PEC 4

Presentación

Esta cuarta Prueba de Evaluación Continuada (PEC) evalúa los contenidos del módulo de *Magnetostática e inducción electromagnética*.

Competencias

Competencias Generales

11 Capacidad de utilizar los cimientos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.

12 Tener capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuado a cada situación y para aplicar las habilidades y los conocimientos adquiridos para abordarlo y resolverlo.

Competencias Específicas

- Interiorizar que el electromagnetismo es una interacción fundamental de la natura para ser consciente de su presencia en nuestro entorno y ser capaz de tener presente sus leyes en los fenómenos en que está implicado.
- Saber trabajar las expresiones fundamentales de la teoría electromagnética con una base matemática vectorial para ser capaz de llevar a cabo previsiones precisas.
- Comprender las leyes fundamentales de la magnetostática tanto en el vacío como en presencia de materia para ser capaz de comprender los efectos subyacentes a la electrónica, la transmisión de información por medios telemáticos, etc.
- Comprender los cimientos de la inducción electromagnética para poder prevenir y/o aplicar las interacciones relacionadas con la propagación electromagnética.

Objetivos

- Conocer la fuerza magnética y el concepto de campo de inducción magnética.

- Conocer y saber aplicar el teorema de Ampère.
- Entender la ley de inducción de Faraday y el concepto de fuerza electromotriz inducida.
- Conocer la magnetostática en presencia de materia.
- Conocer el autoinductància y la energía magnética.
- Entender como funciona un transformador.

Descripción de la PEC a realizar

La PEC está dividida en 3 partes: un cuestionario que encontraréis en el Moodle de la asignatura, 6 cuestiones de carácter teórico y razonamiento y 1 problema.

Recursos

Recursos Básicos

Módulo de (*Magnetostática e inducción electromagnética*).

Recursos Complementarios

En el aula encontraréis información sobre recursos adicionales, así como PEC resueltas de semestres anteriores. Por otro lado, al final del módulo encontraréis una bibliografía recomendada.

Criterios de valoración

20 % Cuestionario de Moodle
60 % Cuestiones cortas
20 % Problema

Excepto al Cuestionario de Moodle, todas las respuestas se tienen que justificar adecuadamente.

Formato y fecha de entrega

La PAC4 se tiene que librar antes del **24/05/2022 a las 23:59h** a través del **REC** (Registro de Evaluación Continua). Se intentará hacer la entrega en un único fichero PDF con todas las respuestas (excepto el cuestionario de Moodle) siempre que sea posible. En caso de que esto no pueda ser por algún motivo justificado, se podrán aceptar otros formatos habituales como por ejemplo Microsoft Office (.DOC, .DOCX), OpenOffice (.ODT), ficheros de texto (.TXT, .RTF) o LaTeX(.TEX).

La PEC se tiene que librar con procesador de textos. Aun así, las fórmulas y figures se pueden incluir como imagen en el documento.

El cuestionario se tiene que realizar en línea al Moodle del aula de Cimientos Físicos de la Informática. La fecha tope es la misma que la de la PAC4 puesto que forma parte.

En el documento de entrega habrá que añadir el siguiente texto: "Certifico que he hecho esta PEC de forma completamente individual y solo con la ayuda que el PDC ha considerado oportuna."

Enunciados

CUESTIONARIO MOODLE

Conectaos al Moodle de la asignatura y responded el cuestionario correspondiente a la PEC 2. Este cuestionario constará de una serie de preguntas tomadas **al azar** de entre los cuestionarios de cada semana. Dispondréis de hasta 2 intentos para realizarlo y la nota final será siempre la **más alta** de entre las obtenidas en cada intento.

Os recordamos que disponéis de los cuestionarios no evaluables correspondientes al temario de cada semana, con los que podéis practicar tantas veces como queráis sin penalización.

Cuestión 1

Un electrón con una velocidad $v = 2 \times 10^6$ m/s se dirige hacia una región entre dos placas paralelas separadas una distancia $d = 5$ mm. Entre las placas hay un campo eléctrico $E = 10^6$ N/C como el que se ve a la Figura 1. Si el electrón entra moviéndose perpendicularmente en el campo eléctrico entre las placas, ¿qué campo magnético hay que introducir para que el electrón se mueva en línea recta? En la Figura 1 podéis ver la disposición de los ejes y las direcciones de la trayectoria del electrón y del campo eléctrico.

NOTA: Tened en cuenta que para que el electrón se mueva en línea recta entre las dos placas la fuerza total sobre el electrón tiene que ser nula.

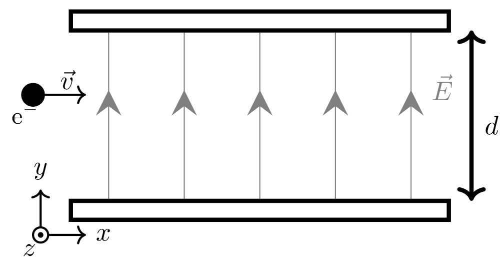

Figura 1: Situación estudiada en la Cuestión 1.

Solución:
El electrón entra en el espacio comprendido entre las dos placas con velocidad $\vec{v} = v\vec{\imath}$, por lo tanto, el electrón experimenta una fuerza total que viene dada por la *fuerza de Lorentz* (sección 2.3 del módulo de *Magnetismo*, y ecuaciones (39) del módulo de*Electrostática* y (30) de *Magnetismo*)

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right), \tag{1}$$

dónde $\vec{E} = E\vec{\jmath}$ es el campo eléctrico entre las placas y $\vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$ es el campo magnético que nos pide de calcular el enunciado.

Teniendo en cuenta que

$$\vec{v} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ v & 0 & 0 \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = vB_y\vec{k} - vB_z\vec{\jmath}, \tag{2}$$

podemos escribir la ecuación (1) como

$$\vec{F} = qE\vec{\jmath} - qvB_z\vec{\jmath} + qvB_y\vec{k}. \tag{3}$$

Fijaos que la fuerza (ecuación (3)) no depende de la componente B_x. De esta manera podemos tomar $B_x = 0$ para simplificar, pero podríamos escoger cualquier otro valor puesto que la componente B_x no afectará a la fuerza resultante.

Para que el electrón se mueva en línea recta entre las placas necesitamos que las componentes de la fuerza se anulen, es decir, hay que igualar cada componente a 0

$$\begin{cases} B_y = 0 \\ qE - qvB_z = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Directamente ya vemos que $B_y = 0$. Para la componente $\vec{\jmath}$ vemos que para que la fuerza magnética compense la fuerza eléctrica y se anulen obtenemos:

$$0 = qE - qvB_z. \tag{5}$$

De la ecuación (5) vemos que la componente del campo magnético perpendicular a la velocidad y el campo eléctrico, que nos pidel enunciado, tiene que ser

$$B_z = \frac{E}{v}. \tag{6}$$

Por lo tanto la única componente necesariamente no nula del campo magnético es la componente B_z en la dirección $\vec{k}$. Si ahora dibujáis el campo resultante sobre la Figura 1 tendréis

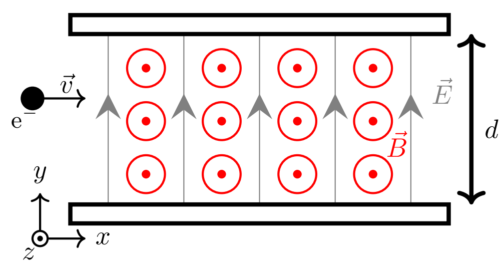

Figura 2: Situación final de la Cuestión 1. El campo magnético $\vec{B}$ está indicado en rojo.

Ahora ya estamos en posición de encontrar el valor del campo magnético necesario para hacer que el electrón avance en línea recta a través de las placas:

$$B_z = \frac{E}{v} = \frac{10^6 \text{ V/m}}{2 \times 10^6 \text{ m/s}} = 0{,}5 \text{ T} \tag{7}$$

Cuestión 2

Considerad el hilo conductor de la Figura 3, que se extiende al infinito a la derecha y a la izquierda, por el cual circula una corriente de intensidad I.

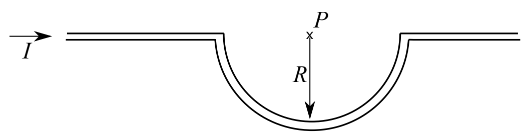

Figura 3: Distribución de corriente de la Cuestión 2.

Determinad el campo de inducción $\vec{B}$ en el punto P creado por el circuito de la figura.

Solución:
Este ejercicio se resuelve de la manera como se explica en el apartado 3.3.3 de los apuntes de magnetismo. El campo de inducción magnética creado por un circuito de corriente C con intensidad I, viene dado por la expresión (33) de los apuntes del módulo de *Magnetismo* de la asignatura:

$$\vec{B}(\vec{q}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I d\vec{\ell} \times \vec{u}_{\vec{q}-\vec{r'}}}{||\vec{q} - \vec{r'}||^2}. \tag{8}$$

La Figura 7 de los apuntes de magnetismo explica con detalle esta ecuación.

Para encontrar el campo de inducción magnética para el circuito de la Figura 3 tendremos que integrar el camino que sigue este circuito. En este caso podemos dividir el camino en tres tramos: (i) la parte recta de la izquierda antes de llegar al arco, (ii) el arco, y (iii) la parte recta de la derecha una vez la corriente abandona el arco (ver Figura4). Cuando encontremos el campo creado por cada uno de los tramos, la solución final será la suma de estas tres contribuciones.

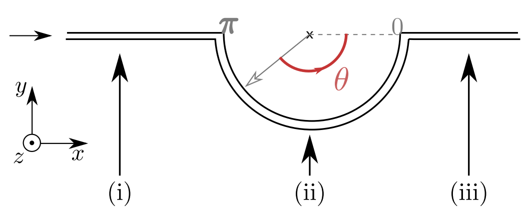

Figura 4: Tramos del hilo conductor.

Empezamos por encontrar el campo de inducción generado por el tramo (i), tal como se hace de la ecuación (46) a la (50) de los apuntes de *Magnetismo*. En este caso

$$\begin{aligned} \vec{q} &= 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} && (9)\\ \vec{r'} &= x'\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} && (10)\\ \vec{q} - \vec{r'} &= -x'\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} && (11)\\ ||\vec{q} - \vec{r'}|| &= \sqrt{x'^2} = x' && (12)\\ \vec{u}_{\vec{q}-\vec{r'}} &= \frac{\vec{q} - \vec{r'}}{||\vec{q} - \vec{r'}||} = \frac{-x'\vec{\imath}}{x'} = -\vec{\imath} && (13)\\ d\vec{\ell} &= dx'\vec{\imath}. && (14) \end{aligned}$$

Como $\vec{u}_{\vec{r}-\vec{r'}}$ y $d\vec{\ell}$ son paralelos, entonces su producto vectorial es nulo $d\vec{\ell} \times \vec{u}_{\vec{r}-\vec{r'}} = 0$ y la ecuación (8) queda

$$B_{(i)} = 0\,. \tag{15}$$

El campo de inducción magnético creado por el tramo (iii) se encuentra del mismo modo:

$$B_{(iii)} = 0\,. \tag{16}$$

Por lo tanto solo nos queda encontrar la contribución de la media espira (tramo (ii)). Para encontrar el campo de inducción en el punto P generado por el tramo (ii) usaremos lo que hemos visto en la sección 3.3.3 de los apuntes de *Magnetismo*. En este caso tenemos

$$\begin{aligned} \vec{q} &= 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} && (17)\\ \vec{r'} &= R\cos\theta'\vec{\imath} + R\sin\theta'\vec{\jmath} + 0\vec{k} && (18)\\ \vec{q} - \vec{r'} &= -R\cos\theta'\vec{\imath} - R\sin\theta'\vec{\jmath} + 0\vec{k} && (19)\\ ||\vec{q} - \vec{r'}|| &= R && (20)\\ \vec{u}_{\vec{q}-\vec{r'}} &= \frac{-R\cos\theta'\vec{\imath} - R\sin\theta'\vec{\jmath}}{Q} = -\left(\cos\theta'\vec{\imath} + \sin\theta'\vec{\jmath}\right) && (21)\\ d\vec{\ell} &= \left(-\sin\theta'\vec{\imath} + \cos\theta'\vec{\jmath} + 0\vec{k}\right) Rd\theta\,. && (22) \end{aligned}$$

Esta ecuación es equivalente a la ecuación (51) de los apuntes. Ahora introducimos estos datos dentro de la ecuación (8) y obtenemos

$$\vec{B}_{(ii)} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\pi}^{2\pi} d\theta' \frac{I\left[R^2\sin^2\theta' + R^2\cos^2\theta'\right]\vec{k}}{R^3} = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi R^3}\vec{k}\int_{\pi}^{2\pi} d\theta' = \frac{\mu_0 I}{4R}\vec{k}. \tag{23}$$

Dónde hemos usado la propiedad trigonométrica $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. También es importante ver que los límites de integración van de π a 0 teniendo en cuenta el sentido en que circula la intensidad de la corriente (ver Figura4). El resultado que acabamos de obtener para el campo generado por el tramo (ii) es, como esperábamos, la mitad del campo generado por una espira en su centro (resultado derivado en los apuntes de *Magnetismo* en la ecuación (56) de estos apuntes, donde se encuentra este campo si $z = 0$).

Por lo tanto el campo de inducción magnética en el punto P creado por el circuito de corriente será

$$B_T = \frac{\mu_0 I}{4R}\vec{k}. \tag{24}$$

Cuestión 3

Tenemos cuatro hilos conductores por los cuales pasa una intensidad I dispuestos en los vértices de un cuadrado de lado a, tal y como se muestra a la Figura 5.

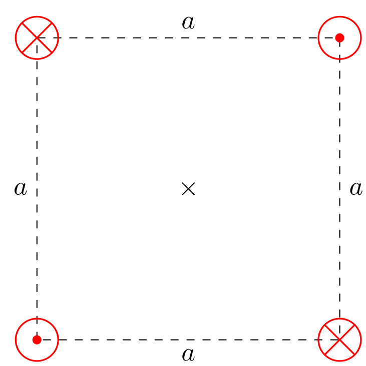

Figura 5: Distribución de corriente de la Cuestión 3.

(a) Encontrad el campo de inducción magnética que crea un hilo infinito en todo el espacio.

(b) Encontrad el campo de inducción magnética en el centro del cuadrado.

Solución:

(a) Para resolver este ejercicio utilizaremos el teorema de Ampère (ecuación (67) del módulo de *Magnetismo*).

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{tr} \,. \tag{25}$$

Si aplicamos el teorema para el caso de un hilo recto por el cual circula una intensidad I, el campo magnético a una distancia r perpendicular al cable es

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \,, \tag{26}$$

cómo se puede ver a la ecuación (71) de los apuntes.

(b) Los cables de las esquinas llevan corrientes eléctricas iguales y el centro “O” es equidistante de estos cables. Por lo tanto, los campos magnéticos a causa de estos cuatro cables tienen la misma magnitud. Para encontrar las direcciones de los campos magnéticos, dibujaremos círculos que contienen el punto de observación “O”. La dirección del campo magnético es tangencial al círculo. Aplicando la regla del pulgar de la mano derecha por el cable recto, determinamos la orientación del campo magnético como se muestra a la Figura 6 (para dibujar esta figura usáis la regla de la mano derecha que encontraréis a la Figura 11 de los apuntes de *Magnetismo*). Claramente, el campo magnético neto a causa de estos cuatro cables en el centro es cero. Por lo tanto, el campo magnético a causa de los cuatro cables en el centro es nulo.

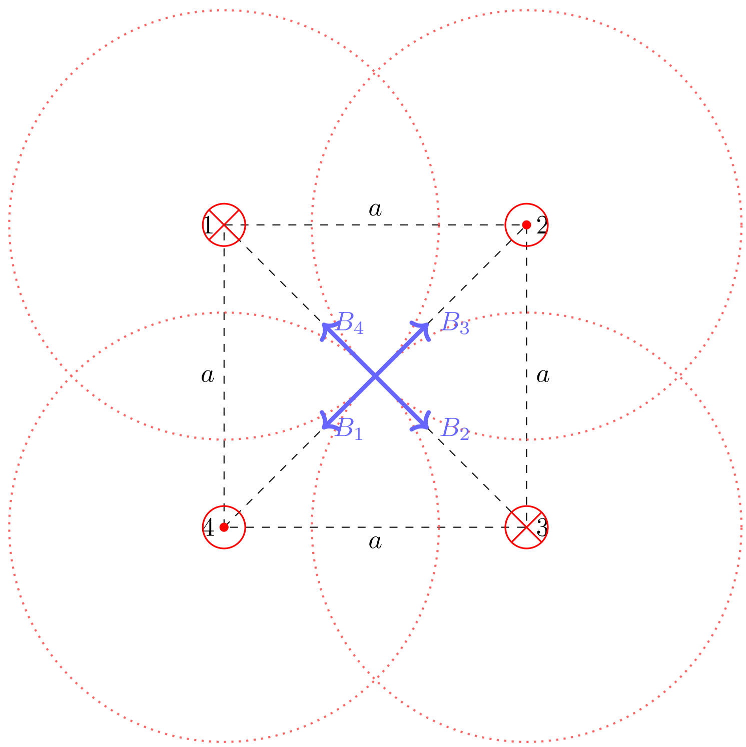

Figura 6: Campo magnético resultante de la Cuestión 3.

Cuestión 4

Una espira cuadrada de lado a y resistencia R, se mueve con una velocidad v_0 respecto a un hilo conductor rectilíneo infinito por el que circula una corriente I, tal y como se ve a la Figura 7. Inicialmente la espira se encuentra a una distancia x_0 del hilo conductor. Justificad el sentido de la corriente inducida según si la espira se acerca o se aleja del hilo conductor.

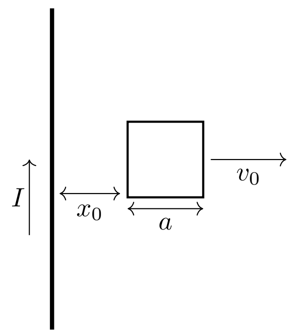

Figura 7: Situación presentada a la Cuestión 4.

Solución:
Para encontrar el sentido de la corriente inducida en la espira tendremos que encontrar el signo de la fuerza electromotriz (fem) $\mathcal{E}$. De los apuntes sabemos que el sentido de la corriente inducida tiende a oponerse a la variación que lo ha producido (sección 5.2.3 de los apuntes de *Magnetismo*). La ley de la inducción de Faraday-Lenz (ecuación (83) de los apuntes) nos dice que en una espira que se mueve dentro de un campo magnético se producirá una corriente inducida con una $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}\,. \tag{27}$$

Por lo tanto, para encontrar el sentido de la corriente inducida tendremos que ver si el flujo que atraviesa la espira crece o decrece con el tiempo.

Lo primero que recordaremos es que el campo magnético inducido por un hilo infinito de corriente por donde circula una intensidad I se puede escribir cómo

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}\,. \tag{28}$$

Notad que el campo magnético es perpendicular a la superficie que barre la espira (esto se ve de aplicar la regla de la mano derecha sobre el hilo de corriente (Figura 11 de los apuntes de

Magnetismo)). Una vez aquí, notad que el campo magnético $\vec{B}$ no es uniforme en el espacio sino que depende de x.

Ahora, para escribir el flujo de campo magnético utilizaremos la ecuación (93) del módulo de magnetostática, que nos dice

$$\Phi_B(t) = \int \vec{B} \cdot d\vec{R} = \int B \, dS, \tag{29}$$

dónde hemos aplicado que el campo magnético es perpendicular a la superficie que barre la espira.

Sin necesidad de resolver la integral se puede ver que al alejarse del hilo de corriente la intensidad del campo magnético decrece y por tanto, el flujo que atraviesa la espira también (ver Figura 8). Podemos inferir el sentido de la corriente inducida haciendo uso de la regla de la mano derecha: si el flujo de campo magnético decrece al alejarse la espira del hilo, entonces para compensar el cambio se tiene que inducir una corriente que genere un campo magnético en esta dirección y sentido. Por lo tanto, como el campo magnético creado por el hilo de corriente "entra" dentro del plano del papel, la corriente inducida por la espira tendría que ayudar el campo magnético presente (ver discusión de la ley de Faraday-Lenz que se encuentra unas líneas bajo la ecuación (83) de los apuntes de *Magnetismo*), y por tanto la corriente inducida tendrá un sentido "horario".

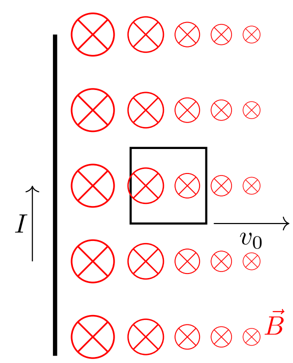

Figura 8: Situación presentada a la Cuestión 4, donde ahora se muestra el campo magnético en rojo para ilustrar la variación de flujo.

Si la espira se acerca al hilo de corriente, siguiendo el mismo hilo de razonamiento que para el caso anterior, lo que tenemos es que el flujo de campo magnético aumenta (ver Figura8) y por tanto, como la corriente inducida intenta compensar el cambio de flujo, la corriente tendrá un sentido "antihoario".

Cuestión 5

Considerad una bobina de 500 vueltas, longitud $L = 10$ cm y radio $r = 0{,}2$ cm, por donde circula una corriente de intensidad $I = 5$ A.

(a) Calculad el campo que crea una bobina en su eje.

(b) ¿Cuál es la energía almacenada?

(c) ¿Cómo varía esta energía si cortamos la bobina por la mitad?

Nota: Cuando resolváis el ejercicio considerad siempre la longitud de la bobina como infinita. Esta aproximación es válida puesto que $L \gg r$.

Solución:

(a) Para encontrar el campo magnético creado por una bobina en su eje seguiremos los pasos descritos en la sección 4.2.3 de los apuntes de *Magnetismo*. De los apuntes podemos ver que, si aplicamos el teorema de Ampère sobre el circuito descrito en la Figura 20 de los apuntes de *Magnetismo* (y reproducida a la Figura9), podemos escribir la primera parte del teorema de Ampère como

$$\int \vec{B}\, d\vec{\ell} = BL\,, \tag{30}$$

tal y como se puede ver a la ecuación (77) de los apuntes. Fijaos que en el caso que estamos tratando hemos cogido la longitud del camino como la longitud total de la bobina. Para aplicar el teorema de Ampère ahora tendremos que encontrar la intensidad de corriente que atraviesa el camino descrito en la Figura 20 de los apuntes (reproducida en la Figura 9). Sabemos que por el hilo enrollado circula una corriente de intensidad I y tenemos $N = 500$ vueltas, por lo tanto la intensidad total que atraviesa la línea de Ampère será $I = NI$. Ahora ya estamos en disposición de aplicar el teorema de Ampère y podremos escribir el campo magnético como:

$$B = \mu_0 \frac{NI}{L} = 0{,}031\,\mathrm{T} = 31\,\mathrm{mT}\,. \tag{31}$$

Esta solución es compatible con la ecuación (79) de los apuntes dónde $n = N/L$.

(b) La energía almacenada dentro de la bobina vendrá dada por la ecuación (112) de los apuntes

$$U_m = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \vec{B}^2\, dV = \frac{1}{2\mu_0}\int_V \left(\mu_0 \frac{NI}{L}\right)^2 dV = \frac{1}{2\mu_0}\left(\mu_0 \frac{NI}{L}\right)^2 \pi r^2 L = \frac{\mu_0 \pi I^2 N^2 r^2}{2L}\,, \tag{32}$$

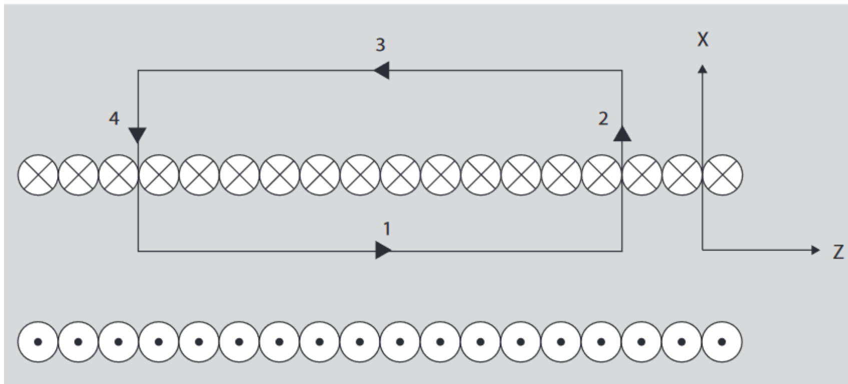

Figura 9: Reproducción de la Figura 20 de los apuntes de *Magnetismo* donde se representa un corte transversal de una bobina lineal infinita y la línea de Ampère utilizada para calcular el campo al eje de la bobina (considerada infinita). Las flechas indican la dirección en que recorremos la línea. Cada círculo representa una sección del cable que está enrollado. La intensidad que pasa por el cable entra hacia el papel en las secciones superiores y sale del papel en las secciones inferiores. El eje y, que por simplicidad no aparece dibujado, estaría saliendo del papel, en la dirección positiva.

que es la ecuación (174) de los apuntes de *Magnetismo*. Ahora, podemos sustituir los valores que nos da el enunciado para encontrar esta energía almacenada y obtendremos $U_m = 5 \times 10^{-4}$ J.

(c) Si ahora cortamos la bobina por la mitad $N' = N/2$ y $L' = L/2$, obtenemos

$$\frac{N'^2}{L'} = \frac{1}{2}\frac{N^2}{L}\,, \tag{33}$$

y por lo tanto la energía será la mitad de la que teníamos con la bobina completa, $U'_m = U_m/2 = 2{,}5 \times 10^{-4}$ J.

Cuestión 6

Explicad con vuestras palabras

(a) La relación entre el campo magnético y la imantación de los materiales magnéticos homogéneos, isótropos y lineales.

(b) La clasificación de los materiales en función del valor de $\mathcal{X}_m$.

(c) La alineación de la imantación para cada tipo de material descrito al apartado anterior.

Solución:

(a) En el apartado 7.4.1 del módulo de *Magnetismo* se define la susceptibilidad de un material $\mathcal{X}_m$ como la constante de proporcionalidad entre la imantación M y el campo magnético H por materiales lineales, homogéneos e isótropos,

$$\vec{M} = \mathcal{X}_m \vec{H} \,. \tag{34}$$

(b) Los materiales magnéticos se pueden clasificar dependiente del signo de $\mathcal{X}_m$ como (i) *materiales paramagnéticos* si $\mathcal{X}_m > 0$ o (ii) como *materiales diamagnéticos* si $\mathcal{X}_m < 0$.

Los materiales *paramagnéticos* son materiales que tienen una susceptibilidad positiva $\mathcal{X}_m > 0$. Esto quiere decir que, en el interior del material, la imantación es más grande que el campo $\vec{H}$ en el interior del material. Decimos que el campo $\vec{H}$ está reforzado por la presencia del material. Si $\mathcal{X}_m = +0{,}25$ nos indicaría que la imantación ha aumentado un 50 % el campo magnético en el interior de un material.

Por el contrario, los materiales *diamagnéticos* tienen una susceptibilidad negativa $\mathcal{X}_m < 0$. En estos materiales, el campo $\vec{H}$ está debilitado por la presencia del material magnético. Una $\mathcal{X}_m = -1$ querrá decir que la imantación ha conseguido apantallar completamente el campo magnético en el interior de un material.

El origen microscópico del diamagnetismo lo tenemos que buscar en la reacción de las corrientes magnéticas microscópicas a la aplicación de un campo magnético. Bajo la influencia de un campo de inducción magnética, las corrientes electrónicas microscópicas en cada átomo se modifican de forma que tienden a debilitar el efecto de este campo. De hecho, la reacción diamagnética de los materiales es una consecuencia de la ley de Faraday a escala microscópica. Como las corrientes inducidas tienden a oponerse a la causa que los ha producido, la susceptibilidad en los materiales diamagnéticos es negativa (ver sección 7.4.1 de los apuntes).

(c) En los materiales *paramagnéticos* la imantación se alinea con el campo magnético externo y el campo de inducción magnética se beneficia, mientras que en los *diamagnéticos* pasa lo opuesto: la naturaleza de los materiales diamagnéticos hace que se opongan al campo magnético y el campo magnético inducido se debilita en el interior del material.

Un caso especial es el de los materiales *superconductores* donde el valor de la susceptibilidad decae abruptamente hasta -1 por debajo de una temperatura. Desde este punto de vista los superconductores son materiales perfectamente diamagnéticos $\vec{M} = -\vec{H}$. Esto quiere decir que el campo de inducción magnético es cero a su interior: $B = 0$ (según la ecuación (119) de los apuntes de *Magnetismo*).

Problema

Considerad un cable conductor cilíndrico de radio a colocado coaxialmente dentro de una cavidad conductora cilíndrica de radios interno y externo b y c respectivamente. La Figura 10 muestra un corte transversal del cable coaxial. Por el conductor central viaja una corriente eléctrica uniforme I, mientras que por la cavidad exterior viaja una corriente idéntica pero de sentido opuesto.

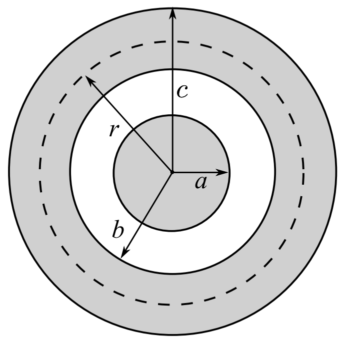

Figura 10: Sección transversal del sistema estudiado en el Problema.

(a) ¿Cuál es el campo de inducción magnética en la región $r < a$?

(b) ¿Cuál es el campo de inducción magnética en la región $a < r < b$?

(c) ¿Cuál es el campo de inducción magnética en la región $b < r < c$?

(d) ¿Cuál es el campo de inducción magnética en la región $c < r$?

(e) Haced un gráfico esquemático de cómo se comportará el campo de inducción magnética B en función de r sí $\mu_0 I = 2\pi$, $a = 1$ m, $b = 3$ m y $c = 5$ m.

Nota: Recordad que la sección de un cilindro de radio R es πR^2.

Solución:

(a) Para encontrar el campo de inducción magnética en las diferentes regiones usaremos el teorema de Ampère enunciado a la ecuación (67) de los apuntes de *Magnetismo*.

Antes de nada tenemos que ver las simetrías del problema. Tal como se explica a la sección 4.2.1, si la intensidad se homogénea en una dirección, el campo de inducción magnética dará vueltas alrededor de la intensidad de la corriente (como en el caso del hilo infinito), el campo tiene dirección angular. Por lo tanto, si por ejemplo usamos el recorrido marcado con línea discontinúa a la Figura10, la integral $\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell}$ será

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B\, 2\pi r\,. \tag{35}$$

Aplicando el teorema de Ampère obtenemos

$$B\, 2\pi r = \mu_0 I_{tr}\,, \tag{36}$$

dónde I_{tr} es la intensidad que circula dentro de la sección descrita por el camino que hemos escogido. En el caso del primer apartado

$$I_{tr} = \frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 = I\frac{r^2}{a^2}\,, \tag{37}$$

dónde πr^2 es la sección del cable comprendida dentro del camino definido al teorema de Ampère y $I/\pi a^2$ es la corriente por unidad de superficie en el hilo de corriente interior. Por lo tanto, haciendo uso del teorema de Ampère

$$B\, 2\pi r = \mu_0 I_{tr} = \mu_0 I\frac{r^2}{a^2}\,, \tag{38}$$

encontramos el campo magnético en la región central:

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{a^2}. \tag{39}$$

(b) Para encontrar el campo de inducción magnética en la región $a < r < b$ volvemos a usar el teorema de Ampère. Ahora $I_{tr} = I$ y obtenemos

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \tag{40}$$

Por lo tanto el campo de inducción magnética entre el cilindro central y la corteza se comporta como el campo inducido por un hilo de corriente (ecuación (71) de los apuntes).

(c) En la región $b < r < c$ tendremos que tener en cuenta que la I_{tr} será la intensidad del hilo conductor central I más la intensidad correspondiente a la parte del caparazón externo dentro de la sección descrita por el camino de la circulación que usaremos al teorema de Ampère, $S_{ext}(r) = \pi(r^2 - b^2)$. Del mismo modo que antes, tendremos que encontrar cuánto vale la intensidad de corriente por unidad de superficie en la corteza externa, que en este caso será $\frac{-I}{\pi(c^2-b^2)}$. De este modo, podremos escribir el teorema de Ampère como

$$B\,2\pi r = \mu_0 I_{tr} = \mu_0 \left(I + \frac{-I}{\pi(c^2-b^2)}\pi(r^2-b^2) \right) = \mu_0 I \left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \right), \tag{41}$$

obteniendo el siguiente resultado para el campo de inducción magnética

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left(\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2} \right). \tag{42}$$

(d) Finalmente el campo de inducción magnética en la región $r > c$ se puede encontrar fácilmente si nos damos cuenta que la suma de las intensidades de corriente del hilo y la corteza cilíndrica se cancelan y por tanto $I_{tr} = 0$. De este modo, utilizando el teorema de Ampère encontramos

$$B\,2\pi r = \mu_0 I_{tr} = 0\,, \tag{43}$$

y por lo tanto el campo de inducción magnética fuera del coaxial es nulo $B(r) = 0$ por $r > c$.

(e) La representación del campo magnético inducido en función de r tiene la forma siguiente

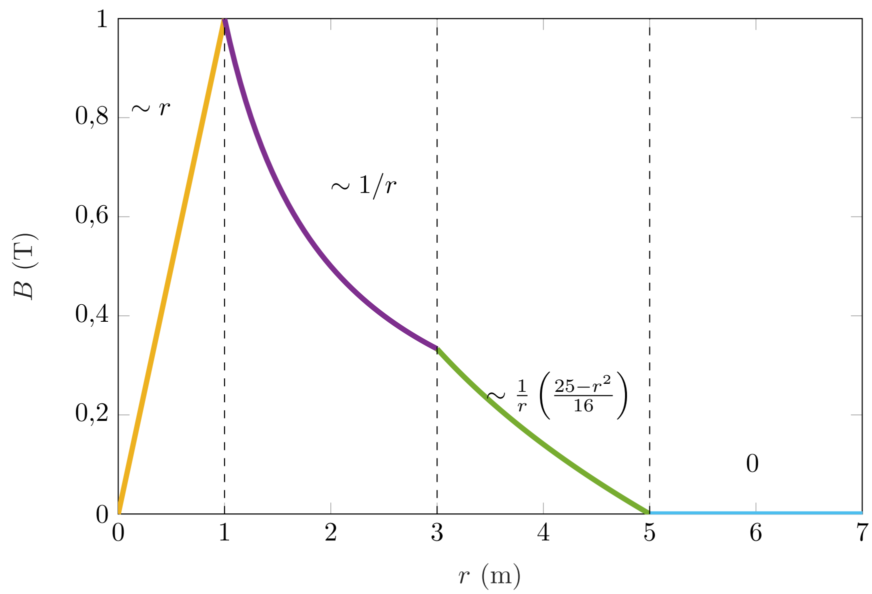

Figura 11: Gráfico del comportamiento de la magnitud del campo magnético B en función de r