Métodos Computacionales

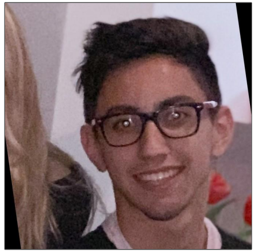
Clase 1: Ecuaciones Lineales en Álgebra Lineal

Equipo docente

Francisco Traversaro

Migue Fainstein

Facundo Gilles



Matias Mendez

Paula Feldman

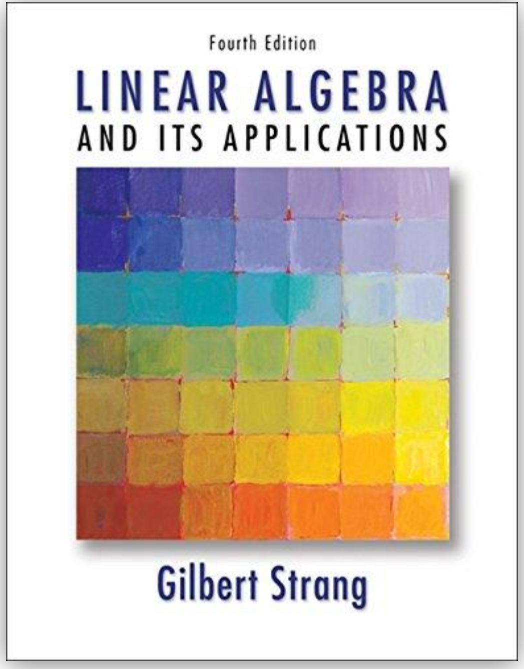
Emmanuel Iarussi

Organización de la materia

- Clases Teóricas:
  - Lunes de 09.50 a 11.30 h. y de 11.40 a 13.20 h. - SV404 (Emma/Paula/Matias)
  - Martes de 08.00 a 09.40 h. y de 09.50 a 11.30 h. - SV301 (Francisco/Facundo/Migue)
- Clases Prácticas:
  - Jueves de 09.50 a 11.30 h. y de 11.40 a 13.20 h. - SV404 (Emma/Paula/Matias)
  - Viernes de 08.00 a 09.40 h. y de 09.50 a 11.30 h. - SV302 (Francisco/Facundo/Migue)
- Aprobación de la materia:
  - 2 parciales (a mitad y final del cuatrimestre)
  - Recuperatorio en instancia de final (de cada mitad)
  - 2 Proyectos con entrega

Bibliografía principal

- Grossman, S. I. (2008). **Álgebra lineal.** McGraw Hill Educación.
- Lay, D.C., McDonald, J.J., y Lay. S.R. (2016). **Álgebra lineal y sus aplicaciones** (Quinta Edición). Pearson educación.
- Strang, G. (2006). **Linear algebra and its applications.** Belmont, CA: Thomson, Brooks/Cole.
- Strang, G. (2019). **Linear algebra and learning from data** (Vol. 4). Cambridge: Wellesley-Cambridge Press.



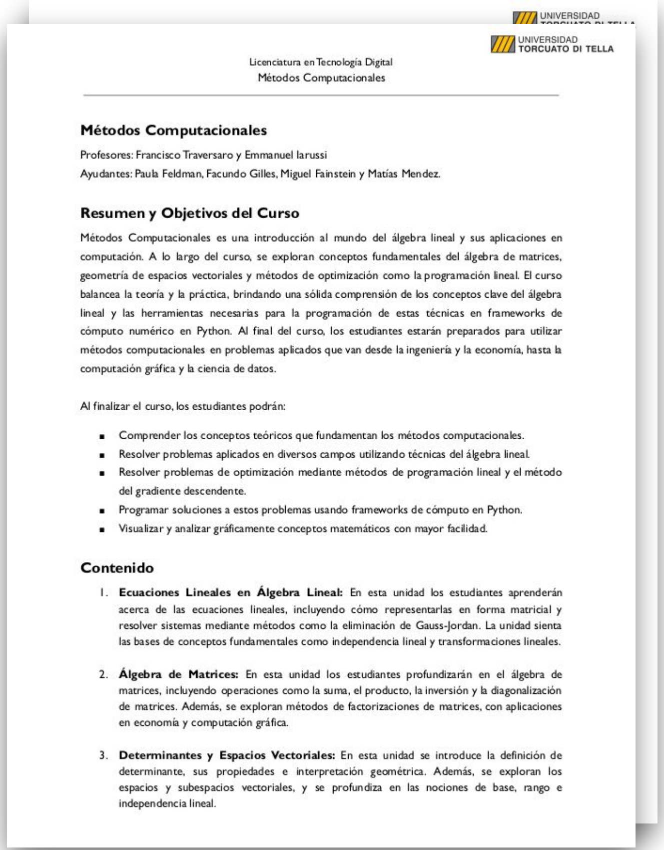
Objetivos del curso

- Comprender los conceptos teóricos de los métodos computacionales.
- Resolver problemas aplicados en diversos campos utilizando técnicas del álgebra lineal.
- Resolver problemas de optimización mediante métodos de programación lineal y el método del gradiente descendente.
- Programar soluciones a estos problemas usando frameworks de cómputo en Python.
- Visualizar y analizar gráficamente conceptos matemáticos con mayor facilidad.

Programa

1. Ecuaciones Lineales en Álgebra Lineal.
2. Álgebra de Matrices.
3. Determinantes y Espacios Vectoriales.
4. Autovalores y Autovectores.
5. Ortogonalidad y Mínimos Cuadrados.
6. Matrices Simétricas y Formas Cuadráticas.
7. Geometría de Espacios Vectoriales.
8. Introducción a la Optimización.
9. Programación Lineal.
10. Gradiente Descendente.

… más en el campus



UNIVERSIDAD TORCUATO DI TELLA

Licenciatura en Tecnología Digital
Métodos Computacionales

Métodos Computacionales

Profesores: Francisco Traversaro y Emmanuel Iarussi
Ayudantes: Paula Feldman, Facundo Gilles, Miguel Fainstein y Matías Mendez.

Resumen y Objetivos del Curso

Métodos Computacionales es una introducción al mundo del álgebra lineal y sus aplicaciones en computación. A lo largo del curso, se exploran conceptos fundamentales del álgebra de matrices, geometría de espacios vectoriales y métodos de optimización como la programación lineal. El curso balancea la teoría y la práctica, brindando una sólida comprensión de los conceptos clave del álgebra lineal y las herramientas necesarias para la programación de estas técnicas en frameworks de cómputo numérico en Python. Al final del curso, los estudiantes estarán preparados para utilizar métodos computacionales en problemas aplicados que van desde la ingeniería y la economía, hasta la computación gráfica y la ciencia de datos.

Al finalizar el curso, los estudiantes podrán:

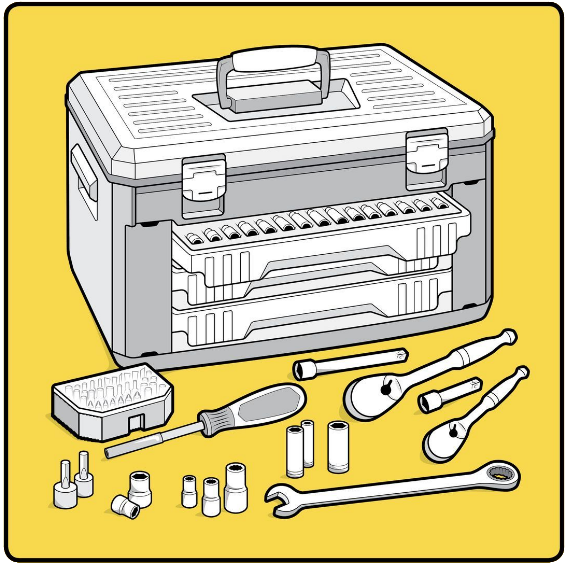
- Comprender los conceptos teóricos que fundamentan los métodos computacionales.
- Resolver problemas aplicados en diversos campos utilizando técnicas del álgebra lineal.
- Resolver problemas de optimización mediante métodos de programación lineal y el método del gradiente descendente.
- Programar soluciones a estos problemas usando frameworks de cómputo en Python.
- Visualizar y analizar gráficamente conceptos matemáticos con mayor facilidad.

Contenido

1. **Ecuaciones Lineales en Álgebra Lineal:** En esta unidad los estudiantes aprenderán acerca de las ecuaciones lineales, incluyendo cómo representarlas en forma matricial y resolver sistemas mediante métodos como la eliminación de Gauss-Jordan. La unidad sienta las bases de conceptos fundamentales como independencia lineal y transformaciones lineales.
2. **Álgebra de Matrices:** En esta unidad los estudiantes profundizarán en el álgebra de matrices, incluyendo operaciones como la suma, el producto, la inversión y la diagonalización de matrices. Además, se exploran métodos de factorizaciones de matrices, con aplicaciones en economía y computación gráfica.
3. **Determinantes y Espacios Vectoriales:** En esta unidad se introduce la definición de determinante, sus propiedades e interpretación geométrica. Además, se exploran los espacios y subespacios vectoriales, y se profundiza en las nociones de base, rango e independencia lineal.

Herramientas para el curso

- Python
- Conda Environments
- Jupyter Notebooks (Google Colab)
- Visual Studio Code
- GitHub
- Papel y lápiz!



Sistemas de Ecuaciones Lineales

Sistemas de ecuaciones lineales

Una **ecuación lineal** en variables $x_1, \ldots, x_n$ es una ecuación que puede ser escrita en la forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Sistemas de ecuaciones lineales

Un **sistema** de ecuaciones lineales (o sistema lineal), en las mismas variables $x_1, \ldots, x_n$, es una colección de m ecuaciones lineales:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
&\vdots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{aligned}
$$

Sistemas de ecuaciones lineales

- Una **solución** del sistema lineal es una lista de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que hacen que cada ecuación sea verdadera cuando los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se sustituyen por las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente.

<Notebook>

Sistemas de ecuaciones lineales

- Una **solución** del sistema lineal es una lista de números $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ que hacen que cada ecuación sea verdadera cuando los valores $s_1, s_2, \ldots, s_n$ se sustituyen por las variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectivamente.
- Un sistema de ecuaciones lineales tiene:
  - Ninguna solución, o
  - Exactamente una solución, o
  - Infinitas soluciones.

Sistemas de ecuaciones lineales

- Al conjunto de todas las posibles soluciones lo llamamos **conjunto solución**.
- Si dos sistemas de ecuaciones tienen el mismo conjunto solución (cada solución del primer sistema es solución del segundo y viceversa), decimos que son **equivalentes**.

Notación Matricial

Es posible condensar toda la información necesaria de un sistema lineal en un arreglo rectangular que llamamos **matriz**, de tamaño m x n.

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

mayúsculas

Notación Matricial

Es posible condensar toda la información necesaria de un sistema lineal en un arreglo rectangular que llamamos **matriz**, de tamaño m x n.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + \quad x_3 &= 0 \\
2x_2 - 8\,x_3 &= 8 \\
5x_1 \qquad - 5\,x_3 &= 10
\end{aligned}
\qquad
A = \underbrace{\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{array}\right]}_{\text{Matriz aumentada}}
$$

Matriz de coeficientes

Matriz aumentada

mayúsculas

Resolución de un sistema lineal

- Estrategia sistemática de reemplazo por sistemas equivalentes
- 3 operaciones básicas:
  - **Sustitución:** Reemplazar una ecuación (fila) por la suma entre sí misma y un múltiplo de otra ecuación (fila).
  - **Intercambio:** Intercambiar dos ecuaciones (dos filas)
  - **Escala:** Multiplicar todos los términos en una ecuación (fila) por una constante ($\neq 0$).

Resolución de un sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 5x_1 - 5x_3 &= 10 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} -5 \cdot fila1 \\ +fila3 \\ \hline nueva\_fila3 \end{array} \Big\downarrow$$

Resolución de un sistema lineal

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_2 - 8x_3 &= 8 \\
5x_1 - 5x_3 &= 10
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{r} -5 \cdot fila1 \\ +fila3 \\ \hline nueva\_fila3 \end{array} \Big\downarrow
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\
2x_2 - 8x_3 &= 8 \\
10x_2 - 10x_3 &= 10
\end{aligned}
\qquad
\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}
$$

Resolución de un sistema lineal

- Estrategia general de eliminación:
  - Coeficiente de x_i en la fila i para eliminar los términos x_i en las demás filas. Repetimos con x_2 en la segunda ecuación.
  - Continuamos hasta obtener un sistema simple de ecuaciones equivalentes (**matriz triangular**).

Resolución de un sistema lineal

- Estrategia general de eliminación:
  - Coeficiente de x_i en la fila *i* para eliminar los términos x_i en las demás filas. Repetimos con x_2 en la segunda ecuación.
  - Continuamos hasta obtener un sistema simple de ecuaciones equivalentes (**matriz triangular**).

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -4 \\ 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 &= -8 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Resolución de un sistema lineal

- Operaciones sobre filas aplican a cualquier matriz.
- Dos matrices transformadas una en la otra mediante operaciones sobre filas, son **equivalentes por filas.**

Resolución de un sistema lineal

- Operaciones sobre filas aplican a cualquier matriz.
- Dos matrices transformadas una en la otra mediante operaciones sobre filas, son **equivalentes por filas.**

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & -7 \\ 5 & 4 & -7 & 6 \end{bmatrix} \overset{?}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -9 & 7 & -11 \\ 0 & -6 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

Resolución de un sistema lineal

- Operaciones sobre filas aplican a cualquier matriz.
- Dos matrices transformadas una en la otra mediante operaciones sobre filas, son **equivalentes por filas.**

Dos **matrices aumentadas** de dos sistemas de ecuaciones que son **equivalentes por filas** tienen el **mismo conjunto solución.**

Existencia y Unicidad

- Dos preguntas fundamentales sobre los sistemas lineales:
  - ¿Existe al menos una solución? Si existe, decimos que el sistema es **consistente**.
  - Si existe esa solución, ¿sabemos si es única?

EJEMPLO:

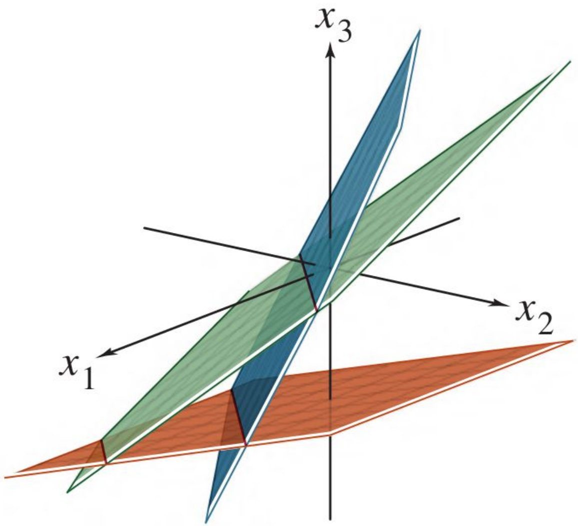
$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Existencia y Unicidad

- Llegamos a una contradicción: **sistema inconsistente**.
- No existen valores para x_1, x_2, x_3 que lo satisfagan.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 &= 1 \end{aligned}$$



Resolución de un sistema lineal

- En el papel:
  - Recuerden **ordenar las variables** del sistema antes de construir la matriz aumentada.
  - Una vez resuelto, **verifiquen la solución** sustituyendo en el sistema original de ecuaciones.

Resolución de un sistema lineal

- En la compu:
  - Se resuelven con algoritmos similares al que ejecutamos en papel, pero con modificaciones que mejoran la performance.
  - En problemas reales, podemos tener sistemas con 50, 5000 o incluso más variables.
  - Las operaciones se realizan en aritmética de punto flotante, susceptible a errores por redondeo o truncamiento.

Forma escalonada de una matriz

- Una matriz rectangular se encuentra en **forma escalonada** (o escalonada por filas) si cumple con las siguientes propiedades:

1. Todas las **filas cero** están en la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento de cada fila diferente de cero está a la derecha del primer elemento diferente de cero de la fila anterior.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada de una matriz

- Una matriz rectangular se encuentra en **forma escalonada reducida** si:
    1. La matriz está en forma escalonada.
    2. El primer elemento de cada fila (distinta de cero) es 1.
    3. Cada primer elemento es el único distinto de cero en su columna.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Forma escalonada de una matriz

- Más ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Forma escalonada reducida

■ Primer elemento (pivot) de la fila, debe ser $\neq 0$

* Pueden tomar cualquier valor (incluso 0)

Forma escalonada de una matriz

- Más ejemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * \end{bmatrix}$$

Forma escalonada

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{bmatrix}$$

Forma escalonada reducida

EJEMPLO:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

■ Primer elemento (pivot) de la fila, debe ser $\neq 0$

* Pueden tomar cualquier valor (incluso 0)

Forma escalonada de una matriz

- Cualquier matriz **puede ser reducida** mediante operaciones elementales por filas en **más de una** matriz de forma escalonada (si se usan diferentes secuencias de operaciones).

Forma escalonada de una matriz

- Cualquier matriz **puede ser reducida** mediante operaciones elementales por filas en **más de una** matriz de forma escalonada (si se usan diferentes secuencias de operaciones).
- Sin embargo:

Cada matriz es equivalente por filas a **una y solo una matriz** en forma escalonada reducida.

Algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan

- **Paso 1:** Elegir la columna (distinta de cero) más a la izquierda como columna pivot.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{Columna pivot} \end{array}$$

Algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan

- **Paso 1:** Elegir la columna (distinta de cero) más a la izquierda como columna pivot.
- **Paso 2:** Elegir al primer elemento (distinto de cero) de la columna como pivot.

Pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan

- **Paso 1:** Elegir la columna (distinta de cero) más a la izquierda como columna pivot.
- **Paso 2:** Elegir al primer elemento (distinto de cero) de la columna como pivot.
- **Paso 3:** Usar sustitución sobre la filas para crear ceros debajo del pivot.

Pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan

- **Paso 1:** Elegir la columna (distinta de cero) más a la izquierda como columna pivot.
- **Paso 2:** Elegir al primer elemento (distinto de cero) de la columna como pivot.
- **Paso 3:** Usar sustitución sobre la filas para crear ceros debajo del pivot.
- **Paso 4:** Ignorar la fila que contiene al pivot. Aplicar los pasos de 1 a 3 sobre todas las submatrices restantes.

Pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Nueva columna pivot

Algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan

- **Paso 1:** Elegir la columna (distinta de cero) más a la izquierda como columna pivot.
- **Paso 2:** Elegir al primer elemento (distinto de cero) de la columna como pivot.
- **Paso 3:** Usar sustitución sobre la filas para crear ceros debajo del pivot.
- **Paso 4:** Ignorar la fila que contiene al pivot. Aplicar los pasos de 1 a 3 sobre todas las submatrices restantes.

$$\begin{bmatrix} 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Pivot

Forma escalonada

Algoritmo de eliminación de Gauss-Jordan

- **Paso 1:** Elegir la columna (distinta de cero) más a la izquierda como columna pivot.
- **Paso 2:** Elegir al primer elemento (distinto de cero) de la columna como pivot.
- **Paso 3:** Usar sustitución sobre la filas para crear ceros debajo del pivot.
- **Paso 4:** Ignorar la fila que contiene al pivot. Aplicar los pasos de 1 a 3 sobre todas las submatrices restantes.

Forma escalonada

- **Paso 5:** Crear ceros encima de cada pivot (comenzando por el pivot más a la derecha). Convertir pivots a 1 (escala).

Forma escalonada reducida

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 & -24 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución al sistema de ecuaciones

- Aplicar el algoritmo anterior sobre la matriz aumentada de un sistema de ecuaciones lleva directamente a la solución.

Variable libre

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} x_1 \qquad -5x_3 &= 1 \\ x_2 \quad +x_3 &= 4 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Variables básicas

Solución al sistema de ecuaciones

- En los **sistemas consistentes**, la solución puede ser expresada utilizando las variables básicas (en términos de las variables libres).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 5x_3 \\ x_2 = 4 - x_3 \\ x_3 \text{ es libre} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ infinitas soluciones!

Solución al sistema de ecuaciones

- Para determinar existencia y unicidad llevar el sistema a la forma escalonada:
  - Si contiene al menos una ecuación del estilo $0=b$, con $b\neq 0$, entonces el sistema es **inconsistente**.
  - Sino, el sistema es consistente y existe al menos una solución:
    - Si no contiene variables libres, **solución única**.
    - Si contiene variables libres, hay **infinitas soluciones**.

<Notebook>

Solución al sistema de ecuaciones

- Para determinar existencia y unicidad llevar el sistema a la forma escalonada:
  - Si contiene al menos una ecuación del estilo $0=b$, con $b\neq 0$, entonces el sistema es **inconsistente**.
  - Sino, el sistema es consistente y existe al menos una solución:
    - Si no contiene variables libres, **solución única**.
    - Si contiene variables libres, hay **infinitas soluciones**.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 5x_4 &= 3 \\ 3x_1 - 6x_2 - 6x_3 + 8x_4 &= 2 \end{aligned}$$