Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ» «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ»

Выполнили
студенты группы 3630102/80201

Деркаченко А. О.
Хрипунков Д. В.
Войнова А. Н.

Руководитель
к. ф.-м. н., доц.

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть дана функция $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$, где $x \in [-1, 0]$. Необходимо:

1. Найти минимум данной функции методом дихотомии и полиномиальной аппроксимации второго порядка (методом парабол)
2. Проиллюстрировать унимодальность функции графиком
3. Сравнить аналитическую оценку числа обращений к вычислению функции цели, требуемое для достижения заданной точности, с значением счетчика данных обращений в программе
4. Произвести вычисления с точностью 0.1, 0.01, 0.001

2 Исследование применимости метода

Для того чтобы методы дихотомии и парабол были применимы к задаче одномерной минимизации, необходима унимодальность рассматриваемой функции.

<u>Опр:</u> функция $f(x)$ называется унимодальной, если для $x \in [a, b]$ существует единственная точка глобального минимума, слева от которой $f(x)$ монотонно убывает, а справа – монотонно возрастает.

Дана функция $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$, где $x \in [-1, 0]$. Ее график приведен на рис. 1, который демонстрирует наличие единственного минимума, тем самым доказывая унимодальность функции.

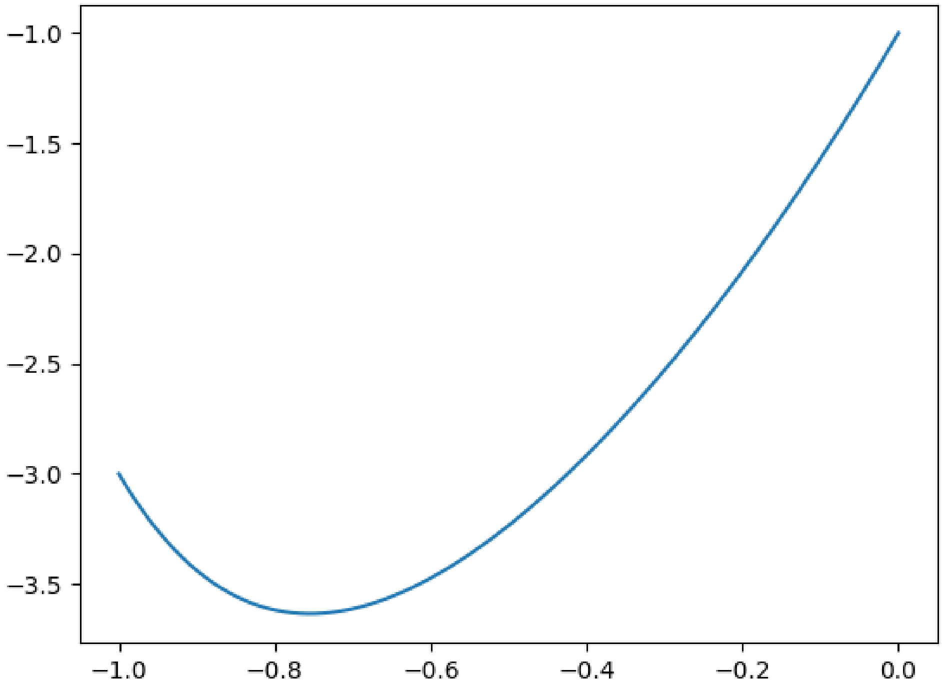

Рис. 1: График заданной функции

3 Описание алгоритма

3.1 Алгоритм метода дихотомии

1. Вводим константу различимости $\alpha = \frac{b-a}{100}$

2. На каждом шаге процесса поиска делим отрезок $[a, b]$ пополам, $x = \frac{a+b}{2}$ - координата середины отрезка $[a, b]$

3. Вычисляем значение функции $F(x)$ в окрестности $\pm\alpha$ вычисленной точки x, т.е.
$$F_1 = F(x - \alpha), \; F_2 = F(x + \alpha) \quad (1)$$

4. Сравниваем F_1 и F_2 и отбрасываем одну из половинок отрезка $[a, b]$
   - Если $F_1 < F_2$, то отбрасываем отрезок $[x, b]$, тогда $b = x$
   - Иначе отбрасываем отрезок $[a, x]$, тогда $a = x$

5. Деление отрезка $[a, b]$ продолжается, пока его длина не станет меньше заданной точности ε, т.е. $|b - a| \leq \varepsilon$

3.2 Алгоритм метода парабол

1. Определить начальные точки $x_1 = a, x_2 = \frac{a+b}{2}, x_3 = b$
2. Вычислить значение функции цели f_1, f_2, f_3 в этих точках
3. Вычислить коэффициенты $a_0 = f_1, a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}, a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} * (\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}$
4. Вычислить новое значение точки минимума $x_* = 0.5 * (x_2 + x_1 - \frac{a_1}{a_2})$ и значение функции цели $f_*(x_*)$
   - Если расстояние между новым значением точки минимума и полученным на прошлой итерации меньше заданной точности, получаем результат
   - Если расстояние больше точности, то вычисляем новые точки $x1, x2, x3$ (обращений к функции цели нет, потому что используются $f1, f2, f3, f_*$) и возвращаемся к пункту 2

4 Практическое решение задач

ε	x_{result}	$f(x_{result})$	число обращений
0.1	-0.78125	-3.62907	8
0.01	-0.75391	-3.6347	14
0.001	-0.75439	-3.63471	20

Таблица 1: Результат решения методом дихотомии

ε	x_{result}	$f(x_{result})$	число обращений
0.1	-0.72027	-3.62562	4
0.01	-0.74924	-3.63446	6
0.001	-0.75449	-3.63471	9

Таблица 2: Результат решения методом парабол

5 Обоснование результатов

Найдем минимум функции $f(x)=x^6+3x^2+6x-1$, где $x\in[-1,0]$ с помощью классического подхода

$f'(x)=6x^5+6x+6 \Rightarrow x^5+x+1=0 \Leftrightarrow$

$(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)=0$

$\Rightarrow$ в отрезок $[-1,0]$ входит единственный корень $x^*=-0,75488$. Тогда $f(x^*)=-3,63471$

Данное значения подтверждает график функции $f(x)$ на рис 1.

ε	Метод дихотомии		Метод парабол	
	$\lvert x^*-x_{result}\rvert$	$\lvert f^*-f_{result}\rvert$	$\lvert x^*-x_{result}\rvert$	$\lvert f^*-f_{result}\rvert$
0,1	0,02637	0,0564	0,03461	0,00909
0,01	0,00097	0,00001	0,00564	0,00025
0,001	0,00049	0	0,00039	0

Полученная погрешность результата удовлетворяет условию при заданной точности для всех случаев решения задачи. А значит, результаты найдены корректно.

6 Дополнительные исследования

Проведем сравнение аналитической оценки числа обращений к вычислению функции цели, требуемое для достижения заданной точности, с значением счетчика данных обращений в программе

6.1. Оценка для метода дихотомии

Оценим число итераций для достижения заданной точности ε методом индукции для $[a, b]$

Б.И.: $x_1 = \frac{b-a}{2}$

Длина интервала не зависит от результата сравнения значений функции, поэтому НУО будем выбирать левую часть отрезка

$$x_2 = \frac{x_1 - a}{2} = \frac{\frac{b-a}{2} - a}{2} = \frac{b-3a}{4}$$

$$x_3 = \frac{x_2 - a}{2} = \frac{\frac{b-3a}{4} - a}{2} = \frac{b-7a}{8}$$

И.П.: $x_k = \frac{x_{k-1} - a}{2} = \frac{b-(2^k-1)a}{2^k}$

$$\Rightarrow |x_{k-1} - x_k| = \left| \frac{b-(2^{k-1}-1)a}{2^{k-1}} - \frac{b-(2^k-1)a}{2^k} \right| =$$

$$= \frac{1}{2^k} \cdot |2b - 2^k a + 2a - b + 2^k a - a| = \frac{1}{2^k} |b+a| \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow k + \log_2 \varepsilon \geq \log_2 |b+a| \Rightarrow k = \left\lceil \log_2 \frac{|b+a|}{\varepsilon} \right\rceil$$
— число итераций при точности ε.

При рассмотрении структуры алгоритма можно сделать вывод, что вызов функции цели на каждой итерации производится дважды

Точность ε	Теоретическая оценка	Практическая оценка
0,1	8	8
0,01	14	14
0,001	20	20

Таким образом, алгоритм метода дихотомии реализован оптимально.

7 Выводы

Для решения задачи одномерной минимизации использовались методы дихотомии и парабол. Оба из них являются итерационными и позволяют регулировать точность нахождения решения. Также эти методы являются достаточно простыми в реализации.

Стоит сказать, что при заданной точности решение методом дихотомии находится немного точнее, чем методом парабол, но требует более чем в два раза большего количества обращений к вычислению функции цели. То есть для функций большой вычислительной сложности более практически выгоден метод парабол.

8 Приложения

URL: Выполненная лабораторная работа на GitHub https://github.com/ThinkingFrog/OptimizationMethods/tree/main/OneDimMinimization