Presentación

Esta PEC profundiza en los conceptos básicos de la teoría de grafos que cubren los contenidos estudiados en los módulos 4 y 5 de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre grafos, como una de las clases más importantes de grafos, los árboles, así como dos de los problemas más notables de recorridos de grafos, los grafos eulerianos y los grafos hamiltonianos.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuado en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlo.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Saber caracterizar los árboles y, específicamente, los árboles con raíz.
- Saber aplicar los algoritmos de determinación de un ábol generador minimal.
- Identificar los grafos eulerianos y hamiltonianos y caracterizarlos.
- Entender el problema del viajante de comercio (TSP). Conocer y saber aplicar el algoritmo de resolución aproximada de este problema.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 15 % = 5 %+5 %+5 %)

   a) Considerad la expresión aritmética siguiente y dibujad el árbol correspondiente, teniendo en cuenta la prioridad habitual de los operadores:

   $$5(a-b)^3 + \frac{7a}{a+b^2}.$$

   b) Determinad los recorridos en inorden y postorden del árbol del apartado a).

   c) Determinad el número de hojas, vértices internos y altura del árbol del apartado a). ¿Es un árbol equilibrado? Justificad la respuesta.

Solución:

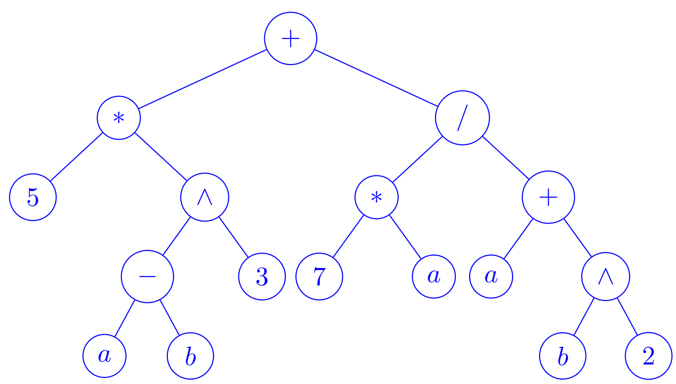


Figura 1: Árbol de la expresión aritmética del ejercicio 1a).

a) El árbol es el dado en la Figura 1.

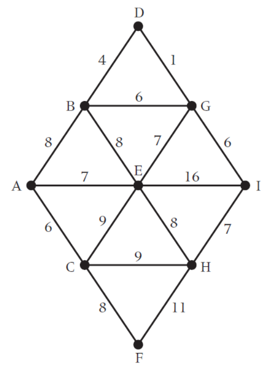
b) El recorrido en inorden es $5 * a - b \wedge 3 + 7 * a/a + b \wedge 2$; y el recorrido en postorden es $5\ a\ b - 3 \wedge * \ 7\ a * a\ b\ 2 \wedge + \ / \ +$.

c) El árbol binario tiene 9 hojas, 8 vértices internos y altura 4. El árbol es no equilibrado ya que tiene hojas en el nivel 2, y no únicamente en los niveles 3 y 4.

---

2. (Valoración de un 15 % = 2 %+8 %+5 %)

Sea G el siguiente grafo que representa la red de carreteras de un ayuntamiento, donde el valor de cada arista representa la distancia en kilómetros.



a) ¿Es G un grafo euleriano? Justificad la respuesta.

b) Determinad una ruta que permita revisar el estado de las carreteras sin pasar dos veces por una misma carretera. ¿Cuál es la distancia total recorrida? Indicad todos los pasos y el algoritmo utilizado. No es necesario empezar y acabar en el mismo lugar.

c) Determinad una ruta circular que permita revisar todas las carreteras minimizando la distancia recorrida. ¿Cuál es la distancia total recorrida en este caso? ¿Por que carreteras habría que pasar más de una vez?

Solución:

a) El grafo G tiene dos vértices de grado impar, A y I, de modo que no es euleriano.

b) El grafo G tiene dos vértices de grado impar, A y I. Podemos añadir una arista entre estos dos vértices para convertirlo en un grafo euleriano. A continuación, aplicamos el algoritmo de Hierholzer:

Iteración	v	C'	C
0	A		$\{A\}$
1	A	$\{ABDGBEA\}$	$\{ABDGBEA\}$
2	A	$\{ACEGIA\}$	$\{ACEGIA\ BDGBEA\}$
3	C	$\{CFHC\}$	$\{A\ CFHC\ EGIABDGBEA\}$
4	H	$\{HEIH\}$	$\{ACF\ HEIH\ CEGIABDGBEA\}$

A partir del circuito obtenido, eliminamos la arista añadida (A, I), y obtenemos que la ruta sería la siguiente: $ABDGBEACFHEIHCEGI$, y la distancia total recorrida de 121 km.

c) No es posible obtener una ruta sin repetir ninguna carretera, ya que el grafo G no es euleriano. Como hay dos vértices de grado impar, es suficiente buscar el camino de coste mínimo de A a I. Aplicando el algoritmo de Dijkstra, obtenemos que el camino sería (A, B, D, G, I) que tiene peso $8 + 4 + 1 + 6 = 19$ km. En este caso, la distancia total recorrida sería de $121 + 19 = 140$ km pasando dos veces por las carreteras $(A, B), (B, D), (D, G)$ y (G, I).

---

3. (Valoración de un 20 % = 5 %+5 %+5 %+5 %)

Considerad el grafo G con vértices $\{A, B, C, D, E, F\}$ y con pesos asignados a las aristas dados por la tabla siguiente:

	B	C	D	E	F
A	33	40	36	45	46
B		20	30	25	35
C			50	5	34
D				55	65
E					29

a) Sabiendo que G verifica la desigualdad triangular, encontrad un ciclo H que pase por todos los vértices una sola vez aplicando el algoritmo TSP-aproximado. Utilizad el vértice C como raíz. Dad también el peso del ciclo. (Indicad todos los pasos realizados hasta obtener la solución).

b) A partir del resultado final del apartado anterior, indicad entre qué valores podemos asegurar que estará el peso del ciclo hamiltoniano óptimo de G. ¿Existe alguna otra cota inferior que permita reducir este intervalo? Justificad las respuestas.

c) Considerando otros vértices como raíz, determinad si es posible obtener otro ciclo hamiltoniano con un peso diferente al obtenido en el apartado *a*), y en este caso, indicad si éste mejora la cota superior.

d) Si eliminamos las aristas (A, B) y (C, D) de G ¿el nuevo grafo G' verificaría la desigualdad triangular? ¿Es posible encontrar un circuito cerrado que pase por todas las aristas del grafo G'? ¿Y si el circuito puede ser abierto? Justificad las respuestas.

Solución:

a) Aplicando el algoritmo de Kruskal obtenemos un árbol con las aristas siguientes: $\{C, E\}$, $\{B, C\}$, $\{E, F\}$, $\{B, D\}$, $\{A, B\}$. Un recorrido del árbol en preorden tomando C como raíz sería $\{C, B, A, D, E, F\}$ y el ciclo sería (C, B, A, D, E, F, C) con peso $20 + 33 + 36 + 55 + 29 + 34 = 207$.

b) Del algoritmo TSP-aproximado obtenemos una cota inferior que es $\lceil \frac{207}{2} \rceil = 104$ y la cota superior 207. Por lo tanto, el ciclo hamiltoniano óptimo tiene peso entre 104 y 207.

Como el árbol generador tiene peso $5 + 20 + 29 + 30 + 33 = 117$, otra cota inferior seria 117 que es mejor que la anterior. Así, podemos decir que el ciclo hamiltoniano óptimo tiene peso entre 117 y 207.

c) No es único, por ejemplo, otro recorrido del árbol en preorden tomando D como raíz sería $\{D, B, A, C, E, F\}$. En este caso el ciclo sería (D, B, A, C, E, F, D) con peso $30 + 33 + 40 + 5 + 29 + 65 = 202$. Tomando la raíz A, el ciclo seria (A, B, C, E, F, D, A) con peso 188. Considerando la raíz E o F se obtiene el mismo ciclo de peso 188. En cualquier caso, sería mejor que el obtenido en el apartado *a*).

d) Si eliminamos aristas, el grafo deja de ser completo y, por lo tanto, no verificaría la desigualdad triangular.

En el grafo K_6 inicial, todos los vértices tienen grado 5. Si eliminamos las aristas (A, B) y (C, D), los vértices A, B, C, D tienen grado par, y únicamente los vértices E y F tienen grado impar. Por lo tanto, no es posible obtener un ciclo cerrado, pero sí un ciclo abierto empezando y acabando en los vértices E y F.

---

4. (Valoración de un 20 %= 10 %+5 %+5 %)

Explicad de forma justificada qué grafo consideraríais (indicad que representarían los vértices, las aristas y los pesos) y qué algoritmo o resultado de los vistos en los módulos M3, M4 y M5 usaríais para resolver cada uno de los siguientes problemas:

a) Se están produciendo una serie de disturbios en un distrito de una ciudad. Con el fin de realizar una rápida evaluación para decidir cual es la mejor estrategia para evitar mayores daños, se decide hacer una inspección utilizando un dron que debería recorrer todas las calles indicadas y volver a su lugar de origen.

1) ¿Como podemos determinar el tiempo mínimo de autonomía de vuelo del dron, y el recorrido que debería realizar, suponiendo que en cada intersección confluyen un número par de calles?

2) Si suponemos que el distrito se puede representar a través de un grafo completo K_5 y el tiempo que tarda el dron en recorrer cada calle es de 3 minutos, ¿cuál seria el tiempo mínimo de autonomía requerido para el dron?

3) Si suponemos que el distrito se puede representar a través de un grafo completo K_4 y el tiempo que tarda el dron en recorrer cada calle es de 3 minutos, ¿cuál seria el tiempo mínimo de autonomía requerido para el dron?

b) En un edificio se instala un robot de servicio para proporcionar ayuda en diferentes tareas localizadas en lugares concretos de dentro del edificio. ¿Que trayectoria debería seguir el robot, para llegar lo más rápido posible a cada lugar? Para el funcionamiento óptimo del robot, hay que instalar unas cintas en el suelo. Si se pretende minimizar el coste total de instalación de dicha cinta, ¿entre que lugares deberíamos instalar la cinta para que el robot pudiera realizar todas las tareas?

c) En un campeonato de bádminton con n participantes, la organización quiere saber el mínimo número de rondas necesarias para conocer al campeón, para cada una de las siguientes situaciones: 1) utilizando un sistema de todos contra todos, o sea cada participante juega contra todos los otros participantes; 2) utilizando un sistema de eliminación simple, o sea si un participante pierde, queda eliminado de la competición.

Solución:

a) 1) El distrito se representa mediante un grafo, donde los vértices son las intersecciones, las aristas las calles, y los pesos de las aristas el tiempo en recorrer la calle con el dron. Para averiguar el tiempo mínimo debemos determinar el tiempo necesario en recorrer todas las calles de cada distrito como mínimo una vez, saliendo y volviendo al mismo punto. Como todos los vértices tienen grado par, el grafo es euleriano. Aplicando el algoritmo de Hierholzer directamente se obtiene el recorrido que realizaría el dron, y sumando el peso de todas las aristas del recorrido, el tiempo mínimo de autonomía.

2) En un K_5 todos los vértices tienen grado par, por lo que es un grafo euleriano y el tiempo necesario para el dron en recorrer todas las aristas sería de $|A_{K_5}| \cdot 3$ minutos, donde $|A_{K_5}|$ es el número de aristas del grafo K_5. Por lo tanto, el tiempo es $(5 \cdot 4)/2 \cdot 3 = 30$ minutos.

3) En un K_4 todos los vértices tienen grado impar. Para obtener un grafo euleriano con el mínimo peso total, podemos duplicar dos aristas cualesquiera de forma que todos los vértices del nuevo grafo tengan grado par. Así, podremos determinar un circuito que pase por todas las calles y que vuelva al origen. El tiempo necesario para el dron en recorrer todas las aristas sería de $(|A_{K_4}| + 2) \cdot 3$, donde $|A_{K_4}|$ es el número de aristas del grafo K_4, y el 2 hace referencia a las dos aristas añadidas de forma artificial. Por lo tanto, el tiempo es $((4 \cdot 3)/2 + 2) \cdot 3 = 24$ minutos.

b) Los vértices del grafo a considerar serían los diferentes lugares del edificio donde el robot debe dar cobertura, junto con un vértice A que representaría la situación inicial del robot. Habría una arista entre dos vértices si se puede ir de un lugar a otro directamente. El peso sería el tiempo que tardaría el robot en realizar el trayecto. Para obtener la trayectoria que le permitiría llegar lo más rápido posible a cada lugar habría que utilizar el algoritmo de Dijkstra a partir de A. En cambio, para obtener el coste total de la instalación habría que aplicar el algoritmo de Kruskal o Prim, pero considerando como peso el coste de instalación de la cinta.

c) En el primer caso, el grafo seria K_n sin asignar ningún peso a las aristas, y el mínimo número de rondas necesarias sería $n-1$. Hay que tener en cuenta que si el número de participantes es impar, se puede añadir un participante "fantasma" y a quien le toque jugar con él, libra el turno. En el segundo caso, el grafo seria un árbol binario completo con raíz, donde cada hoja representa un jugador y cada nodo interno una partida. El mínimo número de rondas vendría dado por la altura del árbol, o sea $\lceil \log_2(n) \rceil$.

---

5. (Valoración de un 30 %) Cuestionario de evaluación Moodle

Dentro del aula de la asignatura, en el Campus Virtual, encontraréis una nueva herramienta (Moodle) en la parte derecha. En este Moodle hay un cuestionario con diversas preguntas que debéis resolver como último ejercicio de esta PEC.

Leed atentamente las siguientes instrucciones **antes de abrir el cuestionario**:

- Los contenidos que se evalúan en este cuestionario corresponden a los módulos 4 (*Árboles*) y 5 (*Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos*). Es importante que hayáis asimilado estos conocimientos **antes de abrir el cuestionario**.
- Para visualizar correctamente el cuestionario utilizad el Chrome o el Firefox.
- El cuestionario estará abierto durante el plazo de la PEC y lo podéis resolver cuando queráis. De todas formas, una vez lo abráis tendréis un **tiempo limitado** para resolverlo (1 hora y 15 minutos).

  Importante: El cuestionario quedará cerrado a las 23:59 de la fecha límite de entrega. Si empezáis a hacerlo después de las 22:59 del último día, ¡tendréis menos de una hora y cuarto para hacerlo!
- Las respuestas a las preguntas se tienen que introducir directamente en el cuestionario Moodle. No es necesario que las entreguéis junto con el resto de respuestas de la PEC.
- Las preguntas del cuestionario son aleatorias: cada estudiante recibirá un enunciado diferente.
- Disponéis de **2 intentos** para resolver el cuestionario. El objetivo de tener dos intentos es poder solventar posibles problemas que hayáis tenido en la realización del cuestionario, ya sean problemas técnicos o bien que hayáis abierto el cuestionario por error. Por tanto, debéis tener en cuenta que:

- La nota que obtendréis en el cuestionario será la de vuestro último intento.
- Después del 1r intento, no recibiréis la calificación obtenida ni recibiréis feedback sobre vuestra propuesta de solución. Por lo tanto, no recomendamos usar el 2o intento para intentar mejorar nota, ya que puede ser que obtengáis una nota inferior.
- Si usáis el 2o intento, el enunciado que encontraréis será diferente del del 1r intento.
- Podéis realizar los dos intentos en días diferentes, siempre que sea dentro del plazo de la PEC. Dispondréis de 1 hora y 15 minutos para cada intento.
- Cada vez que iniciéis el cuestionario contará como un intento, aunque no enviéis la respuesta. Por ejemplo, **si habéis hecho el 1r intento y volvéis a abrir el cuestionario, invalidaréis vuestro 1r intento y os quedaréis con la nota del 2o**.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 4. Árboles.
- Módulo didáctico 5. Grafos eulerianos y grafos hamiltonianos.
- Colección de problemas.

Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**. En caso que hayáis consultado recursos externos, es necesario referenciarlos.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC2_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 18/11/2021**. **No se aceptarán entregas fuera de plazo.**