Presentación

Esta PEC es una introducción a la teoría de grafos que cubre los contenidos estudiados en los 3 primeros módulos de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre funciones y algoritmos, los fundamentos de la teoría de grafos y los problemas de recorridos y conectividades sobre grafos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer los principales conceptos de combinatoria.
- Conocer el concepto de complejidad temporal y espacial de un algoritmo.
- Conocer el concepto de grafo y los diferentes tipos de grafos (grafos orientados, grafos ponderados, pseudografos, multigrafos, ...).
- Conococer las principales propiedades de los grafos y saber analizarlas.
- Conocer los problemas de conectividad más usuales sobre grafos, los algoritmos que los resuelven y saber aplicarlos en un grafo concreto.
- Ser capaz de representar y analizar un problema en términos de la teoría de grafos.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 15 % = 3 %+(3 %+3 %)+3 %+3 %

   Responde, justificando la respuesta, a las siguientes cuestiones:

   a) ¿Cuáles de las siguientes relaciones son funciones del conjunto $X = \{1, 2, 3\}$ en sí mismo (es decir, funciones de la forma $f_i : X \to X$)?

   1) $f_1 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 3)\}$.
   2) $f_2 = \{(1, 2)\}$.

   b) Razona si las siguientes funciones son:

   - inyectivas
   - exhaustivas
   - biyectivas

   1) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como $f_1(n) = n^2 + 2$.
   2) $f_2 : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ definida como $f_2(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ es impar;} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$

   (El símbolo $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales.)

   c) ¿Cuántas funciones f hay del conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ en el conjunto $Y = \{a, b, c\}$ tales que $f(1) = f(2)$?

   d) Hay que colocar a cinco hombres y cuatro mujeres en una fila de manera que las mujeres ocupen los lugares pares. ¿De cuántas maneras distintas puede hacerse?

Solución:

a) 1) f_1 no, ya que el 1 tiene dos imágenes. Otra manera de justificarlo, es porque $4 \notin X$.
   2) f_2 no, ya que el 2 (o bien el 3) no tiene imagen.

b) Las respuestas son las siguientes:

   1) Sí es inyectiva ya que para todo $n_1 \neq n_2$, siendo $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, se da $f_1(n_1) \neq f_1(n_2)$. No es exhaustiva ya que por ejemplo el 1 no tiene ninguna antiimagen. No es biyectiva.
   2) No es inyectiva ya que, por ejemplo, $f_2(1) = f_2(3)$. Sí es exhaustiva ya que el tanto el 0 como 1 tienen antiimagen. No es biyectiva.

c) Hay tres posibles casos: $f(1) = f(2) = a$, $f(1) = f(2) = b$ y $f(1) = f(2) = c$. En el primer caso hay que contar cuántas funciones hay del conjunto $\{3, 4, 5, 6\}$ en el conjunto $\{a, b, c\}$, que son $VR(3, 4) = 3^4$. Los otros dos casos son análogos, de donde la solución es $3 \cdot 3^4 = 243$.

d) Como la fila es de nueve individuos, hay cuatro posiciones pares y cinco impares. Las cuatro pares deben de repartirse entre las cuatro mujeres, de donde tenemos 4! maneras distintas de hacerlo. Con los hombres tenemos 5! maneras, luego el total es el producto de ambas cantidades, que queda $4! \cdot 5! = 2880$.

---

2. (Valoración de un 15 % = 5 %+5 %+5 %)
Sea $G = K_m \cup K_n \cup K_r$.
   a) ¿Cuál es el nombre del grafo G^C? Justifica tu respuesta.
   b) Calcula el número de vértices y aristas del grafo C^G.
   c) Comprueba si G^C cumple la fórmula de los grados.

Solución:

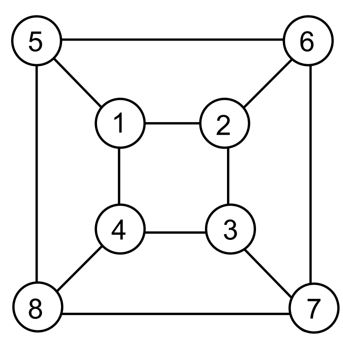
a) El complementario G^C tendrá todas las aristas que unen todos los vértices de K_m con todos los vértices de K_n, todas las que unen los vértices de K_m con todos los vértices de K_r y todas las que unen los vértices de K_n con todos los vértices de K_r. Las aristas de K_m, K_n, K_r no estarán presentes en G^C. Por lo tanto G^C es el grafo tripartito completo $K_{m,n,r}$.

b) El grafo $G^C = K_{m,n,r}$ tiene $m + n + r$ vértices y $mn + mr + nr$ aristas.

c) Los grados de G^C suman $m(n + r) + n(m + r) + r(m + n) = 2mn + 2mr + 2nr$, que es el doble que el número de aristas, por lo tanto, como en todos los grafos, se cumple la fórmula de los grados.

---

3. (Valoración de un 15 % = 5 %+5 %+5 %)
Dado el grafo de la figura siguiente:



a) ¿Cuál es el nombre del subgrafo inducido por los vértices $\{1, 2, 3, 4\}$? ¿Y el del subgrafo inducido por los vértices $\{1, 3, 6, 8\}$?

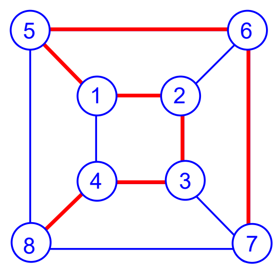
b) Dibuja un ejemplo de subgrafo generador acíclico con el máximo número de aristas posible. Justifica la respuesta.

c) ¿Qué aristas se tienen que añadir en el grafo original de la figura, para obtener el grafo $K_{4,4}$?

Solución:

a) Los subgrafos inducidos son C_4 y N_4, respectivamente.

b) Un subgrafo generador tiene los mismos 8 vértices del grafo original. Un subgrafo generador acíclico con el máximo número de aristas posible sería por ejemplo el que obtenemos con las aristas $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 8\}, \{1, 5\}, \{5, 6\}$ y $\{6, 7\}$:



c) Añadiendo las aristas $\{2, 8\}$, $\{4, 6\}$, $\{1, 7\}$ y $\{3, 5\}$ se obtiene el grafo bipartito completo $K_{4,4}$. La solución es única ya que el grafo de la figura (que por cierto es el grafo del cubo) es 3-regular.

---

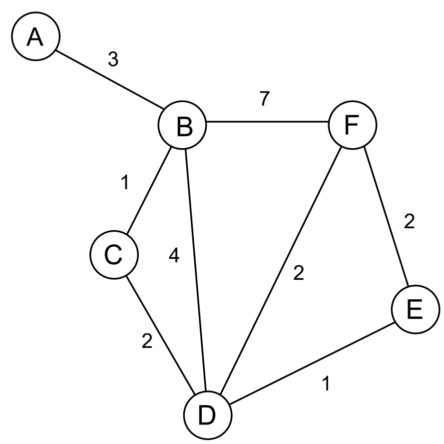
4. (Valoración de un 25 % = (10 %+5 %)+10 %)

a) Sea G el grafo definido por la siguiente lista de adyacencias:

a: b,d,e
b: a,d
c: g
d: a,b,f
e: a
f: d
g: c

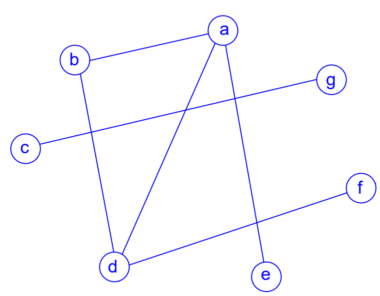
1) Usa el DFS para determinar si G es conexo mediante el test de conexión (mostrando los pasos en una tabla, empezando por el vértice a y siempre explorando los vértices en orden alfabético). ¿Cuántas componentes conexas hay y cuáles son?
2) Si consideramos la secuencia de grados de G, sabemos que por construcción es gráfica, ya que el grafo G está correctamente definido. Comprueba algorítmicamente si podemos o no construir un grafo donde a y d sean los dos de grado 5 en vez de grado 3, y con los mismos grados que en G para el resto de vértices b, c, e, f, g.

b) Calcula mediante el algoritmo más adecuado y mostrando todos los pasos, la distancia entre cada par de vértices del grafo de la siguiente figura. Calcula también su diámetro.



Solución:

a) 1) El grafo determinado por la lista de adyacencias es:



P	Vértice añadido	Vértice eliminado	R
a	a	$-$	$[a]$
ab	b	$-$	$[a,b]$
abd	d	$-$	$[a,b,d]$
$abdf$	f	$-$	$[a,b,d,f]$
abd	$-$	f	$[a,b,d,f]$
ab	$-$	d	$[a,b,d,f]$
a	$-$	b	$[a,b,d,f]$
ae	e	$-$	$[a,b,d,f,e]$
a	$-$	e	$[a,b,d,f,e]$
$\emptyset$	$-$	a	$[a,b,d,f,e]$

Del test se deduce que la componente conexa de a está formada por 5 de los 7 vértices del grafo: $\{a,b,d,f,e\}$, por lo tanto el grafo no es conexo. Los dos vértices resultantes c y g, están unidos por una arista, por lo tanto forman otra componente conexa. En total el grafo tiene dos componentes conexas.

2) No se puede construir: la secuencia de grados sería 5,5,2,1,1,1,1, y esta secuencia no es gráfica. Lo podemos demostrar usando el algoritmo de Havel-Hakimi:

5,5,2,1,1,1,1
4,1,0,0,0,1
4,1,1,0,0,0
0,0,-1,-1,0
no es gráfica.

(*Intuitivamente, los grados quedarían muy descompensados ya que habría demasiados vértices de grado 1 para dos vértices de grado 5, por este motivo tal grafo no es construible*).

b) Aplicando el algoritmo de Floyd tenemos

$$d^0 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 1 & 4 & \infty & 7 \\ \infty & 1 & 0 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 2 \\ \infty & 7 & \infty & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad d^1 = d^0, \quad d^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{7} & \infty & \mathbf{10} \\ 3 & 0 & 1 & 4 & \infty & 7 \\ \mathbf{4} & 1 & 0 & 2 & \infty & \mathbf{8} \\ \mathbf{7} & 4 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 2 \\ \mathbf{10} & 7 & \mathbf{8} & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d^3 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & \mathbf{6} & \infty & 10 \\ 3 & 0 & 1 & \mathbf{3} & \infty & 7 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & \infty & 8 \\ \mathbf{6} & \mathbf{3} & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 1 & 0 & 2 \\ 10 & 7 & 8 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad d^4 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 & 6 & \mathbf{7} & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 & \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ 4 & 1 & 0 & 2 & \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ 6 & 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ \mathbf{7} & \mathbf{4} & \mathbf{3} & 1 & 0 & 2 \\ 8 & \mathbf{5} & \mathbf{4} & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$d^5 = d^4, \qquad d^6 = d^5.$$

El diámetro es el máximo valor de la matriz, o sea 8, y corresponde a la distancia entre los vértices A y F.

---

5. (Valoración de un 30 %) Cuestionario de evaluación Moodle

Dentro del aula de la asignatura, en el Campus Virtual, encontraréis una nueva herramienta (Moodle) en la parte derecha. En este Moodle hay un cuestionario con diversas preguntas que debéis resolver como último ejercicio de esta PEC.

Leed atentamente las siguientes instrucciones **antes de abrir el cuestionario**:

- Los contenidos que se evalúan en este cuestionario corresponden al módulo "Fundamentos de grafos" y "Recorridos y conectividad". Es importante que hayáis asimilado estos conocimientos **antes de abrir el cuestionario**.
- El cuestionario estará abierto durante el plazo de la PEC y lo podéis resolver cuando queráis. De todas formas, una vez lo abráis tendréis un **tiempo limitado** para resolverlo (1 hora).

  Importante: El cuestionario quedará cerrado a las 23:59 de la fecha límite de entrega. Si empezáis a hacerlo después de las 22:59 del último día, ¡tendréis menos de una hora para hacerlo!
- Las respuestas a las preguntas se tienen que introducir directamente en el cuestionario Moodle. No es necesario que las entreguéis junto con el resto de respuestas de la PEC.
- Las preguntas del cuestionario son aleatorias: cada estudiante recibirá un enunciado diferente.
- En algunas preguntas tendréis que introducir la respuesta en un formato específico (p. ej. con los valores ordenados de una determinada forma y sin espacios). Es muy importante **seguir fielmente el formato indicado** a la hora de introducir vuestra respuesta.
- Disponéis de **2 intentos** para resolver el cuestionario. El objetivo de tener dos intentos es poder solventar posibles problemas que hayáis tenido en la realización del cuestionario, ya sean problemas técnicos o bien que hayáis abierto el cuestionario por error. Por tanto, debéis tener en cuenta que:
  - La nota que obtendréis en el cuestionario será la de vuestro último intento.
  - Después del 1r intento, no recibiréis la calificación obtenida ni recibiréis feedback sobre vuestra propuesta de solución. Por lo tanto, no recomendamos usar el 2o intento para intentar mejorar nota, ya que puede ser que obtengáis una nota inferior.
  - Si usáis el 2o intento, el enunciado que encontraréis será diferente del del 1r intento.
  - Podéis realizar los dos intentos en días diferentes, siempre que sea dentro del plazo de la PEC. Dispondréis de 1 hora para cada intento.

- Cada vez que iniciéis el cuestionario contará como un intento, aunque no enviéis la respuesta. Por ejemplo, **si habéis hecho el 1r intento y volvéis a abrir el cuestionario, invalidaréis vuestro 1r intento y os quedaréis con la nota del 2o**.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 1. Conceptos previos: funciones y algoritmos.
- Módulo didáctico 2. Fundamentos de grafos.
- Módulo didáctico 3. Recorridos y conectividad.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**. En caso que hayáis consultado recursos externos, es necesario referenciarlos.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 21/10/2021**. **No se aceptarán entregas fuera de plazo.**