Translatorni mehanički sistemi

Nedeljko Stojaković
Marko Pejić

Oktobar, 2021.

Cilj ovog materijala je upoznavanje sa modelovanjem jednostavnih mehaničkih sistema, u kojima će biti razmatrano translatorno kretanje. Na samom početku dato je objašnjenje linearnog matematičkog modela u prostoru stanja, a potom se prelazi na translatorne mehaničke sisteme. Na početku drugog poglavlja dat je opis osnovnih fizičkih veličina i načina na koje se modeluju osnovne pojave kod translatornog kretanja. Nakon toga, dat je opis zakonitosti uzajamnog dejstva na osnovu kojih se mogu formirati matematički modeli za opis kretanja u mehaničkim sistemima. Opisana teorija primenjena je u rešenim zadacima, u okviru kojih je dat u *Julia* kod kojim su izvršene simulacije modelovanih mehaničkih sistema. Na samom kraju materijala nalaze se zadaci za samostalan rad, kako bi se naučeno teorijsko znanje primenilo na realnim problemima.

1. Linearan matematički model u prostoru stanja

Linearan matematički model u prostoru stanja se sastoji od skupa običnih linearnih diferencijalnih jednačina prvog reda i skupa linearnih algebarskih jednačina. Matrični oblik linearnog matematičkog modela u prostoru stanja dat je preko sledeće diferencijalne i algebarske jednačine[1]:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1}$$

[1] Kao oznaku za izvod funkcije po vremenu će se koristiti tačka iznad promenljive, odnosno $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$

gde su:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k1} & c_{k2} & \cdots & c_{kn} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{k1} & d_{k2} & \cdots & d_{km} \end{bmatrix}$$

a n je broj promenljivih stanja, m broj ulaza, a k broj izlaza.

Matrica **A** naziva se **matrica stanja**, **B** je **matrica ulaza**, **C** je **matrica izlaza**, a **D** je **matrica direktnog upravljanja** ili matrica ulaza/izlaza.

2. Promenljive, elementi i zakonitosti

Prilikom mehaničkog kretanja tela dolazi do promene položaja tela u odnosu na neko drugo telo. Radi jednostavnosti, mi ćemo se zadržati na pravolinijskom kretanju tela, odnosno kretanju po jednoj osi Dekartovog pravouglog koordinatnog sistema.

2.1 Promenljive

Najznačajnije fizičke veličine preko kojih opisujemo translatorne mehaničke sisteme, odnosno kretanje svih tela u okviru takvih sistema su:

- pozicija tela (rastojanje) x $[m]$
- brzina tela $v = \dot{x}$ $[m/s]$
- ubrzanje tela $a = \dot{v} = \ddot{x}$ $[m/s^2]$

Navedene fizičke veličine figurišu u matematičkom modelu određenog translatornog sistema, što znači da je poznavanjem njihove promene tokom vremena moguće odrediti sva zbivanja u posmatranom sistemu.

Do promene stanja kretanja nekog tela (njegove pozicije, brzine i/ili ubrzanja) može doći smo pri uzajamnom delovanju tela, odnosno njihovoj interakciji, tj. delovanju sile na telo. Prema tome, najčešće ćemo posmatrati sistem sastavljen od više tela, koji je pod uticajem neke spoljašnje sile $f(t)$ $[N]$ izveden iz ravnotežnog položaja (stanja mirovanja). Na osnovnu postavljenog matematičkog modela dalje analitički ili numerički izračunavamo kretanje svih tela u sistemu uvažavajući zakonitosti kojima opisujemo njihovu međusobnu interakciju.

2.2 Elementi

Masa tela m $[kg]$ je kvantitativna mera inertnosti tela i ona utiče na promenu stanja njegovog kretanja, što znači da je u posmatranom sistemu neophodno uočiti sva tela koja imaju masu. Posedovanjem mase telo ima inertnost kao prirodnu tendenciju da zadrži stanje mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja (I Njutnov zakon). Kao što je već naglašeno, do promene stanja kretanja dolazi usled dejstva sile $f(t)$ $[N]$ (II Njutnov zakon), gde su te sile uglavnom posledica uzajamnog dejstva tela. Tipično se javljaju sile kod elastičnosti i trenja, pa se takve pojave modeluju posebnim elementima. Pored sila nastalih kao posledica uzajamnog dejstva tela, postoje i spoljašnje sile, kao što su gravitacija, sila potiska itd.

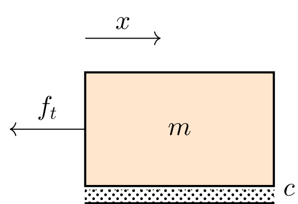
Trenje predstavlja silu otpora kretanju tela, koja se javlja u slučaju da prilikom kretanja telo nailazi na otpor usled dodirivanja sa drugim telom ili mu otpor pruža sredina kroz koju se kreće, kao i podloga po kojoj se kreće. Iako postoji više tipova trenja koja imaju nelinearne karakteristike, zadržaćemo se na sili viskoznog trenja f_t, čiji intenzitet zavisi od razlike brzina v_1 i v_2 tela koja se dodiruju:

$$f_t = f_t(\Delta v), \qquad \Delta v = v_2 - v_1 \tag{1}$$

Budući da trenje predstavlja silu otpora kretanju tela, može se zaključiti da je usmerena nasuprot smera kretanja tela, dok je intenzitet sile usled trenja dat formulom:

$$f_t = c \cdot \Delta v \tag{2}$$

gde je c $[Ns/m]$ koeficijent trenja koji je direktno srazmeran površi dodira, a obrnuto srazmeran debljini uljanog filma između dve dodirne površine. U slučaju trenja tela sa nepokretnom podlogom, sila trenja srazmerna je brzini kretanja tela $f_t = c{\cdot}v$. Slika 1 ilustruje način na koji se predstavlja trenje između tela mase m i podloge, gde je pomeraj tela dat sa x. Trenje je moguće modelovati i elementom koji se naziva prigušnica, što će biti prikazano u nastavku ovog poglavlja.



Slika 1: Trenje uzrokovano kretanjem po podlozi

Elastičnost se obično predstavlja simbolom opruge (slika 2). Za potrebe ovog predmeta biće razmatrane elastične deformacije istezanja, gde se javlja sila elastičnosti f_e koja teži da vrati telo u prvobitan oblik. Istezanje (ili sabijanje) opisuje se razlikom tekuće pozicije u odnosu na prvobitnu poziciju $\Delta x = x_2 - x_1$, što znači da je sila elastičnosti funkcija te promene pozicija:

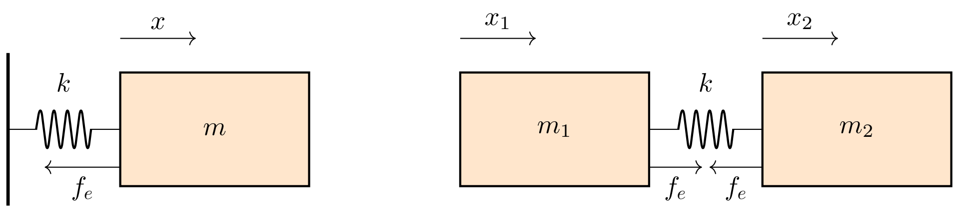
$$f_e = f_e(\Delta x) \tag{3}$$

Sila elastičnosti uvek je suprotnog smera od porasta deformacije Δx, a za male deformacije njen intenzitet se može predstaviti kao:

$$f_e = k \cdot \Delta x \tag{4}$$

gde je k $[N/m]$ koeficijent elastičnosti. Slika 2 predstavlja dve uobičajene situacije u translatornim mehaničkim sistemima: levo je prikazano kretanje jednog kraja opruge (opruga se nalazi između tela koje se kreće i tela koje miruje), a desno kretanje oba kraja opruge.

Izraz kojim se izračunava sila elastičnosti opruge u primeru sa leve strane je $f_e = kx$, budući da se opruga nalazi između tela koje se kreće i stacionarnog zida. U primeru sa desne strane situacija je nešto kompleksnija, zbog toga što se opruga nalazi između dva tela koja se kreću, odnosno oba kraja opruge se kreću. Pošto su x_1 i x_2 isto usmereni ne možemo unapred znati da li se opruga isteže ili sabija, pa posmatramo dva različita slučaja:



Slika 2: Dejstvo sile elastičnosti opruge

- za $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 > 0 \quad \to$ opruga se sabija $\to$ reakcija je istezanje $\to$ intenzitet sile elastičnosti je $f_e = k(x_1 - x_2)$
- za $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \quad \to$ opruga se isteže $\to$ reakcija je sabijanje $\to$ intenzitet sile elastičnosti je $f_e = k(x_2 - x_1)$

Prilikom modelovanja translatornih mehaničkih sistema, ukoliko postoji situacija u kojoj se oba kraja opruge kreću u istom smeru, potrebno je uvesti pretpostavku koji od tih pomeraja je veći, i u skladu sa tim definisati silu elastičnosti.[1]

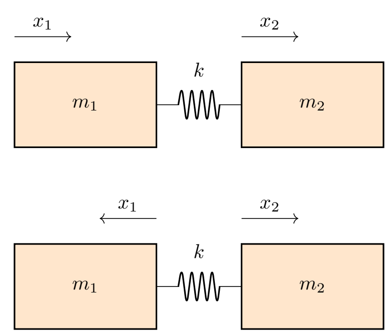
Prema tome, nije potrebno razmatrati oba prethodno ilustrovana slučaja, već je dovoljno usvojiti jednu pretpostavku koja će biti korišćena u daljem modelovanju datog sistema (na slici 2 smerovi sile f_e ucrtani su u skladu sa drugom slučajem, odnosno prilikom modelovanja sistema usvojena je pretpostavka $x_2 > x_1$).

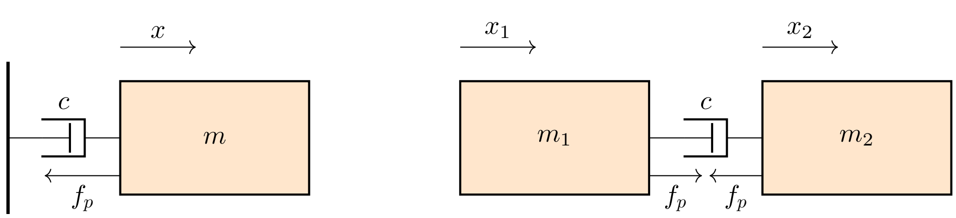
Prigušnica predstavlja još jedan način modelovanja trenja i njena oznaka data je na slici 3. Istezanje (ili sabijanje) prigušnice opisuje se razlikom tekuće brzine u odnosu na prvobitnu brzinu $\Delta v = \Delta\dot{x} = \dot{x}_2 - \dot{x}_1$, što znači da je sila usled dejstva prigušnice funkcija te promene brzina:

$$f_p = f_p(\Delta v) = f_p(\Delta\dot{x}) \tag{5}$$

Slično kao sila elastičnosti, sila usled dejstva prigušnice uvek je suprotnog smera od porasta promene brzine $\Delta\dot{x}$, dok se intenzitet te sile računa identično kao intenzitet sile trenja (2). Slika 3 prikazuje dve uobičajene situacije u translatornim mehaničkim sistemima, veoma slične već prikazanom na slici 2 (bitna razlika je što se između tela nalaze prigušnice, a ne opruge).

[1] Odrediti smer i intenzitet sile elastičnosti na oba tela u sledeća dva primera. Za prvi primer usvojiti pretpostavku $x_1 > x_2$. Da li je u drugom primeru potrebna pretpostavka?



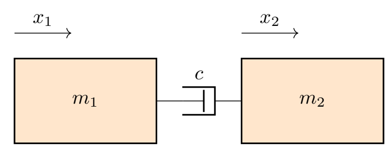


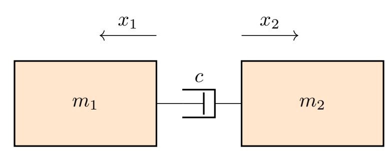
Slika 3: Dejstvo sile usled deformisanja prigušnice

Izraz kojim se izračunava intenzitet sile usled istezanja prigušnice u primeru sa leve strane je $f_p = c\dot{x}$, s obzirom na to da se prigušnica nalazi između tela koje se kreće i zida, odnosno kreće se samo jedan kraj prigušnice. Primer sa desne strane rešava se na isti način kao i u slučaju opruge između dva tela koja se kreću, sa bitnom razlikom u tome što je sila elastičnosti funkcija promene pozicije, a sila usled deformacije prigušnice funkcija promene brzine, odnosno prvog izvoda pozicije.[2] Prema tome, s obzirom da su x_1 i x_2 isto usmereni, posmatramo dva različita slučaja:

- za $x_1 > x_2 \Rightarrow x_1 - x_2 > 0 \quad \rightarrow$ prigušnica se sabija $\rightarrow$ reakcija je istezanje $\rightarrow$ intenzitet sile je $f_p = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$.
- za $x_2 > x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 > 0 \quad \rightarrow$ prigušnica se isteže $\rightarrow$ reakcija je sabijanje $\rightarrow$ intenzitet sile je $f_p = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$.

[2] Odrediti smer i intenzitet sile usled deformacije prigušnice na oba tela u sledeća dva primera. Za prvi primer usvojiti pretpostavku $x_1 > x_2$. Da li je u drugom primeru potrebna pretpostavka?





Analogno primeru sa oprugom čiji se krajevi kreću u istom smeru, i u slučaju prigušnice dovoljno je usvojiti jednu pretpostavku i u skladu sa njom modelovati mehanički sistem (u primeru sa slike 3 usvojena je pretpostavka $x_2 > x_1$ i u skladu sa tim je ucrtan smer sile f_p).

2.3 Zakonitosti

Proces formiranja matematičkog modela sistema zasniva se na uočavanju osnovnih elemenata sistema (tela sa masom, sila trenja i sile usled deformacije opruge i prigušnice) i spoljašnjih sila (npr. pobudna sila, gravitaciona sila), nakon čega se primenjuju zakonitosti uzajamnog dejstva elemenata iz posmatranog sistema. Zakoni koji se razmatraju prilikom formiranja matematičkog modela translatornog mehaničkog sistema su: Dalamberov zakon i zakon akcije i reakcije (III Njutnov zakon).

Za svako telo koje ima masu važi II Njutnov zakon [3]: vektorski zbir sila f koje deluju na telo jednak je proizvodu mase m tog tela i njegovog ubrzanja a:

$$ma = m\ddot{x} = \sum_i f_i \tag{1}$$

[3] Napomena: podrazumeva se da je masa tela konstanta. Uopštena formulacija zakona bez navedene pretpostavke je:

$$\frac{d}{dt}(mv) = \sum_i f_i$$

gde je m masa tela, a njegovo ubrzanje, a sa f_i označene su sve spoljašnje sile koje deluju na telo.

Dalamber je uopštio II Njutnov zakon tako što član $m\ddot{x}$ posmatra kao inercijalnu silu i uvodi je pod sumu. Na taj način dobija se da je suma svih sila koje deluju na telo (uključujući i inercijalnu silu) jednaka nuli:

$$\sum_i f_i = 0 \tag{2}$$

III Njutnov zakon, poznat kao zakon akcije i reakcije glasi: kada jedno telo deluje silom na drugo telo, tada i drugo telo deluje silom istog intenziteta, a suprotnog smera, na prvo telo. Bitno je naglasiti da se pomenute sile ne poništavaju, već se svaka povezuje sa odgovarajućim telom.

Navedene zakonitosti se mogu upotrebiti za formiranje modela jednostavnijih mehaničkih sistema, na čemu će se ovaj materijal i zadržati. Pored njih, postoje i drugi zakoni fizike koji mogu biti od koristi prilikom formiranja matematičkog modela posmatranog sistema. Na primer, moguće je korišćenje zakona održanja energije, tako da je ukupna energija u zatvorenom sistemu jednaka nuli. Tu se razmatraju kinetička E_k i potencijalna energija E_p tela iz sistema:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \qquad E_p = mgh \tag{3}$$

gde je h - visina težišta tela u odnosu na referentnu tačku, a g - gravitaciono ubrzanje ($g \approx 9.81$ $[m/s^2]$).

3. Primeri sa rešenjima

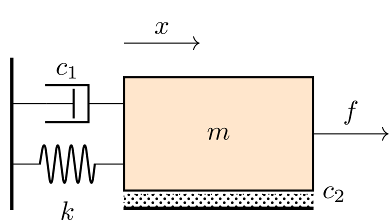
Primer 1. Za translatorni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:

a) diferencijalnu jednačinu,

b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako je ulaz pobudna sila f, a izlaz pozicija tela x,

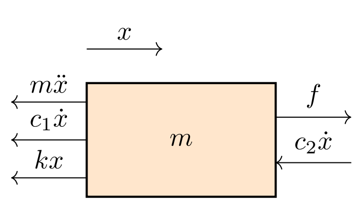
c) upotrebom paketa *DifferentialEquations* simulirati sistem tokom prvih 10s, ako je pobudna sila $f(t) = sin(t)$, a vrednosti parametara su sledeće: $m = 10$, $c_1 = c_2 = 20$, $k = 40$, a početni uslovi su nulti[1]. Na grafiku prikazati dobijeno rešenje.

[1] Izvršiti simulaciju za iste vrednosti parametara, ako je telo u početnom trenutku pomereno za 3 u levo, brzina mu je nula, a pobudna sila je takođe nula ($f(t) = 0$).



Rešenje:

Prvi korak u rešavanju ovakvih zadataka jeste formiranje *Free-Body Diagram*-a (FBD). Na FBD se ucrtavaju sva tela od interesa i sve sile koje deluju na ta tela. U ovom slučaju to je samo jedno telo, na koje deluje pet sila: inercijalna sila, sile usled dejstva prigušnice, opruge i trenja, kao i pobudna sila f. FBD datog sistema je:



Na osnovu nacrtanog dijagrama i primenom Dalamberovog zakona formira se diferencijalna jednačina kojom modelujemo translatorno kretanje tela mase m:

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + c_2\dot{x} + kx - f = 0 \tag{1}$$

koja predstavlja rešenje prvog dela zadatka.

Da bi rešili drugi deo zadatka, neophodno je transformisati datu diferencijalnu jednačinu drugog reda u sistem od dve diferencijalne jednačine prvog reda.

$$\begin{aligned} x_1 = x \quad &\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \dot{x} \quad &\Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \ddot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(f - kx_1 - (c_1 + c_2)x_2) \end{aligned} \tag{2}$$

Na ovaj način smo dobili dve promenljive stanja: x_1 koja predstavlja promenu pozicije tela i x_2 koja predstavlja promenu brzine, kao i sistem od dve diferencijalne jednačine prvog reda. Iz dobijenog sistema veoma je jednostavno napisati prvu jednačinu linearnog modela u prostoru stanja koja glasi $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$. Ako znamo da u ovoj jednačini $x(t)$ predstavlja vektor promenljivih stanja, a $u(t)$ vektor ulaza, kao i da su ulaz pobudna sila f, a izlaz promena pozicije tela x (prva promenljiva stanja), veoma jednostavno dobijamo matematički model u prostoru stanja:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c_1 + c_2}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{3}$$

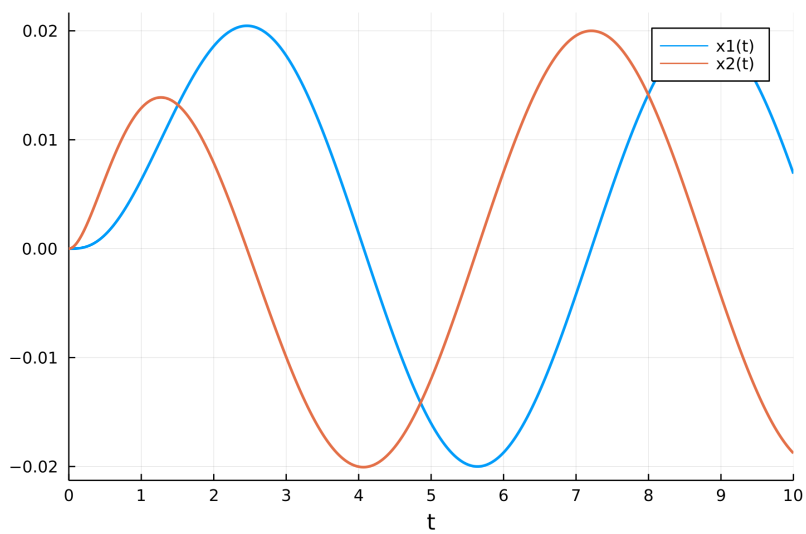
Nakon definisanja sistema diferencijalnih jednačina prvog reda, postoje svi potrebni uslovi za pisanje koda kojim će se izvršiti simulacija sistema, upotrebom paketa *DifferentialEquations*. Prvi korak je implementacija funkcije u okviru koje su definisani izvodi promenljivih stanja (2).

```
using LinearAlgebra, Plots, DifferentialEquations

function sistem!(dx, x, p, t)
    m, c1, c2, k = p
    f = sin(t)

    dx[1] = x[2]
    dx[2] = 1 / m * (f - k * x[1] - (c1 + c2) * x[2])
end
```

Nakon implementacije navedene funkcije, preostalo je definisati sve parametre, početne uslove, kreirati *ODEProblem* i pozvati funkciju *solve*, koja dalje integracijom rešava sistem diferencijalnih jednačina prvog reda.

```
t = (0.0, 10.0)
x0 = [0, 0]
p = (10.0, 20.0, 20.0, 40.0)

prob = ODEProblem(sistem!, x0, t, p)
sol = solve(prob)

plot(sol, label=["x1(t)" "x2(t)"], lw=2, xticks=0:10)
```

Na sledećoj slici prikazan je rezultat simulacije, odnosno vrednosti promenljivih stanja tokom prvih $10s$ simulacije. S obzirom da su promenljive stanja pozicija i brzina tela, grafik prikazuje promenu navedenih fizičkih veličina u vremenu.

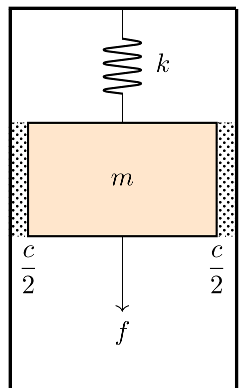


Primer 2. Za translatorni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:

a) diferencijalnu jednačinu,

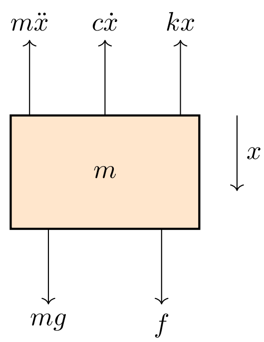
b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako su ulazi gravitaciono ubrzanje g i pobudna sila f, a izlaz pozicija tela x,

c) upotrebom paketa *DifferentialEquations* simulirati sistem tokom prvih 20s, ako je pobudna sila $f(t) = cos(t)$, a vrednosti parametara su sledeće: $m = 5$, $c = 10$, $k = 20$, a početni uslovi su nulti. Na grafiku prikazati dobijeno rešenje.



Rešenje:

Bitno je primetiti da u postavci ovog zadatka nije naznačen smer kretanja tela mase m. U tom slučaju, neophodno je ucrtati proizvoljan smer kretanja, i u skladu sa time formirati FBD i napisati diferencijalnu jednačinu.



$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx - mg - f = 0 \tag{4}$$

Od ovakve diferencijalne jednačine drugog reda, uvođenjem promenljivih stanja, jednostavno se dobija sistem dve diferencijalne jednačine prvog reda. S obzirom da je ulaz definisan kao $u(t) = \begin{bmatrix} g \\ f \end{bmatrix}$, a izlaz je pozicija tela mase m, odnosno $y(t) = x_1$, izvedeni sistem diferencijalnih jednačina prvog reda jednostavno se zapisuje u formi modela u prostoru stanja.

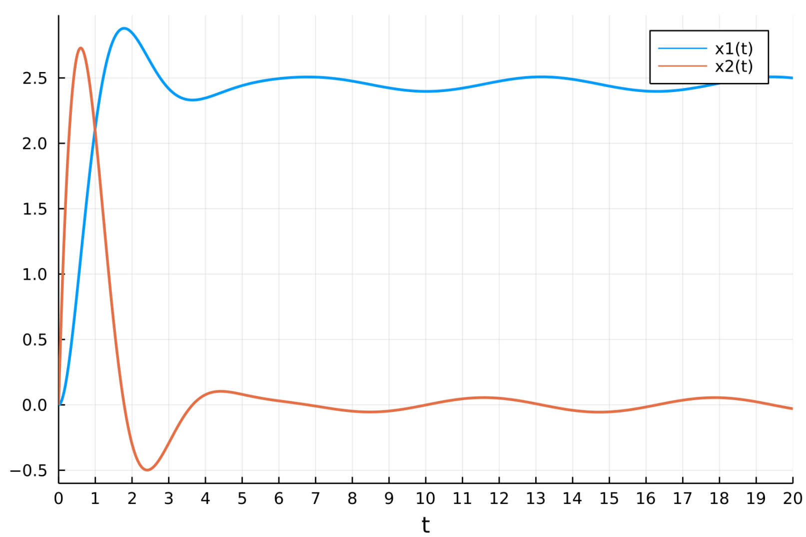
$$\begin{aligned} x_1 = x \quad &\Rightarrow \quad \dot{x}_1 = \dot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \dot{x} \quad &\Rightarrow \quad \dot{x}_2 = \ddot{x} \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{m}(f + mg - kx_1 - cx_2) \end{aligned} \tag{5}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t) \tag{6}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Dalje je potrebno izvršiti sve korake opisane u prethodnom primeru kako bi implementirali simulaciju opisanog sistema upotrebom paketa *DifferentialEquations*. Na dobijenom grafiku vidimo promene vrednosti obe promenljive stanja po vremenu, odnosno promenu pozicije i brzine tela mase m u vremenu.

```
function sistem!(dx, x, p, t)
    m, c, k, g = p
    f = cos(t)

    dx[1] = x[2]
    dx[2] = 1 / m * (f + m * g - k * x[1] - c * x[2])
end

t = (0.0, 20.0)
x0 = [0.0, 0.0]
p = (5.0, 10.0, 20.0, 9.81)

prob = ODEProblem(sistem!, x0, t, p)
sol = solve(prob)

plot(sol, label=["x1(t)" "x2(t)"], lw=2, xticks=0:20)
```



Primer 3. Za translatorni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:

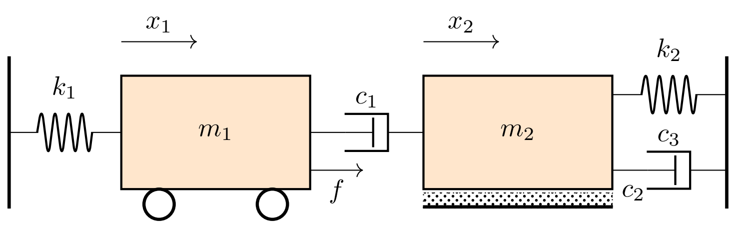
a) diferencijalne jednačine,

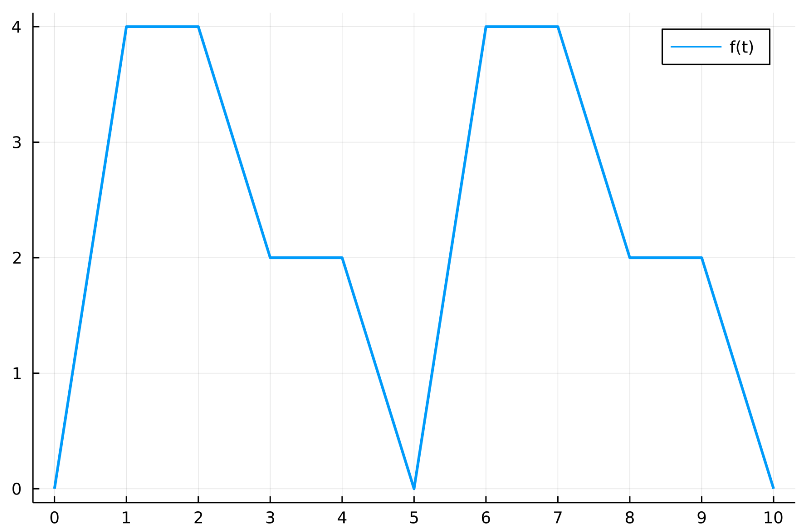
b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako je ulaz pobudna sila f, a izlazi pozicije oba tela,

c) upotrebom paketa *DifferentialEquations* simulirati sistem tokom prvih $10s$, ako je pobudna sila $f(t)$ definisana funkcijom prikazanom na sledećem grafiku, a vrednosti parametara su sledeće: $m_1 = 10$, $m_2 = 15$, $c_1 = c_2 = c_3 = 20$, $k_1 = k_2 = 40$, a početni uslovi su nulti.

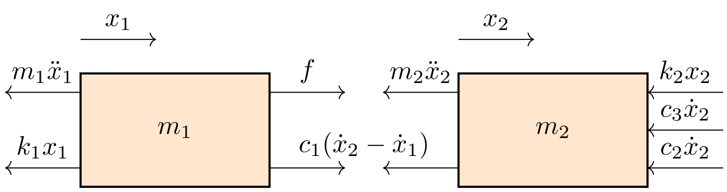
d) na istom grafiku iscrtati promenu pozicija oba tela u vremenu, i označiti tačke u kojima je telo bilo najudaljenije od ravnotežnog položaja (za ravnotežni položaj usvajamo vrednost pozicije 0),

e) izračunati ukupan pređeni put za oba tela.





Rešenje:



$$
\begin{aligned}
&m_1\ddot{x}_1 + k_1x_1 - c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f = 0 \\
&m_2\ddot{x}_2 + c_1(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (c_2 + c_3)\dot{x}_2 + k_2x_2 = 0
\end{aligned} \tag{7}
$$

S obzirom da u ovom primeru imamo dva tela sa masama, jasno je da dobijamo dve diferencijalne jednačine drugog reda. Prema tome, potrebno je uvesti četiri promenljive stanja, koje će predstavljati pozicije i brzine oba tela i transformisati izvedene jednačine u sistem od četiri diferencijalne jednačine prvog reda.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_1 & &\rightarrow & \dot{x}_1 &= x_2 \\
x_2 &= \dot{x}_1 & &\rightarrow & \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_1}(f + c_1(x_4 - x_2) - k_1x_1) \\
x_3 &= x_2 & &\rightarrow & \dot{x}_3 &= x_4 \\
x_4 &= \dot{x}_2 & &\rightarrow & \dot{x}_4 &= -\frac{1}{m_2}(c_1(x_4 - x_2) + (c_2 + c_3)x_4 + k_2x_3)
\end{aligned} \tag{8}
$$

Iz ovih jednačina jednostavno dobijamo model u prostoru stanja.

$$
\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{c_1}{m_1} & 0 & \frac{c_1}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{c_1}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{c_1 + c_2 + c_3}{m_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{9}
$$

$$
y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)
$$

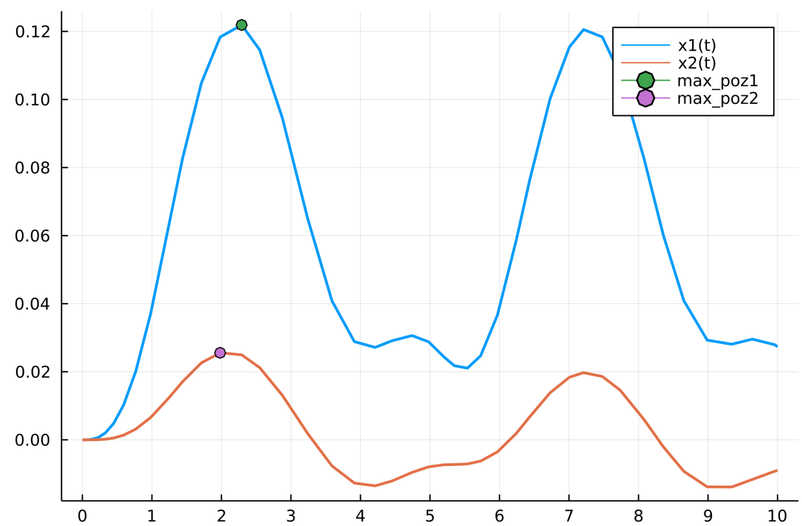
U nastavku je dat kod kojim je izvršena simulacija datog sistema, za prethodno definisane vrednosti parametara. Budući da je pobudna sila definisana kao složen signal, implementirana je funkcija koja kao parametar prima t, a vraća vrednost funkcije u toj tački (u slučaju da je t skalar, a ako se prosledi vektor, funkcija vraća vektor vrednosti signala u prosleđenim tačkama).

```
using LinearAlgebra, Plots, DifferentialEquations

function pobuda(t)
    tp = rem.(t, 5)
    y = (4 * tp) .* (tp .< 1) + 4 .* ((tp .>= 1) .& (tp .< 2)) +
    (-2 * tp .+ 8) .* ((tp .>= 2) .& (tp .< 3)) + 2 .* ((tp .>= 3) .& (tp .< 4)) +
    (-2 * tp .+ 10) .* (tp .>= 4)
end

function sistem!(dx, x, p, t)
    m1, m2, c1, c2, c3, k1, k2 = p
    f = pobuda(t)

    dx[1] = x[2]
    dx[2] = 1 / m1 * (f + c1 * (x[4] - x[2]) - k1 * x[1])
    dx[3] = x[4]
    dx[4] = - 1 / m2 * (c1 * (x[4] - x[2]) + (c2 + c3) * x[4] + k2 * x[3])
end

t = (0.0, 10.0)
p = (10.0, 15.0, 20.0, 20.0, 20.0, 40.0, 40.0)
x0 = [0.0, 0.0, 0.0, 0.0]

prob = ODEProblem(sistem!, x0, t, p)
sol = solve(prob)
```

Da bismo iscrtali promene pozicija oba tela, neophodno je izdvojiti vrednosti prve i treće promenljive stanja u zasebne vektora (*poz*1 i *poz*2). Budući da je potrebno označiti i tačke u kojima je telo bilo najudaljenije od ravnotežnog položaja, potrebno je pronaći maksimum apsolutnih vrednosti pozicija za oba tela, kao i indekse na kojim su se ta dva maksimuma nalazila. Time za svaki od vektora pozicija dobijamo po dve vrednosti, koje predstavljaju maksimalnu apsolutnu vrednost pozicije odgovarajućeg tela i tačku na x-osi na kojoj se ta vrednost nalazi. Dalje pozivima *plot* funkcije iscrtavamo prvo promene položaja oba tela u vremenu, a potom i kružićima označavamo pozicije najudaljenije od ravnotežnog položaja.

```
poz1 = [x[1] for x in sol.u]
poz2 = [x[3] for x in sol.u]

~, index1 = findmax(abs.(poz1))
~, index2 = findmax(abs.(poz2))

plot(sol.t, [poz1, poz2], lw=2, xticks=0:10, label=["x1(t)" "x2(t)"])
plot!([sol.t[index1]], [poz1[index1]], markershape=:o, label="max_poz1")
plot!([sol.t[index2]], [poz2[index2]], markershape=:o, label="max_poz2")
```

Pređeni put tela između dve tačke izračunava se kao apsolutna razlika pozicije tela u drugoj i prvoj tački. Pošto treba sračunati ukupan pređeni put, neophodno je sumirati apsolutne razlike sukcesivnih pozicija tela, čime se dobija skalarna vrednost koja predstavlja pređeni put tela za vreme trajanja simulacije (postupak izvršiti za oba tela).




```
put1 = sum(abs.(diff(poz1)))
put2 = sum(abs.(diff(poz2)))

print("Predjeni put prvog tela je: ")
println(put1)
print("Predjeni put drugog tela je: ")
println(put2)
```

Primer 4. Translatorni mehanički sistem prikazan na slici sadrži idealnu koturaču (nema masu, ni trenja). Za dati sistem odrediti:

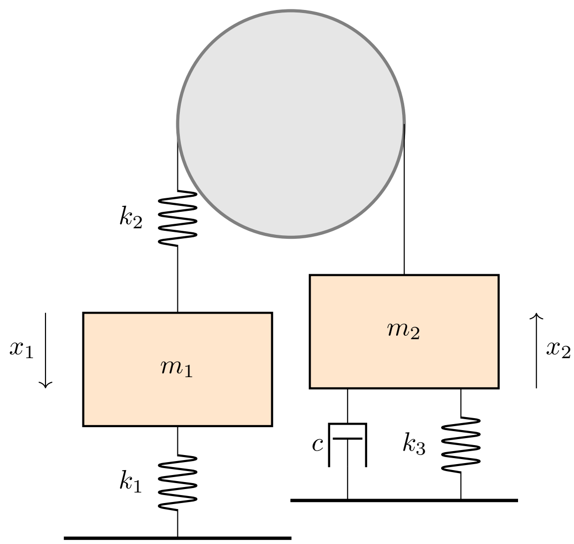
a) diferencijalne jednačine,

b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako je ulaz gravitaciono ubrzanje g, a izlazi brzine oba tela,

c) upotrebom paketa *DifferentialEquations* simulirati sistem tokom prvih 20s, za sledeće vrednosti parametara: $m_1 = 5$, $m_2 = 8$, $c = 10$, $k_1 = k_2 = k_3 = 20$, $g = 9.81$, a inicijalna pozicija tela mase m_1 je za 2 na dole, dok su ostali početni uslovi nulti.

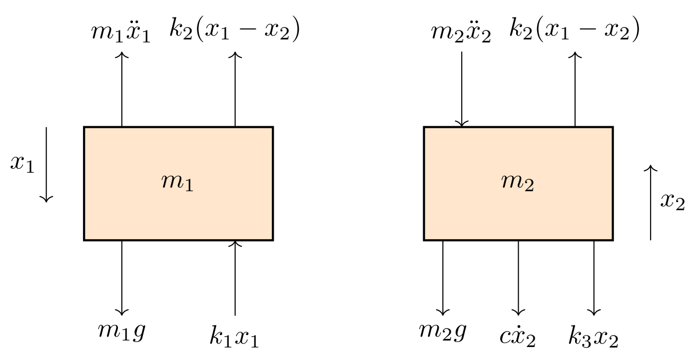
d) na istom grafiku iscrtati promenu brzina oba tela u vremenu i označiti tačke u kojima su tela dostigla najveću brzinu,

e) na istom grafiku iscrtati promene ubrzanja u vremenu za oba tela.



Rešenje:

S obzirom da su u prethodnim rešenim primerima detaljno objašnjeni svi koraci prilikom modelovanja i simulacije translatornih mehaničkih sistema, u ovom primeru biće redom dat FBD, diferencijalne jednačine, model u prostoru stanja, kao i kod kojim je izvršena simulacija. Jedina bitna razlika jeste što se ovde nakon simulacije radi sa brzinama, pa je potrebno izdvojiti druge promenljive stanja u odnosu na prethodni primer. Dodatno, poslednja stavka primera jeste određivanje ubrzanja, što do sada nije ilustrovano. Ako znamo da je ubrzanje tela $a = \dot{v} = \frac{dv}{dt}$, jasno je da ubrzanje možemo izračunati kao izvod promene brzine po vremenu. Za izračunavanje promene neke veličine možemo koristiti već viđenu funkciju *diff*, koja računa razliku sukcesivnih elemenata vektora $v_{i+1} - v_i$. Bitno je uočiti da će broj elemenata vektora $diff(v)$ biti za jedan manji od broja elemenata vektora v.



a)

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 - m_1g = 0 \\ m_2\ddot{x}_2 + c\dot{x}_2 - k_2x_1 + (k_2 + k_3)x_2 + m_2g = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 &= \dot{x}_1 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{m_1}(m_1g + k_2x_3 - (k_1 + k_2)x_1) \\ x_3 &= x_2 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_3 = x_4 \\ x_4 &= \dot{x}_2 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_4 = \frac{1}{m_2}(k_2x_1 - m_2g - cx_4 - (k_2 + k_3)x_3) \end{aligned} \tag{11}$$

b)

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1} & 0 & \dfrac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & 0 & -\dfrac{k_2 + k_3}{m_2} & -\dfrac{c}{m_2} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \tag{12}$$

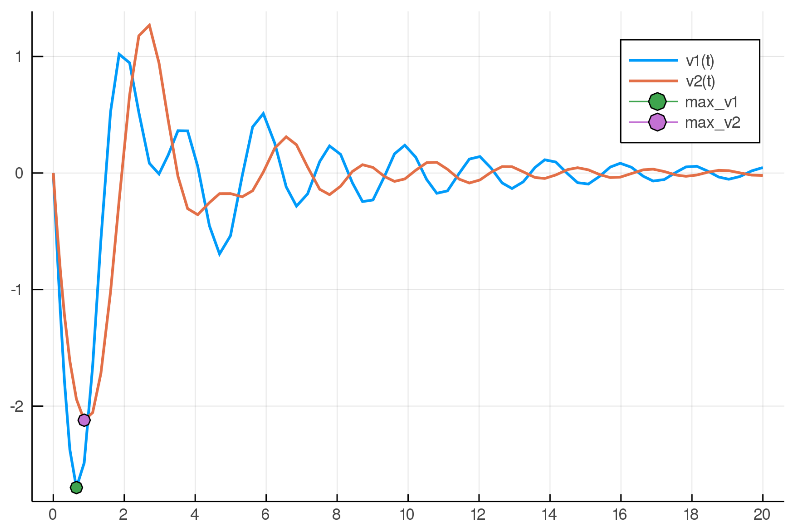
$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t)$$

c)

```
function sistem!(dx, x, p, t)
    m1, m2, c, k1, k2, k3, g = p

    dx[1] = x[2]
    dx[2] = 1 / m1 * (m1 * g + k2 * x[3] - (k1 + k2) * x[1])
    dx[3] = x[4]
    dx[4] = 1 / m2 * (k2 * x[1] - m2 * g - c * x[4] - (k2 + k3) * x[3])
end

t = (0.0, 20.0)
p = (5.0, 8.0, 10.0, 20.0, 20.0, 20.0, 9.81)
x0 = [2.0, 0.0, 0.0, 0.0]

prob = ODEProblem(sistem!, x0, t, p)
sol = solve(prob)
```

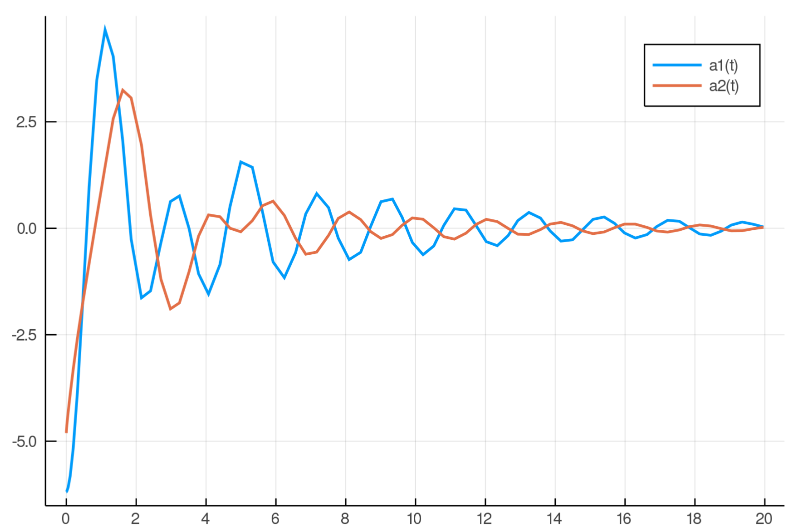
d)

```
v1 = [x[2] for x in sol.u]
v2 = [x[4] for x in sol.u]

~, index1 = findmax(abs.(v1))
~, index2 = findmax(abs.(v2))

plot(sol.t, [v1, v2], lw=2, label=["v1(t)" "v2(t)"])
plot!([sol.t[index1]], [v1[index1]], markershape=:o, label="max_v1")
plot!([sol.t[index2]], [v2[index2]], markershape=:o, label="max_v2")
```



e)

```
a1 = diff(v1) ./ diff(sol.t)
a2 = diff(v2) ./ diff(sol.t)

plot(sol.t[1:end-1], [a1, a2], lw=2, label=["a1(t)", "a2(t)"])
```



4. Zadaci za vežbu

Zadatak 1. Za translatorni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:

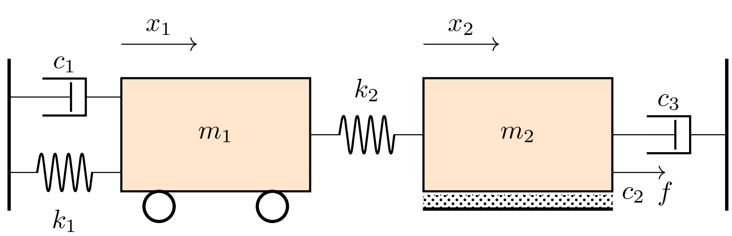
a) diferencijalne jednačine,

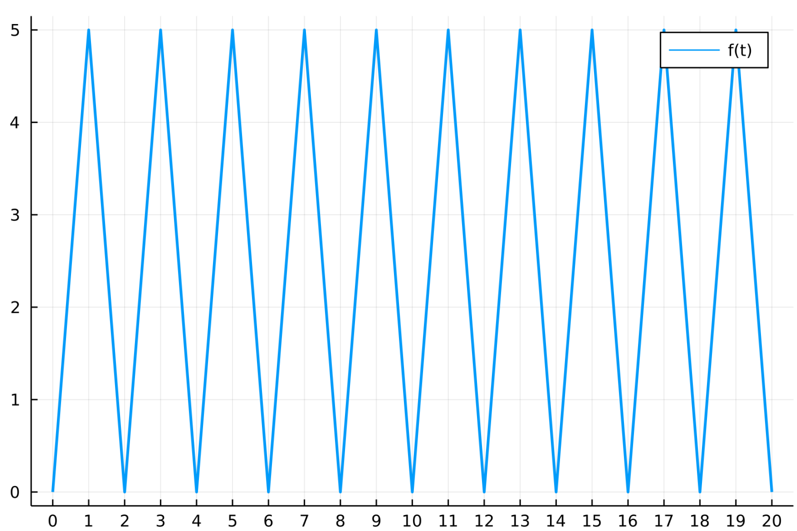
b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako je ulaz pobudna sila $f(t)$, a izlazi brzine oba tela,

c) upotrebom paketa $DifferentialEquations$ simulirati sistem tokom prvih 20s, ako je pobudna sila $f(t)$ definisana funkcijom prikazanom na sledećem grafiku, a vrednosti parametara su sledeće: $m_1 = 20$, $m_2 = 10$, $c_1 = c_2 = c_3 = 10$, $k_1 = 20$, $k_2 = 40$. Telo mase m_1 je u početnom trenutku pomereno za 1 u desno, a telo mase m_2 pomereno je za 2 u istom smeru. Početne brzine oba tela su nula.

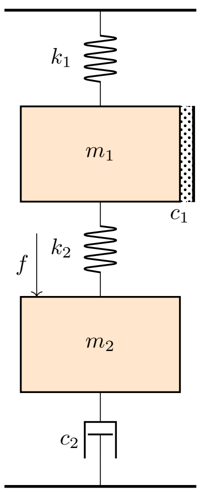
d) na istom grafiku iscrtati promenu brzina oba tela u vremenu, i označiti tačke u kojima su tela dostigla maksimalnu brzinu,

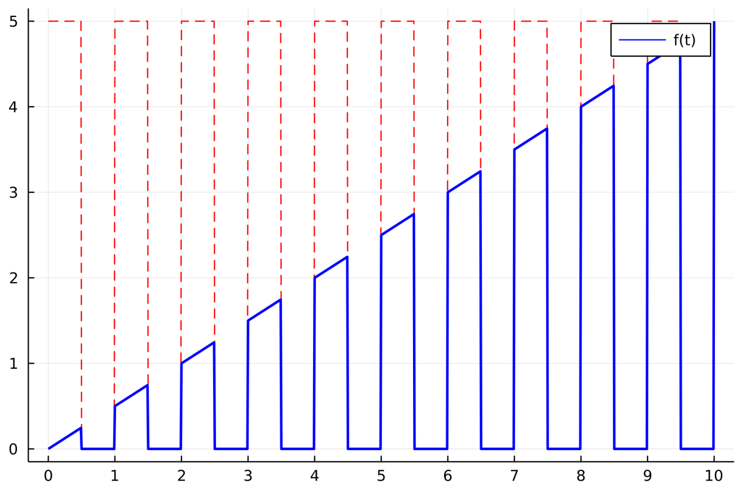
e) izračunati ukupan pređeni put za oba tela.





Zadatak 2. Za translatorni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:





a) diferencijalne jednačine,

b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako su ulazi pobudna sila $f(t)$ i gravitaciono ubrzanje g, a izlazi pozicija i brzina tela mase m_1,

c) upotrebom paketa $DifferentialEquations$ simulirati sistem tokom prvih 10s, ako je pobudna sila $f(t)$ definisana funkcijom prikazanom na sledećem grafiku, a vrednosti parametara su sledeće: $m_1 = 20$, $m_2 = 10$, $c_1 = c_2 = c_3 = 10$, $k_1 = 20$, $k_2 = 40$. Oba tela su u početnom trenutku pomerena za 1 na gore, dok su početne brzine oba tela jednake nuli.

d) na istom grafiku iscrtati promenu pozicije i brzine tela mase m_1,

e) odrediti i iscrtati ubrzanje tela mase m_1, i označiti tačku u kojoj je ubrzanje bilo maksimalno.

Zadatak 3. Za translatorni mehanički sistem prikazan na slici odrediti:

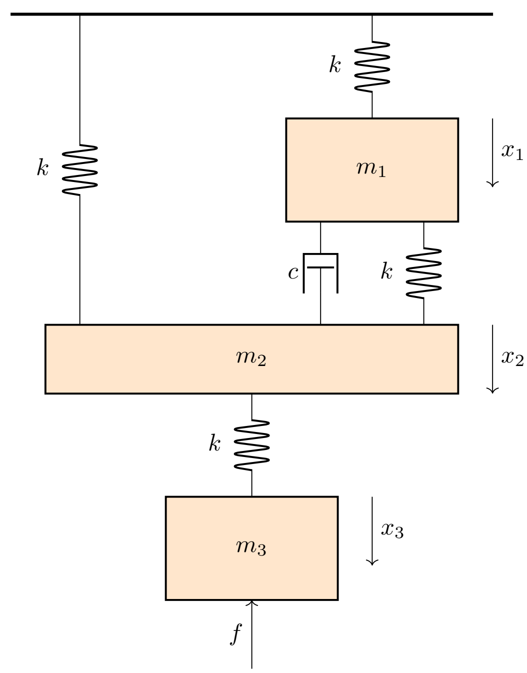
a) diferencijalne jednačine,

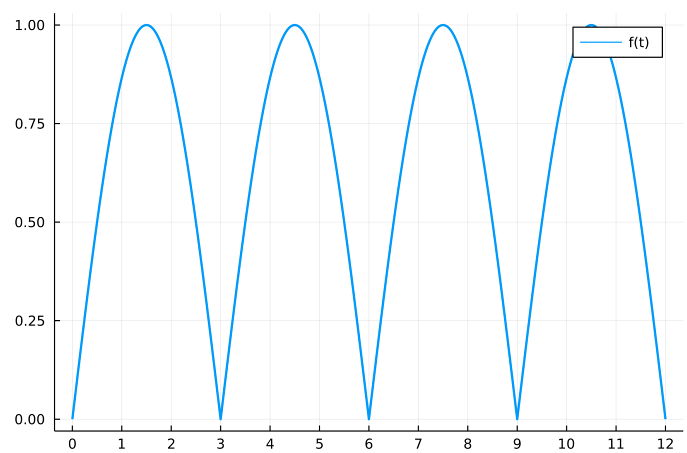
b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako su ulazi pobudna sila $f(t)$ i gravitaciono ubrzanje g, a izlazi brzine tela mase m_1 i m_3,

c) upotrebom paketa $DifferentialEquations$ simulirati sistem tokom prvih 12s, ako je pobudna sila $f(t)$ definisana funkcijom prikazanom na sledećem grafiku, a vrednosti parametara su sledeće: $m_1 = m_3 = 5$, $m_2 = 10$, $c = 10$, $k = 15$, $g = 9.81$. Početna brzina svih tela je 3 u smeru kretanja, dok su početne pozicije svih tela 0.

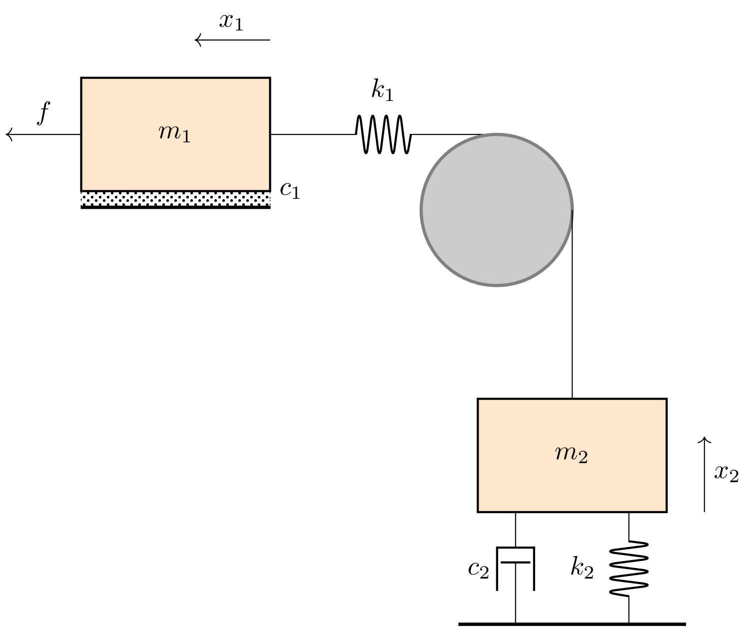
d) na istom grafiku iscrtati promenu pozicija tela mase m_1 i m_2, i označiti tačke u kojima su tela bila najudaljenija od ravnotežnog položaja

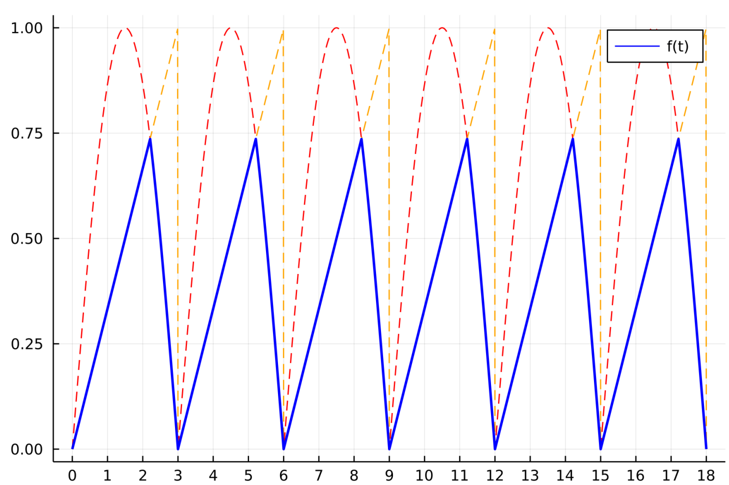
e) na grafiku prikazati promenu rastojanja između tela mase m_2 i m_3, ako je rastojanje u početnom trenutku iznosilo 2.





Zadatak 4. Translatorni mehanički sistem prikazan na slici sadrži idealnu koturaču(nema masu, ni trenja).





Za dati sistem odrediti:

a) diferencijalne jednačine,

b) linearan matematički model u prostoru stanja, ako su ulazi pobudna sila $f(t)$ i gravitaciono ubrzanje g, a izlazi pozicija i brzina tela mase m_1,

c) upotrebom paketa $DifferentialEquations$ simulirati sistem tokom prvih 12s, ako je pobudna sila $f(t)$ definisana funkcijom prikazanom na grafiku ispod, a vrednosti parametara su sledeće: $m_1 = 10$, $m_2 = 8$, $c_1 = 5$, $c_2 = 10$, $k_1 = k_2 = 15$, $g = 9.81$, a početni uslovi su nulti.

d) na istom grafiku iscrtati promenu pozicija oba tela,

e) na istom grafiku iscrtati promenu brzine i ubrzanja tela mase m_1, i označiti tačke u kojima su navedene veličine dostigle maksimalnu vrednost.

Literatura

- Aleksandar Erdeljan, Darko Čapko: Modelovanje i simulacija sistema - sa primerima; FTN, Novi Sad, 2015.
- *DifferentialEquations* dokumentacija https://diffeq.sciml.ai/stable/
- *Julia* programski jezik (sajt) https://julialang.org/
- *Think Julia* (*online* knjiga) https://benlauwens.github.io/ThinkJulia.jl/latest/book.html.