Санкт-Петербургский политехнический университет
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики
Кафедра «Прикладная математика»

ОТЧЁТ ПО ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ» «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ»

Выполнили
студенты группы 3630102/80201

Деркаченко А. О.
Хрипунков Д. В.
Войнова А. Н.

Руководитель
к. ф.-м. н., доц.

Родионова Елена Александровна

Санкт-Петербург
2021

Содержание

1 Постановка задачи

Пусть дана функция $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$, где $x \in [-1, 0]$. Необходимо:

1. Найти минимум данной функции методом дихотомии и полиномиальной аппроксимации второго порядка (методом парабол)
2. Проиллюстрировать унимодальность функции графиком
3. Сравнить аналитическую оценку числа обращений к вычислению функции цели, требуемое для достижения заданной точности, с значением счетчика данных обращений в программе
4. Произвести вычисления с точностью 0.1, 0.01, 0.001

2 Исследование применимости метода

Для того чтобы методы дихотомии и парабол были применимы к задаче одномерной минимизации, необходима унимодальность рассматриваемой функции.

<u>Опр:</u> функция $f(x)$ называется унимодальной, если для $x \in [a, b]$ существует единственная точка глобального минимума, слева от которой $f(x)$ монотонно убывает, а справа - монотонно возрастает.

Дана функция $f(x) = x^6 + 3x^2 + 6x - 1$, где $x \in [-1, 0]$. Ее график приведен на рис. 1, который демонстрирует наличие единственного минимума, тем самым доказывая унимодальность функции.

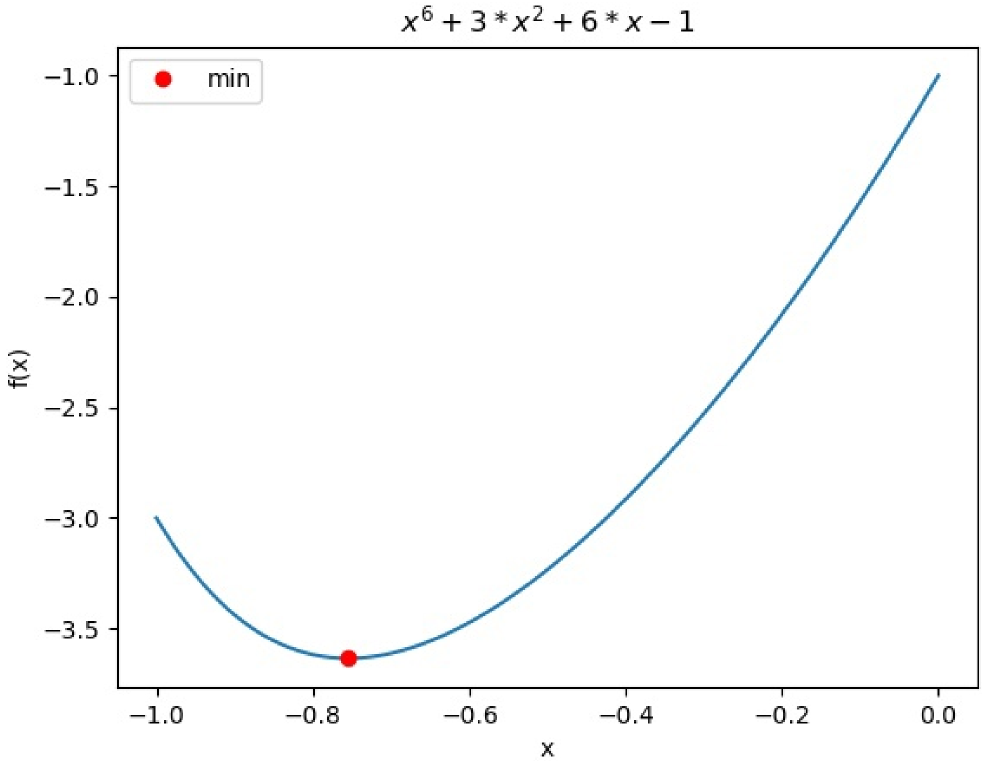


Рис. 1: График заданной функции

3 Описание алгоритма

3.1 Алгоритм метода дихотомии

1. Вводим константу различимости $\alpha = \frac{b-a}{100}$
2. На каждом шаге процесса поиска делим отрезок $[a, b]$ пополам, $x = \frac{a+b}{2}$ - координата середины отрезка $[a, b]$
3. Вычисляем значение функции $F(x)$ в окрестности $\pm\alpha$ вычисленной точки x, т.е.
$$F_1 = F(x - \alpha),\ F_2 = F(x + \alpha) \tag{1}$$
4. Сравниваем F_1 и F_2 и отбрасываем одну из половинок отрезка $[a, b]$
   - Если $F_1 < F_2$, то отбрасываем отрезок $[x, b]$, тогда $b = x$
   - Иначе отбрасываем отрезок $[a, x]$, тогда $a = x$
5. Деление отрезка $[a, b]$ продолжается, пока его длина не станет меньше заданной точности ε, т.е. $|b - a| \leq \varepsilon$

3.2 Алгоритм метода парабол

1. Определить начальные точки $x_1 = a, x_2 = \frac{a+b}{2}, x_3 = b$
2. Вычислить значение функции цели f_1, f_2, f_3 в этих точках
3. Вычислить коэффициенты $a_0 = f_1, a_1 = \frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}, a_2 = \frac{1}{x_3-x_2} * (\frac{f_3-f_1}{x_3-x_1} - \frac{f_2-f_1}{x_2-x_1}$
4. Вычислить новое значение точки минимума $x_* = 0.5 * (x_2 + x_1 - \frac{a_1}{a_2})$ и значение функции цели $f_*(x_*)$
   - Если расстояние между новым значением точки минимума и полученным на прошлой итерации меньше заданной точности, получаем результат
   - Если расстояние больше точности, то вычисляем новые точки $x1, x2, x3$ (обращений к функции цели нет, потому что используются $f1, f2, f3, f_*$) и возвращаемся к пункту 2

4 Практическое решение задач

ε	x_{result}	$f(x_{result})$	число обращений
0.1	-0.78125	-3.62907	8
0.01	-0.75391	-3.6347	14
0.001	-0.75439	-3.63471	20

Таблица 1: Результат решения методом дихотомии

ε	x_{result}	$f(x_{result})$	число обращений
0.1	-0.72027	-3.62562	4
0.01	-0.74924	-3.63446	6
0.001	-0.75449	-3.63471	9

Таблица 2: Результат решения методом парабол

5 Обоснование результатов

Найдем минимум функции $f(x)=x^6+3x^2+6x-1$, где $x\in[-1,0]$ с помощью классического подхода

$f'(x)=6x^5+6x+6 \Rightarrow x^5+x+1=0 \Leftrightarrow$

$(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)=0$

$\Rightarrow$ в отрезок $[-1,0]$ входит единственный корень $x^*=-0,75488$. Тогда $f(x^*)=-3,63471$

Данное значения подтверждает график функции $f(x)$ на рис 1.

ε	Метод дихотомии		Метод парабол	
	$\lvert x^*-x_{result}\rvert$	$\lvert f^*-f_{result}\rvert$	$\lvert x^*-x_{result}\rvert$	$\lvert f^*-f_{result}\rvert$
0,1	0,02637	0,0564	0,03461	0,00909
0,01	0,00097	0,00001	0,00564	0,00025
0,001	0,00049	0	0,00039	0

Полученная погрешность результата удовлетворяет условию при заданной точности для всех случаев решения задачи. А значит, результат найден корректно. Для дальнейшего использования решений стоит считать достоверными разряды числа, имеющие 0 в приведенной выше разности

6 Дополнительные исследования

Проведем сравнение аналитической оценки числа обращений к вычислению функции цели, требуемое для достижения заданной точности, с значением счетчика данных обращений в программе

6.1. Оценка для метода дихотомии

Оценим число итераций для достижения заданной точности ε с константой различимости α для отрезка $[a, b]$

На каждой итерации рассматриваемый отрезок

$$b_k - \cancel{b}a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1}}{2} + \alpha = (b_{k-1} - a_{k-1})\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{b_{k-1} - a_{k-1}}\right) =$$

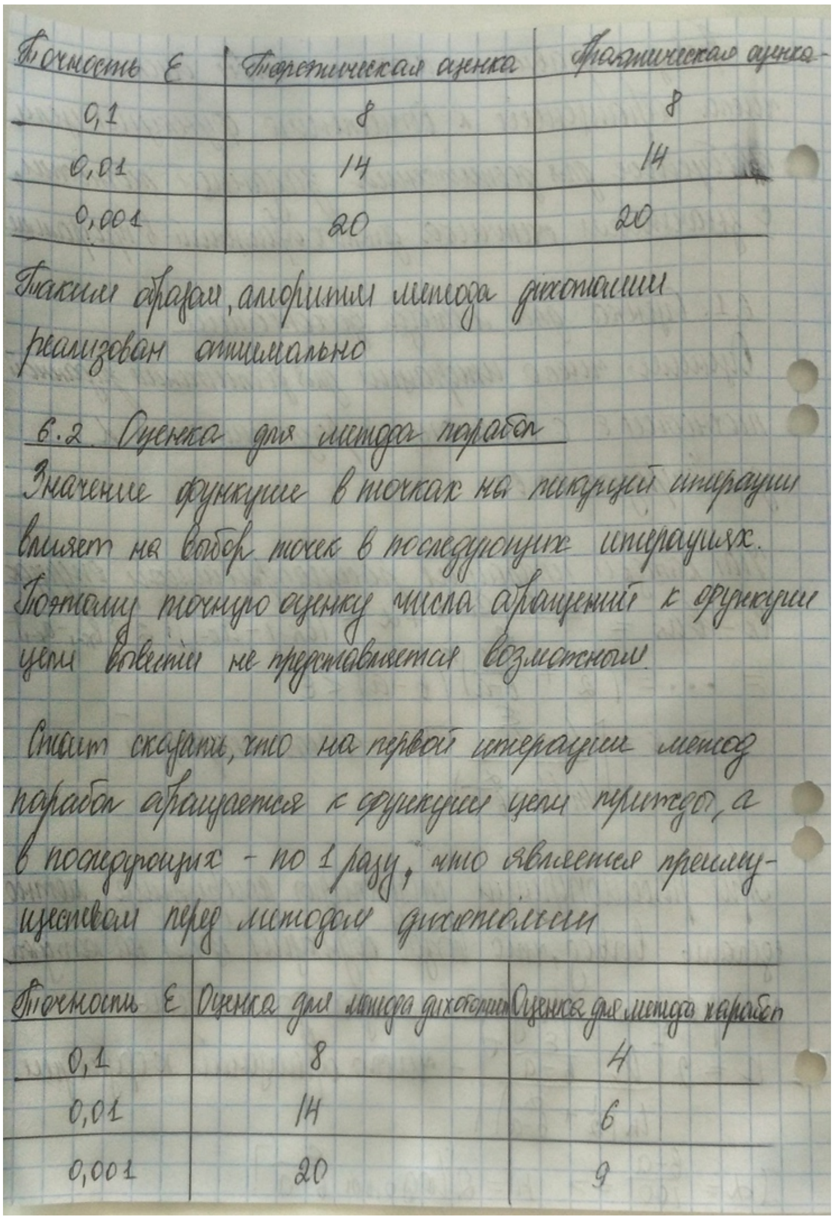
$$= \dots = \left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{b-a}\right)^k (b-a) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow k = \left\lceil \frac{\ln \frac{\varepsilon}{b-a}}{\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{b-a}\right)} \right\rceil \text{ — число итераций}$$

При рассмотрении структуры алгоритма можно сделать вывод, что вызов функции цели на каждой итерации производится дважды, то есть

$$n = 2\left\lceil \frac{\ln \frac{\varepsilon}{b-a}}{\ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{b-a}\right)} \right\rceil \text{ — число обращений к функции}$$

$$] \ \alpha = \frac{b-a}{100} \Rightarrow n = 2\left\lceil \log_{0,501} \frac{\varepsilon}{b-a} \right\rceil$$



Точность ε	Теоретическая оценка	Практическая оценка
0,1	8	8
0,01	14	14
0,001	20	20

Таким образом, алгоритм метода дихотомии реализован оптимально

6.2 Оценка для метода парабол

Значение функции в точках на текущей итерации влияет на выбор точек в последующих итерациях. Поэтому точную оценку числа обращений к функции цели вывести не представляется возможным.

Стоит сказать, что на первой итерации метод парабол обращается к функции цели трижды, а в последующих - по 1 разу, что является преимуществом перед методом дихотомии

Точность ε	Оценка для метода дихотомии	Оценка для метода парабол
0,1	8	4
0,01	14	6
0,001	20	9

7 Выводы

Для решения задачи одномерной минимизации использовались методы дихотомии и парабол. Оба из них являются итерационными и позволяют регулировать точность нахождения решения. Также эти методы являются достаточно простыми в реализации.

Стоит сказать, что при заданной точности решение методом дихотомии находится немного точнее, чем методом парабол, но требует более чем в два раза большего количества обращений к вычислению функции цели. То есть для функций большой вычислительной сложности более практически выгоден метод парабол.

8 Приложения

URL: Выполненная лабораторная работа на GitHub
https://github.com/ThinkingFrog/OptimizationMethods/tree/main/OneDimMinimization