Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ» «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТРАНСПОРТНОГО ТИПА»

Выполнили
студенты группы 3630102/80201

Деркаченко А. О.
Хрипунков Д. В.
Войнова А. Н.

Руководитель
к. ф.-м. н., доц.

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть имеется n пунктов хранения, в которых сосредоточен однотипный груз, и m пунктов назначения. Также известны:

- a_i - количество груза в i-ом пункте хранения
- b_j - суточная потребность в j-ом пункте назначения
- c_{ij} - стоимость перевозки единицы груза из i-ого в j-ый пункт

Необходимо составить план перевозок так, чтобы минимизировать стоимость проекта, то есть $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to min$, где x_{ij} - количество груза, перевезенного из i-ого в j-ый пункт.

Условие транспортной задачи задано в виде таблицы:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	3	2	7	11	11	19
a_2	2	4	5	14	8	5
a_3	9	4	7	15	11	21
a_4	2	5	1	5	3	9
	12	12	11	8	11	

Таблица 1: Транспортная задача

Необходимо:

1. Решить транспортную задачу методом потенциалов с выбором начального приближения методом северо-западного угла.
2. Решить эту же задачу методом перебора крайних точек и сравнить результаты.
3. Автоматизировать привидение исходной задачи к закрытому виду.
4. Описать алгоритм построения цикла пересчета.
5. Решить задачу с усложнением в виде штрафа за недопоставку груза.

Все необходимые алгоритмы *метода перебора крайних точек* описаны в отчете к лабораторной работе по решению задач линейного программирования симплекс-методом.

2 Исследование применимости метода

2.1 Применимость для метода потенциалов

Для того чтобы транспортная задача была поставлена корректно, необходимо выполнение следующих условий:

- $x_{ij} \geq 0$, где $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$
- $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sum_{j=1}^{m} b_i$

Для того чтобы применять заданные методы к решению транспортной задачи, она должна быть приведена к закрытому виду.

Проверим эти условия:

1. $x_{ij} \geq 0$, где $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$, задается в коде программы при определении данных переменных
2. $\sum_{i=1}^{n} a_i = 19+5+21+9 = 54$ и $\sum_{j=1}^{m} b_i = 12+12+11+8+11 = 54$. Следовательно, задача задана в закрытом виде

Таким образом, заданные методы применимы к данной задаче.

2.2 Применимость для метода перебора крайних точек

Для того чтобы применить данный метод к задаче, заданной в табличном виде, нужно преобразовать условие к СЛАУ и привести задачу к каноничному виду.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 19 \\ x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 5 \\ x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 21 \\ x_{16} + x_{17} + x_{18} + x_{19} + x_{20} = 9 \\ x_1 + x_6 + x_{11} + x_{16} = 12 \\ x_2 + x_7 + x_{12} + x_{17} = 12 \\ x_3 + x_8 + x_{13} + x_{18} = 11 \\ x_4 + x_9 + x_{14} + x_{19} = 8 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,n}, n = 20 \end{cases} \tag{1}$$

Функция цели примет вид $\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \to min$, где c_i - соответсвующие коэффициенты транспортной таблицы.

3 Описание алгоритма

3.1 Алгоритм метода северо-западного угла

Вход: массив значений запаса и потребности грузов

1. Двигаемся по таблице $n*m$ - размера с верхнего левого угла, заполняя ее ячейки значениями соответсвующих объемов перевозок, в северо-западном направлении
2. Находим максимально возможный объем груза для соответсвующей ячейки (i, j) посредством подсчета $\min\{a_i, b_j\}$ и заполняем этим значением данную ячейку

3. Вычитаем найденный объем груза из значений соответсвующих полей запаса и потребности

4. Если $a_i! = 0$, то двигаемся вправо по матрице. Если $b_i! = 0$, то двигаемся вниз по матрице. Иначе двигаемся по диагонали

5. Выполняем шаги 2-4, пока не достигнем правого нижнего угла матрицы

Этот алгоритм позволяет найти начальный план перевозок, то есть допустимую точку, но этот план не будет оптимальным, так как при рассчете не учитывалась стоимость перевозки.

3.2 Алгоритм проверки опорного плана на вырожденность

При нахождении опорных планов, в том числе начального, он может оказаться вырожденным. Так как задача рассматривается в закрытом виде, то требуется $n + m - 1$ уравнений для ее решения.

Если матрица имеет заполненных клеток меньше, чем требуется уравнений, то этот опорный план является вырожденным и необходимо добавить фиктивный элемент.

3.3 Алгоритм метода потенциалов

Пусть дана таблица, состоящая из элементов x_{ij}, где $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$. Каждой строчке этой таблицы поставим в соответсвие потенциал u_i, а столбцам - v_j.

1. Выписать соотношение $v_j - u_i = c_{ij}$ для каждой клетки, ввести искуственное ограничение, например, $v_0 = 0$, и решить СЛАУ, поочередно выражая переменные через друг друга

2. Вычислить параметр $\alpha_{ij} = v_j - u_i$ для ячеек, которые не входят в опорный план. Если $\alpha_{ij} \leq c_{ij}$, то найденный план оптимальный. Иначе пересчитываем план

3. Ввести в план перевозок ячейку (i, j) из свободных ячеек, для которой $\max \{\alpha_{ij} - c_{ij}\}$

4. Построить цикл пересчета в выбранной ячейке (i, j)

5. В полученном после пересчета списке ячеек найти минимальное значение объема перевозки в ячейках, помеченных знаком минус

6. Обойти все элементы найденного цикла, применяя к текущей ячейке операцию сложения или вычитания с найденым минимумом объема перевозки в зависимости от значения знака в ячейке

7. Продолжаем алгоритм с шага 1 после изменения опорного плана

3.4 Алгоритм поиска цикла пересчета

Цикл пересчета - последовательность попеременных горизонтальных и вертикальных перемещений в таблице, начиная и заканчивая в выбранной ячейке (i, j). В заполненных ячейках таблицы происходит смена направления движения.

1. Проверить, посещали ли заданную ячейку ранее. Если нет, то пометить ее, чередуя знаки
2. Проверить тип ячейки:
   - Если ячейка не базисная, то продолжаем движение в текущем направлении и запускаем процедуру для следующей клетки
   - Если ячейка базисная, то запускаем процедуру для всех ячеек, которые доступны по различным направлениям
   - Если ячейка начальная, то алгоритм прекращает работу, возвращая список ячеек, в которых произошла смена направления

3.5 Алгоритм приведения задачи к закрытому виду

1. Вычислить общую сумму запасов и общую сумму потребностей
2. Добавить столбец или строку с нулевой стоимостью перевозки:
   - Если превышают запасы, то добавить фиктивного потребителя
   - Если превышают потребности, то добавить фиктивного поставщика

4 Дополнительные исследования

4.1 Вывод цикла пересчета итерации метода потенциалов

Рассмотрим вторую итерацию метода потенциалов для решения исходной задачи, для которой опорный план имеет следующий вид:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		u_i
a_1	12	7	-	-	-	19	0
a_2	-	5	-	-	0	5	2
a_3	-	-	11	8	2	21	5
a_4	-	-	-	-	9	9	-3
	12	12	11	8	11		
v_j	3	2	2	10	6		

Таблица 2: Опорный план на второй итерации

Данный опорный план не является оптимальным, так как существуют свободные ячейки, для которых $v_j + u_i - c_{ij} > 0$:

- $(2,1) : 3 + 2 - 2 = 3$
- $(3,2) : 2 + 5 - 4 = 3$
- $(4,4) : 10 - 3 - 5 = 2$

Следовательно, $max\{3,3,2\} = 3$ и выбираем ячейку $(2,1)$.

```
     b1     b2    b3    b4    b5
---  -----  ----  ----  ----  ----  ---
a1   12[-]  7[+]  -     -     -     19
a2   [+]    5[-]  -     -     0     5
a3   -      -     11    8     2     21
a4   -      -     -     -     9     9
     12     12    11    8     11

Cycle: (2,1) -> (2,2) -> (1,2) -> (1,1) -> (2,1)
```

Рис. 1: Вывод цикла пересчета второй итерации

Перемещение по таблице начинается с движения в правую сторону и обход продолжается по часовой стрелке. Из небазисной ячейки $(2,1)$ мы движемся до базисной ячейки $(2,2)$. Далее возможны движения вправо к небазисной ячейке $(2,3)$, вниз к небазисной ячейке $(3,2)$ и вверх к базисной ячейке $(1,2)$.

Рассмотрим, например, ячейку $(2,3)$. От нее мы движемся до базисной ячейки $(2,5)$, из которой движение вверх не приводит к результату, так как выше расположены только небазисные ячейки и невозможно сменить направление движения. Аналогичная ситуация происходит и при движении вниз от данной ячейки. При рассмотрении ячейки $(3,2)$ тоже не происходит смены направления движения. Значит, нам подходит ячейка $(1,2)$, из которой движение вправо не приносит результата, а движение влево к базисной ячейке $(1,1)$ вызывает смену направления на начальную ячейку $(2,1)$ и замыкание цикла.

4.2 Решение траспортной задачи с усложнением

Сформулируем задачу с усложнением. Пусть за недопоставку некоторого уровня груза начисляется соответсвующий штраф.

Уровень	1	5	10
Штраф	3	9	20

Таблица 3: Штраф за недопоставку грузка

Создадим ситуацию недопоставки, то есть увеличим потребности на несколько единиц. В таком случае сумма всех потребностей будет превышать сумму всех запасов, то есть задача имеет открытый вид.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	
a_1	3	2	7	11	11	19
a_2	2	4	5	14	8	5
a_3	9	4	7	15	11	21
a_4	2	5	1	5	3	9
	13	14	11	10	12	

Таблица 4: Транспортная задача с усложнением

В таком случае для использования метода потенциалов необходимо приведение задачи к закрытому виду, при этом в зависимости от значения разности потребностей и запасов вводится фиктивная величина, имеющая стоимость, соответсвующую уровню вычисленной разности.

5 Практическое решение задач

5.1 Результат нахождения плана методом потенциалов для исходной задачи

Оптимальный опорный план имеет вид:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		u_i
a_1	7	4	-	8	-	19	0
a_2	5	-	-	-	-	5	-1
a_3	-	8	11	-	2	21	2
a_4	-	-	-	-	9	9	-6
	12	12	11	8	11		
v_j	3	2	5	11	9		

Таблица 5: Оптимальный опорный план, найденный методом потенциалов

Минимальные затраты при осуществлении данного опорного плана перевозок: $F(x) = 3 * 7 + 2 * 4 + 11 * 8 + 2 * 5 + 4 * 8 + 7 * 11 + 11 * 2 + 3 * 9 = 285$

5.2 Результат нахождения плана методом перебора крайних точек для исходной задачи

В результате работы программы получено решение следующее решение прямой задачи:

$$X_*^T = (7, 12, 0, 0, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 11, 0, 10, 0, 0, 0, 8, 1) \quad (2)$$

Тогда функция цели принимает значение:$F(x) = 3 * 7 + 2 * 12 + 2 * 5 + 7 * 11 + 11 * 10 + 5 * 8 + 3 * 1 = 285$

Как можно увидеть, данный оптимальный опорный план отличается от найденного методом потенциалов, но функция цели принимает то же значение. Такую ситуацию можно объяснить наличием нескольких допустимых оптимальных планов, и в случае метода перебора для составлении СЛАУ с линейно независимыми строками матрицы убиралось уравнение, состовляющее последний столбец транспортной таблицы. То есть при удалении другой строки, метод перебора даст другой допустимый оптимальный план.

К тому же стоит сказать, что одним из допустимых решений прямой задачи является оптимальный план:

$$X_*^T = (7, 4, 0, 8, 0, 5, 0, 0, 0, 0, 0, 8, 11, 0, 2, 0, 0, 0, 0, 9) \tag{3}$$

В таком случае функция цели принимает значение: $F(x) = 3 * 7 + 2 * 4 + 11 * 8 + 2 * 5 + 4 * 8 + 7 * 11 + 11 * 2 + 3 * 9 = 285$

То есть можно сделать вывод, что оба метода верно находят решение исходной задачи.

5.3 Результат нахождения плана методом потенциалов для задачи с усложнением

Оптимальный опорный план задачи с усложнением имеет вид:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		u_i
a_1	13	4	-	2	-	19	0
a_2	-	-	-	-	5	5	-1
a_3	-	10	11	-	-	21	2
a_4	-	-	-	2	7	9	-6
a_5	-	-	-	6	-	9	-2
	13	14	11	10	12		
v_j	3	2	5	11	9		

Таблица 6: Оптимальный опорный план задачи с усложнением

Минимальные затраты при осуществлении данного опорного плана перевозок: $F(x) = 3 * 13 + 2 * 4 + 11 * 2 + 8 * 5 + 4 * 10 + 7 * 11 + 5 * 2 + 3 * 7 + 9 * 6 = 311$

Добавим к итоговой стоимости перевозки для исходной задачи сумму штрафа за недопоставку: $G(x) = 285 + 9 * 6 = 339$, то есть $F(x) < G(x)$, а значит, произошло перераспределение значений опорного вектора для уменьшения общей стоимости перевозки.

6 Обоснование результатов

Для того чтобы найденное решение было оптимальным, необходимо выполнение условия $v_j + u_i \leq c_{ij}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$ для ячеек, не входящих в оптимальный опорный план.

6.1 Проверка результатов метода потенциалов

Дано:

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		u_i
a_1	7	4	-	8	-	19	0
a_2	5	-	-	-	-	5	-1
a_3	-	8	11	-	2	21	2
a_4	-	-	-	-	9	9	-6
	12	12	11	8	11		
v_j	3	2	5	11	9		

Таблица 7: Оптимальный опорный план, найденный методом потенциалов

Матрица стоимости перевозок между пунктами:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 11 & 11 \\ 2 & 4 & 5 & 14 & 8 \\ 9 & 4 & 7 & 15 & 11 \\ 2 & 5 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Проверим ячейки, не входящие в найденный опорный план:

$$\begin{cases} v_1 + u_3 = 3 + 2 = 5 \leq 9 \\ v_1 + u_4 = 3 - 6 = -3 \leq 2 \\ v_2 + u_2 = 2 - 1 = 1 \leq 4 \\ v_2 + u_4 = 2 - 6 = -4 \leq 5 \\ v_3 + u_1 = 5 + 0 = 5 \leq 7 \\ v_3 + u_2 = 5 - 1 = 4 \leq 5 \\ v_3 + u_4 = 5 - 6 = -1 \leq 1 \\ v_4 + u_2 = 11 - 1 = 10 \leq 14 \\ v_4 + u_3 = 11 + 2 = 13 \leq 15 \\ v_4 + u_4 = 11 - 6 = 5 \leq 5 \\ v_5 + u_1 = 9 + 0 = 9 \leq 11 \\ v_5 + u_2 = 9 - 1 = 8 \leq 8 \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, найденный опорный план действительно является оптимальным.

6.2 Проверка результатов метода перебора

Проверим, что найденный опорный план, является так же оптимальным, хоть и не равен плану, найденному методом потенциалов.

Матрица стоимости перевозок между пунктами:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 11 & 11 \\ 2 & 4 & 5 & 14 & 8 \\ 9 & 4 & 7 & 15 & 11 \\ 2 & 5 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		u_i
a_1	7	12	-	-	-	19	0
a_2	5	-	-	-	-	5	-1
a_3	-	-	11	-	10	21	2
a_4	-	-	-	8	1	9	-6
	12	12	11	8	11		
v_j	3	2	5	11	9		

Таблица 8: Оптимальный опорный план, найденный методом перебора

Проверим ячейки, не входящие в найденный опорный план:

$$\begin{cases} v_1 + u_3 = 3 + 2 = 5 \leq 9 \\ v_1 + u_4 = 3 - 6 = -3 \leq 2 \\ v_2 + u_2 = 2 - 1 = 1 \leq 4 \\ v_2 + u_3 = 2 + 2 = 4 \leq 4 \\ v_2 + u_4 = 2 - 6 = -4 \leq 5 \\ v_3 + u_1 = 5 + 0 = 5 \leq 7 \\ v_3 + u_2 = 5 - 1 = 4 \leq 5 \\ v_3 + u_4 = 5 - 6 = -1 \leq 1 \\ v_4 + u_1 = 11 + 0 = 11 \leq 11 \\ v_4 + u_2 = 11 - 1 = 10 \leq 14 \\ v_4 + u_3 = 11 + 2 = 13 \leq 15 \\ v_5 + u_1 = 9 + 0 = 9 \leq 11 \\ v_5 + u_2 = 9 - 1 = 8 \leq 8 \end{cases} \tag{5}$$

Таким образом, найденный опорный план действительно является оптимальным.

6.3 Проверка результатов задачи с усложнением

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5		u_i
a_1	13	4	-	2	-	19	0
a_2	-	-	-	-	5	5	-1
a_3	-	10	11	-	-	21	2
a_4	-	-	-	2	7	9	-6
a_5	-	-	-	6	-	9	-2
	13	14	11	10	12		
v_j	3	2	5	11	9		

Таблица 9: Оптимальный опорный план задачи с усложнением

Матрица стоимости перевозок между пунктами:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 & 11 & 11 \\ 2 & 4 & 5 & 14 & 8 \\ 9 & 4 & 7 & 15 & 11 \\ 2 & 5 & 1 & 5 & 3 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$$

Проверим ячейки, не входящие в найденный опорный план:

$$\begin{cases} v_1 + u_2 = 3 - 1 = 2 \leq 2 \\ v_1 + u_3 = 3 + 2 = 5 \leq 9 \\ v_1 + u_4 = 3 - 6 = -3 \leq 2 \\ v_1 + u_5 = 3 - 2 = 1 \leq 9 \\ v_2 + u_2 = 2 - 1 = 1 \leq 4 \\ v_2 + u_4 = 2 - 6 = -4 \leq 5 \\ v_2 + u_5 = 2 - 2 = 0 \leq 9 \\ v_3 + u_1 = 5 + 0 = 5 \leq 7 \\ v_3 + u_2 = 5 - 1 = 4 \leq 5 \\ v_3 + u_4 = 5 - 6 = -1 \leq 1 \\ v_3 + u_5 = 5 - 2 = 3 \leq 9 \\ v_4 + u_2 = 11 - 1 = 10 \leq 14 \\ v_4 + u_3 = 11 + 2 = 13 \leq 15 \\ v_5 + u_1 = 9 + 0 = 9 \leq 11 \\ v_5 + u_3 = 9 + 2 = 11 \leq 11 \\ v_5 + u_5 = 9 - 2 = 7 \leq 9 \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом, найденный опорный план действительно является оптимальным.

7 Выводы

Метод северо-западного угла для нахождения начального плана не позволяет найти оптимальный план перевозки, так как при заполнении клеток матрицы не учитывается стоимость перевозок груза. Но этот метод имеет достаточно простой алгоритм и позволяет найти начальное приблежение искомого плана для последующего его улучшения.

Метод потенциалов реализует упрощенную процедуру симплекс-метода. Он гарантирует получение оптимального решения, однако является достаточно сложным и требующим больших временных затрат.

К тому же метод потенциалов позволяет задавать условие задачи в более компактном виде, нежели метод перебора крайних точек. Например, исходя из заданного условия, в методе потенциалов мы оперировали матрицей, размерностью 5 на 6, учитывая значения запасов и потребностей, а для метода перебора потребовалось задать матрицу, размерностью 8 на 20, что значительно больше.

8 Приложения

URL: Выполненная лабораторная работа на GitHub
https://github.com/ThinkingFrog/OptimizationMethods/tree/main/TransportTask