

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики,
Физика-механический институт
«Прикладная математика и информатика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «Интервальный анализ»

Выполнил
студент группы 5030102/80201

Войнова Алёна

Проверил
к. ф.-м. н., доцент

Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Теория	2
2.1	Распознающий функционал	2
2.2	Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части . .	2
2.3	Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы	3
2.4	Оценки вариабельности решения	3
3	Реализация	3
4	Результаты	3
4.1	Достижение разрешимости ИСЛАУ	3
4.2	Корректировка правой части	4
4.3	Корректировка матрицы	5
4.4	Управление положением максимума распознающего функционала . . .	6
5	Обсуждение	8
6	Приложения	8

Список иллюстраций

1	График $\text{Tol}(x, A, b)$	4
2	График $\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с корректировкой в правой части . . .	5
3	График Ξ_{tol} для ИСЛАУ с корректировкой матрицы	6
4	Положение максимумов Tol при корректировке матрицы в целом . . .	7
5	Положение максимумов Tol при корректировке матрицы построчно . .	7
6	Положение максимумов Tol при корректировке матрицы построчно (увеличенный)	8

1 Постановка задачи

Дана ИСЛАУ

$$\begin{cases} [0, 2] \cdot x_1 + [0, 3] \cdot x_2 = [-1, 4] \\ x_1 - [1, 4] \cdot x_2 = 0 \\ [1, 2] \cdot x_1 = [5, 7] \end{cases} \quad (1)$$

Для нее необходимо провести вычисления и привести иллюстрации:

- Максимум распознающего функционала
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы
- Оценок вариабельности решения
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ в целом
- Управления положением максимума распознающего функционала за счет коррекции матрицы ИСЛАУ построчно

2 Теория

2.1 Распознающий функционал

Распознающим называется функционал

$$\text{Tol}(x) = \text{Tol}(x, A, b) = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ b_i - \left| b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \right\}$$

$$x \in \Xi_{\text{tol}} \Leftrightarrow \text{Tol}(x) \geq 0$$

$\text{Tol}(x)$ - ограничен, вогнут. Он всегда достигает конечного максимума на R^n . Таким образом, найдя максимум данного функционала, можно судить о пустоте допустового множества решений ИСЛАУ. Если $\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$, то допустовое множество не пусто. В противном случае $\Xi_{\text{tol}} = \emptyset$. Обратные утверждения также верны.

2.2 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции правой части

Общая схема метода заключается в добавлении к каждой компоненте правой части ИСЛАУ величины $K \cdot \nu_i \cdot [-1, 1]$, где i - номер компоненты, ν_i - вес, задающий относительное расширение i -й компоненты, K - общий коэффициент расширения вектора b . В данной работе используются значения $\nu_i = 1 \ \forall i = \overline{1, 3}$. Подбрав K таким образом, чтобы выполнялось $K + \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x) \geq 0$, получим разрешимую систему с непустым допустовым множеством.

2.3 Достижение разрешимости ИСЛАУ за счет коррекции матрицы

Общая схема метода заключается в модификации исходной матрицы ИСЛАУ. Производим замену A на $A \ominus K \cdot N \cdot E$ где $N = \{\nu_i\}$ - матрица весов, K - общий коэффициент сужения A , E состоит из $[-e_{ij}, e_{ij}]$. При выполнении процедуры необходимо следить за тем, чтобы мы оставались в рамках IR .

При выполнении задания достижения разрешимости рекомендуется выполнять корректировку пропорционально координатам точки, в которой достигается максимум распознающего функционала.

При выполнении задания управления положением максимума распознающего функционала в случае коррекции матрицы в целом N - единичная матрица, в случае построчной - $N = \text{diag}\{\nu_i\}$.

2.4 Оценки варибельности решения

Для оценки варибельности решений предлагается использовать абсолютную и относительную оценки:

$$\text{ive}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \|\arg\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)\| \frac{\max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)}{\|b\|}$$

$$\text{rve}(A, b) = \min_{A \in A} \text{cond } A \cdot \max_{x \in R^n} \text{Tol}(x)$$

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью встроенных средств в среде разработки Matlab. Используются библиотеки IntLab для реализации вычислений интервальной арифметики. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении в виде ссылки на репозиторий GitHub.

4 Результаты

4.1 Достижение разрешимости ИСЛАУ

Исходная рассматриваемая ИСЛАУ имеет пустое допустимое множество. $\arg\max = [2.6667, 0.33333]$ $\text{tolmax} = -2.3333 < 0 \Rightarrow$ система несовместна.

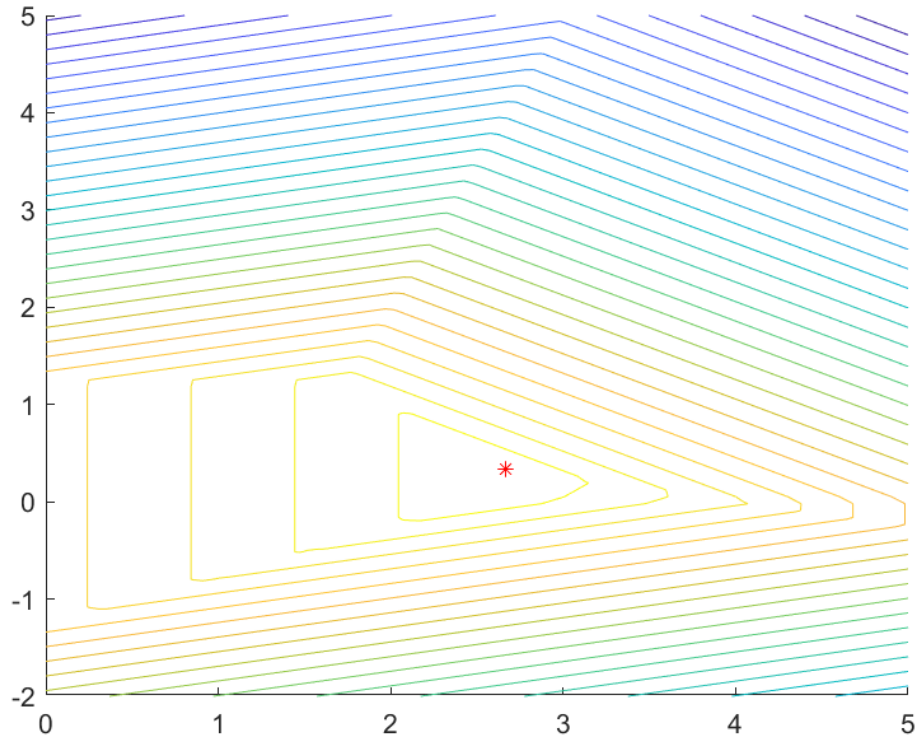


Рис. 1: График $\text{Tol}(x, A, b)$

4.2 Корректировка правой части

Корректировка правой части, с помощью описанного выше способа помогла добиться непустого множества решений интервальной системы, $\text{argmax} = [2.6667, 0.33333]$ $\text{tolmax} = 1.1667 > 0 \Rightarrow$ система совместна. Вектор столбца

$$b' = ([-4.5001, 7.5001], [-3.5001, 3.5001], [1.4999, 10.5001])$$

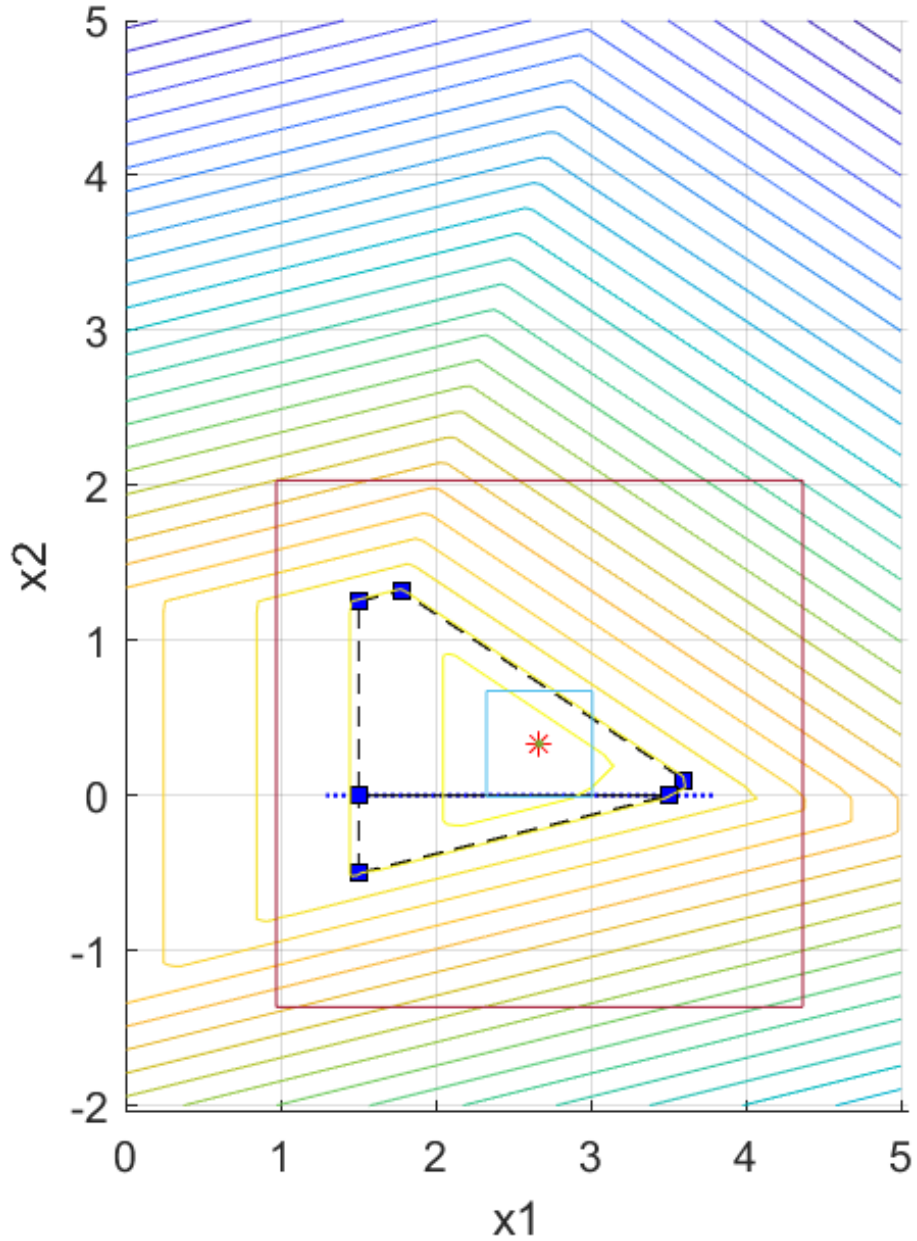


Рис. 2: График $\text{Tol}(x, A, \hat{b})$ для ИСЛАУ с корректировкой в правой части

4.3 Корректировка матрицы

На каждой итерации сужаем радиус интервалов матрицы до тех пор, пока максимальное значение распознающего функционала не станет положительным или близким к нулю, $\text{argmax} = [1.7143, 0.28571]$ $\text{tolmax} = 0.57143 > 0 \Rightarrow$ система совместна. Итоговая матрица:

$$A' = \begin{pmatrix} [0.4999, 1.5001] & [0.0000, 3.0000] \\ 1 & [-4.0000, -1.0000] \\ [1.4999, 1.5001] & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

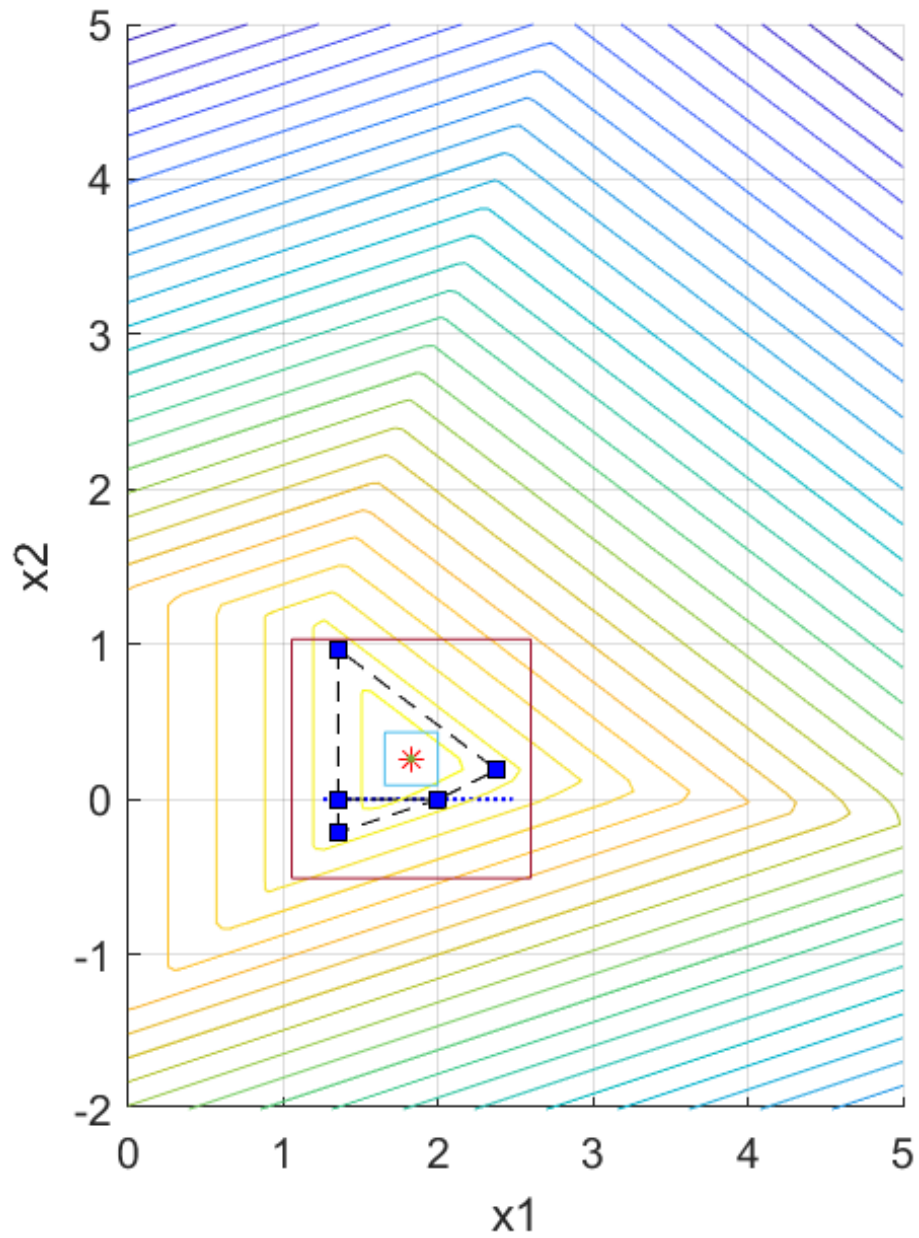


Рис. 3: График Ξ_{tol} для ИСЛАУ с корректировкой матрицы

4.4 Управление положением максимума распознающего функционала

На каждой итерации для каждой строки сжимаем интервал в два раза

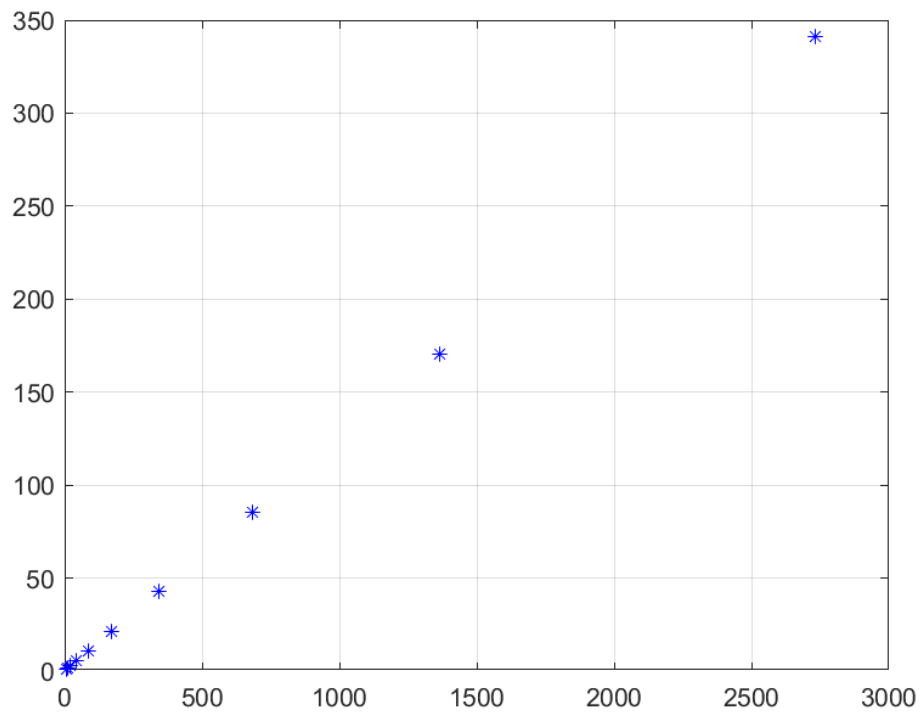


Рис. 4: Положение максимумов Tol при корректировке матрицы в целом

Результат полученный отдельно для каждой строки:

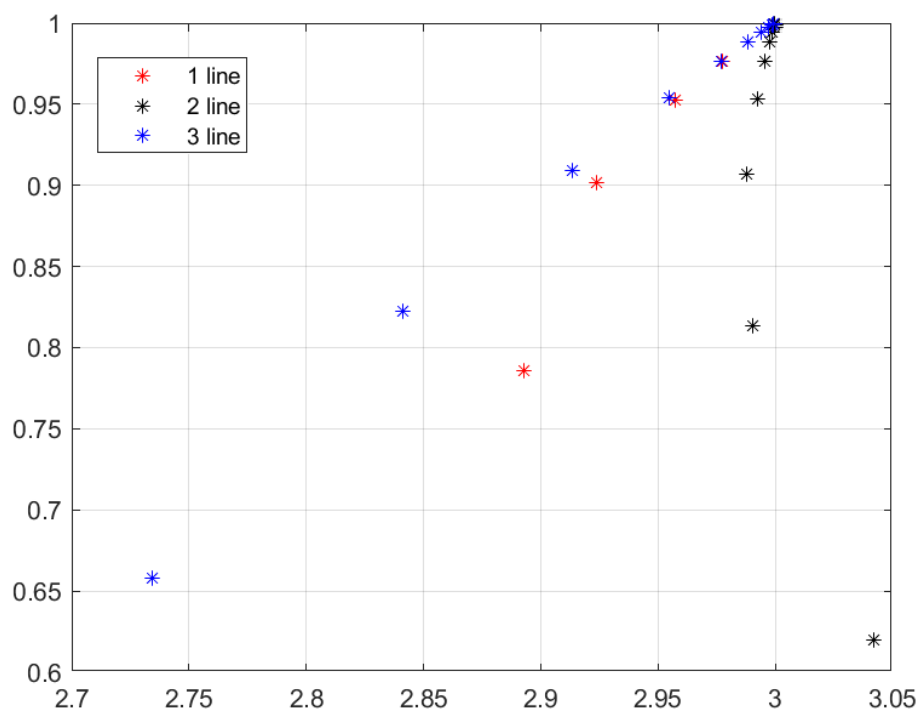


Рис. 5: Положение максимумов Tol при корректировке матрицы построчно

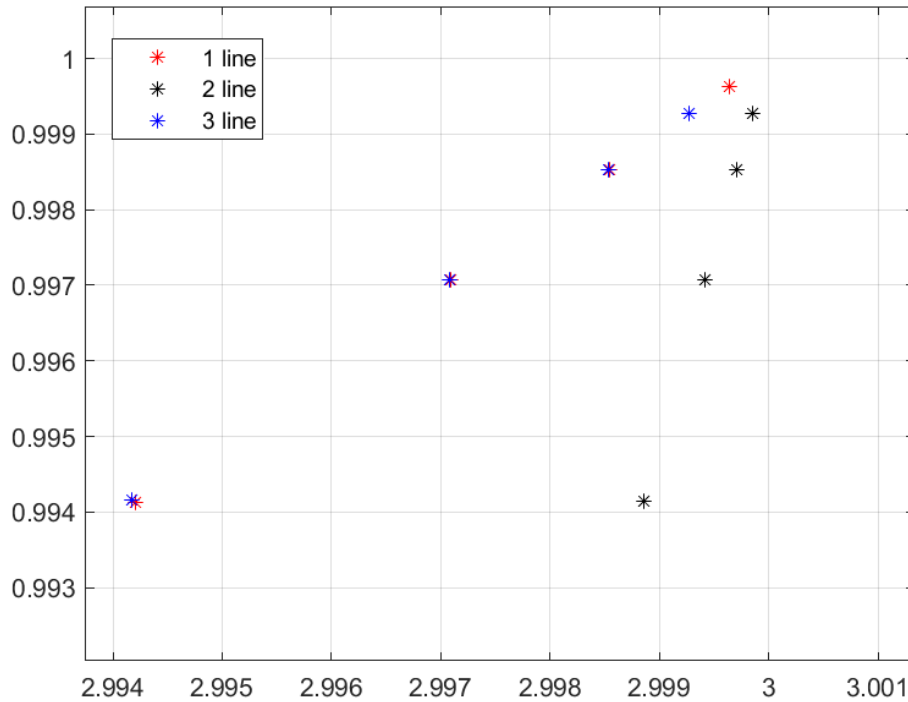


Рис. 6: Положение максимумов Tol при корректировке матрицы построчно (увеличенный)

5 Обсуждение

- Оценки вариабльности меньше при коррекции матрицы, при этом брусы, соответствующие оценкам вариабльности, хорошо оценили допустовое множество итоговой ИСЛАУ
- Коррекция правой части влечет увеличение значений максимума распознающего функционала
- Коррекция матрицы ИСЛАУ меняет форму распознающего функционала во всех рассмотренных преобразованиях

6 Приложения

Код программы на GitHub, URL: <https://github.com/pikabol88/IntervalAnalysis/tree/main/lab3>