

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

Выполнил студент
Войнова Алёна Игоревна
группы 3630102/80201

Проверил
к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1	Постановка задачи	2
1.1	Задание 6	2
2	Теория	2
2.1	Простая линейная регрессия	2
2.1.1	Модель простой линейной регрессии	2
2.1.2	Метод наименьших квадратов	2
2.1.3	Расчётные формулы для МНК-оценок	3
2.2	Робастные оценки коэффициентов линейной регрессии	4
3	Реализация	5
4	Результаты	6
4.1	Оценки коэффициентов линейной регрессии	6
4.1.1	Выборка без возмущений	6
4.1.2	Выборка с возмущениями	6
5	Обсуждение	7
6	Приложения	8
	Литература	9

Список иллюстраций

1	Выборка без возмущений	6
2	Выборка с возмущениями	7

Список таблиц

1 Постановка задачи

1.1 Задание 6

Найти оценки коэффициентов линейной регрессии $y_i = a + bx_i + e_i$, используя 20 точек на отрезке $[-1.8; 2]$ с равномерным шагом равным 0.2. Ошибку e_i считать нормально распределённой с параметрами $(0, 1)$. В качестве эталонной зависимости взять $y_i = 2 + 2x_i + e_i$. При построении оценок коэффициентов использовать два критерия: критерий наименьших квадратов и критерий наименьших модулей. Прodelать то же самое для выборки, у которой в значения y_1 и y_{20} вносятся возмущения 10 и -10 .

2 Теория

2.1 Простая линейная регрессия

2.1.1 Модель простой линейной регрессии

Регрессионную модель (гипотезу, которая должна быть подвергнута статистической проверке) описания данных называют *простой линейной регрессией*, если

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = \overline{1, n}, \quad (1)$$

где

- x_1, \dots, x_n — заданные числа (значения фактора);
- y_1, \dots, y_n — наблюдаемые значения отклика;
- $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — независимые, нормально распределённые $\sim N(0, \sigma)$: с нулевым математическим ожиданием и одинаковой (неизвестной) дисперсией случайные величины (ненаблюдаемые);
- β_0, β_1 — неизвестные параметры, подлежащие оцениванию.

В модели (1) отклик y зависит от одного фактора x , и весь разброс экспериментальных точек объясняется только погрешностями наблюдений (результатов измерений) отклика y . Погрешности результатов измерений x в этой модели полагают существенно меньшими погрешностей результатов измерений y , так что ими можно пренебречь [1, с. 507].

2.1.2 Метод наименьших квадратов

При оценивании параметров регрессионной модели (β_0, β_1) используют различные методы. Один из наиболее распространённых подходов заключается в следующем: вводится мера (критерий) рассогласования отклика и регрессионной функции, и оценки параметров регрессии определяются так, чтобы сделать это рассогласование

наименьшим. Достаточно простые расчётные формулы для оценок получают при выборе критерия в виде суммы квадратов отклонений значений отклика от значений регрессионной функции (сумма квадратов остатков):

$$Q(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i)^2 \rightarrow \min_{\beta_0, \beta_1}. \quad (2)$$

Задача минимизации квадратичного критерия (2) носит название задачи *метода наименьших квадратов* (МНК), а оценки $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ параметров β_0, β_1 , реализующие минимум критерия (2), называют *МНК-оценками* [1, с. 508].

2.1.3 Расчётные формулы для МНК-оценок

МНК-оценки параметров $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ находятся из условия обращения функции $Q(\beta_0, \beta_1)$ в минимум.

Для нахождения МНК-оценок $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ выпишем необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) x_i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Далее для упрощения записи сумм будем опускать индекс суммирования. Из системы (3) получим:

$$\begin{cases} n\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \sum x_i = \sum y_i \\ \hat{\beta}_0 \sum x_i + \hat{\beta}_1 \sum x_i^2 = \sum x_i y_i \end{cases}$$

Разделим оба уравнения на n :

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 (\frac{1}{n} \sum x_i) = \frac{1}{n} \sum y_i \\ \hat{\beta}_0 (\frac{1}{n} \sum x_i) + \hat{\beta}_1 (\frac{1}{n} \sum x_i^2) = \frac{1}{n} \sum x_i y_i \end{cases}$$

и, используя известные статистические обозначения для выборочных первых и вторых начальных моментов

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i, \bar{y} = \frac{1}{n} \sum y_i, \overline{x^2} = \frac{1}{n} \sum x_i^2, \overline{xy} = \frac{1}{n} \sum x_i y_i,$$

получим

$$\begin{cases} \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{x} = \bar{y}, \\ \hat{\beta}_0 \bar{x} + \hat{\beta}_1 \overline{x^2} = \overline{xy}, \end{cases} \quad (4)$$

откуда МНК-оценку $\hat{\beta}_1$ наклона прямой регрессии находим по формуле Крамера

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} \quad (5)$$

а МНК-оценку $\hat{\beta}_0$ определяем непосредственно из первого уравнения системы (4):

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \bar{x} \hat{\beta}_1 \quad (6)$$

Заметим, что определитель системы (4):

$$\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 = s_x^2 > 0,$$

если среди значений x_1, \dots, x_n есть различные, что и будем предполагать.

Доказательство минимальности функции $Q(\beta_0, \beta_1)$ в стационарной точке проведём с помощью известного достаточного признака экстремума функции двух переменных. Имеем:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \beta_0^2} = 2n, \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta_1^2} = 2 \sum x_i^2 = 2n\overline{x^2}, \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} = 2 \sum x_i = 2n\bar{x}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta_0^2} \cdot \frac{\partial^2 Q}{\partial \beta_1^2} - \left(\frac{\partial^2 Q}{\partial \beta_1 \partial \beta_0} \right)^2 = 4n^2 \overline{x^2} - 4n^2 (\bar{x})^2 = \\ &= 4n^2 \left[\overline{x^2} - (\bar{x})^2 \right] = 4n^2 \left[\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2 \right] = 4n^2 s_x^2 > 0. \end{aligned}$$

Этот результат вместе с условием $\frac{\partial^2 Q}{\partial \beta_0^2} = 2n > 0$ означает, что в стационарной точке функция Q имеет минимум [1, с. 508-511].

2.2 Робастные оценки коэффициентов линейной регрессии

Робастность оценок коэффициентов линейной регрессии (т.е. их устойчивость по отношению к наличию в данных редких, но больших по величине выбросов) может быть обеспечена различными способами. Одним из них является использование метода наименьших модулей вместо метода наименьших квадратов:

$$\sum_{i=1}^n |y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i| \rightarrow \min_{\beta_0, \beta_1} \quad (7)$$

Напомним, что использование метода наименьших модулей в задаче оценивания параметра сдвига распределений приводит к оценке в виде выборочной медианы, обладающей робастными свойствами. В отличие от этого случая и от задач метода наименьших квадратов, на практике задача (7) решается численно. Соответствующие процедуры представлены в некоторых современных пакетах программ по статистическому анализу.

Здесь мы рассмотрим простейшую в вычислительном отношении робастную альтернативу оценкам коэффициентов линейной регрессии по МНК. Для этого сначала запишем выражения для оценок (5) и (6) в другом виде:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2} = \frac{k_{xy}}{s_x^2} = \frac{k_{xy}}{s_x s_y} \cdot \frac{s_y}{s_x} = r_{xy} \frac{s_y}{s_x}, \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \bar{x} \hat{\beta}_1 \quad (8)$$

В формулах (8) заменим выборочные средние \bar{x} и \bar{y} соответственно на робастные выборочные медианы $medx$ и $medy$, среднеквадратические отклонения s_x и s_y на

робастные нормированные интерквартильные широты q_x^* и q_y^* , выборочный коэффициент корреляции r_{xy} — на знаковый коэффициент корреляции r_Q :

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{1R} &= r_Q \frac{q_y^*}{q_x^*}, \\ \hat{\beta}_{0R} &= medy - \hat{\beta}_{1R} medx, \\ r_Q &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n sgn(x_i - medx) sgn(y_i - medy), \\ q_y^* &= \frac{y_{(j)} - y_{(l)}}{k_q(n)}, q_x^* = \frac{x_{(j)} - x_{(l)}}{k_q(n)}, \\ &\begin{cases} \lfloor \frac{n}{4} \rfloor + 1 \text{ при } \frac{n}{4} \text{ дробном,} \\ \frac{n}{4} \text{ при } \frac{n}{4} \text{ целом.} \end{cases} \\ &j = n - l + 1 \\ sgn(z) &= \begin{cases} 1 \text{ при } z > 0 \\ 0 \text{ при } z = 0 \\ -1 \text{ при } z < 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Уравнение регрессии здесь имеет вид

$$y = \hat{\beta}_{0R} + \hat{\beta}_{1R}x \quad (9)$$

Статистики выборочной медианы и интерквартильной широты обладают робастными свойствами в силу того, что основаны на центральных порядковых статистиках, малочувствительных к большим по величине выбросам в данных. Статистика выборочного знакового коэффициента корреляции робастна, так как знаковая функция $sgn(z)$ чувствительна не к величине аргумента, а только к его знаку. Отсюда оценка прямой регрессии (9) обладает очевидными робастными свойствами устойчивости к выбросам по координате y , но она довольно груба [1, с. 518-519].

3 Реализация

Лабораторная работа выполнена с помощью средств языка программирования **Python** в среде разработки **Jupyter**. Исходный код лабораторной работы приведён в приложении.

4 Результаты

4.1 Оценки коэффициентов линейной регрессии

4.1.1 Выборка без возмущений

- Критерий наименьших квадратов:

$$\hat{a}_{ls} \approx 1.82, \hat{b}_{ls} \approx 2.46$$

- Критерий наименьших квадратов:

$$\hat{a}_{lm} \approx 1.85, \hat{b}_{lm} \approx 2.49$$

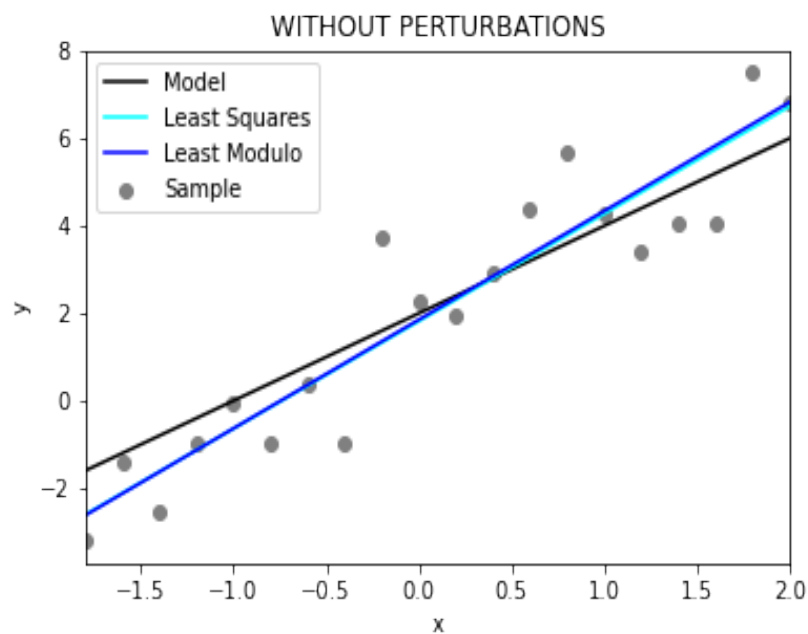


Рис. 1: Выборка без возмущений

4.1.2 Выборка с возмущениями

- Критерий наименьших квадратов:

$$\hat{a}_{ls} \approx 1.96, \hat{b}_{ls} \approx 1.03$$

- Критерий наименьших квадратов:

$$\hat{a}_{lm} \approx 1.56, \hat{b}_{lm} \approx 1.86$$

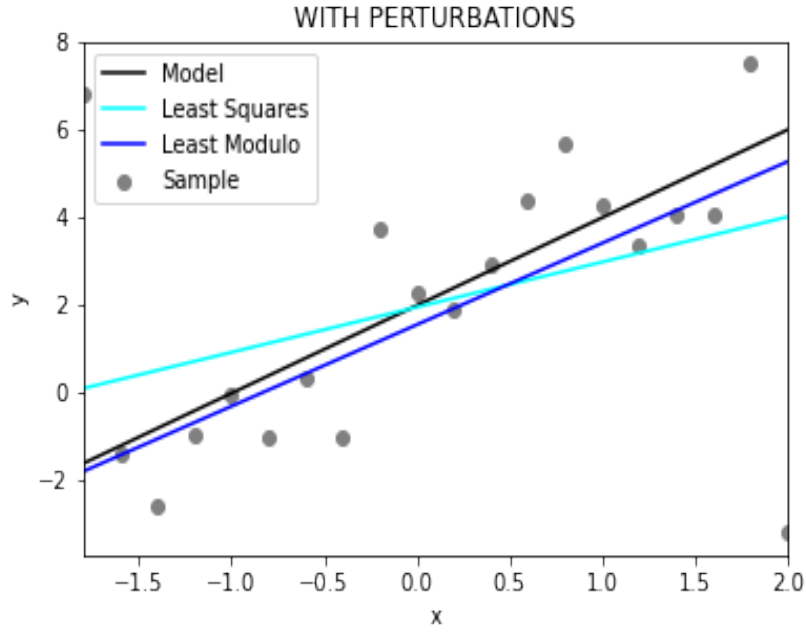


Рис. 2: Выборка с возмущениями

5 Обсуждение

Оценим, какие коэффициенты, полученные каким методом лучше аппроксимируют модельную зависимость: для МНК и МНМ для выборки с возмущениями и без них посчитаем сумму по всем $x \in [-1.8, 2]$, взятым с шагом 0.2:

$$Distance_{ls(lm)} = \sum (y_{model} - y_{ls(lm)})^2.$$

$$y_{model} = 2 + 2 \cdot x$$

$$y_{ls} = \hat{a}_{ls} + \hat{b}_{ls} \cdot x$$

$$y_{ls} = \hat{a}_{lm} + \hat{b}_{lm} \cdot x$$

Для данных выборок получаем:

- Выборка без возмущений:

$$Distance_{ls} < Distance_{lm}$$

$$5.922 < 6.485$$

Критерий наименьших квадратов точнее оценивает коэффициенты линейной регрессии на выборке без возмущений.

- Выборка без возмущений:

$$Distance_{lm} < Distance_{ls}$$

$$4.660 < 25.512$$

Для выборки с возмущениями результат получается точнее при оценке критерием наименьших модулей.

Таким образом, критерий наименьших модулей устойчив к редким выбросам, в отличие от критерия наименьших квадратов, что соответствует ожиданиям, ведь он обладает робастными свойствами.

6 Приложения

URL: Выполненная лабораторная работа на GitHub

<https://github.com/pikabol88/Math-Statistics/blob/main/labs/Lab6.ipynb>

Список литературы

- [1] Вероятностные разделы математики. Учебник для бакалавров технических направлений. //Под ред. Максимова Ю.Д. — Спб.: «Иван Федоров», 2001. — 592 с., илл.
- [2] Вентцель Е.С. Теория вероятностей: Учеб. для вузов. — 6-е изд. стер. — М.: Высш. шк., 1999.— 576 с.