем центр первого шара.)



Из касания шаров следует такое равенство:
$(R_1 + R_2)^2 = (h_1 - h_2)^2 + AB^2$ и $R_i^{\,2} = r_i^{\,2} + h_i^{\,2}$. Раскрыв скобки,

получим: $\begin{cases} 2R_1R_2 + 2h_1h_2 = AB^2 - r_1^{\ 2} - r_2^{\ 2} = C^2 \\ 2R_1R_3 + 2h_1h_3 = AC^2 - r_1^{\ 2} - r_3^{\ 2} = B^2 \\ 2R_2R_3 + 2h_2h_3 = BC^2 - r_2^{\ 2} - r_3^{\ 2} = A^2 \\ R_i^{\ 2} = r_i^{\ 2} + h_i^{\ 2} \end{cases}$

Пусть $R_i = a_i + b_i, h_i = a_i - b_i$. Тогда систему можно переписать так: $\begin{cases} 4a_1a_2 + 4b_1b_2 = C^2 \\ 4a_1a_3 + 4b_1b_3 = B^2 \\ 4a_2a_3 + 4b_2b_3 = A^2 \\ r_i^{\ 2} = 4a_ib_i \end{cases}$

Выразив a_ia_j через b_ib_j получим систему квадратных уравнений относительно b_ib_j. И так как b_i может быть отрицательным, а a_i – нет, то можно найти a_i и b_i:

$$\begin{cases} a_1^{\ 2} = \dfrac{(C^2 + \sqrt{C^4 - 4r_1^{\ 2}r_2^{\ 2}})(B^2 + \sqrt{B^4 - 4r_1^{\ 2}r_3^{\ 2}})}{8(A^2 + \sqrt{A^4 - 4r_3^{\ 2}r_2^{\ 2}})} \\ b_1^{\ 2} = \dfrac{(C^2 - \sqrt{C^4 - 4r_1^{\ 2}r_2^{\ 2}})(B^2 - \sqrt{B^4 - 4r_1^{\ 2}r_3^{\ 2}})}{8(A^2 - \sqrt{A^4 - 4r_3^{\ 2}r_2^{\ 2}})} \\ a_2^{\ 2} = \dfrac{(C^2 + \sqrt{C^4 - 4r_1^{\ 2}r_2^{\ 2}})(A^2 + \sqrt{A^4 - 4r_3^{\ 2}r_2^{\ 2}})}{8(B^2 + \sqrt{B^4 - 4r_1^{\ 2}r_3^{\ 2}})} \\ b_2^{\ 2} = \dfrac{(C^2 - \sqrt{C^4 - 4r_1^{\ 2}r_2^{\ 2}})(A^2 - \sqrt{A^4 - 4r_3^{\ 2}r_2^{\ 2}})}{8(B^2 - \sqrt{B^4 - 4r_1^{\ 2}r_3^{\ 2}})} \\ a_3^{\ 2} = \dfrac{(B^2 + \sqrt{B^4 - 4r_1^{\ 2}r_3^{\ 2}})(A^2 + \sqrt{A^4 - 4r_3^{\ 2}r_2^{\ 2}})}{8(C^2 + \sqrt{C^4 - 4r_1^{\ 2}r_2^{\ 2}})} \\ b_3^{\ 2} = \dfrac{(B^2 - \sqrt{B^4 - 4r_1^{\ 2}r_3^{\ 2}})(A^2 - \sqrt{A^4 - 4r_3^{\ 2}r_2^{\ 2}})}{8(C^2 - \sqrt{C^4 - 4r_1^{\ 2}r_2^{\ 2}})} \end{cases}$$

Если b_i этой формулой не определяется (то есть в знаменатели стоит нуль), тогда определим b_i просто так: $b_i = \dfrac{r_i^{\ 2}}{4a_i}$ (это определение верно в любом случае).

Построить a_i и b_i можно многократно применяя метод пропорциональных отрезков.

■

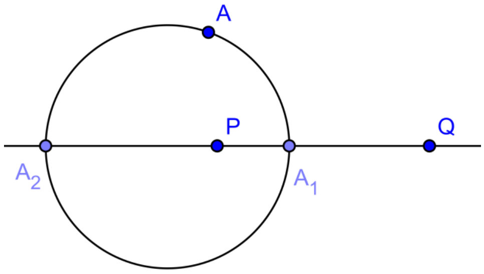
Теорема 6. *Для любой не пересекающейся тройки окружностей на плоскости существует единственное решение задачи 6.*

§ 7. Восстановление шаров по шарам Аполлония.

Для тройки шаров, лежащих на плоскости, шаров Аполлония два. Возникает вопрос-задача.

Задача 7. *Можно ли по шарам Аполлония и плоскости восстановить три исходных?*

Решение. Пусть шары ω_4 и ω_5 – шары Аполлония, и пусть они касаются плоскости в точках P и Q. Сначала найдем ГМТ касания возможных шаров. Пусть шар ω_1 касается шаров ω_4 и ω_5 и касается плоскости в точке A. Тогда $\frac{AP}{AQ}=\sqrt{\frac{r_4}{r_5}}$. Из этого следует, что ГМТ – это окружность с центром на прямой PQ. Найдем ее центр и радиус.

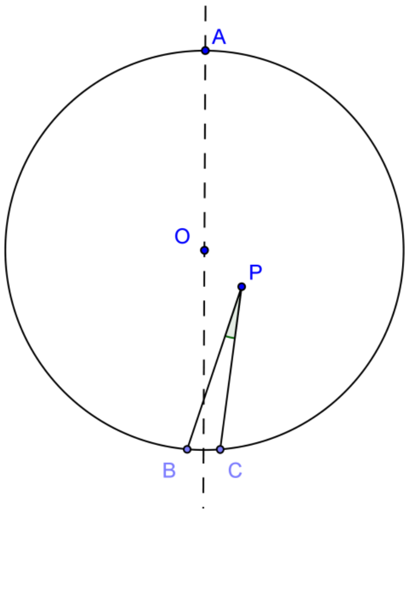


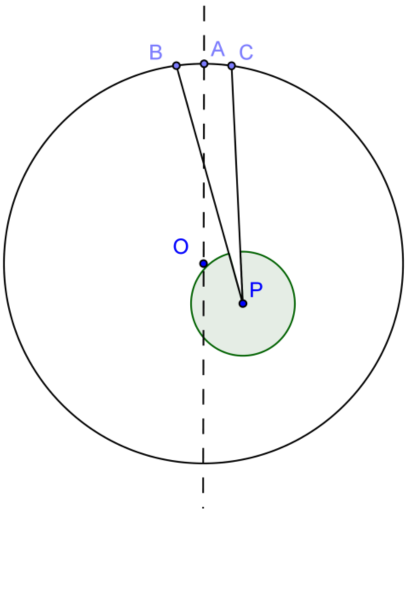
Пусть точки A_1, A_2 принадлежат этой окружности. Тогда $\frac{A_1P}{PQ-A_1P}=\sqrt{\frac{r_4}{r_5}} \Rightarrow A_1P=\frac{PQ\cdot\sqrt{r_4}}{\sqrt{r_4}+\sqrt{r_5}}$.

Аналогично $A_2P=\frac{PQ\cdot\sqrt{r_4}}{\sqrt{r_5}-\sqrt{r_4}}$. Значит, радиус этой окружности $R=\frac{A_1P+A_2P}{2}=\frac{PQ\cdot\sqrt{r_4\cdot r_5}}{r_5-r_4}$

Но могут ли эти окружности совпадать при разных радиусах шаров? Пусть радиусы второй пары шаров – r_6, r_7. Для того, чтобы окружности совпадали, радиусы окружностей и расстояние от точки P до какой-то одной точки окружности должны быть равны.

$\frac{PQ\cdot\sqrt{r_4\cdot r_5}}{r_5-r_4}=\frac{PQ\cdot\sqrt{r_6\cdot r_7}}{r_7-r_6}$ и $\frac{PQ\cdot\sqrt{r_4}}{\sqrt{r_4}+\sqrt{r_5}}=\frac{PQ\cdot\sqrt{r_6}}{\sqrt{r_6}+\sqrt{r_7}} \Rightarrow r_5\cdot r_6=r_4\cdot r_7$. При этом условии





окружности совпадают.

Восстановив окружность, можно забыть о шаре ω_5.

Чтобы восстановить три шара, надо восстановить три точки касания. То есть надо восстановить треугольник ABC, вписанный в построенную окружность и такой, для которого P – точка Аполлония.

Докажем вспомогательную лемму:

Лемма 2. *Для любой точки P, лежащей внутри окружности, существует бесконечно много треугольников, вписанных в эту окружность, таких что P – их точка Аполлония.*

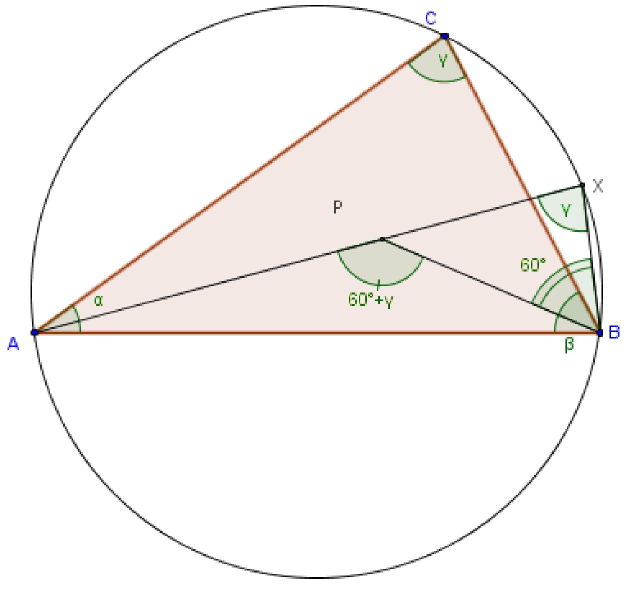
Доказательство. Заметим, что если P – точка Аполлония треугольника ABC, то $\angle ABC + 60° = \angle APC$ (это следует из того, что точка Аполлония изогонально сопряжена точки Торричелли). Возьмем диаметр AO (O – центра окружности) и точки B и C, симметричные относительно этого диаметра. Пусть точка B очень близко к диаметру:

В первом случае $\angle BAC + 60° > \angle BPC$, потому что $\angle BAC, \angle BPC \to 0°$. Во втором случае $\angle BAC + 60° < \angle BPC$, потому что $\angle BAC \to 180°, \angle BPC \to 360°$. Поэтому если мы будем двигать точку B по окружности, то вследствие непрерывности, найдется нужное положение точки B. Аналогично можно взять точку E близко к точке B. Тогда $\angle BEC (= \angle BAC) + 60° > \angle BPC$. И взять точку E близко к точке C. $\angle BEC + 60° < \angle BPC$. Поэтому есть подходящая точка E. То есть для любого диаметра AO существует треугольник BEC, что P – его точка Аполлония, а AO – серединный перпендикуляр к BC. То есть существует бесконечно много треугольников на окружности, что P – их точка Аполлония.

■

При фиксированной окружности и точки P найдем r_4 (радиус шара, который надо поставить на точку P, чтобы он касался трех данных шаров, чьи точки касания с плоскостью лежат на окружности).

Пусть ABC – треугольник, вписанный в фиксированную окружность, и точка P – его точка Аполлония. Пусть прямая AP пересекает вторично окружность в точке X.



$$AP \cdot \sin\alpha = BP \cdot \sin\beta, \frac{BP}{\sin\gamma} = \frac{PX}{\sin 60^\circ},$$

$$r_4 = \frac{BP^2}{4r_2} = \left(r_2 = \frac{AB \cdot BC}{2AC}\right) = \frac{BP^2 \cdot AC}{2AB \cdot BC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2PX}{\sqrt{3}} \cdot \sin\gamma \cdot \frac{AP \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \frac{2R \cdot \sin\beta}{4R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma},$$ где R – радиус фиксированной окружности ω.

$r_4 = \frac{AP \cdot PX}{2\sqrt{3}R} = \frac{|S(P,\omega)|}{2\sqrt{3}R}$. (Здесь и далее $S(P,\omega)$ – степень точки P относительно ω.)

Получается, что для фиксированной окружности и точки P решение будет существовать только при определенном r_4.

Подставим найденные ранее значения:

$$r_4 = \frac{A_1P \cdot PA_2}{2\sqrt{3}R} = \frac{PQ \cdot \sqrt{r_4}}{\sqrt{r_4} + \sqrt{r_5}} \cdot \frac{PQ \cdot \sqrt{r_4}}{\sqrt{r_5} - \sqrt{r_4}} : (2\sqrt{3}\,\frac{PQ \cdot \sqrt{r_4 \cdot r_5}}{r_5 - r_4}) \Rightarrow \frac{PQ}{2\sqrt{3}} = \sqrt{r_4 \cdot r_5}$$

Если это равенство верно, то решения существует, и их бесконечно много.

■

Теорема 7. *Задача 7 имеет решения лишь при определенном радиусе данных шаров. Причем тогда этих решений бесконечно много.*

§ 8. Теорема о замыкании для шаров, циклически касающихся друг друга и касающихся данного шара.

Современной геометрии известно много теорем о замыкании. Вот некоторые из них:

Теорема Понселе (1813) [4]. *Даны окружности ω_1 и ω_2. Через точку A_1, принадлежащей ω_1, проводится касательная к ω_2, она вторично пересекает ω_1 в точке A_2. Через A_2 проводится вторая касательная к ω_2, она вторично пересекает ω_1 в точке A_3. Ломанная $A_1A_2...A_n$ называется цепью Понселе. Если для некоторой A_1, цепь Понселе будет замкнутой, то для любой A_1, принадлежащей ω_1, для которой существует касательная к ω_2, цепь Понселе будет замкнутой.*

Теорема о зигзаге [5], [7], [8]. *Даны две окружности ω_1 и ω_2 и $l > 0$. Из точки A_1, принадлежащей ω_1, проводится отрезок длины l до точки A_2, принадлежащей ω_2. Из точки A_2 проводится отрезок длины l до A_3, принадлежащей ω_1, A_1 не совпадает с A_3 (если это возможно), и так далее. Если этот процесс замкнется через n ходов, то для любой другой A_1, принадлежащей ω_1, аналогичный процесс замкнется через ходов n.*

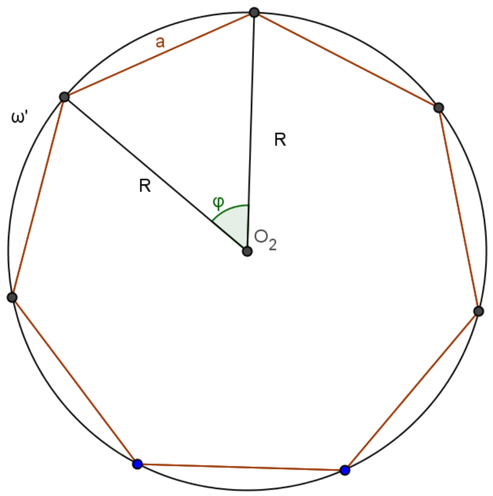
Теорема Штейнера [6]. *Пусть есть цепочка окружностей $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Окружность ω_i касается двух соседних окружностей этой цепочки и двух данных непересекающихся окружностей σ_1 и σ_2. Тогда для любой окружности τ_1, касающейся σ_1 и σ_2 одинаковым образом существует аналогичная цепочка из n касающихся окружностей $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$.*

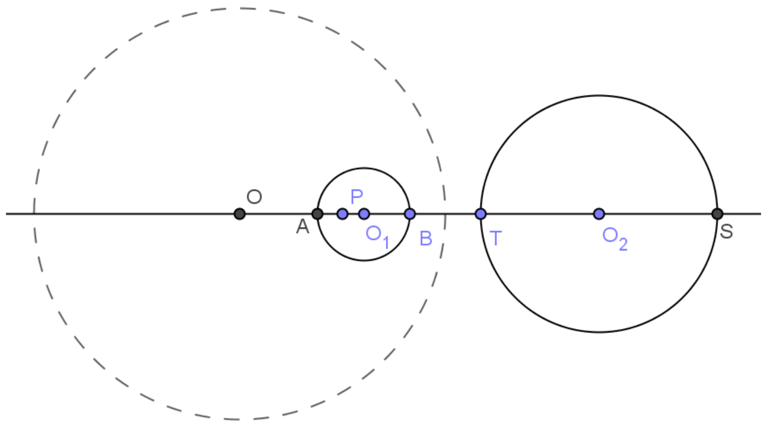
Далее мы докажем теорему о замыкании, подобную теоремам Понселе, Штейнера и теореме о зигзаге. В параграфе 7 это теорема была доказана для частного случае $n=3$. Теперь докажем ее в общем случае. Итак,

Теорема 8. *На плоскости дана окружность ω. Шар σ касается этой плоскости в точке P, не принадлежащей ω. Существует цепочка из n шаров, последовательно касающихся друг друга и касающихся шара σ и плоскости по ω, тогда и только тогда, когда радиус σ равен $\dfrac{|S(P;\omega)|}{4\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}\cdot R_o}$, где R_o – радиус ω. Если существует одна цепочка шаров, то их существует бесконечно много, причем точкой касания первого шара с плоскостью можно выбрать любую точку окружности ω.*

Напомним, что $S(P;\omega)$ – это степень точки P относительно окружности ω.

Доказательство. Инверсией переведем окружность ω с центром O_1 в окружность ω' с центров в O_2 – инверсным образом точки P. Тогда все n шаров перейдут в другие n шаров, так же касающиеся плоскости в точках, лежащих на окружности, при этом касаясь шара σ', касающегося плоскости в центре окружности. Так как все n шаров удалены от шара σ' на радиус окружности ω' (R), то, значит, их радиусы равны между собой, и точки касания образуют на плоскости правильный n-угольник:





Пусть сторона многоугольника равна a, а радиусы n шаров равны r_n. Найдем радиус шара $\sigma - r'$. Угол $\varphi = \dfrac{2\pi}{n}$. Поэтому $a = 2R\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}, r_n = R\cdot\sin\dfrac{\pi}{n}$. И, соответственно, $r' = \dfrac{R^2}{4r_n} = \dfrac{R}{4\sin\dfrac{\pi}{n}}$

Теперь найдем отношение радиусов шаров σ' и σ, а затем и радиус шара $\sigma - r$. Пусть радиус инверсии R_i.

Тогда $OP\cdot OO_2 = R_i^{\,2}$. И $\dfrac{r'}{r} = \dfrac{OO_2}{OP}$, так как шары σ' и σ касаются плоскости в точках, лежащих на одной прямой с центром инверсии, и центры этих шаров тоже лежат на одной прямой с центром инверсии. Обозначим точки пересечения прямой OP с окружностью ω за A и B. Они перейдут в точки S и T соответственно. Тогда $\frac{R_i^2}{OO_1 - R_o} = OS$ и $\frac{R_i^2}{OO_1 + R_o} = OT$. И поэтому $\frac{R_i^2}{OO_1 - R_o} + \frac{R_i^2}{OO_1 + R_o} = 2\frac{R_i^2}{OP}$. Значит, $OP = \frac{OO_1^2 - r^2}{OO_1}$. И $OO_1 \cdot O_1P = R_o^2$.

$$|S(P;\omega)| = OP \cdot O_1P, \quad \frac{OP}{OO_2} = \frac{OP^2}{R_i^2} = \frac{S(P;\omega)^2}{O_1P^2 \cdot R_i^2}$$

$$\frac{R}{AP} = \frac{R_i^2}{OA \cdot OP} = \frac{R_i^2}{(OO_1 - R_o) \cdot OP}.$$

Теперь соберем все вместе и подставим в $\frac{r'}{r} = \frac{OO_2}{OP}$:

$$r = \frac{OP \cdot r'}{OO_2} = \frac{R}{4\sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{S(P;\omega)^2}{O_1P^2 \cdot R_i^2} = \frac{(R_o - O_1P) \cdot R_i^2}{(OO_1 - R_o) \cdot OP \cdot 4 \cdot \sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{(R_o^2 - O_1P^2)^2}{O_1P^2 \cdot R_i^2} =$$

$$= \frac{(R_o - O_1P)}{(\frac{R_o^2}{O_1P} - R_o) \cdot (\frac{R_o^2}{O_1P} - O_1P) \cdot 4 \cdot \sin\frac{\pi}{n}} \cdot \frac{(R_o^2 - O_1P^2)^2}{O_1P^2} = \frac{R_o^2 - O_1P^2}{4 \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot R_o}.$$

В итоге получаем, что $r = \frac{|S(P;\omega)|}{4 \cdot \sin\frac{\pi}{n} \cdot R_o}$. Если вспомнить наш результат для $n = 3$, то можно убедиться, что он в точности равен выведенному.

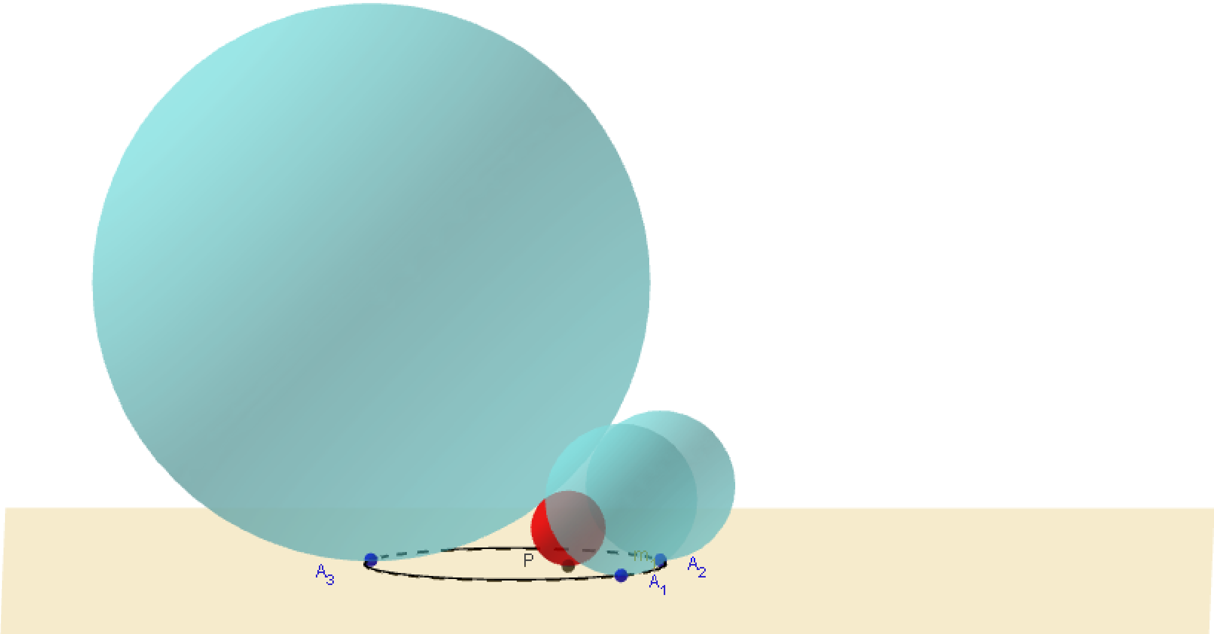
■

Английский ученый Артур Кэли (1821 - 1895) в 1854 вывел условие, связывающее две окружности ω_1, ω_2, при которых цепь Понселе замкнется через n ходов [6]. В теореме 8 мы не только доказали, что конструкция замыкается, но и установили условие этого замыкания через n ходов.

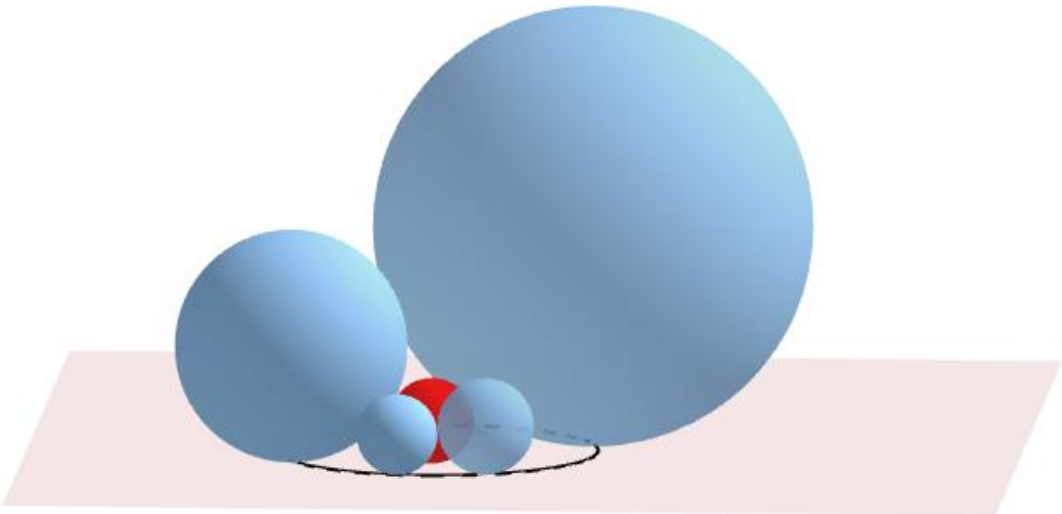
§ 9. Примеры.

Давайте найдем значения формулы, полученной в теореме 8, для определённых n.

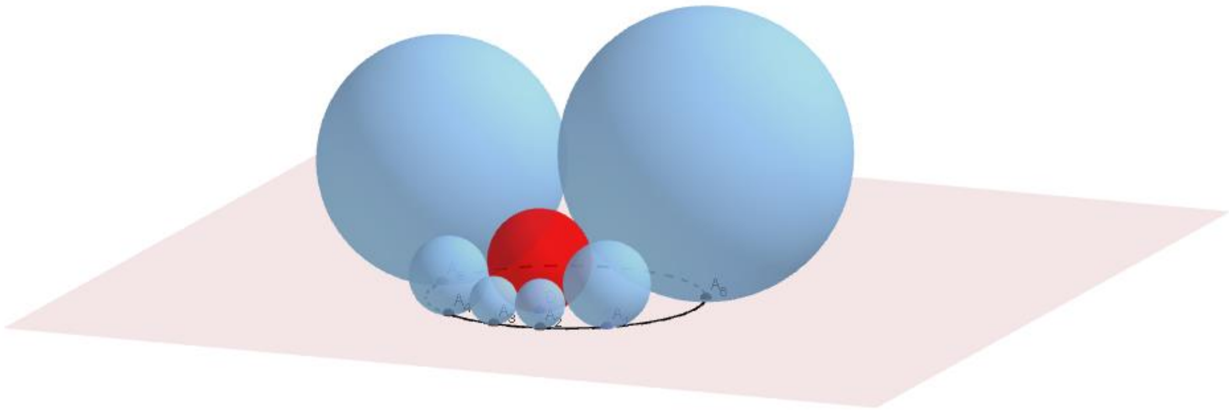
Для трех шаров: $r = \dfrac{|S(P;\omega)|}{2 \cdot \sqrt{3} \cdot R_o}$



Для четырех шаров: $r = \dfrac{|S(P;\omega)|}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot R_o}$



Для шести шаров: $r = \dfrac{|S(P;\omega)|}{2 \cdot R_o}$



§ 10. Общее расположение шаров, касающихся трех данных.

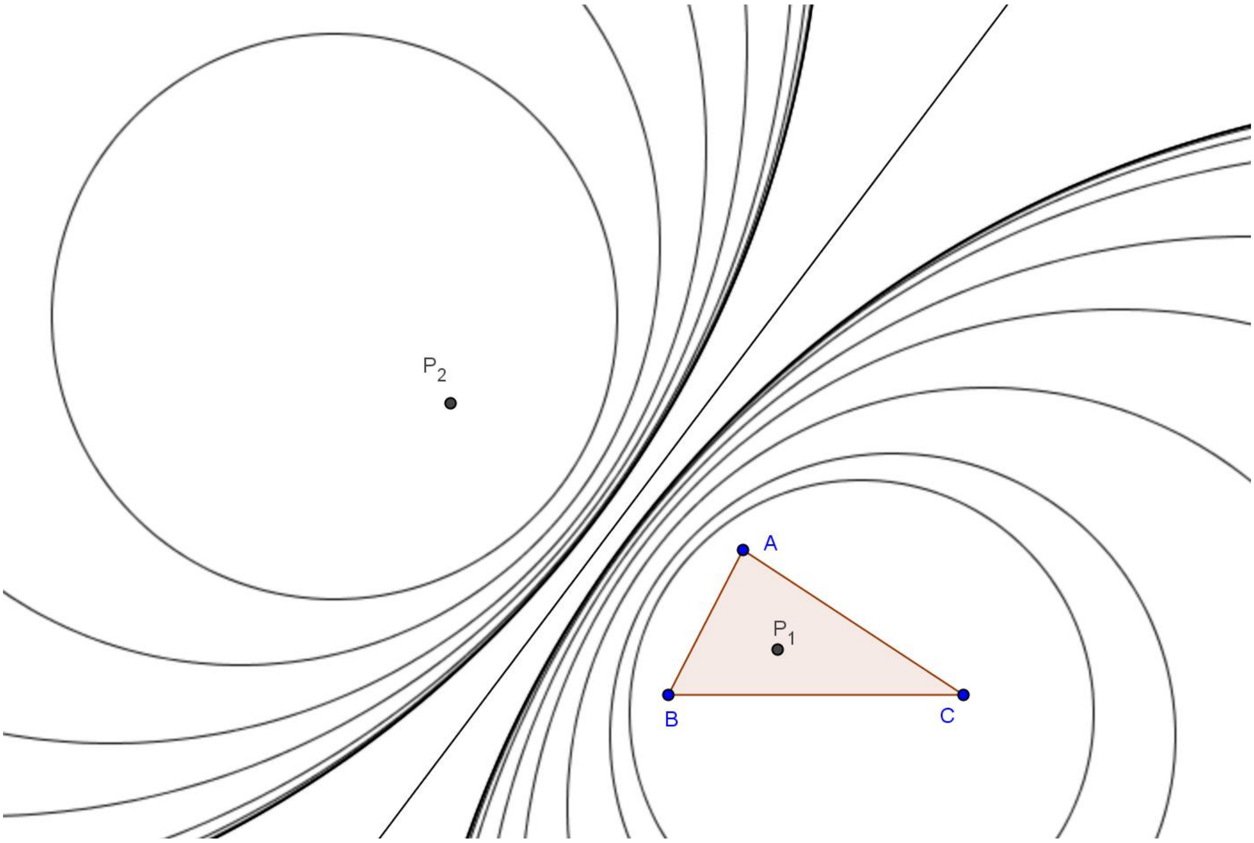
Мы знаем, что для трех шаров, касающихся друг друга и плоскости, существуют два шара, касающиеся тех шаров и плоскости (теорема 3). Давайте попробуем найти как расположены все возможные шары, касающиеся тех трех, по отношению к плоскости.

Теорема 9. *Три шара касаются друг друга и плоскости, тогда все шары, касающиеся трех данных, пересекают плоскость по окружностям, принадлежащим одному пучку. Вторая плоскость, касательная к трем данным шарам, пересекает первую плоскость по прямой, являющейся радикальной осью этого пучка.*

Доказательство. Пусть точки касания трех шаров с плоскостью – A, B и C. А шар σ, который касается данных трех, пересекает плоскость по окружности ω. Переведем инверсией треугольник ABC в равносторонний треугольник $A'B'C'$.
Для этого надо центром инверсии выбрать одну из точек Аполлония. Это следует из того, что $\frac{AB}{A'B'}=\frac{R_i^2}{AP\cdot BP},\frac{BC}{B'C'}=\frac{R_i^2}{BP\cdot CP}$, где P, R_i – центр и радиус инверсии. А значит, $\frac{AB}{BC}=\frac{CP}{AP}$, и P – точка Аполлония треугольника ABC.

Центр окружности ω будет совпадать с центром равностороннего треугольника.

Значит, все возможные окружности ω перейдут в концентрические окружности, поэтому окружности ω образуют пучок с предельными точками – центрами инверсии – точками Аполлония треугольника ABC.



Вторую касательную плоскость можно рассматривать как шар бесконечного радиуса. И пересекает он первую плоскость по окружности бесконечного радиуса. Значит, это окружность – радикальная ось пучка. То есть серединный перпендикуляр к отрезку с концами в точках Аполлония – это прямая пересечения плоскостей касательных к трем данным шарам.

Описанная окружность треугольника ABC также принадлежит пучку, она задает не шар, а касательную плоскость.

■

Из доказанной теоремы вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Три шара касаются друг друга и плоскости, два других шара касаются первых трех и плоскости. Тогда плоскость, проходящая через центры трех первых шаров, делит пополам отрезок, соединяющий точки касания четвертого и пятого шара с данной плоскостью.*

Серединный перпендикуляр к точкам Аполлония является прямой Лемуана.

Определение 7. *Поляра точки Лемуана относительно описанной окружности называется прямой Лемуана.*

У прямой Лемуана много интересных свойств. Приведем здесь некоторые из них. Подробное доказательство разобрано в книге [3].

Свойство 1 [3]. *Прямая Лемуана перпендикулярна прямой Брокара.*

Свойство 2 [3]. *Прямая Лемуана является радикальной осью описанной окружности и окружности Брокара.*

Определение 8. *Окружность Брокара – окружность, построенная на центре описанной окружности и точке Лемуана как на диаметре*.

Свойство 3 [3]. *Точка пересечения стороны треугольника и касательной к описанной окружности, проведенной из противоположной вершины, лежит на прямой Лемуана.*

§ 11. Заключение.

В работе была изучена общая задача о восстановлении радиусов касающихся друг друга шаров, лежащих на плоскости, по точкам их касания с плоскостью. Показано, что для трех шаров эта задача всегда имеет единственное решение, причем радиусы шаров эффективно строятся с помощью циркуля и линейки. Для четырех шаров решение существует тогда и только тогда, когда их точки касания с плоскостью образуют четверку Аполлония. Из этого факта получается несколько красивых геометрических следствий. Для пяти шаров попарное касание невозможно, однако имеет смысл задача о последовательном касании шаров по циклу. В этом случае задача имеет принципиально разные ответы для четного и нечетного числа шаров.

Также была решена и более общая задача о восстановлении касающихся шаров, пересекающих плоскость по заданным окружностям.

Кроме того, для шаров, лежащих на плоскости, касающихся друг друга (по циклу) и заданного шара, в работе доказана теорема о замыкании, аналогичная теореме Понселе. В теореме не просто доказано, что такая цепочка шаров замкнется, но и выведено условие замыкания через данное число шагов. Рассмотрено несколько примеров и задач-следствий.

Список использованной литературы.

[1] А.А. Кириллов, Повесть о двух фракталах, Изд-во М.: МЦНМО, 2010.

[2] В.Протасов, В.Тихомиров, Пространство Lp и замечательные точки треугольника, «Квант», №2, 2012.

[3] Д.Ефремов, Новая геометрия треугольника, Одесса, 1902.

[4] J.V.Poncelet, Trait´e des propri´et´es projectives des figures, Paris, 1865.

[5] O.Bottema, Ein Schliessungssatz f¨ur zwei Kreise, Elem. Math., 20 (1965), 1-7.

[6] М.Берже, Геометрия, М. Мир, 1984.

[7] W.L.Black, H.C.Howland and B.Howland, A theorem about zigzags between two circles, Amer. Math. Monthly , 81 (1974), 754-757.

[8] A.Emch, An application of elliptic functions to Peaucellier's link-work (inversor), Ann.Math., ser. 2, vol. 2 1901.

[9] В.В. Прасолов, Задачи по планиметрии, Изд-во М.: МЦНМО, 2001.