

Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ»
«РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ МНОГОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ
С ОГРАНИЧЕНИЯМИ»

Выполнили
студенты группы 3630102/80201

Деркаченко А. О.
Хрипунков Д. В.
Войнова А. Н.

Руководитель
к. ф.-м. н., доц.

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1	Постановка задачи	2
2	Исследование применимости метода	2
3	Описание алгоритма	7
3.1	Метод всевозможных направлений Зойтендейка	7
3.1.1	Начальный этап	7
3.1.2	Поиск начального приближения	8
3.1.3	Основной этап	8
3.1.4	Выбор величины шага по принципу дробления	8
4	Практическое решение задач	9
5	Обоснование результатов	10
6	Выводы	10
7	Приложения	11

1 Постановка задачи

Пусть дана задача двумерной минимизации $\phi_0(x) = 4x_1 + x_2 + 4\sqrt{1 + 3x_1^2 + x_2^2}$.
Необходимо:

1. Ввести ограничения вида $\phi_i(x) \leq 0$, где $i = \overline{1, m}$, $m = 4$, которые могут иметь линейный вид, таким образом, чтобы оптимальная точка решения данной задачи находилась:
 - внутри введенной области
 - на границе введенной области
2. Решить задачу условной минимизации методом всевозможных направлений Зойтендейка
3. Проиллюстрировать поведение алгоритма

2 Исследование применимости метода

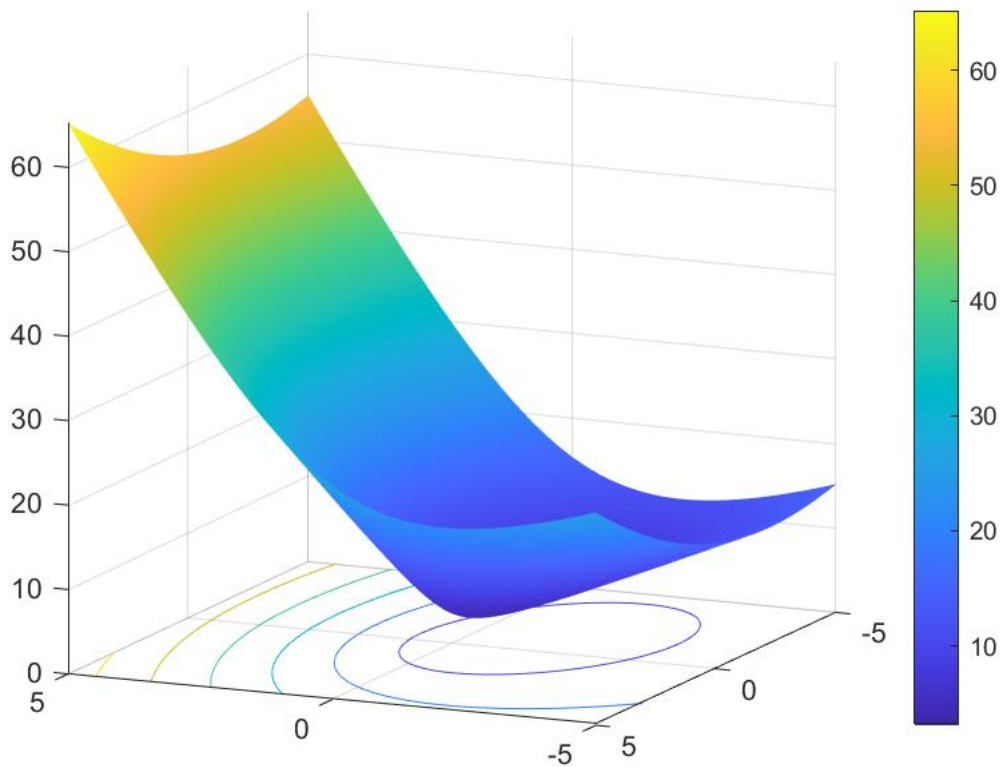


Рис. 1: График исходной функции

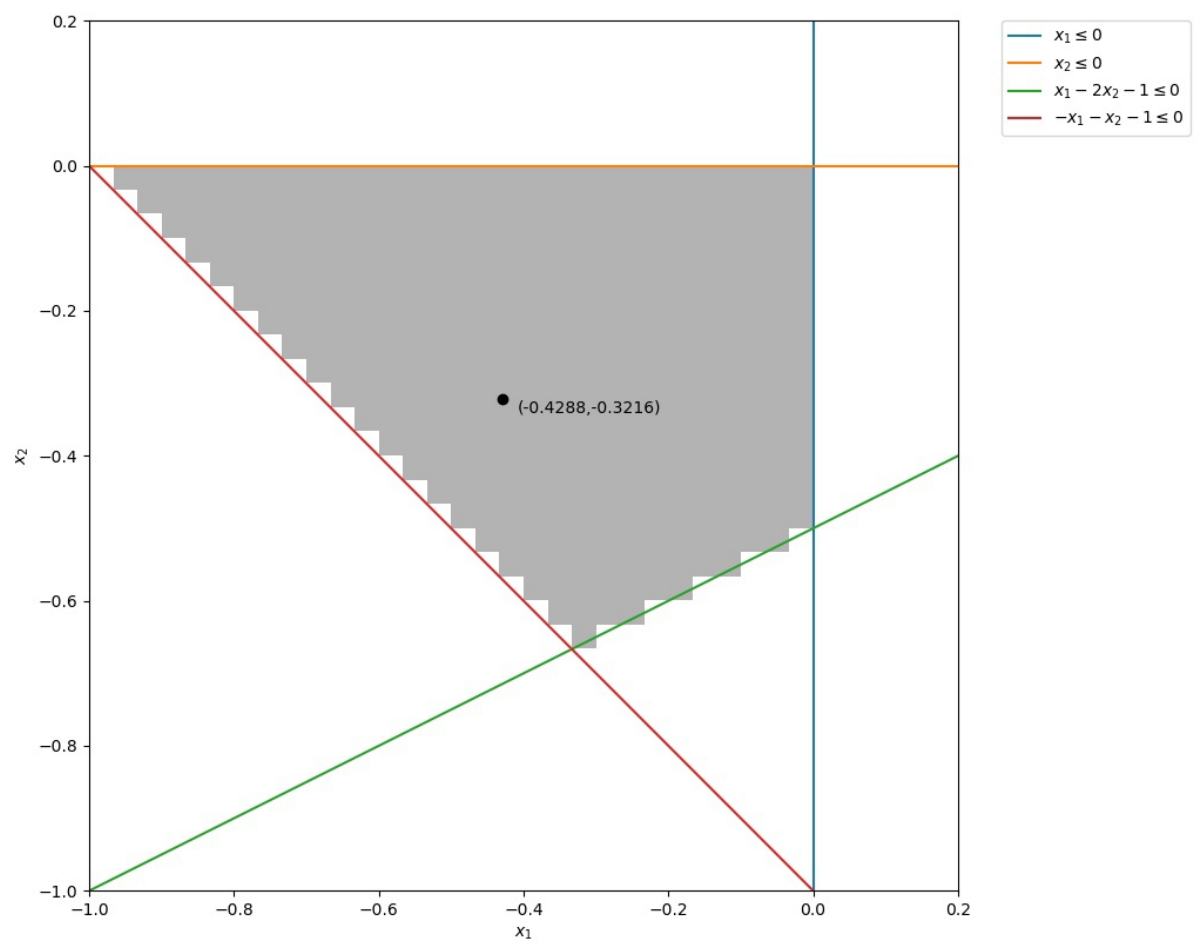


Рис. 2: Область для внутренней точки

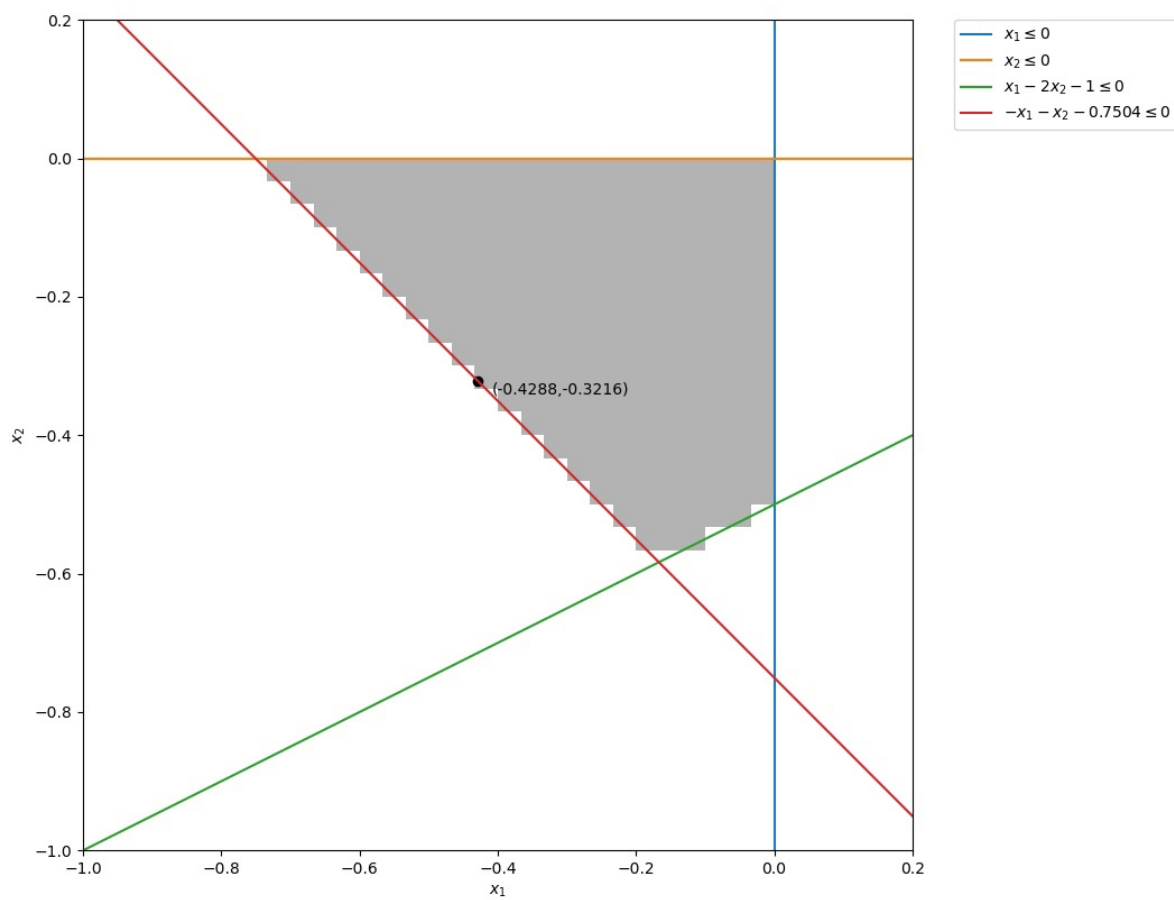


Рис. 3: Область для точки на границе

$\exists \varphi_0(x)$ - вогнутая функция, $S = \{x \mid \varphi_i(x) \leq 0$
при $i = \overline{1, m}\} \subset \mathbb{R}^n$ - вогнутое множество

Тогда задача имеет вид $\min \varphi_0(x)$, где $x \in S$

Основные условия применимости:

1. $\varphi_i(x)$ - вогнутые для $i = \overline{0, m}$
2. $\varphi_i(x)$ - непрерывно дифференцируемые для $i = \overline{0, m}$
3. $\|\nabla \varphi_i(x)\| \leq K$ для $i = \overline{0, m}$
4. $\|\nabla \varphi_i(x) - \nabla \varphi_i(y)\| \leq R \|x - y\| \forall x, y \in \mathbb{R}^n, i = \overline{0, m}$
5. S - компактное
6. Условие Слейтера: $\exists \bar{x} : \varphi_i(\bar{x}) < 0$ для $i = \overline{1, m}$

Введем ограничения такого вида, чтобы оптимальная точка $x^* = (-0,4288; -0,3218)$ целевой функции была внутренней (рис 2):

$$\begin{cases} x_1 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1 - 2x_2 - 1 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 - 1 \leq 0 \end{cases}$$

1. Все ограничения линейные, поэтому функции вогнутые и выпуклые одновременно. Вогнутость функции цели доказана в предыдущей работе.

2. Очевидно, что все функции непрерывно дифференцируемы

$$3. \nabla \varphi_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\nabla \varphi_1(x)\| = 1$$

$$\nabla \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\nabla \varphi_2(x)\| = 1$$

$$\nabla \varphi_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\nabla \varphi_3(x)\| = \sqrt{5}$$

$$\nabla \varphi_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\nabla \varphi_4(x)\| = \sqrt{2}$$

$$\nabla \varphi_0(x) = \begin{pmatrix} 4 + \frac{12x_1}{\sqrt{1+3x_1^2+x_2^2}} \\ 1 + \frac{4x_2}{\sqrt{1+3x_1^2+x_2^2}} \end{pmatrix} \Rightarrow \|\nabla \varphi_0(x)\| =$$

$$= \sqrt{16 + \frac{96x_1^2}{1+3x_1^2+x_2^2} + \frac{144x_1^2}{1+3x_1^2+x_2^2} + 1 + \frac{8x_2}{\sqrt{1+3x_1^2+x_2^2}} + \frac{16x_2^2}{1+3x_1^2+x_2^2}} = \sqrt{17 + \frac{8(x_2+12x_1)}{\sqrt{1+3x_1^2+x_2^2}} + \frac{16(9x_1^2+x_2^2)}{1+3x_1^2+x_2^2}}$$

Заданная функция будет максимальной, если x_i принимает максимальное значение
 ≠ точку $(0,0) \Rightarrow \|\nabla \varphi_0(x)\| = \sqrt{17}$
 $\Rightarrow \|\nabla \varphi_i(x)\| \leq \sqrt{17}$

4. Функция цели удовлетворяет условию Липшица, что доказано в предыдущей работе

$$\|\nabla \varphi_i(x) - \nabla \varphi_i(y)\| = 0 \quad \forall x, y \in S, \quad i = \overline{1, m}$$

$\Rightarrow 0 \leq R \|x - y\| \Rightarrow$ удовлетворяет условию Липшица

5. S -ограничено, так как образовано пересечением конечного числа замкнутых подаллооскостей;

Следовательно, S - выпукло, замкнуто. Значит, компактно в \mathbb{R}^n

6. Условие Слейтера выполняется, так как $S \neq \emptyset$

Введем ограничения так, чтобы оптимальная точка $(0, 4288, -0,3216)$ лежала на границе:

$$\begin{cases} x_1 \leq 0 \\ x_2 \leq 0 \\ x_1 - 2x_2 - 1 \leq 0 \\ -x_1 - x_2 - 0,7504 \leq 0 \end{cases}$$

Расположение точки подтверждаем рис 3.

Рассуждения о применимости метода имеют аналогичное заключение.

3 Описание алгоритма

3.1 Метод всевозможных направлений Зойтендейка

3.1.1 Начальный этап

1. Выбрать совокупность параметров $\{\xi_i\}_0^m : \xi_i > 0$, используемых для улучшения свойств сходимости задачи. В решении рекомендовано взять $\xi_i = 1$ для $\forall i = \overline{0, m}$
2. Выбрать параметр дробления $0 < \lambda < 1$. Рекомендовано взять для решения задачи $\lambda = \frac{1}{2}$
3. Выбрать начальное приближение $x_0 \in S$, где $S = \{X | \phi_i(x) \leq 0 \text{ для } \forall i = \overline{1, m}\}$ и параметр η_0

4. Взять критерий близости к почти активным ограничениям $\delta_0 = -\eta_0$, где $\delta_0 > 0$,
 $J_{\delta_k}(x_k) = \{i \in M \mid -\delta_k \leq \phi_i(x_k) \leq 0\}$ - множество номеров почти активных ограничений для $M = \overline{1, m}$

3.1.2 Поиск начального приближения

1. Найти $\min \eta < 0$ при условии $\phi_i(x) * \eta \leq 0$, где $i = \overline{1, m}$
2. Решением будет точка $x_0 : \phi_i(x_0) \leq 0$, которая является допустимой точкой для исходной задачи
3. $\eta_0 = \min \eta$

3.1.3 Основной этап

1. Известны $x_k \in S$ и $\delta_k > 0$
2. Решить вспомогательную задачу линейного программирования симплекс-методом для определения направления спуска $s : \min \eta$ при условиях

$$\begin{cases} \nabla^T \phi_0(x_k) * s \leq \eta \xi_0 \\ \nabla^T \phi_i(x_k) * s \leq \eta \xi_i \end{cases} \quad (1)$$

для $i \in J_{\delta_k}(x_k)$

3. Обозначить найденные $s_{\delta_k}(x_k) = s_k$ и $\eta_{\delta_k}(x_k) = \eta_k$
4. Если $\eta_k < -\delta_k$:
 - Делаем шаг α_k по выбранному направлению $x_{k+1} = x_k + \alpha_k s_k$ и $\delta_{k+1} = \delta_k$
 - Иначе шаг не делается, то есть $x_{k+1} = x_k$ и $\delta_{k+1} = \lambda \delta_k$
5. Закончить работу алгоритма при $\delta_k < \delta_{0k}$, где $-\delta_{0k} = \max \phi_i(x_k)$ для $i \notin J_0(x_k)$ - не для активных ограничений, и $\eta_k = 0$

3.1.4 Выбор величины шага по принципу дробления

1. Положить $\alpha_k = \alpha_0 * \lambda^{ik}$, где $\alpha_0 = 1$
2. Выбрать α_k , удовлетворяющее условиям:

$$\begin{cases} \phi_0(x_k + \alpha_k * s_k) - \phi_0(x_k) \leq \xi_0 \eta_k \alpha_k \\ \phi_i(x_k + \alpha_k * s_k) \leq 0, i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (2)$$

4 Практическое решение задач

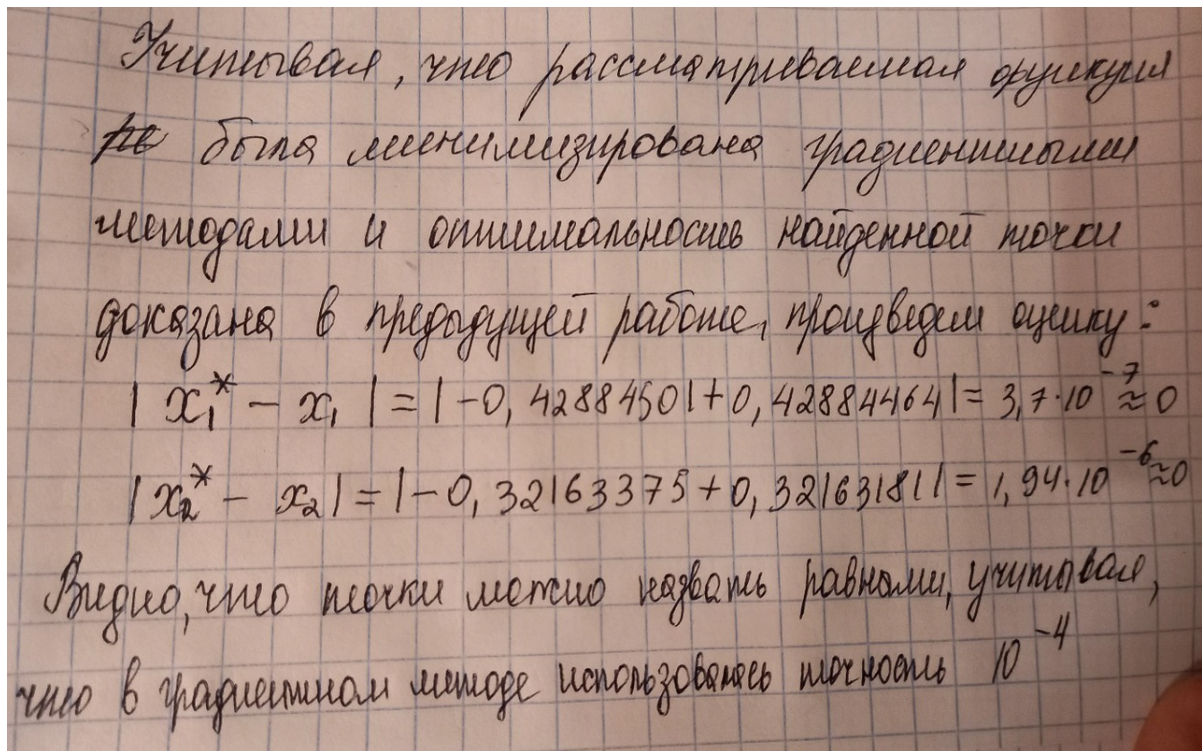
Решение задачи многомерной минимизации при ограничениях такого вида, что оптимальная точка x^* находится внутри рассматриваемой области:

x^*	(-0.42884464, -0.32163181)
ϕ_0^*	3.10912635
Число итераций	35

```
iter: 1 - x: [-0.325, -0.275]
iter: 2 - x: [-0.3875, -0.3375]
iter: 3 - x: [-0.41875, -0.30625]
iter: 4 - x: [-0.41875, -0.30625]
iter: 5 - x: [-0.4265625, -0.3140625]
iter: 6 - x: [-0.4265625, -0.3140625]
iter: 7 - x: [-0.428515625, -0.316015625]
iter: 8 - x: [-0.428515625, -0.316015625]
iter: 9 - x: [-0.4275390625, -0.3169921875]
iter: 10 - x: [-0.4294921875, -0.3189453125]
iter: 11 - x: [-0.428515625, -0.319921875]
iter: 12 - x: [-0.428515625, -0.319921875]
iter: 13 - x: [-0.428515625, -0.319921875]
iter: 14 - x: [-0.42900390625, -0.32041015625]
iter: 15 - x: [-0.428515625, -0.3208984375]
iter: 16 - x: [-0.428759765625, -0.321142578125]
iter: 17 - x: [-0.428759765625, -0.321142578125]
iter: 18 - x: [-0.428759765625, -0.321142578125]
iter: 19 - x: [-0.4288818359375, -0.3212646484375]
iter: 20 - x: [-0.428759765625, -0.32138671875]
iter: 21 - x: [-0.4288818359375, -0.3215087890625]
iter: 22 - x: [-0.4288818359375, -0.3215087890625]
iter: 23 - x: [-0.42882080078125, -0.32156982421875]
iter: 24 - x: [-0.42882080078125, -0.32156982421875]
iter: 25 - x: [-0.428851318359375, -0.321600341796875]
iter: 26 - x: [-0.428851318359375, -0.321600341796875]
iter: 27 - x: [-0.4288360595703125, -0.3216156005859375]
iter: 28 - x: [-0.4288360595703125, -0.3216156005859375]
iter: 29 - x: [-0.42884368896484376, -0.32162322998046877]
iter: 30 - x: [-0.42884368896484376, -0.32162322998046877]
iter: 31 - x: [-0.4288475036621094, -0.3216270446777344]
iter: 32 - x: [-0.42884368896484376, -0.321630859375]
iter: 33 - x: [-0.42884368896484376, -0.321630859375]
iter: 34 - x: [-0.42884464263916017, -0.32163181304931643]
iter: 35 - x: [-0.42884464263916017, -0.32163181304931643]
Answer: [-0.42884464263916017, -0.32163181304931643]
```

Рис. 4: Иллюстрация работы алгоритма

5 Обоснование результатов



6 Выводы

Метод имеет ряд преимуществ. Во-первых, он гарантирует сходимость к оптимальной точке при выполнении основных условий применимости метода. К тому же решение вспомогательной задачи линейного программирования может производиться любым наиболее подходящим под условия методом. Также учитываются при построении направления следующего шага только ограничения, близкие к активным, а на остальных ограничениях можно рассматривать задачу безусловной минимизации. Стоит сказать, что выбор величины шага позволяет оценить убывание значения функции в следующей точке по отношению к предыдущему шагу.

Недостатками данного метода могут являться достаточно жесткие условия применимости метода, налагаемые на функцию и область ее исследования, и сложность аналитического определения параметра дробления исходя из обстоятельств подбора шага и необходимости отодвигаться поближе к границе.

Зачастую в задачах на выбор начального приближения из рассматриваемого множества сложно подобрать такую точку, чтобы учесть все наборы ограничений. Для этого может использоваться метод всевозможных направлений Зойтендейка, позволяющий найти допустимую точку и выбрать ее в качестве начального приближения.

7 Приложения

URL: Выполненная лабораторная работа на GitHub

<https://github.com/ThinkingFrog/OptimizationMethods/tree/main/MultiDimWithRestriction>