# Presentación

Esta PEC es una introducción a la teoría de grafos que cubre los contenidos estudiados en los 3 primeros módulos de la asignatura. Los ejercicios trabajan tanto los conceptos previos sobre funciones y algoritmos, los fundamentos de la teoría de grafos y los problemas de recorridos y conectividades sobre grafos.

# Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuada en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlos.

# Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Conocer los principales conceptos de combinatoria.
- Conocer el concepto de complejidad temporal y espacial de un algoritmo.
- Conocer el concepto de grafo y los diferentes tipos de grafos (grafos orientados, grafos ponderados, pseudografos, multigrafos, ...).
- Conococer las principales propiedades de los grafos y saber analizarlas.
- Conocer los problemas de conectividad más usuales sobre grafos, los algoritmos que los resuelven y saber aplicarlos en un grafo concreto.
- Ser capaz de representar y analizar un problema en términos de la teoría de grafos.

# Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 % = 5 %+5 %+5 %+5 %)

   Tenemos un conjunto de 32 equipos de fútbol para disputar una competición con rondas de eliminación. Es decir, en la primera ronda cada equipo se enfrenta a partido único a otro equipo y el ganador se clasifica para la siguiente ronda, mientras el perdedor queda eliminado. De esta forma, se realizan los dieciseisavos de final (16 encuentros) los octavos de final, los cuartos de final, las semifinales y la final. Después de cada fase, se realizan los emparejamientos de forma que el ganador del primer partido juega contra el ganador del segundo, y así sucesivamente.

   *a*) ¿Cuántos partidos se jugarán para conocer al ganador del torneo?

   *b*) ¿Cuántas configuraciones iniciales de encuentros puede haber para los dieciseisavos de final, teniendo en cuenta que todos los partidos se juegan en terreno neutral, y el enfrentamiento de octavos de final se determina según el orden en que se juegan los partidos? Es decir, el ganador del primer partido se enfrentará al del segundo, y así sucesivamente.

   *c*) Se retiran 6 de los equipos antes de la competición, por lo que algunos equipos pasan a ser cabeza de serie (se saltan una fase de la competición y se apuntan en una lista. Se enfrentarían siguiendo el orden de esa lista a los ganadores de los seis primeros enfrentamientos). Si el sorteo de cabezas de serie también es completamente aleatorio, ¿Cuántas configuraciones iniciales hay ahora para los dieciseisavos de final?

   *d*) Ahora, otra vez con 32 equipos, se cambia el sistema de torneo, y se decide que se hará otro sorteo para la segunda fase. Es decir, no importa en qué posición del cuadro de enfrentamientos esté un equipo, si no solamente a quién se enfrenta. De esta forma, ¿cuántas configuraciones iniciales distintas se pueden dar?

---

**Solución:**

*a*) Se jugarán 31 partidos, pues en cada partido se elimina un equipo, y eso significa que si hay un solo ganador, hay que eliminar 31 equipos.

*b*) Al ser el orden de los partidos importante (ya que determinará los enfrentamientos de octavos de final) el problema se puede plantear como sigue: ordenamos los 32 equipos en una lista: Permutaciones(32) = 32!. El primer partido lo jugará la primera pareja de la lista, el segundo la segunda y así sucesivamente. Al ser los partidos en campo neutral, el orden dentro de cada una de las parejas no debe contarse. Para ello dividimos entre $2^{16}$ (hay 16 parejas y dos permutaciones posibles en cada pareja).
En conclusión, existen $\frac{32!}{2^{16}}$ configuraciones iniciales posibles.

c) Al retirarse 6 equipos de la competición nos quedan 26 equipos. De estos 26, elegimos 6 al azar que pasarán directamente a la siguiente fase y con qué orden quedarán para enfrentarse a los ganadores de los primeros 6 partidos. Esto se puede realizar de $V(26,6)$ formas distintas. Para los 10 partidos restantes (20 equipos) hacemos como en el apartado anterior, obteniendo un total de $\frac{20!}{2^{10}}$ configuraciones.

Finalmente, el número total de configuraciones iniciales en este caso es de $V(26,6) \cdot \frac{20!}{2^{10}}$

d) Se puede plantear igual que el segundo apartado. Únicamente se debe tener en cuenta al final que el orden de los partidos no es importante, así pues, hay que dividir la solución de b) por el número posible de ordenaciones de 16 partidos: 16!.

En este caso pues, el número total de posibles configuraciones iniciales es $\frac{32!}{2^{16} \cdot 16!}$.

---

2. (Valoración de un 15 % = 7.5 %+7.5 %) Dados los grafos estrella $E_4$, trayecto $T_2$ y completo $K_3$.

   a) Dibujad los grafos suma que resultan de sumarlos dos a dos (Es decir, $E_4 + T_2$, $E_4 + K_3$, y $K_3 + T_2$). Dad una fórmula para calcular el orden y medida de la suma de dos grafos $G_1 = (V_1, A_1)$, $G_2 = (V_2, A_2)$ en función de los órdenes y medidas de éstos. Comprobad que la fórmula propuesta se cumple para los grafos dibujados.

   b) Dibujad los grafos producto que resultan de hacer el producto de los grafos $E_4, T_4, K_3$, multiplicados dos a dos. Expresad también una fórmula que dé el orden y medida del grafo producto de dos grafos, en función del orden y medida de cada uno de ellos. Comprobad que la fórmula propuesta se cumple para los casos dados.

---

**Solución:**

a) Si nos fijamos bien, dados dos grafos $G_1$ y $G_2$ con órdenes $n_1, n_2$ y medidas $m_1, m_2$ respectivamente. Vemos que el total de vértices de $n_{1+2} = n_1 + n_2$. En lo que refiere a aristas, se mantienen las aristas propias de cada grafo, y de cada vértice del grafo 1, sale una arista hacia cada vértice del grafo 2. Por lo tanto, $m_{1+2} = m_1 + m_2 + n_1 \times n_2$. Los grafos suma son los siguientes:

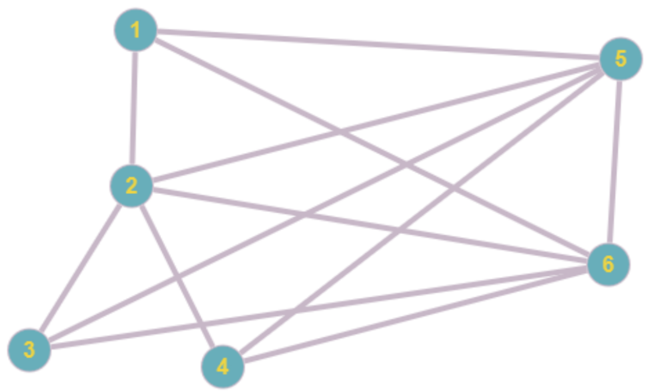



Figura 1: $E_4 + T_2$. Tiene un total de $6 = 4 + 2$ vértices y $12 = 3 + 1 + 4 \times 2$ aristas

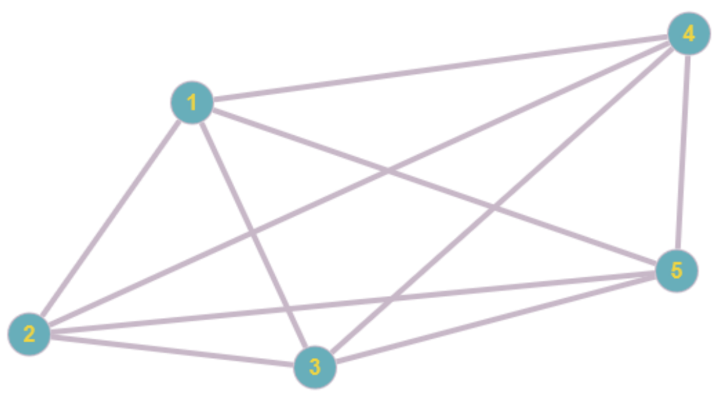



Figura 2: $K_3 + T_2$. Tiene un total de $5 = 3 + 2$ vértices y $10 = 3 + 1 + 3 \times 2$ aristas

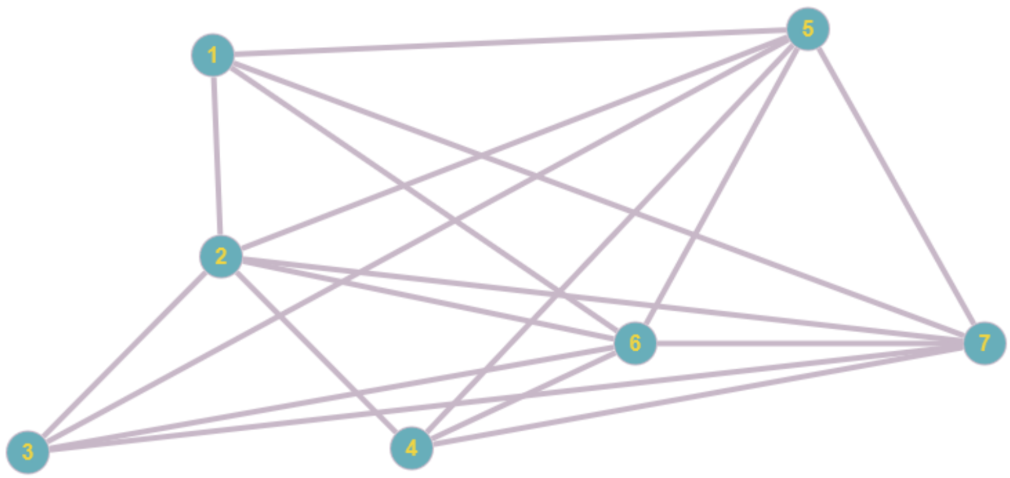



Figura 3: $K_3 + E_4$. Tiene un total de $7 = 4 + 3$ vértices y $18 = 3 + 3 + 3 \times 4$ aristas

*b*) En el caso del producto, dados dos grafos $G_1$ y $G_2$ con órdenes $n_1, n_2$ y medidas $m_1, m_2$ respectivamente. Vemos que el total de vértices es $n_{1+2} = n_1 \times n_2$, al repetirse el segundo grafo para cada vértice del primero. En lo que refiere a aristas, $m_{1+2} = m_1 \times n_2 + n_1 \times m_2$. Los grafos producto son los siguientes:

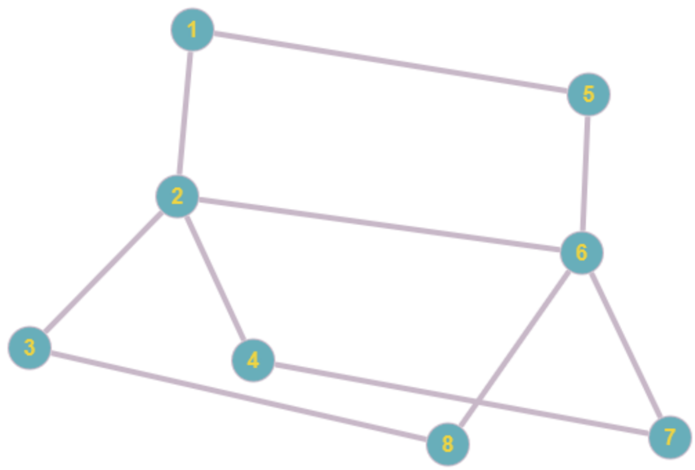



Figura 4: $E_4 \times T_2$. Tiene un total de $8 = 4 \times 2$ vértices y $10 = 3 \times 2 + 4 \times 1$ aristas

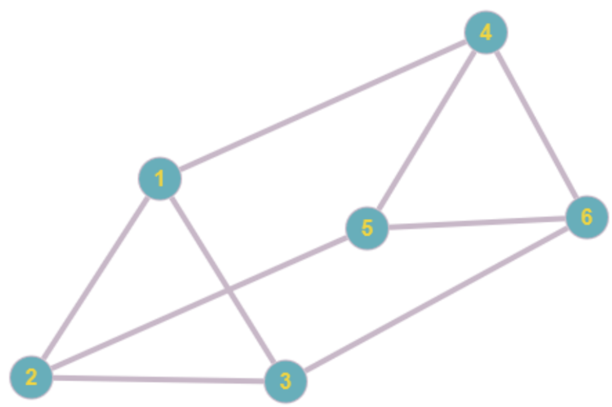



Figura 5: $K_3 \times T_2$. Tiene un total de $6 = 3 \times 2$ vértices y $9 = 3 \times 2 + 3 \times 1$ aristas

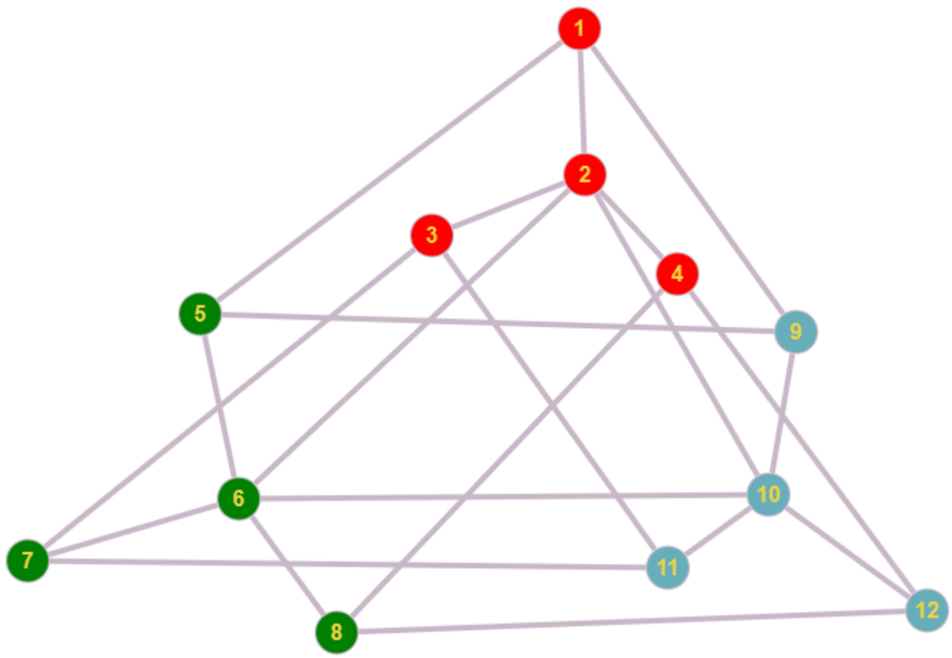



Figura 6: $K_3 \times E_4$. Tiene un total de $12 = 4 \times 3$ vértices y $21 = 3 \times 3 + 4 \times 3$ aristas

---

3. (Valoración de un 15 % = 7.5 %+7.5 %)

   *a*) Sea un grafo simple $G$ de orden 9 y medida 20, Decid para qué valores $x, y$ la siguiente secuencia (no necesariamente ordenada) de grados es una secuencia gráfica **del grafo complementario de** $G$:
   $$y, x, x, 6, 6, 2, 2, 2, 1.$$
   Comprobad, usando el algoritmo que corresponda, que los valores dados para $x$ e $y$ dan lugar, en efecto, a secuencias gráficas.

   *b*) Calcular la complejidad del fragmento de algoritmo siguiente y expresarla en notación $\mathcal{O}$.

   **para** $i \leftarrow 0$ **hasta** $n-2$
       **para** $j \leftarrow 0$ **hasta** $n-i-2$

```
        si v[j] > v[j+1] entonces
            aux ← v[j]
            v[j] ← v[j+1]
            v[j+1] ← aux
        fin si
    finpara
finpara
```

---

**Solución:**

*a*) Como un grafo completo de orden 9 tiene 36 aristas, el grafo complementario a uno de 20 aristas tendrá 16. Por la fórmula de los grados nos sale que $2x + y = 13$. Por otro lado, hay solo un vértice en la lista con grado impar, por lo que $y$ tiene que ser impar, y $x$ puede ser par o impar, pero hay que mantener una cantidad par de vértices de grado impar. Con estas condiciones, nos salen cuatro posibles parejas de valores de $x$ e $y$. Usando el algoritmo de Havel-Hakimi, vemos que las secuencias son gráficas para $y = 7, x = 3$, $y = 5, x = 4$ e $y = 3, x = 7$.

$y = 1, x = 6$

| | Secuencia | Operación |
|---|---|---|
| | 1,6,6,6,6,2,2,2,1 | |
| | 6,6,6,6,2,2,2,1,1 | Clasificación |
| 1 | 5,5,5,1,1,1,1,1 | 1a subsecuencia |
| | 5,5,5,1,1,1,1,1 | Intercalado |
| 2 | 4,4,0,0,0,1,1 | 2a subsecuencia |
| | 4,4,1,1,0,0,0 | Intercalado |
| 3 | 3,0,0,-1,0,0 | 3a subsecuencia |
| Fin | | |

$y = 3, x = 5$

| | Secuencia | Operación |
|---|---|---|
| | 3,5,5,6,6,2,2,2,1 | |
| | 6,6,5,5,3,2,2,2,1 | Clasificación |
| 1 | 5,4,4,2,1,1,2,1 | 1a subsecuencia |
| | 5,4,4,2,2,1,1,1 | Intercalado |
| 2 | 3,3,1,1,0,1,1 | 2a subsecuencia |
| | 3,3,1,1,1,1,0 | Intercalado |
| 3 | 2,0,0,1,1,0 | 3a subsecuencia |
| | 2,1,1,0,0,0 | Intercalado |
| 4 | 0,0,0,0,0 | 4a subsecuencia |
| Fin | | |

$y = 5, x = 4$

| | Secuencia | Operación |
|---|---|---|
| | 5,4,4,6,6,2,2,2,1 | |
| | 6,6,5,4,4,2,2,2,1 | Clasificación |
| 1 | 5,4,3,3,1,1,2,1 | 1a subsecuencia |
| | 5,4,3,3,2,1,1,1 | Intercalado |
| 2 | 3,2,2,1,0,1,1 | 2a subsecuencia |
| | 3,2,2,1,1,1,0 | Intercalado |
| 3 | 1,1,0,1,1,0 | 3a subsecuencia |
| | 1,1,1,1,0,0 | Intercalado |
| 4 | 0,1,1,0,0 | 4a subsecuencia |
| | 1,1,0,0,0 | Intercalado |
| 5 | 0,0,0 | 5a subsecuencia |
| Fin | | |

$y = 7, x = 3$

| | Secuencia | Operación |
|---|---|---|
| | 7,3,3,6,6,2,2,2,1 | |
| | 7,6,6,3,3,2,2,2,1 | Clasificación |
| 1 | 5,5,2,2,1,1,1,1 | 1a subsecuencia |
| | 5,5,2,2,1,1,1,1 | Intercalado |
| 2 | 4,1,1,0,0,1,1 | 2a subsecuencia |
| | 4,1,1,1,1,0,0 | Intercalado |
| 3 | 0,0,0,0,0,0 | 3a subsecuencia |
| Fin | | |

*b*) Debemos contar el número máximo de veces que se ejecutan las líneas 3-7. En el peor de los casos, estas líneas tienen un coste total de 3 asignaciones y 1 comparación (sin contar como operación el acceder a la memoria, aunque considerarlo no modificaría la complejidad final).

Para un valor fijo de $i$, el bucle interno se ejecuta un total de $n-i-1$ veces. De aquí, para $i$ fija el coste máximo es $4(n-i-1)$. Si consideramos ahora el bucle externo, $i$ varía desde 0 hasta $n-2$ de donde el coste final sería la suma

$$\sum_{i=0}^{n-2} 4(n-i-1) = 4\sum_{i=0}^{n-2}(n-i-1) = 4\left((n-1)+(n-2)+\cdots+2+1\right) = 2n(n-1).$$

Por lo tanto, el fragmento de algoritmo tiene una complejidad de $\mathcal{O}(n^2)$

4. (Valoración de un 20 % = 7.5 %+7.5 %+2.5 %+2.5 %) Considera el grafo dirigido $\mathcal{G}$ representado por la matriz de distancias:

| | $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $E$ | $F$ | $G$ | $H$ | $I$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $A$ | 0 | 10 | | 11 | | | | | |
| $B$ | | 0 | | | 2 | | | | |
| $C$ | | 1 | 0 | | | 5 | | | |
| $D$ | | | | 0 | 3 | | 4 | 2 | |
| $E$ | 15 | | 2 | | 0 | | | | 1 |
| $F$ | | | | | 1 | 0 | | | |
| $G$ | | | | | | | 0 | | |
| $H$ | | | | | 3 | | 1 | 0 | |
| $I$ | | | | | | 5 | | 1 | 0 |

*a*) Utiliza el algoritmo BFS empezando en $A$ y teniendo en cuenta el sentido de las aristas. En caso de poder ir a más de un vértice, prioriza el orden lexicográfico y muestra todos los pasos del algoritmo.

*b*) Calcula la distancia mínima desde cada vértice de $\mathcal{G}$ hasta el vértice $A$. Indica claramente el algoritmo utilizado y muestra todos los pasos.

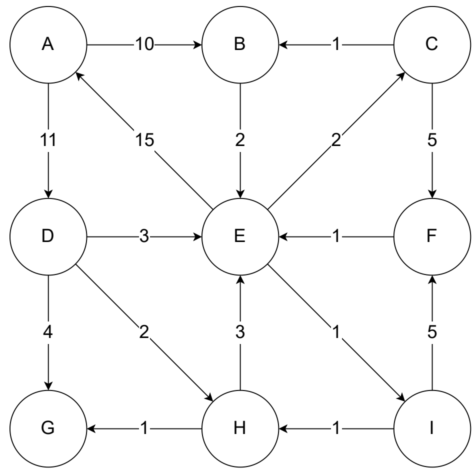
Un grafo dirigido es llamado fuertemente conexo si para cada par de vértices $u$ y $v$ existe un camino de $u$ hacia $v$ y un camino de $v$ hacia $u$. Las componentes fuertemente conexas de un grafo dirigido son sus subgrafos maximales fuertemente conexos.

*c*) Aprovechando tus respuestas a los apartados anteriores, encuentra las componentes fuertemente conexas de $\mathcal{G}$.

*d*) ¿Es posible obtener dos componentes fuertemente conexas más modificando únicamente el sentido de una de las aristas? Justifica tu respuesta.

---

**Solución:**




Una representación posible del grafo del enunciado es la que se muestra en la figura anterior.

*a*) Si empezamos BFS en el vértice $A$ obtenemos:

| **Q** | **Vértice añadido** | **Vértice eliminado** | **R** |
|---|---|---|---|
| A | A | - | [A] |
| AB | B | - | [A,B] |
| ABD | D | - | [A,B,D] |
| BD | - | A | [A,B,D] |
| BDE | E | - | [A,B,D,E] |
| DE | - | B | [A,B,D,E] |
| DEG | G | - | [A,B,D,E,G] |
| DEGH | H | - | [A,B,D,E,G,H] |
| EGH | - | D | [A,B,D,E,G,H] |
| EGHC | C | - | [A,B,D,E,G,H,C] |
| EGHCI | I | - | [A,B,D,E,G,H,C,I] |
| GHCI | - | E | [A,B,D,E,G,H,C,I] |
| HCI | - | G | [A,B,D,E,G,H,C,I] |
| CI | - | H | [A,B,D,E,G,H,C,I] |
| CIF | F | - | [A,B,D,E,G,H,C,I,F] |
| IF | - | C | [A,B,D,E,G,H,C,I,F] |
| F | - | I | [A,B,D,E,G,H,C,I,F] |
| $\emptyset$ | - | F | [A,B,D,E,G,H,C,I,F] |

Al aparecer todos los vértices del grafo en la lista final, se concluye que el grafo $\mathcal{G}$ es conexo.

*b*) El problema es equivalente a encontrar la distancia mínima de $A$ a todos los vértices del grafo al cambiar los sentidos de todas las aristas. Dicho problema equivalente se puede resolver fácilmente mediante el algoritmo de Dijkstra y se obtienen las distancias mínimas siguientes:

- $B \to A: 17$
- $C \to A: 18$
- $D \to A: 18$
- $E \to A: 15$
- $F \to A: 16$
- $G \to A: \infty$
- $H \to A: 18$
- $I \to A: 19$

| ***A*** | ***B*** | ***C*** | ***D*** | ***E*** | ***F*** | ***G*** | ***H*** | ***I*** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(0, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ |
| $(0, A)^*$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(15, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ | $(\infty, A)$ |
| $(0, A)$ | $(17, E)$ | $(\infty, A)$ | $(18, E)$ | $(15, A)^*$ | $(16, E)$ | $(\infty, A)$ | $(18, E)$ | $(\infty, A)$ |
| $(0, A)$ | $(17, E)$ | $(21, F)$ | $(18, E)$ | $(15, A)$ | $(16, E)^*$ | $(\infty, A)$ | $(18, E)$ | $(21, F)$ |
| $(0, A)$ | $(17, E)^*$ | $(18, B)$ | $(18, E)$ | $(15, A)$ | $(16, E)$ | $(\infty, A)$ | $(18, E)$ | $(21, F)$ |
| $(0, A)$ | $(17, E)$ | $(18, B)^*$ | $(18, E)$ | $(15, A)$ | $(16, E)$ | $(\infty, A)$ | $(18, E)$ | $(21, F)$ |
| $(0, A)$ | $(17, E)$ | $(18, B)$ | $(18, E)^*$ | $(15, A)$ | $(16, E)$ | $(\infty, A)$ | $(18, E)$ | $(21, F)$ |
| $(0, A)$ | $(17, E)$ | $(18, B)$ | $(18, E)$ | $(15, A)$ | $(16, E)$ | $(\infty, A)$ | $(18, E)^*$ | $(19, H)$ |
| $(0, A)$ | $(17, E)$ | $(18, B)$ | $(18, E)$ | $(15, A)$ | $(16, E)$ | $(\infty, A)$ | $(18, E)$ | $(19, H)^*$ |

*c*) De BFS se deduce que de $A$ se puede llegar a cualquier vértice del grafo $\mathcal{G}$. De Dijkstra aplicado al grafo transpuesto (el grafo con todos los sentidos cambiados) se deduce que se puede llegar a $A$ desde todos los vértices exceptuando el vértice $G$. Así pues, dados dos vértices $v_1, v_2 \in \{A, B, C, D, E, F, H, I\}$ se puede ir de $v_1$ a $v_2$, yendo de $v_1$ a $A$ y a continuación de $A$ a $v_2$ por ejemplo, y viceversa.

En conclusión, el grafo tiene dos componentes fuertemente conexas: $G$ y $\mathcal{G} \setminus \{G\}$.

*d*) Sí, si se modifica el sentido de la arista $AE$. De este modo, es imposible construir caminos desde cualquier vértice distinto a $A$ hasta el vértice $A$. Además, como todos los caminos que llegan a $D$ lo hacen desde $A$, el vértice $D$ también constituye una nueva componente fuertemente conexa, además del vértice $A$.

---

5. (Valoración de un 30 %) Cuestionario de evaluación Moodle

Dentro del aula de la asignatura, en el Campus Virtual, encontraréis una nueva herramienta (Moodle) en la parte derecha. En este Moodle hay un cuestionario con diversas preguntas que debéis resolver como último ejercicio de esta PEC.

Leed atentamente las siguientes instrucciones **antes de abrir el cuestionario**:

- Los contenidos que se evalúan en este cuestionario corresponden al módulo “Fundamentos de grafos” y “Recorridos y conectividad”. Es importante que hayáis asimilado estos conocimientos **antes de abrir el cuestionario**.

- El cuestionario estará abierto durante el plazo de la PEC y lo podéis resolver cuando queráis. De todas formas, una vez lo abráis tendréis un **tiempo limitado** para resolverlo (1 hora).

  **Importante:** El cuestionario quedará cerrado a las 23:59 de la fecha límite de entrega. Si empezáis a hacerlo después de las 22:59 del último día, ¡tendréis menos de una hora para hacerlo!
- Las respuestas a las preguntas se tienen que introducir directamente en el cuestionario Moodle. No es necesario que las entreguéis junto con el resto de respuestas de la PEC.
- Las preguntas del cuestionario son aleatorias: cada estudiante recibirá un enunciado diferente.
- En algunas preguntas tendréis que introducir la respuesta en un formato específico (p. ej. con los valores ordenados de una determinada forma y sin espacios). Es muy importante **seguir fielmente el formato indicado** a la hora de introducir vuestra respuesta.
- Disponéis de **2 intentos** para resolver el cuestionario. El objetivo de tener dos intentos es poder solventar posibles problemas que hayáis tenido en la realización del cuestionario, ya sean problemas técnicos o bien que hayáis abierto el cuestionario por error. Por tanto, debéis tener en cuenta que:
  - La nota que obtendréis en el cuestionario será la de vuestro último intento.
  - Después del 1$^{er}$ intento, no recibiréis la calificación obtenida ni recibiréis feedback sobre vuestra propuesta de solución. Por lo tanto, no recomendamos usar el 2$^{o}$ intento para intentar mejorar nota, ya que puede ser que obtengáis una nota inferior.
  - Si usáis el 2$^{o}$ intento, el enunciado que encontraréis será diferente del 1$^{er}$ intento.
  - Podéis realizar los dos intentos en días diferentes, siempre que sea dentro del plazo de la PEC. Dispondréis de 1 hora para cada intento.
  - Cada vez que iniciéis el cuestionario contará como un intento, aunque no enviéis la respuesta. Por ejemplo, **si habéis hecho el 1$^{er}$ intento y volvéis a abrir el cuestionario, invalidaréis vuestro 1$^{er}$ intento y os quedaréis con la nota del 2$^{o}$**.

# Recursos

## Recursos Básicos

- Módulo didáctico 1. Conceptos previos: funciones y algoritmos.
- Módulo didáctico 2. Fundamentos de grafos.
- Módulo didáctico 3. Recorridos y conectividad.
- Colección de problemas.

## Recursos Complementarios

- PECs y exámenes de semestres anteriores.
- Programario para el estudio de algoritmos sobre grafos.
- Enlaces: Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

# Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**. En caso que hayáis consultado recursos externos, es necesario referenciarlos.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

# Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC1_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 09/04/2023**. **No se aceptarán entregas fuera de plazo.**