

Linearizacija

Nedeljko Stojaković

Marko Pejić

Novembar, 2021.

Cilj ovog dokumenta je upoznati se sa koracima linearizacije nelinearnih modela i primeniti ih na konkretne probleme.

1. Uvod

Postupak linearizacije podrazumeva postupak dobijanja linearnog modela u okolini radne tačke na osnovu polaznog nelinearnog sistema.

Koraci linearizacije su:

1. Odrediti radnu tačku pisanjem i rešavanjem odgovarajućih algebarskih jednačina
2. Prepisati sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti
3. Zameniti sve nelinearne članove sa prva dva sabirka razvoja u Tejlorov red
4. Skratiti konstantne članove u diferencijalnim jednačinama. (Upotrebiti algebarske jednačine koje određuju radnu tačku)
5. Definisati početene vrednosti inkrementalnih promenljivih $\hat{x}(0) = x(0) - \bar{x}$

Linearizaciju je moguće izvršiti i primenom obrasca (1) koji je izveden na osnovu prethodno opisanih koraka. Ako posmatramo matematički model nelinearnog sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, u) \\ y &= h(x, u)\end{aligned}$$

nakon određivanja radne tačke sistema, linearizacija nelinearnog modela u okolini radne tačke (\bar{x}, \bar{u}) može da se odredi po obrascu:

$$\begin{aligned}\hat{\dot{x}} &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \hat{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \hat{u} \\ \hat{y} &= \left. \frac{\partial h}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \hat{x} + \left. \frac{\partial h}{\partial u} \right|_{\bar{x}, \bar{u}} \hat{u}\end{aligned}\tag{1}$$

2. Primeri sa rešenjima

Primer 1. Za dati nelinearni sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\bar{u} = 0$.

- a) Postupno primenom svih koraka linearizacije
- b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 + 2x - 3 + u \\ y &= x\end{aligned}$$

Rešenje:

- a) Primenjujemo korake linearizacije

1. Određujemo radne tačke:

$$\dot{x} = 0 \implies x^2 + 2x - 3 = 0 \implies x_1 = 1 \text{ i } x_2 = -3$$

odakle zaključujemo da imamo dve radne tačke (\bar{x}_1, \bar{u}) i (\bar{x}_2, \bar{u}) , tj. $(1, 0)$ i $(-3, 0)$.

2. Zapisujemo sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti:

$$\begin{aligned}x &= \bar{x} + \hat{x} \\ y &= \bar{y} + \hat{y} \\ u &= \bar{u} + \hat{u}\end{aligned}$$

Dobijamo jednačine:

$$\begin{aligned}(\bar{x} + \hat{x}) &= x^2 + 2(\bar{x} + \hat{x}) - 3 + \bar{u} + \hat{u} \\ \bar{y} + \hat{y} &= \bar{x} + \hat{x}\end{aligned} \tag{1}$$

gde je $(\bar{x} + \hat{x}) = \hat{x}$ jer je \bar{x} konstanta.

3. Menjamo nelinearni član x^2 sa prva dva sabirka razvoja u Tejlrov red:

$$F(x) = x^2$$

$$F(\bar{x} + \hat{x}) = F(\bar{x}) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \hat{x} = \bar{x}^2 + 2\bar{x}\hat{x}$$

Uvrštavanjem u (1) dobija se:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \bar{x}^2 + 2\bar{x}\hat{x} + 2\bar{x} + 2\hat{x} - 3 + \hat{u} \\ \bar{y} + \hat{y} &= \bar{x} + \hat{x}\end{aligned}$$

4. Određujemo linearne modele za sve radne tačke, pri čemu će nam konstantni članovi u diferencijalnim jednačinama pokratiti:

Pošto je $y = x$, odatle sledi da je $\bar{y} = \bar{x}$, tako da se dobija:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \bar{x}^2 + 2\bar{x}\hat{x} + 2\bar{x} + 2\hat{x} - 3 + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Za radnu tačku $(\bar{x}_1, \bar{u}) = (1, 0)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 1 + 2\hat{x} + 2 + 2\hat{x} - 3 + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Konstantni članovi se pokrate i konačno dobijamo linearan model u okolini radne tačke $(1, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Za radnu tačku $(\bar{x}_2, \bar{u}) = (-3, 0)$ dobijamo:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

b) Primenjujemo obrazac (1):

Radne tačke su određene u prvom delu zadatka $((1, 0)$ i $(-3, 0))$, tako da možemo odrediti linearizovan model, tj. \hat{x} i \hat{y} :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (2x + 2) \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\bar{x}_1, \bar{u}) = (1, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\bar{x}_2, \bar{u}) = (-3, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -4\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= \hat{x}\end{aligned}$$

Primer 2. Za dati nelinearni sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\bar{u} = 0$.

a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (x - 1)(x - 3) + u \\ y &= x^2\end{aligned}$$

Rešenje:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - 4x + 3 + u \\ y &= x^2\end{aligned}$$

a) Primenjujemo korake linearizacije

1. Određujemo radne tačke:

$$\dot{x} = 0 \implies (x-1)(x-3) = 0 \implies x_1 = 1, x_2 = 3$$

odakle zaključujemo da imamo dve radne tačke (\bar{x}_1, \bar{u}) i (\bar{x}_2, \bar{u}) , tj. $(1, 0)$ i $(3, 0)$.

2. Zapisujemo sve linearne članove kao sume nominalne i inkrementalne vrednosti:

$$x = \bar{x} + \hat{x}$$

$$y = \bar{y} + \hat{y}$$

$$u = \bar{u} + \hat{u}$$

Dobijamo jednačine:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= x^2 - 4(\bar{x} + \hat{x}) + 3 + \bar{u} + \hat{u} \\ \bar{y} + \hat{y} &= x^2\end{aligned}\tag{2}$$

gde je $\dot{\hat{x}} = (\bar{x} + \hat{x})$ jer je \bar{x} konstanta.

3. Menjamo nelinearni član x^2 sa prva dva sabirka razvoja u Tejlorov red:

$$F(x) = x^2$$

$$F(\bar{x} + \hat{x}) = F(\bar{x}) + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}} \hat{x} = \bar{x}^2 + 2\bar{x}\hat{x}$$

Uvrštavanjem u (2) dobija se:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \bar{x}^2 + 2\bar{x}\hat{x} - 4\bar{x} - 4\hat{x} + 3 + \hat{u} \\ \bar{y} + \hat{y} &= \bar{x}^2 + 2\bar{x}\hat{x}\end{aligned}$$

4. Određujemo linearane modele za sve radne tačke, pri čemu će nam konstantni članovi u diferencijalnim jednačinama pokratiti:

Pošto je $y = x^2$, onda je i $\bar{y} = \bar{x}^2$, tako da se dobija da je $\hat{y} = 2\bar{x}\hat{x}$.

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= \bar{x}^2 + 2\bar{x}\hat{x} - 4\bar{x} - 4\hat{x} + 3 + \hat{u} \\ \hat{y} &= 2\bar{x}\hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\bar{x}_1, \bar{u}) = (1, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -2\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= 2\hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\bar{x}_2, \bar{u}) = (3, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 2\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= 6\hat{x}\end{aligned}$$

b) Primenjujemo obrazac (1):

Radne tačke su određene u prvom delu zadatka $((1, 0)$ i $(3, 0))$, tako da možemo odrediti linearizovan model, tj. \hat{x} i \hat{y} :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (2x - 4) \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= 2x \Big|_{\bar{x}, \bar{u}} \hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\bar{x}_1, \bar{u}) = (1, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= -2\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= 2\hat{x}\end{aligned}$$

Linearan model u okolini radne tačke $(\bar{x}_2, \bar{u}) = (3, 0)$:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= 2\hat{x} + \hat{u} \\ \hat{y} &= 6\hat{x}\end{aligned}$$

3. Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Za dati nelinearni sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\bar{u} = 1$.

- a) Postupno primenom svih koraka linearizacije
- b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x^2 - 3x + 2 + x(1 - u) \\ y &= 2x^2 + 3x\end{aligned}$$

Zadatak 2. Za dati nelinearni sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\bar{u} = 1$.

- a) Postupno primenom svih koraka linearizacije
- b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x - 5}{1 + x^2} + 5u \\ y &= x\end{aligned}$$

Zadatak 3. Za dati nelinearni sistem opisan diferencijalnom jednačinom odrediti sve radne tačke na intervalu $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ i izvršiti linearizaciju u okolini svih radnih tačaka, ako je $\bar{u} = 1$.

- a) Postupno primenom svih koraka linearizacije

b) Primenom obrasca (1)

$$\begin{aligned}\dot{x} - 2\sin(2x) &= u \\ y &= 2x^2 + 3x\end{aligned}$$

Literatura

- Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko: Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima; FTN, Novi Sad, 2015.
- *Julia* programski jezik (sajt) <https://julialang.org/>
- *Think Julia* (online knjiga) <https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html>.