Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики,
Физика-механический институт
«Прикладная математика и информатика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «Интервальный анализ»

Выполнил
студент группы 5030102/80201

Войнова Алёна

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} [0,\ 2] \cdot x_1 + [0,\ 3] \cdot x_2 = [-1,\ 4] \\ x_1 - [1,\ 4] \cdot x_2 = 0 \\ [1,\ 2] \cdot x_1 = [5,\ 7] \end{cases} \tag{1}$$

Для нее необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- Максимума распознающего функционала
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы
- Оценок вариабельности решения
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ в целом
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ построчно

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Распознающим называется функционал

$$\mathrm{Tol}(x) = \mathrm{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \le i \le m} \left\{ b_i - \left| b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right| \right\}$$

$$x \in \Xi_{\mathrm{tol}} \Leftrightarrow \mathrm{Tol}(x) \ge 0$$

$\mathrm{Tol}(x)$ - ограничен, вогнут. Он всегда достигает конечного максимума на R^n. Таким образом, найдя максимум данного функционала, можно судить о пустоте допускового множества решений ИСЛАУ. Если $\max\limits_{x \in R^n} \mathrm{Tol}(x) \ge 0$, то допусковое множество не пусто. В противном случае $\Xi_{\mathrm{tol}} =$. Обратные утверждения также верны.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части

Общая схема метода заключается в добавлении к каждой компоненте правой части ИСЛАУ величины $K \cdot \nu_i \cdot [-1,\ 1]$, где i - номер компоненты, ν_i - вес, задающий относительное расширение i-й компоненты, K - общий коэффициент расширения вектора b. В данной работе используются значение $\nu_i = 1\ \forall i = \overline{1, 3}$. Подобрав K таким образом, чтобы выполнялось $K + \max\limits_{x \in R^n} \mathrm{Tol}(x) \ge 0$, получим разрешимую систему с непустым допусковым множеством.

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

Общая схема метода заключается в модификации исходной матрицы ИСЛАУ. Производим замену A на $A \ominus K \cdot N \cdot E$ где $N = \{\nu_i\}$ - матрица весов, K - общий коэффициент сужения A, E состоит из $[-e_{ij}, e_{ij}]$. При выполнении процедуры необходимо следить за тем, чтобы мы оставались в рамках IR.

При выполнении задания достижения разрешимости рекомендуется выполнять корректировку пропорционально координатам точки, в которой достигается максимум распознающего функционала.

При выполнении задания управления положением максимума распознающего функционала в случае коррекции матрицы в целом N - единичная матрица, в случае построчной - $N = \mathrm{diag}\{\nu_i\}$.

2.4 Оценки вариабельности решения

Для оценки вариабельности решений предлагается использовать абсолютную и относительную оценки:

$$\mathrm{ive}(A, b) = \min_{A \in A} \mathrm{cond}\, A \cdot ||\mathrm{argmax}\ \mathrm{Tol}(x)|| \frac{\max\limits_{x \in R^n} \mathrm{Tol}(x)}{||b||}$$

$$\mathrm{rve}(A, b) = \min_{A \in A} \mathrm{cond}\, A \cdot \max_{x \in R^n} \mathrm{Tol}(x)$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств в среде разработки Matlab. Использованы библиотеки IntLab для реализации вычислений интервальной арифметики. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Достижение разрешимости ИСЛАУ

Исходная рассматриваемая ИСЛАУ имеет пустое допусковое множество. $argmax = [2.6667, 0.33333]$ $tolmax = -2.3333 < 0 \Rightarrow$ система несовместна.

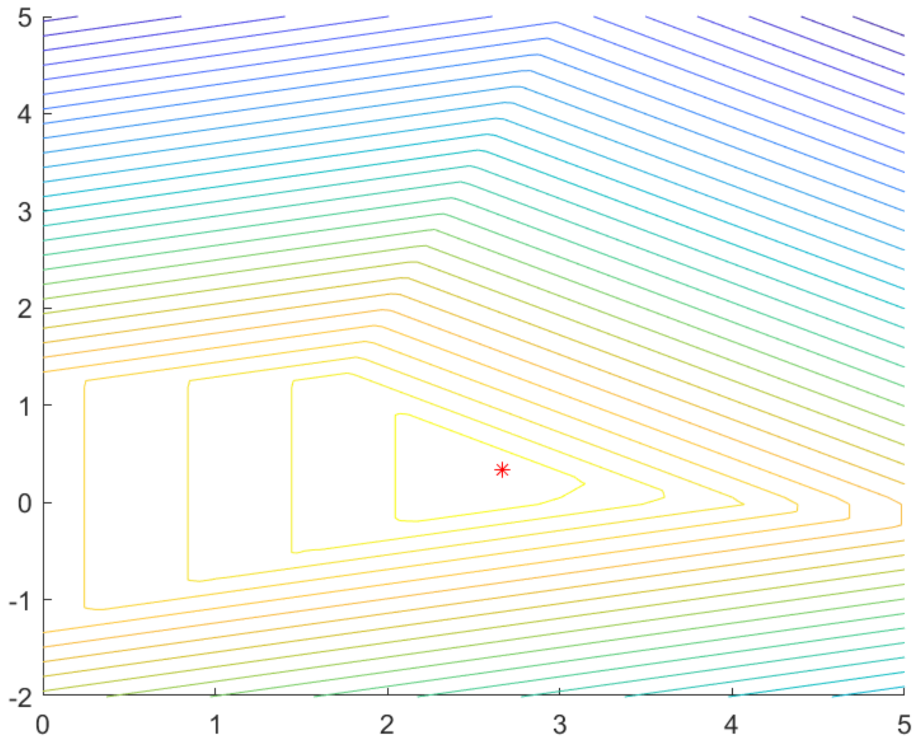

Рис. 1: График $\mathrm{Tol}(x, A, b)$

4.2 Корректировка правой части

Корректировака правой части, с помощью описанного выше способа помогла добиться непустого множества решений интервальной системы, $argmax = [2.6667, 0.33333]$ $tolmax = 1.1667 > 0 \Rightarrow$ система совместна. Вектор столбца

$$b' = ([-4.5001, 7.5001], [-3.5001, 3.5001], [1.4999, 10.5001])$$

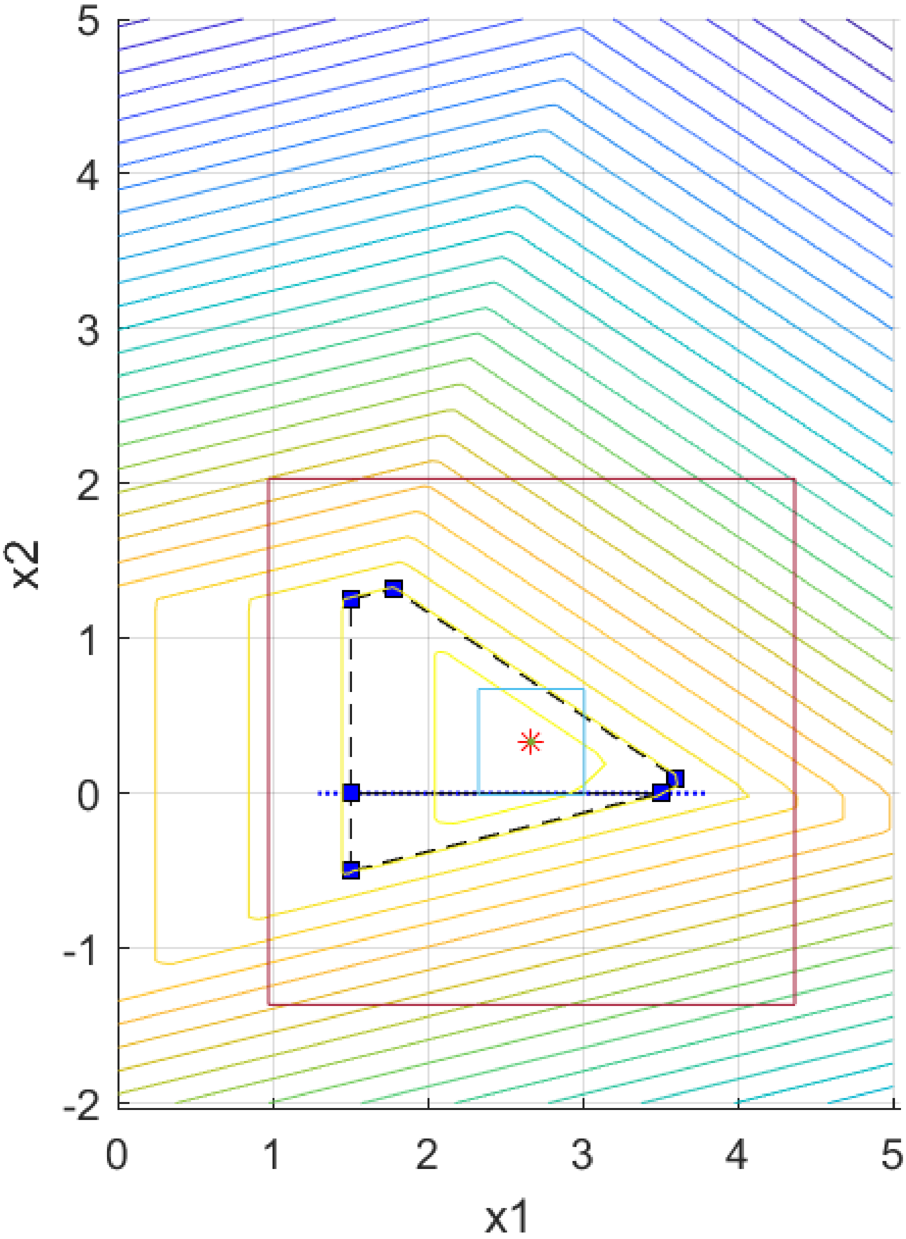

Рис. 2: График $\mathrm{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с корректировкой в правой части

4.3 Корректировка матрицы

На каждой итерации сужаем радиус интервалов матрицы до тех пор, пока максимальное значение распознающего функционала не станет положительным или близким к нулю, $argmax = [1.7143, 0.28571]$ $tolmax = 0.57143 > 0 \Rightarrow$ система совместна. Итоговая матрица:

$$A' = \begin{pmatrix} [0.4999, 1.5001] & [0.0000, 3.0000] \\ 1 & [-4.0000, -1.0000] \\ [1.4999, 1.5001] & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

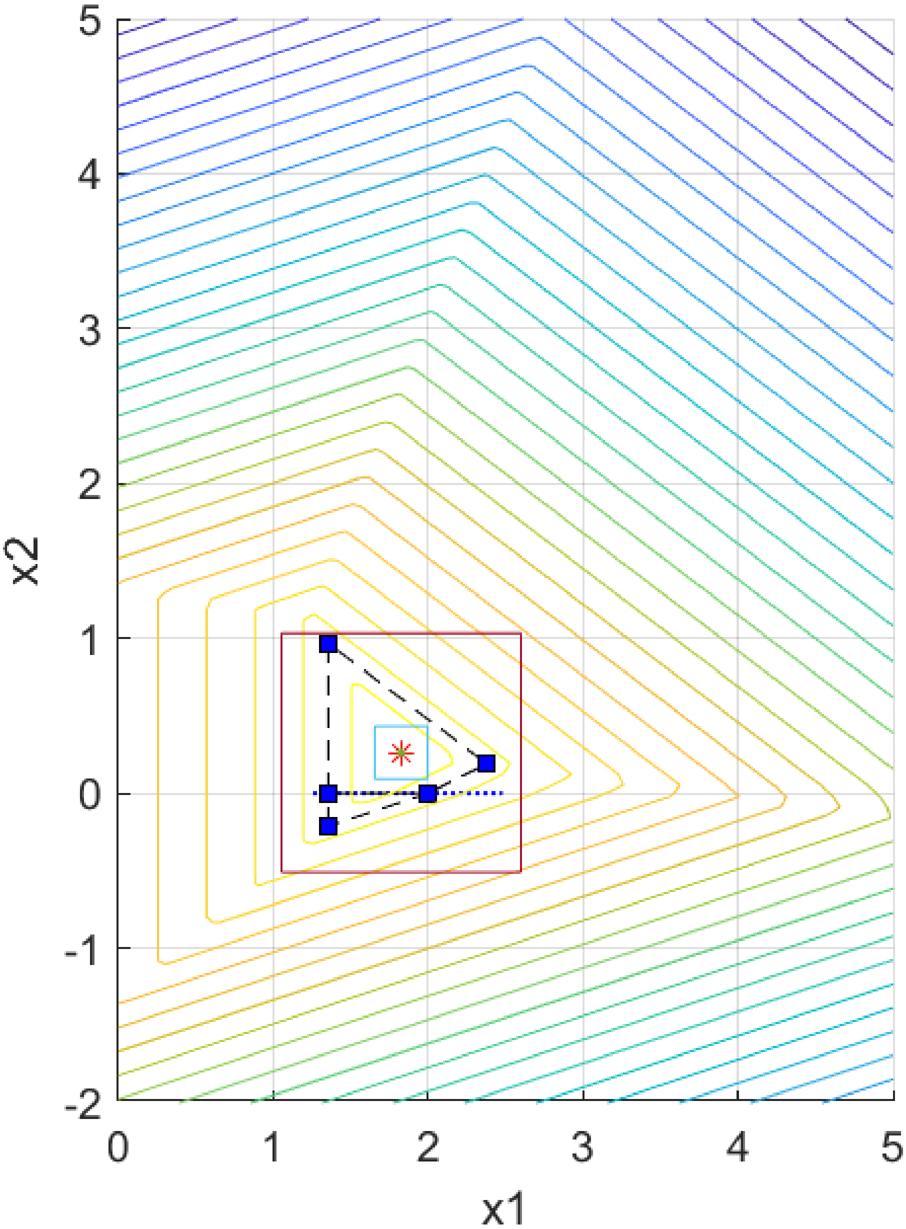

Рис. 3: График Ξ_{tol} для ИСЛАУ с корректировкой матрицы

4.4 Управление положением максимума распознающего функционала

На каждой итерации для каждой строки сжимаем интервал в два раза и получаем следующие последовательности аргументов, сообщающих максимум распознающему функциналу:

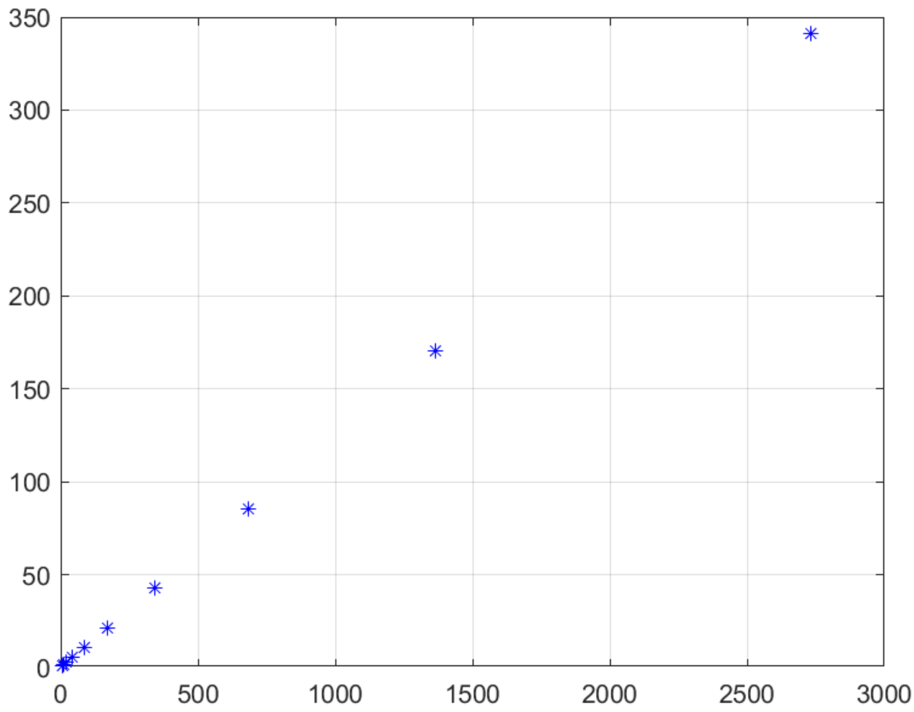

Рис. 4: Положение максимумов Tol при корректировки матрицы в целом

Результат полученный отдельно для каждой строки:

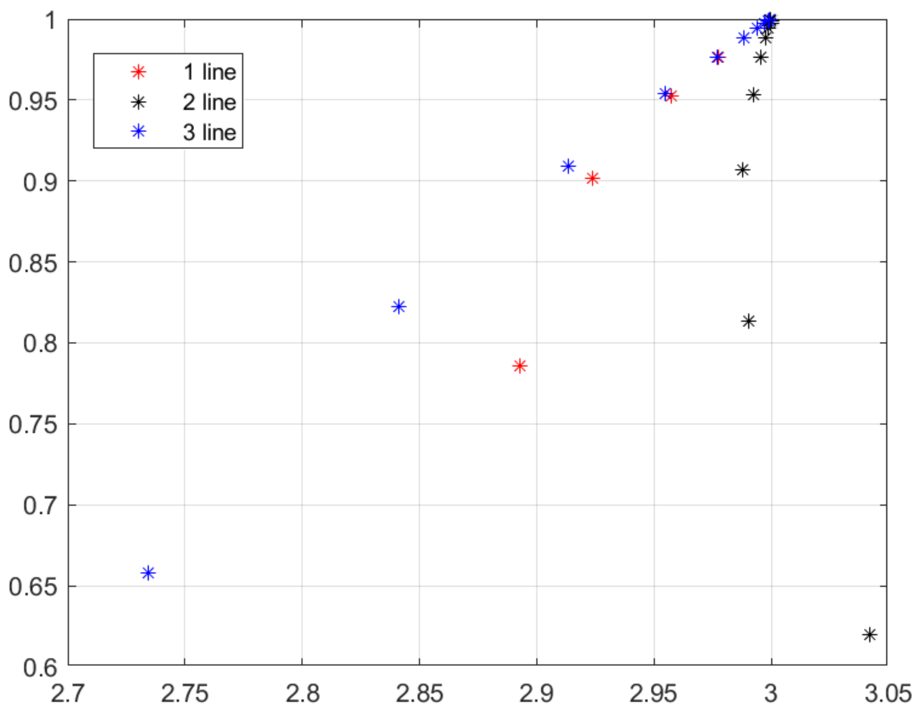

Рис. 5: Положение максимумов Tol при корректировки матрицы построчно

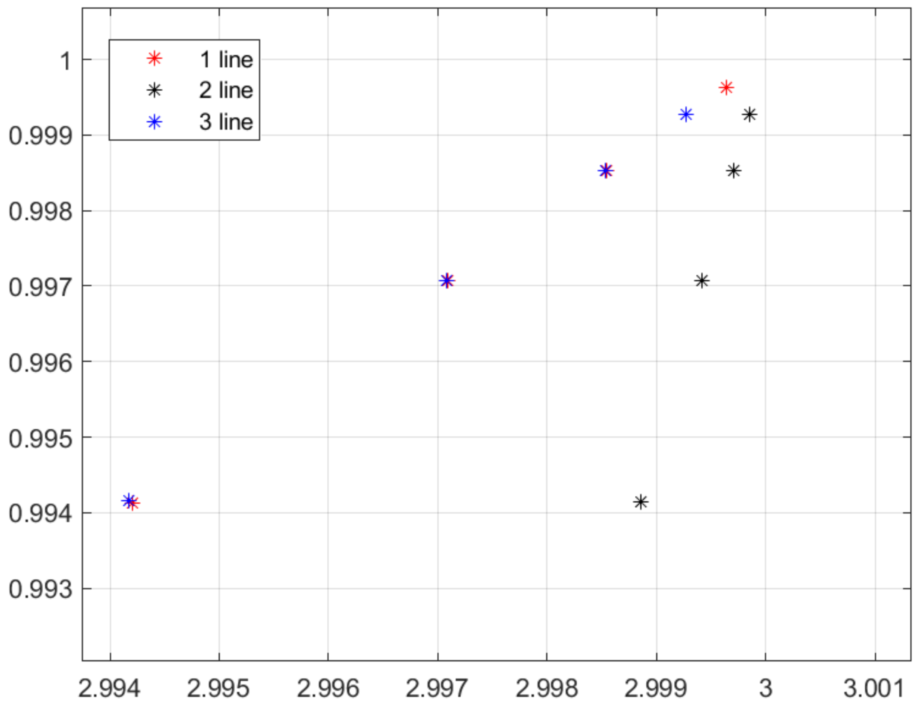

Рис. 6: Положение максимумов Tol при корректировки матрицы построчно (увеличенный)

Видно, что для рассматриваемой ИСЛАУ смещение точки максимума происходит при правки каждой из строк.

5 Обсуждение

- Оценки вариабльности меньше при коррекции матрицы, при этом брусы, соответствующие оценкам вариабельности, хорошо оценили допусковое множество итоговой ИСЛАУ
- Коррекция правой части влечет увеличение значений максимума распознающего функционала
- Коррекция матрицы ИСЛАУ меняет форму распознающего функционала во всех рассмотренных преобразованиях
- По графикам 5 и 6 видно, что все три уравнения вносят примерно одинаковый вклад в изменение точки максимума распознающего функционала

6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: `https://github.com/pikabol88/IntervalAnalysis/tree/main/lab3`