Vremenska diskretizacija linearnog matematičkog modela u prostoru stanja

Nedeljko Stojaković
Marko Pejić

Decembar, 2021.

Cilj ovog dokumenta je vremenska diskretizacija linearnih matematičkih modela u prostoru stanja analitičkim i numeričkim proračunom, pri čemu je svaki proračun moguće odraditi na različite načine koji će biti prikazani kroz rešene primere. Svaki od načina vodi do istog rešenja. Pored toga, razvijene su i softverske metode koje će, takođe, biti prikazane.

1. Uvod

Zbog šire upotrebe računara i obrade podataka postoji potreba za vremenski diskretnim linearnim matematičkim modelima u prostoru stanja. Za potrebe diskretizacije modela razvijen je matematički aparat koji će biti predstavljen u nastavku.

Data je definicija linearnog, vremenski diskretnog matematičkog modela u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ex(k) + Fu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \tag{1}$$

Diskretizacija linearnog, vremenski kontinualnog matematičkog modela u prostoru stanja svodi se na određivanje matrica E i F. Matrice E i F se mogu odrediti na dva načina, a razlika je u matematičkom aparatu koji se koristi:

1. Na osnovu fundamentalne matrice $\Phi(t)$

$$\begin{aligned} E &= \Phi(T) \\ F &= \Big(\int_0^T \Phi(t)dt\Big)B \end{aligned} \tag{2}$$

2. Određivanjem svojstvenih vrednosti

$$\begin{aligned} E &= P\tilde{\Phi}(T)P^{-1} \\ F &= P\tilde{A}^{-1}(\tilde{\Phi}(T) - I)P^{-1}B \end{aligned} \tag{3}$$

gde je

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ odakle sledi da je: } \tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Matrica P definiše se kao $P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{bmatrix}$, gde su p_i svojstveni vektori matrice A. Svojstveni vektori matrice se računaju po izrazu:

$$Ap_i = p_i\lambda_i, \qquad i = 1, 2, \dots, n \tag{5}$$

gde su λ_i svojstvene vrednosti matrice A, koje se određuju iz izraza:

$$det(\lambda I - A) = 0 \tag{6}$$

2. Primeri sa rešenjima

Primer 1. Izvršiti diskretizaciju datog linearnog vremenski kontinualnog matematičkog modela u prostoru stanja, ako je vreme odabiranja $T = 0.1s$, a početni uslovi $x(0) = [0 \quad 0]^T$.

a) na osnovu fundamentalne matrice $\Phi(t)$

b) određivanjem svojestvenih vrednosti

c) numerički upotrebom paketa *ControlSystems*

d) izvršiti simulaciju diskretizovanog modela na intervalu $[0, 5]$ sekundi, za jediničnu odskočnu pobudu

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} x(t)$$

Rešenje:
a) Za određivanje matrica E i F koriste se izrazi dati u jednačini (2):
Fundamentalna matrica:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3 & 2 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

Adjungovana matrica $(sI - A)$:

$$adj(sI - A) = \begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice $(sI - A)$:

$$det(sI - A) = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

Sada računamo inverznu matricu $(sI - A)^{-1}$:

$$(sI - A)^{-1} = \frac{adj(sI - A)}{det(sI - A)} = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)(s+2)} & \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} & \frac{-2}{(s+1)} + \frac{2}{(s+2)} \\ \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} & \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)} \end{bmatrix}$$

U međukoraku izvršen je razvoj na parcijalne razlomke za svaki član matrice posebno.

Fundamentalna matrica:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \begin{bmatrix} -e^{-t} + 2e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Određivanjem fundamentalne matrice, matricu E zapisujemo kao:

$$\boxed{E = \Phi(T) = \begin{bmatrix} -e^{-T} + 2e^{-2T} & -2e^{-T} + 2e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} & 2e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix}}$$

Matrica $F = \Big(\int_0^T \Phi(t)dt\Big)B$:

$$F = \begin{bmatrix} \int\limits_0^T (-e^{-t} + 2e^{-2t})dt & \int\limits_0^T (-2e^{-t} + 2e^{-2t})dt \\ \int\limits_0^T (e^{-t} - e^{-2t})dt & \int\limits_0^T (2e^{-t} - e^{-2t})dt \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int\limits_0^T (-e^{-t} + 2e^{-2t})dt \\ \int\limits_0^T (e^{-t} - e^{-2t})dt \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\int\limits_0^T e^{-t}dt + 2\int\limits_0^T e^{-2t}dt \\ \int\limits_0^T e^{-t}dt - \int\limits_0^T e^{-2t}dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}\Big|_0^T - e^{-2t}\Big|_0^T \\ -e^{-t}\Big|_0^T + \frac{1}{2}e^{-2t}\Big|_0^T \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F = \begin{bmatrix} e^{-T} - e^{-2T} \\ \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \end{bmatrix}}$$

Linearan vremenski diskretan matematički model u prostoru stanja, za $T = 0.1$:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7326 & -0.1722 \\ 0.0861 & 0.9909 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0861 \\ 0.0045 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

b) Za određivanje matrica E i F koriste se izrazi dati u jednačini (3):
Svojstvene vrednosti:

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 3 & 2 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 2) = 0$$
$$\lambda_1 = -1$$
$$\lambda_2 = -2$$

Tada je $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, onda je i $\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$

Svojstveni vektori:

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}$$

Iz ove jednačine dobija se da je $p_{11} = -p_{12}$. Biramo proizvoljne vrednosti, različite od nula. $p_{11} = 1 \Rightarrow p_{12} = -1$.

$$Ap_2 = \lambda_2 p_2$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

Iz ove jednačine dobija se da je $p_{21} = -2p_{22}$. Biramo proizvoljne vrednosti, različite od nula. $p_{21} = -2 \Rightarrow p_{22} = 1$. Sada kada smo odredili svojstvene vektore, možemo da definišemo matricu P kao:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{adj(P)}{det(P)} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sada možemo odrediti matricu $E = P\tilde{\Phi}(T)P^{-1}$:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-T} & 0 \\ 0 & e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} e^{-T} & -2e^{-2T} \\ -e^{-T} & e^{-2T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{E = \begin{bmatrix} -e^{-T} + 2e^{-2T} & -2e^{-T} + 2e^{-2T} \\ e^{-T} - e^{-2T} & 2e^{-T} - e^{-2T} \end{bmatrix}}$$

Za određivanje matrice F potrebna nam je matrica $\tilde{A}^{-1}$:

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{adj(\tilde{A})}{det(\tilde{A})} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Sada možemo odrediti i matricu $F = P\tilde{A}^{-1}(\tilde{\Phi}(T) - I)P^{-1}B$:

$$\begin{aligned}
F &= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-T} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-2T} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e^{-T} + 1 \\ -e^{-2T} + 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-T} - 1 \\ \frac{1}{2}e^{-2T} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} e^{-T} - 1 - e^{-2T} + 1 \\ -e^{-T} + 1 + \frac{1}{2}e^{-2T} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{F = \begin{bmatrix} e^{-T} - e^{-2T} \\ \frac{1}{2} - e^{-T} + \frac{1}{2}e^{-2T} \end{bmatrix}}$$

Sa ovim rešenjem potvrđujemo da su rešenja na oba načina identična.
Linearan vremenski diskretan matematički model u prostoru stanja, za $T = 0.1$:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.7326 & -0.1722 \\ 0.0861 & 0.9909 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0861 \\ 0.0045 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \end{bmatrix} x(k)$$

c)[1]

```
using LinearAlgebra, ControlSystems

A = [-3 -2; 1 0];
B = [1; 0];
C = [0 5];
D = 0;

# Prvi nacin
λ = eigvals(A) # svojstvene vrednosti
P = eigvecs(A) # svojstveni vektori

Ts = 0.1;      # perioda odabiranja
E = P * Diagonal(exp.(λ*Ts)) / P
F = P * Diagonal((exp.(λ*Ts) .- 1.0) ./ λ) / P * B


# Drugi nacin
m = ss(A, B, C, D);
md = c2d(m,Ts)
```

[1] Vrednosti u matrici P se mogu razlikovati od vrednosti koje smo koristili u analitičkom rešenju, zbog slobode izbora vrednosti elemenata svojstvenih vektora. Provera se može isvršiti sledećim naredbama:

```
P * Diagonal(λ) / P # rezultat matrica A
P \ A * P           # matrica A_tilda
```

d)

```
using Plots

# Simulacija
n = Int(5/Ts+1)         # broj trenutaka u intervalu [0 5] sekundi
u = ones(n)             # neka je ulaz konstantan: u(t)=1
x0 = [0.0; 0.0]         # pocetne vrednosti promenljivih stanja
x = x0
X = zeros(n,2)          # trajektorija kretanja prom. stanja
X[1,:] = x'             # x0
for k = 1:(n-1)
    global x = E*x + F*u[k]
    global X[k+1,:] = x'
end
Y = C*X' + D*u'         # izlazi modela
t = (0:n-1)*Ts
plot(t, Y', title="Jedinicni odziv - diskretizovan", xlabel="t", linetype=:steppost)
```

Primer 2. Izvršiti diskretizaciju datog linearnog vremenski kontinualnog matematičkog modela u prostoru stanja, ako je vreme odabiranja $T = 0.1s$, a početni uslovi $x(0) = [0 \quad 0]^T$.

a) na osnovu fundamentalne matrice $\Phi(t)$

b) određivanjem svojestvenih vrednosti

c) numerički upotrebom paketa *ControlSystems*

d) izvršiti simulaciju diskretizovanog modela na intervalu $[0, 10]$ sekundi, za jediničnu odskočnu pobudu

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$
$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Rešenje:
a) Za određivanje matrica E i F koriste se izrazi dati u jednačini (2):
Fundamentalna matrica:

$$(sI-A)=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+3 \end{bmatrix}$$

Adjungovana matrica $(sI-A)$:

$$adj(sI-A)=\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}$$

Determinanta matrice $(sI-A)$:

$$det(sI-A)=(s+2)(s+3)$$

Inverzna matrica $(sI-A)^{-1}$:

$$(sI-A)^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{det(sI-A)}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+2)(s+3)} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{(s+2)}-\dfrac{1}{(s+3)} \\ 0 & \dfrac{1}{(s+3)} \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t)=\mathcal{L}^{-1}\{\Phi(s)\}=\begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-2t}-e^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Određivanjem fundamentalne matrice, matricu E zapisujemo kao:

$$\boxed{E=\begin{bmatrix} e^{-2T} & e^{-2T}-e^{-3T} \\ 0 & e^{-3T} \end{bmatrix}}$$

Matrica F:

$$F=\begin{bmatrix} \int\limits_0^T e^{-2t}dt & \int\limits_0^T (e^{-2t}-e^{-3t})dt \\ 0 & \int\limits_0^T e^{-3t}dt \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5\int\limits_0^T e^{-2t}dt-5\int\limits_0^T e^{-3t}dt \\ 5\int\limits_0^T e^{-3t}dt \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{2}e^{-2t}\Big|_0^T+\dfrac{5}{3}e^{-3t}\Big|_0^T \\ -\dfrac{5}{3}e^{-3t}\Big|_0^T \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -\dfrac{5}{2}e^{-2T}+\dfrac{5}{2}+\dfrac{5}{3}e^{-3T}-\dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{5}{3}e^{-3T}+\dfrac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{F = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{5}{2}e^{-2T} + \frac{5}{3}e^{-3T} \\ \frac{5}{3} - \frac{5}{3}e^{-3T} \end{bmatrix}}$$

Linearan vremenski diskretan matematički model u prostoru stanja, za $T = 0.1$:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8187 & 0.07791 \\ 0 & 0.7408 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0212 \\ 0.432 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

b) Za određivanje matrica E i F koriste se izrazi dati u jednačini (3):
Svojstvene vrednosti:

$$(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -1 \\ 0 & \lambda+3 \end{bmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = (\lambda+2)(\lambda+3) = 0$$

$$(\lambda+2)(\lambda+3) = 00$$

$$\lambda_1 = -2$$

$$\lambda_2 = -3$$

Tada je $\tilde{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$, onda je i $\tilde{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$

Svojstveni vektori:

$$Ap_1 = \lambda_1 p_1$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{12} \end{bmatrix}$$

Iz ove jednačine dobija se da je $p_{12} = 0$. Tada biramo proizvoljnu vrednost za p_{11}, različitu od nula. $p_{11} = 1$.

$$Ap_2 = \lambda_2 p_2$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} p_{21} \\ p_{22} \end{bmatrix}$$

Iz ove jednačine dobija se da je $p_{21} = -p_{22}$. Biramo proizvoljne vrednosti, različite od nula. $p_{21} = 1 \Rightarrow p_{22} = -1$. Sada kada smo odredili svojstvene vektore, možemo da definišemo matricu P kao:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{adj(P)}{det(P)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Sada možemo odrediti matricu $E = P\tilde{\Phi}(T)P^{-1}$:

$$\begin{aligned} E &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2T} & 0 \\ 0 & e^{-3T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-2T} & e^{-3T} \\ 0 & -e^{-3T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{E = \begin{bmatrix} e^{-2T} & e^{-2T} - e^{-3T} \\ 0 & e^{-3T} \end{bmatrix}}$$

Za određivanje matrice F potrebna nam je matrica $\tilde{A}^{-1}$:

$$\tilde{A}^{-1} = \frac{adj(\tilde{A})}{det(\tilde{A})} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Sada možemo odrediti i matricu $F = P\tilde{A}^{-1}(\tilde{\Phi}(T) - I)P^{-1}B$:

$$\begin{aligned} F &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2T} - 1 & 0 \\ 0 & e^{-3T} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5e^{-2T} - 5 \\ -5e^{-3T} + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2}e^{-2T} + \frac{5}{2} + \frac{5}{3}e^{-3T} - \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3}e^{-3T} + \frac{5}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\boxed{F = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{5}{2}e^{-2T} + \frac{5}{3}e^{-3T} \\ \frac{5}{3} - \frac{5}{3}e^{-3T} \end{bmatrix}}$$

Sa ovim rešenjem potvrđujemo da su rešenja na oba načina identična.
Linearan vremenski diskretan matematički model u prostoru stanja, za $T = 0.1$:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.8187 & 0.07791 \\ 0 & 0.7408 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0.0212 \\ 0.432 \end{bmatrix} u(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(k)$$

c)

```
using LinearAlgebra, ControlSystems

A = [-2 1; 0 -3];
B = [0; 5];
C = [1 0];
D = 0;

# Prvi nacin
λ = eigvals(A) # svojstvene vrednosti
P = eigvecs(A) # svojstveni vektori

Ts = 0.1;      # perioda odabiranja
E = P * Diagonal(exp.(λ*Ts)) / P
F = P * Diagonal((exp.(λ*Ts) .- 1.0) ./ λ) / P * B


# Drugi nacin
m = ss(A, B, C, D);
md = c2d(m,Ts)
```

d)

```
using Plots

# Simulacija
n = Int(10/Ts+1)        # broj trenutaka u intervalu [0 10] sekundi
u = ones(n)             # neka je ulaz konstantan: u(t)=1
x0 = [0.0; 0.0]         # pocetne vrednosti promenljivih stanja
x = x0
X = zeros(n,2)          # trajektorija kretanja prom. stanja
X[1,:] = x'             # x0
for k = 1:(n-1)
    global x = E*x + F*u[k]
    global X[k+1,:] = x'
end
Y = C*X' + D*u'         # izlazi modela
t = (0:n-1)*Ts
plot(t, Y', title="Jedinicni odziv - diskretizovan", xlabel="t", linetype=:steppost)
```

3. Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Izvršiti diskretizaciju datog linearnog vremenski kontinualnog matematičkog modela u prostoru stanja, ako je vreme odabiranja $T = 0.1s$, a početni uslovi $x(0) = [1 \quad 1]^T$.

a) na osnovu fundamentalne matrice $\Phi(t)$

b) određivanjem svojestvenih vrednosti

c) numerički upotrebom paketa *ControlSystems*

d) izvršiti simulaciju diskretizovanog modela na intervalu $[0, 10]$ sekundi, za jediničnu odskočnu pobudu

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix} x(t)$$

Zadatak 2. Izvršiti diskretizaciju datog linearnog vremenski kontinualnog matematičkog modela u prostoru stanja, ako je vreme odabiranja $T = 0.1s$, a početni uslovi $x(0) = [1 \quad 1]^T$.

a) na osnovu fundamentalne matrice $\Phi(t)$

b) određivanjem svojestvenih vrednosti

c) numerički upotrebom paketa *ControlSystems*

d) izvršiti simulaciju diskretizovanog modela na intervalu $[0, 15]$ sekundi, za jediničnu odskočnu pobudu

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

Zadatak 3. Izvršiti diskretizaciju datog linearnog vremenski kontinualnog matematičkog modela u prostoru stanja, ako je vreme odabiranja $T = 0.1s$, a početni uslovi $x(0) = [1 \quad 1 \quad 0]^T$.

a) na osnovu fundamentalne matrice $\Phi(t)$

b) određivanjem svojestvenih vrednosti

c) numerički upotrebom paketa *ControlSystems*

d) izvršiti simulaciju diskretizovanog modela na intervalu $[0, 10]$ sekundi, za jediničnu odskočnu pobudu

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} x(t)$$

Literatura

- Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko: Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima; FTN, Novi Sad, 2015.
- *Julia* programski jezik (sajt) https://julialang.org/
- *Think Julia* (*online* knjiga) https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html.