

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики,
Физика-механический институт
«Прикладная математика и информатика»

**ОТЧЁТ ПО КУРСОВОЙ РАБОТЕ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ИНТЕРВАЛЬНЫЙ
АНАЛИЗ»**

Выполнил
студент группы 5030102/80201

Войнова Алёна

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Особенные матрицы	2
2.2	Субдифференциальный метод Ньютона	2
2.2.1	Условие остановки	3
2.2.2	Сходимость метода	3
3	Реализация	3
4	Результаты	3
4.1	Проверка на работоспособность	3
4.1.1	Субдифференциальный метод	4
4.2	Решение поставленной задачи	4
4.2.1	Субдифференциальный метод	4
4.3	Исследование	6
5	Обсуждение	7
6	Приложения	8

Список таблиц

Список иллюстраций

1	Результаты коррекции значения a_{33} при $\tau = 1$	6
2	Результаты коррекции значения a_{33} при $\tau = 0.6$	7

1 Постановка задачи

Исследователь поведение субдифференциального метода Ньютона при решении ИС-ЛАУ:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [2, 4] & [-5, -1] & [-2, 3] \\ [-3, 1] & [5, 7] & [4, 6] \\ [-1, 1] & [-2, 1] & [-7, -2] \end{pmatrix} \quad (1)$$

, где правая часть:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-28, 43] \\ [-60, 29] \\ [-11, 39] \end{pmatrix} \quad (2)$$

и

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} [3, 4] & [-5, -2] & [-2, 2] \\ [-3, -1] & [6, 7] & [5, 6] \\ [-1, 0] & [-1, 1] & [-4, 1] \end{pmatrix} \quad (3)$$

, где правая часть:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} [-28, 43] \\ [-60, 69] \\ [-11, 39] \end{pmatrix} \quad (4)$$

Проанализировать результаты и исследовать сходимость метода.

2 Теория

2.1 Особенные матрицы

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется неособенной (невырожденной), если неособенными являются все точечные $n \times n$ - матрицы $A \in \mathbf{A}$.

Интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ называется особенной (вырожденной), если она содержит особенную точечную матрицу.

Теорема. Пусть интервальная матрица $\mathbf{A} \in \mathbb{IR}^{n \times n}$ такова, что $\text{mid } \mathbf{A}$ неособенная и

$$\max_{1 \leq j \leq n} (\text{rad } \mathbf{A} \cdot |(\text{mid } \mathbf{A})^{-1}|)_{jj} \geq 1$$

Тогда \mathbf{A} особенная.

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Итерационный метод строится по следующей формуле

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau (D^{(k-1)})^{-1} \mathcal{F}(x^{(k-1)}) \quad (5)$$

где $(D^{(k-1)})^{-1}\mathcal{F}(x^{(k-1)})$ - субградиент в $x^{(k-1)}$, $\tau \in [0; 1]$ - релаксационный параметр, с помощью которого можно расширить область сходимости. На практике рекомендуется брать $\tau = 1$, тогда метод даст наиболее точное решение. В этой работе в качестве τ будет взята единица

При этом

$$\mathcal{F}(y) = sti(Asti^{-1}(y)b) \quad (6)$$

$$sti(x) : (x_1, \dots, x_n) \rightarrow (-\underline{x_1}, \dots, -\underline{x_n}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}) \quad (7)$$

2.2.1 Условие остановки

$$\|\mathcal{F}(x^{(k)})\| < \varepsilon \quad (8)$$

2.2.2 Сходимость метода

Теорема. Пусть интервальная $n \times n$ - матрица \mathbf{C} удовлетворяет условию построчной согласованности, и интервальная $2n \times 2n$ - матрица

$$\begin{pmatrix} (pro \mathbf{C})^+ & (pro \mathbf{C})^- \\ (pro \mathbf{C})^- & (pro \mathbf{C})^+ \end{pmatrix}$$

является неособенной. Если при этом \mathbf{C} достаточно узка, то алгоритм SubDiff2 со значением релаксационного параметра $\tau = 1$ сходится за конечное число итераций к $sti(\mathbf{x}^*)$, где \mathbf{x}^* — формальное решение интервальной системы $\mathbf{C}x + \mathbf{d} = 0$.

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена на языке программирования Python в среде разработки PyCharm. Используются библиотеки numpy, scipy, seaborn, kaucherpy для реализации вычислений. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

Будем использовать параметр релаксации $\tau = 1$ в методе Ньютона.

4.1 Проверка на работоспособность

Прежде чем решать поставленную задачу, проверим работоспособность реализованных методов на примере, на который заранее знаем ответ[1].

$$\begin{pmatrix} [2, 4] & [-2, 1] \\ [-1, 2] & [2, 4] \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} [-2, 2] \\ [-2, 2] \end{pmatrix}$$

С помощью теоремы из пункта 2.1 получаем, что матрица не является особенной.

4.1.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе сходится за конечное число итераций.

Действительно, всего за 2 итерации алгоритм сошелся к следующим значениям

$$\begin{pmatrix} [-0.3333333, 0.3333333] \\ [-0.3333333, 0.3333333] \end{pmatrix}$$

Теперь, когда мы уверены в работоспособности запрограммированного метода, перейдем к исследованию ИСЛАУ 1 и 3

4.2 Решение поставленной задачи

Для ИСЛАУ 1 получаем уверенную сходимость метода за 4 итерации к точному решению

$$\begin{pmatrix} [2, 5] \\ [-3, 4] \\ [-4, -1] \end{pmatrix}$$

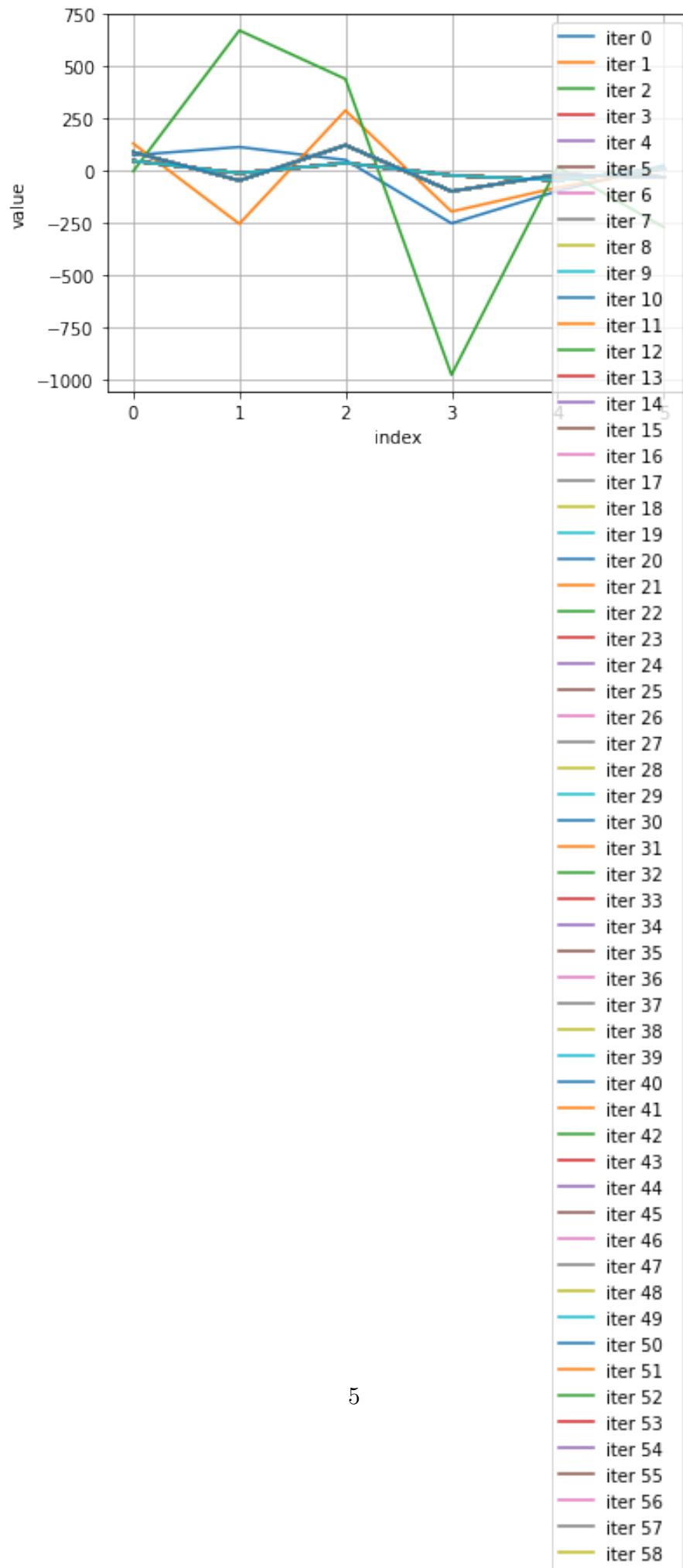
С помощью теоремы из пункта 2.1 получаем, что матрица не является особенной.

4.2.1 Субдифференциальный метод

С помощью теоремы из пункта 2.2.1 получили, что субдифференциальный метод на данной системе сходится за конечное число итераций. Для ИСЛАУ 3 метод останавливается после 100 итераций, но так и не сходится к точному значению. Получаем следующий выход метода

$$\begin{pmatrix} [-1.66666667 \quad -56.66666667] \\ [-46.11111111 \quad 19.44444444] \\ [41.22222222 \quad -8.77777778] \end{pmatrix}$$

Посмотрим на график изменения значений выходного вектора в зависимости от числа итераций



С помощью теоремы из пункта 2.1 получаем, что матрица является особенной.

Субдифференциальный метод на данной системе не сходится за конечное число итераций.

Для этой интервальной линейной системы алгоритм генерирует осциллирующую последовательность, которая, очевидно, не сходится ни к какому пределу. Интересно отметить, что правая часть этой системы шире, чем в предыдущем примере, а все элементы матрицы, кроме a_{33} , тоньше, что говорит о том, что данная ИСЛАУ еще лучше подчиняется теореме о сходимости. Тем не менее метод не работает.

4.3 Исследование

В качестве эксперимента было принято решение внести изменения в компоненту a_{33} и проверить сходимость метода. Был получен следующий результат

Change a33 inf to 0.0	=> diverged
Change a33 inf to 0.5	=> diverged
Change a33 inf to 1.0	=> diverged
Change a33 inf to 1.5	=> converged
Change a33 inf to 2.0	=> diverged
Change a33 inf to 2.5	=> diverged
Change a33 inf to 3.0	=> diverged
Change a33 inf to 3.5	=> converged
Change a33 inf to 4.0	=> diverged
Change a33 inf to 4.5	=> diverged
Change a33 inf to 5.0	=> converged
Change a33 inf to 5.5	=> converged
Change a33 inf to 6.0	=> diverged
Change a33 inf to 6.5	=> diverged
Change a33 inf to 7.0	=> converged
Change a33 inf to 7.5	=> diverged
Change a33 inf to 8.0	=> converged
Change a33 inf to 8.5	=> converged
Change a33 inf to 9.0	=> converged
Change a33 inf to 9.5	=> converged

Рис. 1: Результаты коррекции значения a_{33} при $\tau = 1$

, где с каждым шагом изменялся *inf* значение интервала a_{33} . Стоит заметить, что во всех случаях, когда мы замечаем сходимость интервал a_{33} будет неправильный.

Проведем еще один эксперимент и попробуем изменить параметр релаксации на $\tau = 0.6$

Change a33 inf to 0.0	=> diverged
Change a33 inf to 0.5	=> diverged
Change a33 inf to 1.0	=> diverged
Change a33 inf to 1.5	=> converged
Change a33 inf to 2.0	=> converged
Change a33 inf to 2.5	=> converged
Change a33 inf to 3.0	=> converged
Change a33 inf to 3.5	=> converged
Change a33 inf to 4.0	=> converged
Change a33 inf to 4.5	=> converged
Change a33 inf to 5.0	=> converged
Change a33 inf to 5.5	=> converged
Change a33 inf to 6.0	=> converged
Change a33 inf to 6.5	=> converged
Change a33 inf to 7.0	=> converged
Change a33 inf to 7.5	=> converged
Change a33 inf to 8.0	=> converged
Change a33 inf to 8.5	=> converged
Change a33 inf to 9.0	=> converged
Change a33 inf to 9.5	=> converged

Рис. 2: Результаты коррекции значения a_{33} при $\tau = 0.6$

\Rightarrow область сходимости расширилась

5 Обсуждение

- Субдифференциальный метод Ньютона является модификацией метода градиентного спуска, который, однако, не накладывает на отображение требования дифференцируемости, а требует лишь порядковой выпуклости
- Алгоритм дает точное решение задачи за небольшое конечное число итераций, обычно не превышающее размерность системы. В некоторых случаях параметр релаксации $\tau < 1$ улучшает сходимость субдифференциального метода Ньютона. Но чем меньше τ , тем медленнее работает Алгоритм.
- Метод показывает преимущества при решении ИСЛАУ, в которой содержатся неправильные интервалы в свободной части и нет знакопеременности интервалов: быструю сходимость и точность.

- Существуют методы, которые позволяют находить приближенные решения неточно заданных ИСЛАУ. Например метод регуляризации Лаврентьева, альтернативный метод модификации СЛАУ[4] => проблемная для метода ситуация[1] разрешима за счет модификаций ИСЛАУ.

6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: <https://github.com/pikabol88/IntervalAnalysis/tree/main/coursework>

Список литературы

- [1] Шарый С. П. - Алгебраический подход к интервальным линейным статическим задачам идентификации, о допусках и об управлении, или еще одно применение арифметики Каухера. <http://www.nsc.ru/interval/shary/Papers/OneMoreKaucher.pdf>
- [2] Баженов А. Н. - Интервальный анализ. Основы теории и учебные примеры: учебное пособие. <https://elib.spbstu.ru/dl/2/s20-76.pdf/info>
- [3] Шарый С. П. - Конечномерный интервальный анализ.
- [4] Тодорова А. Д. Субдифференциальный метод Ньютона в интервальной арифметике Каухера-исследование сходимости: выпускная квалификационная работа бакалавра: направление 01.03. 02 «Прикладная математика и информатика»; образовательная программа 01.03. 02.03 «Математическое и информационное обеспечение экономической деятельности». – 2021.