Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики,
Физика-механический институт
«Прикладная математика и информатика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «Интервальный анализ»

Выполнил
студент группы 5030102/80201

Войнова Алёна

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

Рассмотрим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} [1,2] & [-1,-3] \\ [3,4] & [2,3] \end{pmatrix} \tag{1}$$

и вектор

$$x = \begin{pmatrix} [2,4] \\ [6,8] \end{pmatrix} \tag{2}$$

Тогда несложно сосчитать, что вектор правых частей

$$b = \begin{pmatrix} [-22,2] \\ [18,40] \end{pmatrix} \tag{3}$$

Тогда получаем ИСЛАУ

$$\begin{cases} [1,\ 2] \cdot x_1 + [-1,\ -3] \cdot x_2 = [-22,\ 2] \\ [3,\ 4] \cdot x_1 + [2,\ 3] \cdot x_2 = [18,\ 40] \end{cases} \tag{4}$$

Для нее необходимо построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части по теореме Зюзина, а также провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусов итерационного процесса
- Радиусов решения в зависимости от номера итерации

1.1 Использование субдифференциального метода Ньютона

Даны две ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [3,\ 4] \cdot x_1 + [5,\ 6] \cdot x_2 = [-3,\ 3] \\ [-1,\ 1] \cdot x_1 + [-3,\ 1] \cdot x_2 = [-1,\ 2] \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} [3,\ 4] \cdot x_1 + [5,\ 6] \cdot x_2 = [-3,\ 4] \\ [-1,\ 1] \cdot x_1 + [-3,\ 1] \cdot x_2 = [-1,\ 2] \end{cases} \tag{6}$$

Необходимо построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона, провести вычисления и привести иллюстрации брусов итерационного процесса, а также сравнить полученные результаты для систем (5) и (6).

2 Теория

2.1 Теорема Зюзина

Пусть в интервальной линейной системе уравнений

$$Cx = d, \quad C \in KR^{n\times n},\ d \in KR^n$$

правильная проекция матрицы C имеет диагональное преобладание. Тогда формальное решение системы существует и единственно.

Итерационный процесс строится следующим образом

$$D = \text{diag}\{c_{ii}\}_{i=1}^n \quad E = C \ominus D$$

$$Cx = d \Leftrightarrow Dx = d \ominus Ex$$

$$x^{k+1} = \text{inv}\, D \cdot (d \ominus Ex^k),\ k = 0, 1, \ldots$$

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационная процедура субдифференциального метода Ньютона описывается следующей формулой:

$$x^k = x^{k-1} - \tau(D^{k-1})^{-1}\mathcal{F}(x^{k-1}),$$

где $\mathcal{F}(x) = \text{sti}\,(C \cdot \text{sti}^{-1}\,(x)) - x + \text{sti}\,(d)$ (sti - операция стандартного погружения, отображения из KR^n в R^{2n}), D^{k-1} - какой-нибудь субградиент отображения $\mathcal{F}$ в точке x^{k-1}, τ - константа, в данной работе выбрана единицей.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств в среде разработки Octave с библиотекой полной интервальной арифметики kinterval. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Итерационный процесс с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части

Число итераций - 10. Начальный брус обозначен синим цветом.

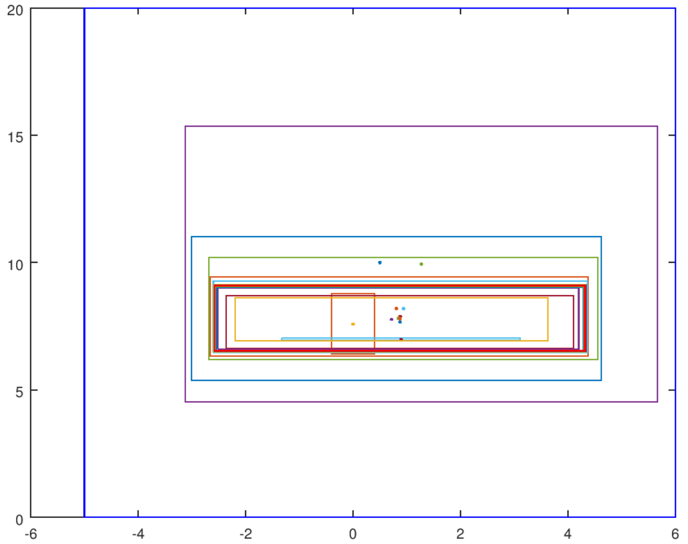

Рис. 1: Изображение брусов при решении задачи (4)

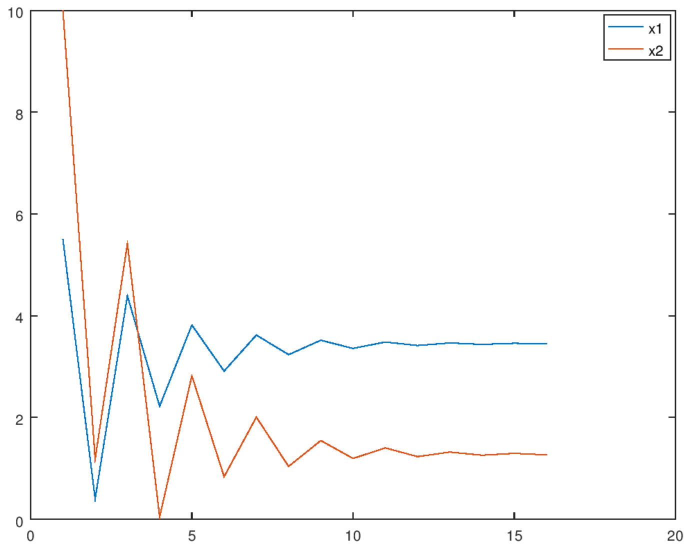

Рис. 2: Зависимость радиусов брусов от числа итераций при решении задачи (4)

4.2 Итерационный процесс по субградиентному методу Ньютона

При решении задачи (5) использовался параметр $\tau = 1$, финальный брус получен на четвертой итерации метода.

Полученный результат:

$$x = \begin{pmatrix} [0.0, 0.5] \\ [-0.5, 0.167] \end{pmatrix} \tag{7}$$

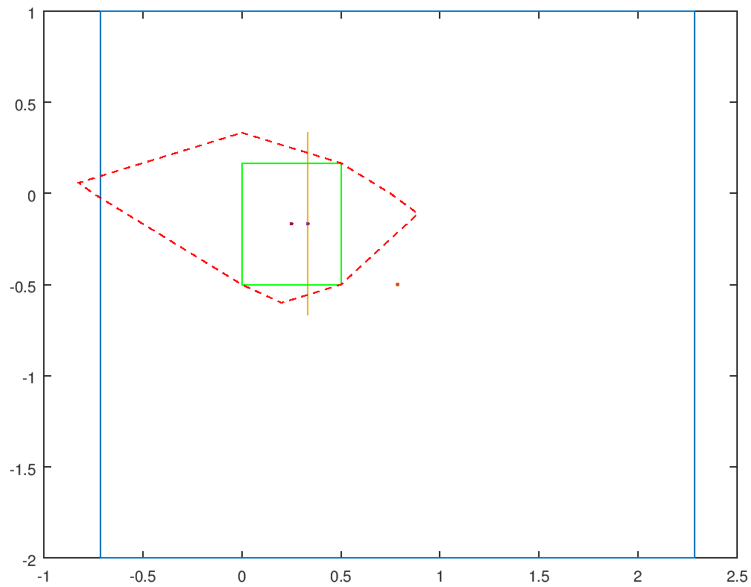

Рис. 3: Решение задачи (5) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$

Решение задачи (6) с параметром $\tau = 1$. Число итераций - 500. Полученный результат:

$$x = \begin{pmatrix} [-0.33333, 1] \\ [-0.33333, 0] \end{pmatrix} \tag{8}$$

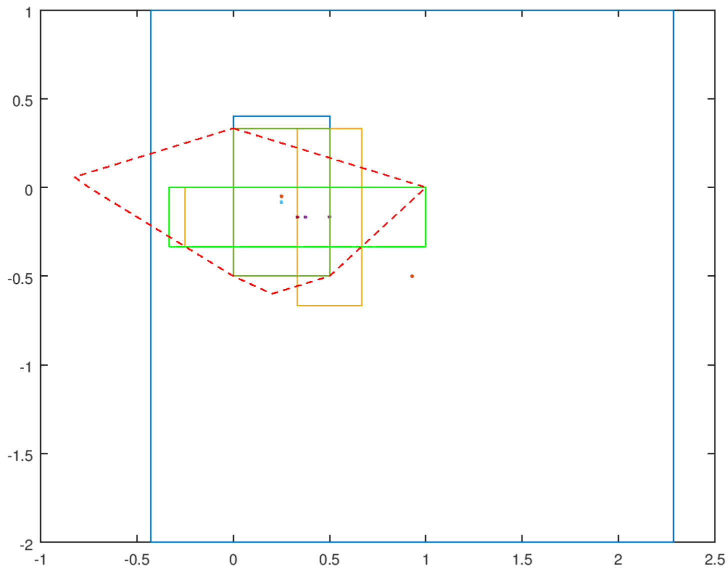

Рис. 4: Решение задачи (6) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 1$

Решение задачи (6) с параметром $\tau = 0.05$. Число итераций - 300. Полученный результат:

$$x = \begin{pmatrix} [-0.083333, 0.66667] \\ [-0.44444, 0.22222] \end{pmatrix} \tag{9}$$

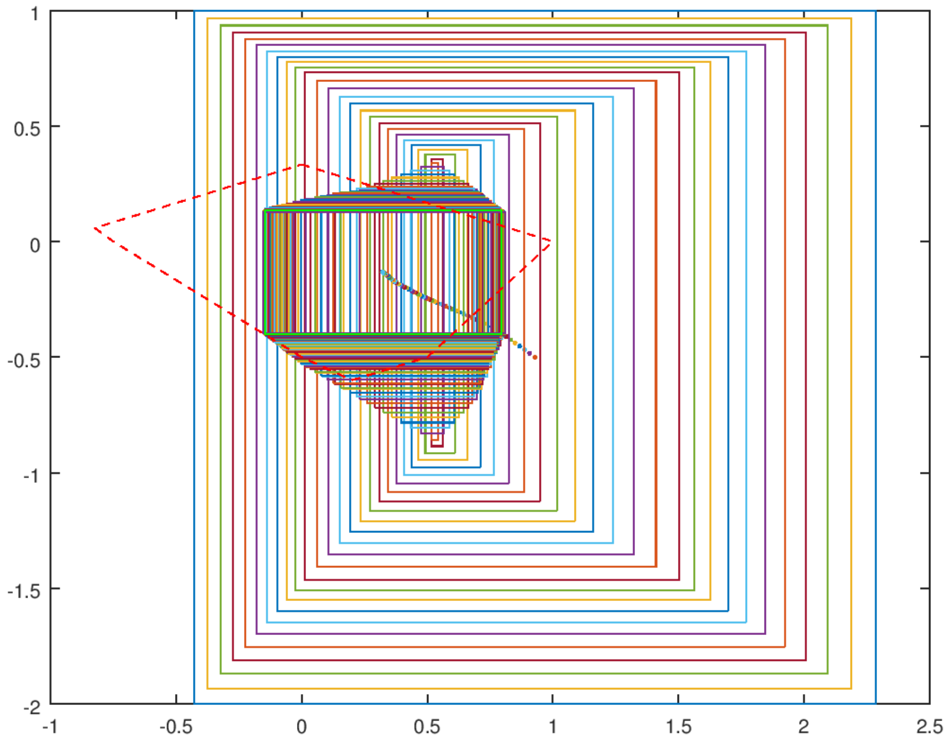

Рис. 5: Решение задачи (6) субградиентным методом Ньютона, $\tau = 0.05$

Процесс зацикливается при разных τ

5 Обсуждение

1. Глядя на график 2, обнаруживаем, что наиболее адекватная оценка была получена на второй итерации. После десятой итарации результат существенно не изменяется => метод Зюзина достаточно быстро сходится и дает корректный результат

2. При решении задачи 5 получена точная внутренняя оценка Ξ_{tol}, субградиентный метод Ньютона сошелся очень быстро - после четвертой итерации итерационный процесс остановился.

3. При решении задачи 6 не была получена внутренняя оценка Ξ_{tol}. Тем не менее, результат после остановки из-за условия, ограничивающего число итераций показывает достаточно адекватную грубую оценку

4. При уменьшении параметра τ получен другой брус. Оценка получилась более удачна, так как полученный брус больше по площади, чем предыдущий, и еще большая его часть лежит внутри допускового множества.

6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: `https://github.com/pikabol88/IntervalAnalysis/tree/main/lab4`