Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики,
Физика-механический институт
«Прикладная математика и информатика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «Интервальный анализ»

Выполнил
студент группы 5030102/80201

Войнова Алёна

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021

Содержание

Список иллюстраций

1 Постановка задачи

1.1 Задача 1

Имеем 2x2 матрицу A: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$

Пусть все элементы матрицы a_{ij} имеют теперь радиус ϵ: $rada_{ij} = \epsilon$.

Получаем $\begin{pmatrix} [1{-}\epsilon,\, 1+\epsilon] & [1{-}\epsilon,\, 1+\epsilon] \\ [1.1{-}\epsilon,\, 1.1+\epsilon] & [1{-}\epsilon,\, 1+\epsilon] \end{pmatrix}$

Определить, при каком радиусе ϵ матрица (1.1) содержит особенные точечные матрицы.

1.2 Задача 2

Имеем 2 x 2 матрицу

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \end{pmatrix} \tag{1}$$

Определить, при каком радиусе ϵ матрица (1) содержит особенные матрицы.

1.3 Задача 3

Для функции Booth

$$f(x, y) = (x + 2y - 7)^2 + (2x + y - 5)^2, \tag{2}$$

имеющей один глобальный экстреммум, и функции Cross-in-tray

$$f(x, y) = -0.0001[|\sin(x)\sin(y)\exp(|100 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\pi}|)| + 1]^{0.1}, \tag{3}$$

имеющей 4 равнозначных глобальных экстремума, необходимо провести вычисления по поиску глобального минимума с помощью простейшего интервального адаптивного алгоритма глобальной оптимизации.

2 Теория

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{nxn}$ называется неособенной, если неособенны все точечные матрицы $A \in \mathbf{A}$. Интервальная матрица называется особенной, если она содержит особенную точечную матрицу.

2.1 Критерий Баумана

Матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ неособенна $\Leftrightarrow$ $\forall A', A'' \in \operatorname{vert} \mathbf{A}\ \det(A') \cdot \det(A'') > 0$

2.2 Признак Румпа

$\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n\times n}$, $\sigma_{\max}(\mathrm{rad}\,\mathbf{A}) < \sigma_{\min}(\mathrm{mid}\,\mathbf{A}) \Rightarrow \mathbf{A}$ неособенна.

2.3 Глобальная оптимизация

Суть простейшего интервального адаптивного алгоритма глобальной оптимизации похожа на алгоритм дихотомии, только для многомерного случая. Имеется рабочий список рассматриваемых брусьев, для каждого из которых вычислено целевое значение функции (в интервальном смысле). На каждой итерации метод выбирает из этого списка брус, на котором нижняя оценка значения функции наименьшая. Этот брус удаляется из списка, после чего туда добавляются два новых, которые получились из исходного путем дробления его самой длинной компоненты пополам (от нижней границы до середины и от середины до верхней границы). На этих брусьях вычисляется интервальная оценка целевой функции, выполняется переход на новую итерацию.

2.4 Алгоритм GlobOpt

Алгоритм для глобальной минимизации функции GlobOpt оперирует с рабочим списком ζ, в котором будут храниться все брусы, получающиеся в результате дробления исходного бруса области определения на более мелкие подбрусы.
Одновременно с самими подбрусами будем хранить в рабочем списке и нижние оценки областей значений целевой функции по этим подбрусам, так что элементами списка ζ будут записи-пары вида:

$$\zeta : (Y, y), \text{где} Y \subseteq X, y = f(Y). \tag{4}$$

Далее каждый шаг алгоритма состоит в извлечении из этого списка бруса, который обеспечивает рекордную (т. е. наименьшую) на данный момент оценку минимума снизу, его дроблении на более мелкие подбрусы, оценивании на них целевой функции, занесении результатов обратно в рабочий список.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств в среде разработки Matlab. Использованы библиотеки IntLab для реализации вычислений интервальной арифметики. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Задача 1

Точечная матрица особенная, если её строки линейно зависимы => нам достаточно добиться непустого пересечения интервалов $\mathbf{x}_{11}$ и $\mathbf{x}_{21}$. Очевидно, что при $\varepsilon = 0.05$

найдется особенная точечная матрица:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} [0.95, 1.05] & 1 \\ [1.05, 1.15] & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 1.05 & 1 \\ 1.05 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{X},\ \det(X) = 0$$

Воспользуемся критерием Баумана. Множество vert $\mathbf{X}$ содержит 4 точечные матрицы. Обозначим их определители за $\Delta_i,\ i = \overline{1,4}$

$$\Delta_1 = -0.1 \quad \Delta_2 = 2\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_3 = -2\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_4 = -0.1$$

С помощью критерия Баумана можно найти значения ε, для которых рассматриваемая матрица будет неособенной, а так как критерий является необходимым и достаточным условием, то дополнение найденного множества будет описывать все особенные матрицы $\mathbf{A}$.

$\Delta_1 < 0\ \forall\varepsilon$. Следовательно, для выполнения критерия необходимо потребовать, чтобы все остальные определители тоже были меньше 0 => матрица $\mathbf{X}$ особенна $\forall\varepsilon \geq 0.05$.

Воспользуемся признаком Румпа.

$$\text{rad}\,\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{\max}(\text{rad}\,\mathbf{A}) = \varepsilon\sqrt{2}$$

$$\sigma(\text{mid}\mathbf{X}) = \left\{\sqrt{\frac{421 + 21\sqrt{401}}{200}}, \sqrt{\frac{421 - 21\sqrt{401}}{200}}\right\} \approx \{2.0512, 0.0488\} \Rightarrow \sigma_{\min}(\text{mid}\mathbf{X}) = 0.0488$$

Делаем вывод, что при $\varepsilon\sqrt{2} < 0.0488 \Rightarrow \varepsilon < 0.0345$ матрица $\mathbf{X}$ не будет особенной.

4.2 Задача 2

Воспользуемся признаком Румпа.

$$\text{rad}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{mid}\,\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1.1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma(\text{rad}\,\mathbf{A}) = \{0, 2\varepsilon\},\ \varepsilon > 0 \Rightarrow \sigma_{\max}(\text{rad}\,\mathbf{A}) = 2\varepsilon$$

$$\sigma(\text{mid}\,\mathbf{A}) = 0.0488$$

=> что $2\varepsilon < 0.0488 \Rightarrow \varepsilon < 0.0244$ матрица $\mathbf{A}$ не будет особенной.

Теперь воспользуемся критерием Баумана. Множество vert $\mathbf{A}$ содержит 16 элементов.

$$\Delta_1 = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_2 = -2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_3 = 2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_4 = 2\varepsilon^2 - 1.9\varepsilon - 0.1$$

$$\Delta_5 = -2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_6 = -0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_7 = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_8 = 4.1\varepsilon - 0.1$$

$$\Delta_9 = -4.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{10} = 0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{11} = -0.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{12} = -2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1$$

$$\Delta_{13} = 2\varepsilon^2 + 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{14} = 2\varepsilon^2 + 1.9\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{15} = -2\varepsilon^2 - 2.1\varepsilon - 0.1 \quad \Delta_{16} = -0.1\varepsilon - 0.1$$

С помощью критерия Баумана можно найти значения ε, для которых рассматриваемая матрица будет неособенной, а так как критерий является необходимым и достаточным условием, то дополнение найденного множества будет описывать все особенные матрицы $\mathbf{A}$.

Учитывая, что $\varepsilon > 0$, получаем $\Delta_6 < 0$. Следовательно, все остальные определители тоже должны быть меньше 0. Рассматривая множество решений, получим, что матрица $\mathbf{A}$ неособенна тогда и только тогда, когда $\varepsilon < \frac{1}{41}$. То есть $\forall \varepsilon \geq \frac{1}{41}$ матрица $\mathbf{A}$ будет содержать особенные точечные матрицы.

4.3 Задача 3

4.3.1 Функция с одним экстремумом

Функция Booth имеет вид:

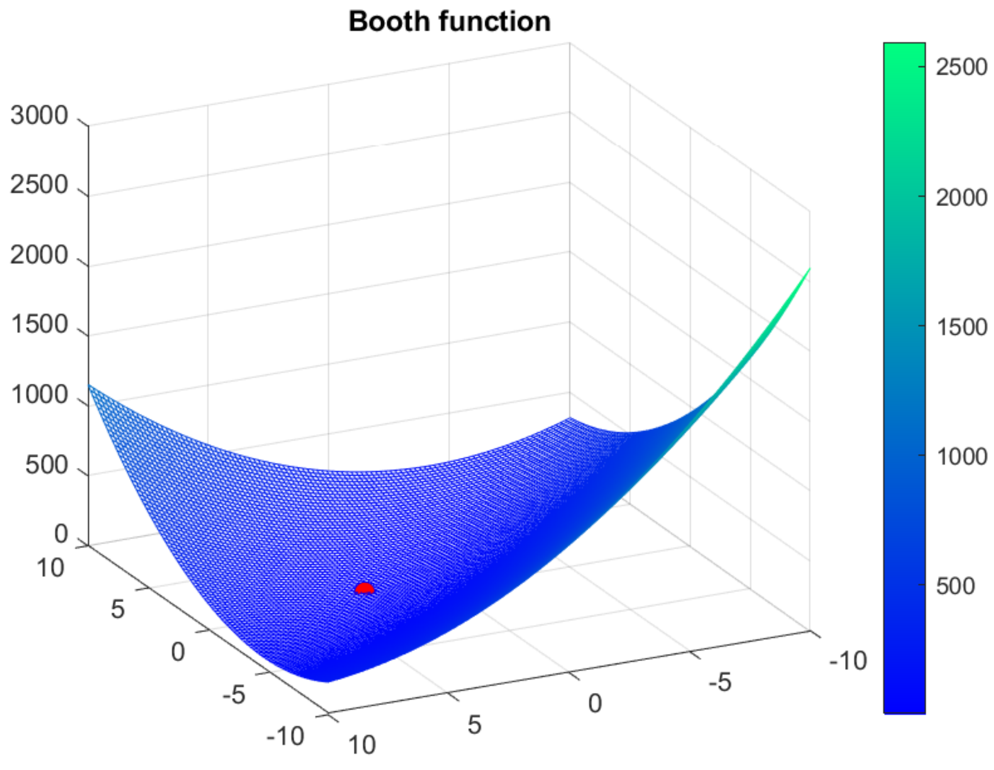

Рис. 1: График функции Booth (2)

Минимум изображен на графике красной точкой, дстигается при значении аргумента (1,3) и равен 0.

Посмотрим на демонстрацию работы алгоритма GlobOpt:

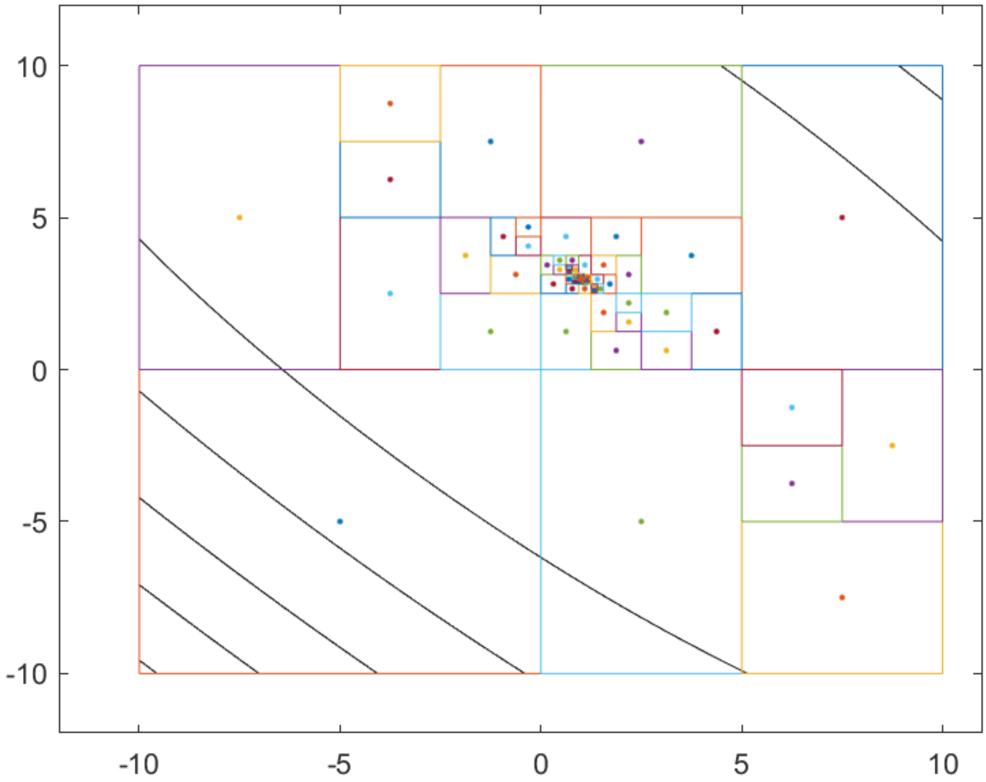

Рис. 2: Иллюстрация работы алгоритма для функции Booth (2)

Как видим, число брусьев сгущается по мере приближения к экстремуму.

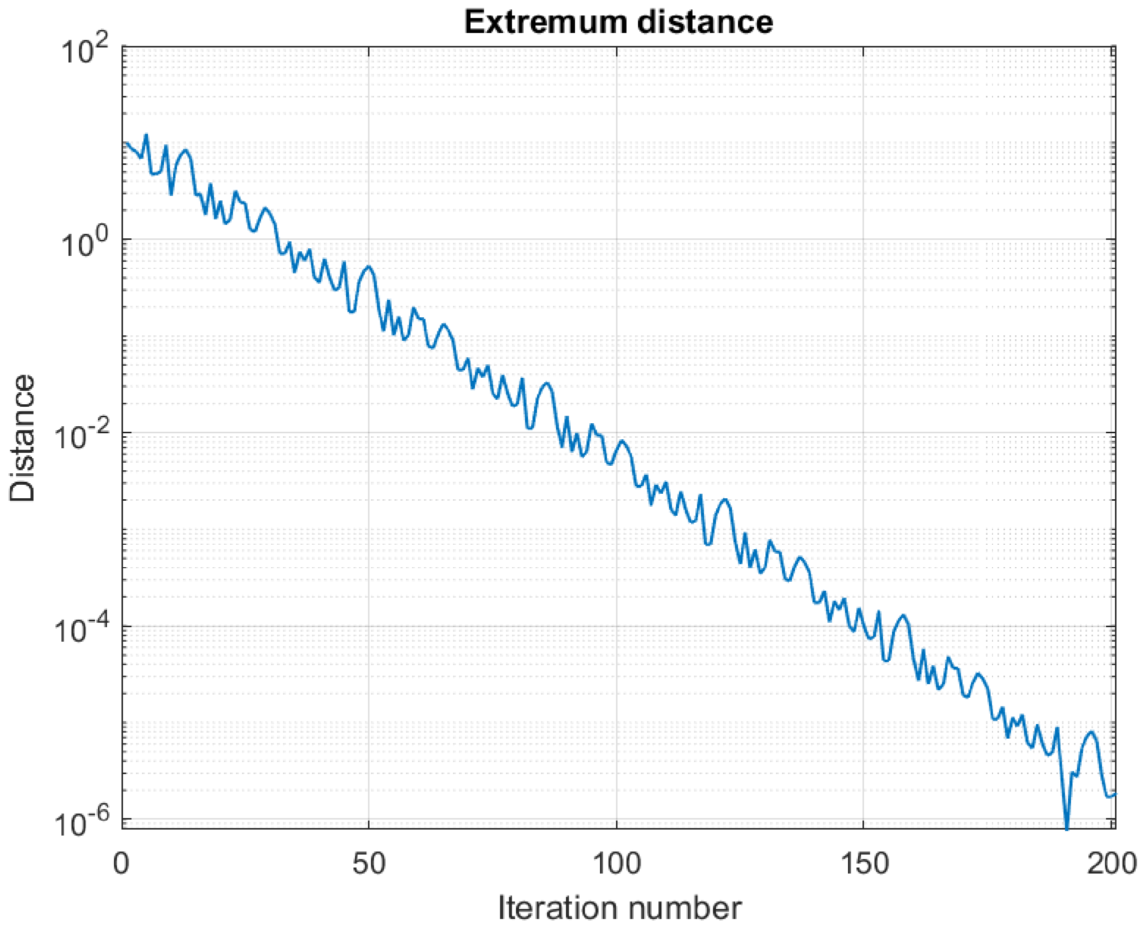

Рис. 3: Расстояние до точки экстремума для функции Booth (2)

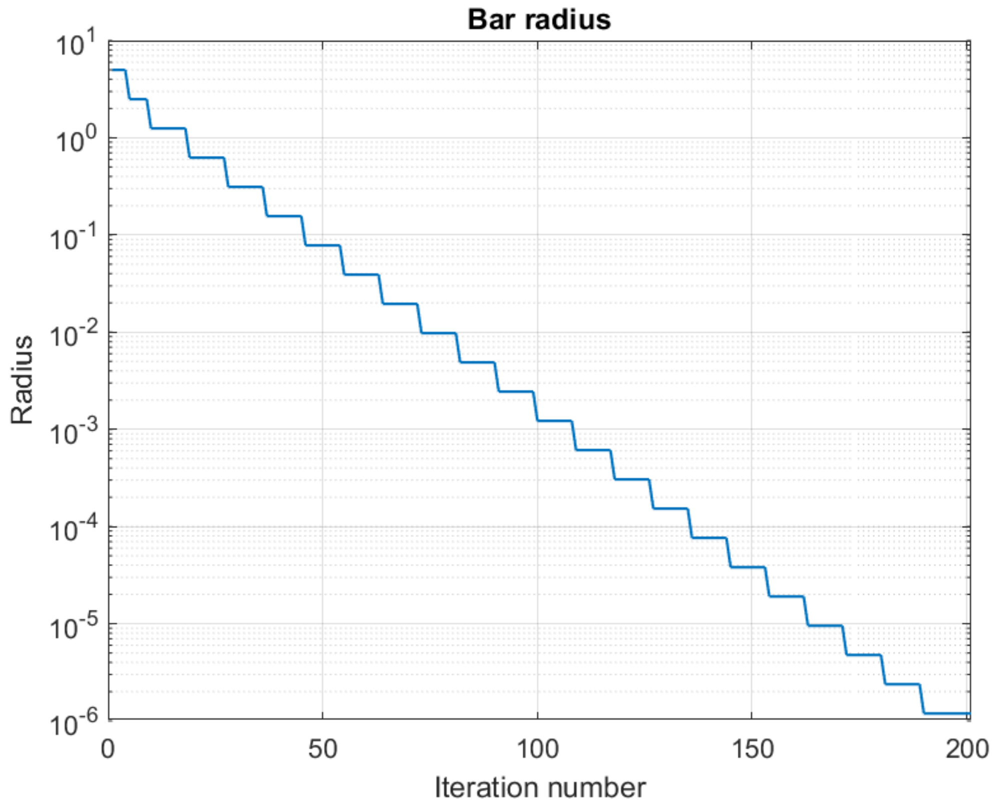

Рис. 4: Радиусы рабочих брусов для функции Booth (2)

4.3.2 Функция с несколькими экстремумами

Функция Cross-in-tray имеет вид:

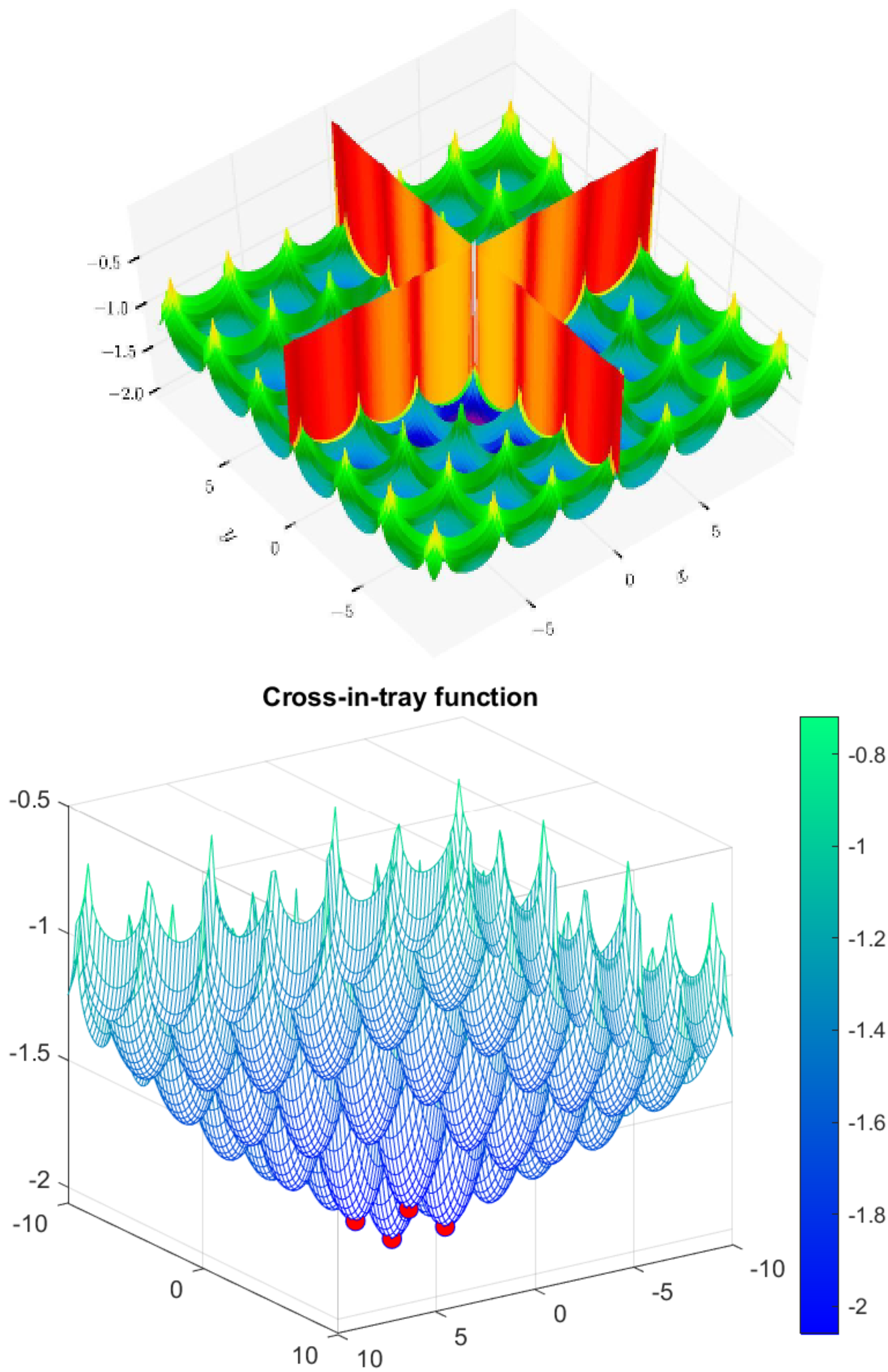

Рис. 5: График функции Cross-in-tray (3)

Функция содержит 4 глобальных экстремума в точках $(1.34941, -1.34941)$, $(1.34941, 1.34941)$,

$(-1.34941, 1.34941)$, $(-1.34941, -1.34941)$ и все они равны -2.06261.
Посмотрим на демонстрацию работы алгоритма GlobOpt:

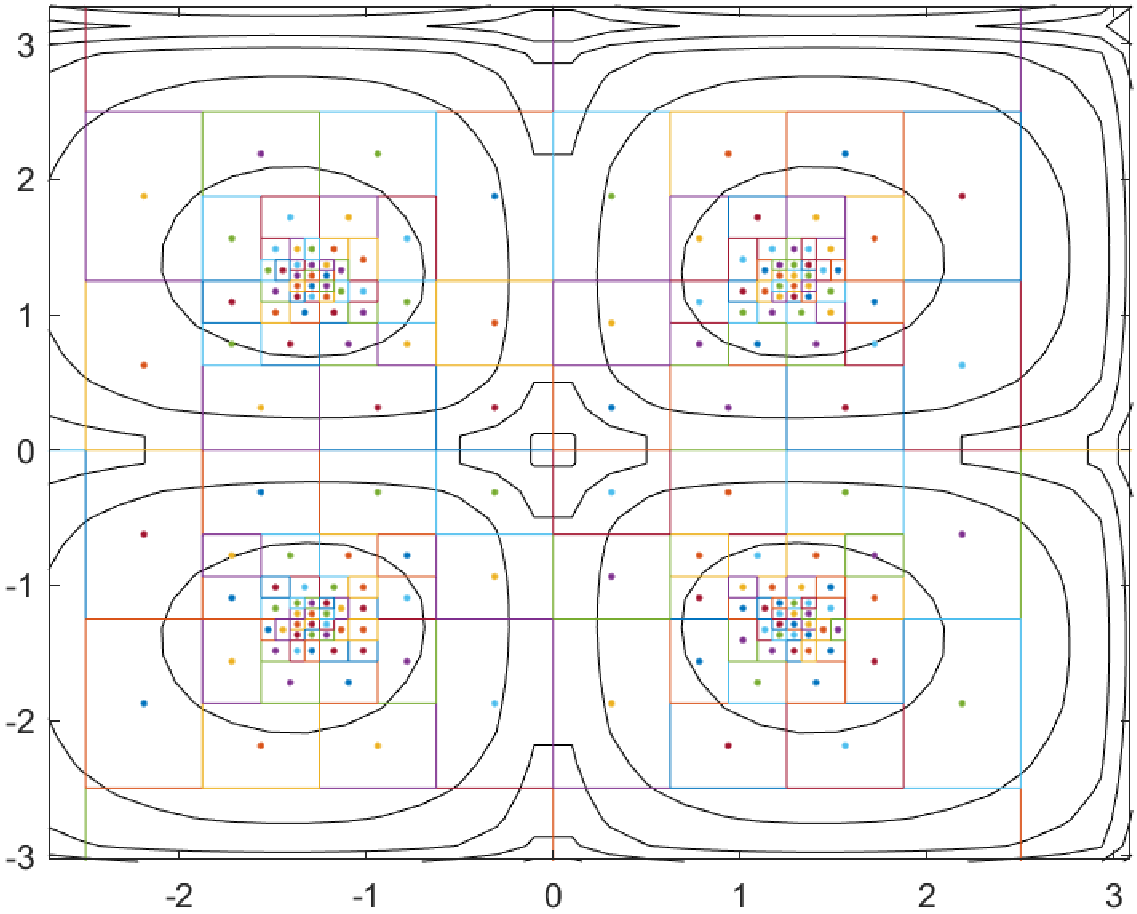

Рис. 6: Иллюстрация работы алгоритма для функции Cross-in-tray (3)

Возле всех 4 минимумов наблюдается сгущение брусьев.

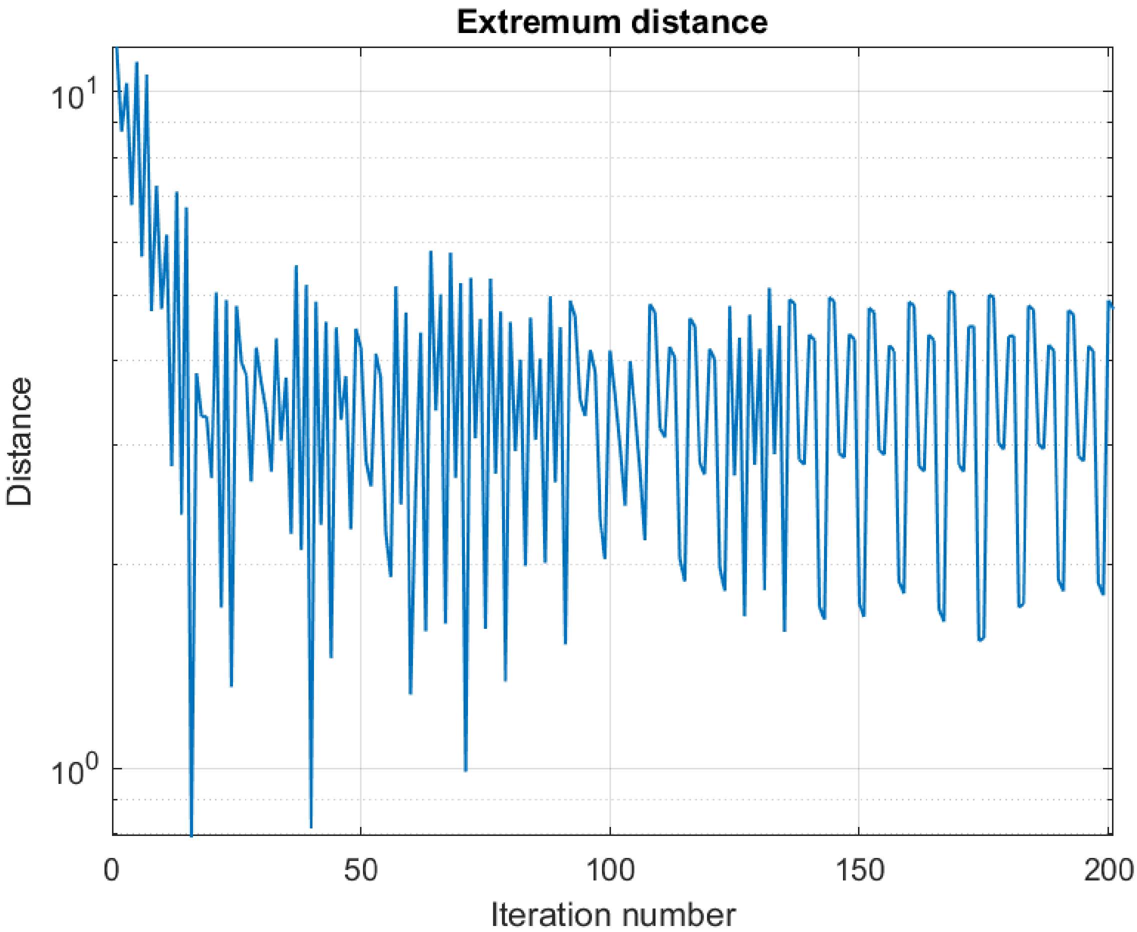

Рис. 7: Расстояние до точки экстремума для функции Cross-in-tray (3)

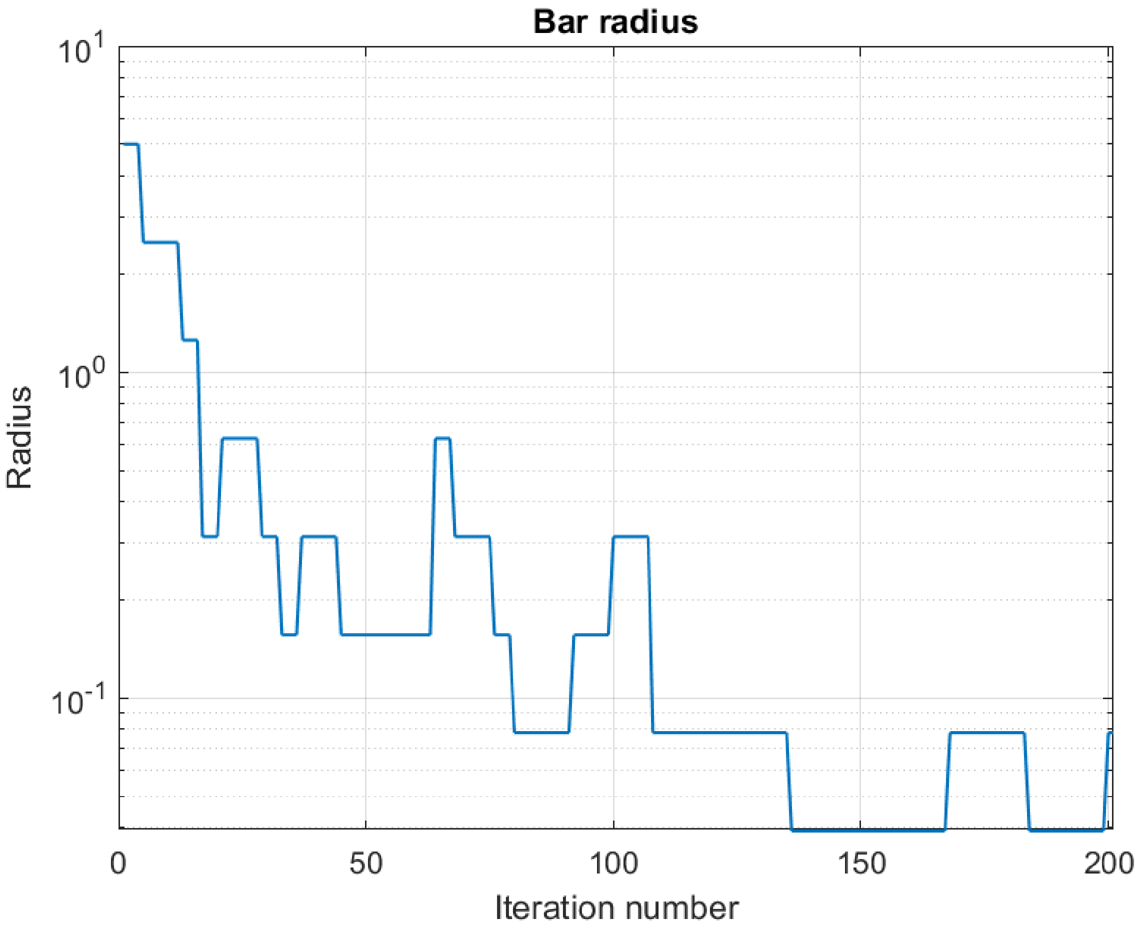

Рис. 8: Радиусы рабочих брусов для функции Cross-in-tray (3)

5 Обсуждение

1. При переходе от задачи линейной регрессии к полиномиальной, мы подразумеваем рассмотрение квадратных матриц $\mathbf{X}_n \in \mathbb{IR}^{n\times n}$ и увеличение параметра n Матрица обоенна, если одна их точечных матриц особенна, что происходит в случае пересечения интервалов. Чем ближе друг к другу будут середины добавляемых в матрицу регрессии величин, тем меньшее значение ε потребуется для того, чтобы добиться попарного пересечения интервальных величин, стоящих в одинаковых столбцах в каких-либо двух строках матрицы $\mathbf{X}_n$ => получить вырожденную точечную матрицу. Чем меньше будут величины, входящие в $\text{mid}\,\mathbf{X}_n$, тем меньше будет норма этой матрицы, следовательно, норма Фробениуса также будет уменьшаться. Это приведет к тому, что $\sigma_{\min}(\text{mid}\,\mathbf{X}_n)$ будет приближаться к 0.

2. Для обеих рассмариваемых функци алгоритм GlobOpt дал правильную оценку значения минимума функции, с увеличением числа итераций значение целевой функции приближается к реальному и для большого количества итераций globopt находит достаточно точное значение. Но для функции Cross-in-tray мы

можем наблюдать значительное ухудшение сходимости метода, хотя для функции Booth за 200 истераций точность доходит уже до 10^{-6}. Также для функции Booth мы видим монотонное убывание радиуса брусов, но для функции Cross-in-tray наблюдается скачкообразное поведение. Можно сделать вывод, что в общем случае метод пригоден лишь для довольно грубой оценки самого значения минимума функции.

6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: `https://github.com/pikabol88/IntervalAnalysis/tree/main/lab1`