

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики  
**Кафедра «Прикладная математика»**

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ  
**«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»**

Выполнил студент  
Войнова Алёна Игоревна  
группы 3630102/80201

Проверил  
к. ф.-м. н., доцент  
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2021

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
1.1	Задание 1 . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
2.1	Распределения . . . . .	2
2.1.1	Выборочные числовые характеристики . . . . .	3
2.1.2	Характеристики положения . . . . .	3
2.1.3	Характеристики рассеяния . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>4</b>
4.1	Характеристики положения и рассеяния . . . . .	4
<b>5</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>8</b>
<b>6</b>	<b>Приложения</b>	<b>8</b>

# 1 Постановка задачи

Для 5 распределений:

1.  $N(x, 0, 1)$  – нормальное распределение
2.  $C(x, 0, 1)$  – распределение Коши
3.  $L(x, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$  – распределение Лапласа
4.  $P(k, 10)$  – распределение Пуассона
5.  $U(x, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$  – равномерное распределение

## 1.1 Задание 1

Сгенерировать выборки размером 10, 100 и 1000 элементов.

$\bar{x}$ ,  $medx$ ,  $z_R$ ,  $z_Q$ ,  $z_{tr}$ . Повторить такие вычисления 1000 раз для каждой выборки и найти среднее характеристик положения и их квадратов:

$$E(z) = \bar{z} \quad (1)$$

Вычислить оценку дисперсии по формуле:

$$D(z) = \overline{z^2} - \bar{z}^2 \quad (2)$$

Представить полученные данные в виде таблиц.

# 2 Теория

## 2.1 Распределения

- Нормальное распределение

$$N(x, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3)$$

- Распределение Коши

$$C(x, 0, 1) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1} \quad (4)$$

- Распределение Лапласа

$$L(x, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\sqrt{2}|x|} \quad (5)$$

- Распределение Пуассона

$$P(k, 10) = \frac{10^k}{k!} e^{-10} \quad (6)$$

- Равномерное распределение

$$U(x, -\sqrt{3}, \sqrt{3}) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & |x| \leq \sqrt{3} \\ 0 & |x| > \sqrt{3} \end{cases} \quad (7)$$

### 2.1.1 Выборочные числовые характеристики

С помощью выборки образуются её числовые характеристики. Это числовые характеристики дискретной случайной величины  $x_1, x_2, \dots, x_n$  [1, с. 411].

### 2.1.2 Характеристики положения

- Выборочное среднее

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (8)$$

- Выборочная медиана

$$medx = \begin{cases} x_{(l+1)} & \text{при } n = 2l + 1, \\ \frac{x_{(l)} + x_{(l+1)}}{2} & \text{при } n = 2l. \end{cases} \quad (9)$$

- Полусумма экстремальных выборочных элементов

$$z_R = \frac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2} \quad (10)$$

- Полусумма квантилей

Выборочная квантиль  $z_p$  порядка  $p$  определяется формулой

$$z_p = \begin{cases} x_{([np]+1)} & \text{при } np \text{ дробном,} \\ x_{(np)} & \text{при } np \text{ целом.} \end{cases} \quad (11)$$

Полусумма квантилей

$$z_Q = \frac{z_{1/4} + z_{3/4}}{2} \quad (12)$$

- Усечённое среднее

$$z_{tr} = \frac{1}{n - 2r} \sum_{i=r+1}^{n-r} x_i, \text{ где } r \approx \frac{n}{4} \quad (13)$$

### 2.1.3 Характеристики рассеяния

Выборочная дисперсия

$$D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (14)$$

## 3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью средств языка программирования **Python** в среде разработки **Jupyter**. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении.

## 4 Результаты

### 4.1 Характеристики положения и рассеяния

Мощность выборки указана в первом столбике справа. Строка "Estimation" в таблицах - оценка среднего. Оценка производилась по формуле  $x = E \pm \sqrt{(D)}$

<b>Normal</b>	$\bar{x}$	$medx$	$z_R$	$z_Q$	$z_{tr}$
E(z) = 10	0.0076	0.0055	0.0162	0.0058	0.0197
D(z) = 10	0.103	0.1382	0.1931	0.1143	0.161
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-0.3133	-0.3662	-0.4232	-0.3323	-0.3816
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	0.3285	0.3773	0.4556	0.344	0.4209
<i>Estimation</i>	0	0	0	0	0
E(z) = 100	0.0025	0.0053	0.01	0.0018	0.0029
D(z) = 100	0.01	0.016	0.0961	0.0121	0.0196
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-0.0975	-0.1211	-0.3001	-0.1082	-0.1372
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	0.1024	0.1318	0.32	0.1118	0.1431
<i>Estimation</i>	0	0	0	0	0
E(z) = 1000	-0.001	-0.0002	0.0081	-0.0015	-0.0016
D(z) = 1000	0.001	0.0015	0.0603	0.0012	0.002
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-0.0326	-0.0386	-0.2375	-0.0363	-0.0462
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	0.0306	0.0382	0.2536	0.0332	0.0429
<i>Estimation</i>	0.0	0.0	0	0.0	0.0

Таблица 1: Нормальное распределение

<b>Cauchy</b>	$\bar{x}$	$medx$	$z_R$	$z_Q$	$z_{tr}$
E(z) = 10	1.4778	0.0082	7.3655	0.0068	2.3004
D(z) = 10	3318.1921	0.3366	82766.2065	0.8874	5919.7142
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-56.1259	-0.572	-280.3257	-0.9352	-74.6393
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	59.0816	0.5884	295.0567	0.9489	79.2401
<i>Estimation</i>	-	0	-	0	-
E(z) = 100	-8.6782	0.0021	-431.7424	-0.0042	-17.7486
D(z) = 100	70263.0283	0.0232	175613061.8818	0.051	280268.8182
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-273.7499	-0.1503	-13683.6503	-0.2301	-547.1528
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	256.3936	0.1545	12820.1654	0.2218	511.6556
<i>Estimation</i>	-	0.0	-	0.0	-
E(z) = 1000	0.836	0.0011	424.2771	0.0013	1.8509
D(z) = 1000	664.1761	0.0023	164719702.3878	0.0047	2293.0864
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-24.9356	-0.047	-12410.0403	-0.0675	-46.0353
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	26.6076	0.0492	13258.5944	0.0701	49.7371
<i>Estimation</i>	-	0.0	-	0.0	-

Таблица 2: Распределение Коши

$E(z) = 10$	0.0076	0.0058	0.0105	0.0086	0.0145
$D(z) = 10$	0.1003	0.0755	0.4148	0.0897	0.1664
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-0.309	-0.269	-0.6335	-0.2909	-0.3934
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	0.3243	0.2806	0.6545	0.308	0.4224
<i>Estimation</i>	0	0	0	0	0
$E(z) = 100$	0.0058	0.0021	0.0204	0.0073	0.0036
$D(z) = 100$	0.0106	0.0058	0.3667	0.0095	0.0211
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-0.0972	-0.0739	-0.5851	-0.09	-0.1416
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	0.1088	0.078	0.626	0.1047	0.1488
<i>Estimation</i>	0	0.0	0	0	0
$E(z) = 1000$	0.0021	0.0012	0.0339	0.0019	0.0027
$D(z) = 1000$	0.001	0.0005	0.4414	0.001	0.0021
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-0.0298	-0.0213	-0.6305	-0.0294	-0.0436
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	0.034	0.0238	0.6983	0.0331	0.0491
<i>Estimation</i>	0.0	0.0	0	0.0	0.0

Таблица 3: Распределение Лапласа

poisson	x <sub>-</sub>	med(x)	z <sub>-</sub> R	z <sub>-</sub> Q	z <sub>-</sub> tr
E(z) = 10	10.0336	9.907	10.3175	9.935	10.0325
D(z) = 10	0.91	1.3009	1.8604	1.0569	1.5678
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	9.0797	8.7665	8.9535	8.9069	8.7804
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	10.9875	11.0475	11.6815	10.9631	11.2846
<i>Estimation</i>	$9_{-0}^{+0}$	$9_{-0}^{+0}$	$10_{-0}^{+0}$	$9_{-0}^{+0}$	$10_{-0}^{+0}$
E(z) = 100	10.0007	9.857	10.968	9.9179	9.9892
D(z) = 100	0.0991	0.2151	0.967	0.1456	0.202
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	9.6859	9.3933	9.9847	9.5363	9.5397
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	10.3155	10.3207	11.9513	10.2994	10.4386
<i>Estimation</i>	$10_{-0}^{+0}$	$9_{-0}^{+0}$	$10_{-0}^{+0}$	$9_{-0}^{+0}$	$9_{-0}^{+0}$
E(z) = 1000	9.9978	9.995	11.652	9.9955	9.9957
D(z) = 1000	0.0096	0.0045	0.6104	0.0028	0.0201
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	9.8999	9.9281	10.8707	9.943	9.8538
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	10.0957	10.0619	12.4333	10.048	10.1376
<i>Estimation</i>	$10_{-0}^{+0}$	$9_{-0}^{+0}$	$10_{-0}^{+0}$	$9_{-0}^{+0}$	$10_{-0}^{+0}$

Таблица 4: Распределение Пуассона



uniform	x_	med(x)	z_R	z_Q	z_tr
$E(z) = 10$	0.0155	0.0077	0.009	0.0222	0.0198
$D(z) = 10$	0.1038	0.2338	0.0469	0.1427	0.1699
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-0.3067	-0.4758	-0.2075	-0.3556	-0.3924
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	0.3377	0.4912	0.2255	0.4	0.432
<i>Estimation</i>	0	0	0	0	0
$E(z) = 100$	-0.0042	-0.005	-0.0007	-0.0064	-0.0045
$D(z) = 100$	0.0102	0.0304	0.0006	0.0147	0.0207
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-0.1052	-0.1792	-0.0243	-0.1275	-0.1484
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	0.0969	0.1692	0.023	0.1147	0.1395
<i>Estimation</i>	0	0	0.0	0	0
$E(z) = 1000$	0.0004	-0.0	0.0	0.0007	0.0011
$D(z) = 1000$	0.001	0.0031	0.0	0.0015	0.002
intervals					
$E(z) - \sqrt{(D(z))}$	-0.0317	-0.0555	-0.0024	-0.0385	-0.0435
$E(z) + \sqrt{(D(z))}$	0.0325	0.0555	0.0025	0.0399	0.0457
<i>Estimation</i>	0.0	0.0	0.00	0.0	0.0

Таблица 5: Равномерное распределение

## 5 Обсуждение

Проанализировав полученные результаты, можно заметить, что для нормального распределения, распределения Лапласа и равномерного распределения  $E(z)$  и  $D(z)$  для всех характеристик уменьшаются с ростом выборки.

В распределении Пуассона значения  $E(z)$  для всех характеристик колеблется в районе 10, но в  $D(z)$ , аналогично рассмотренным выше распределениям, наблюдается уменьшение значений при росте выборки.

Особо выделяется распределение Коши. Значения  $D(z)$  для  $\bar{x}$  и  $z_R$ ,  $E(z)$  для  $z_R$  достигают больших порядков. Такое поведение дисперсии характеристик рассеяния для распределения Коши является некой аномалией: значения слишком большие даже при увеличении размера выборки - понятно, что это результат выбросов, которые мы могли наблюдать в результатах предыдущего задания.

## 6 Приложения

URL: Выполненная лабораторная работа на GitHub

<https://github.com/pikabol88/Math-Statistics/blob/main/labs/Lab2.ipynb>