Presentación

Esta PEC profundiza en el concepto de complejidad computacional que cubre los contenidos estudiados en los módulos 6 y 7 de la asignatura. Los ejercicios trabajan los conceptos de medida de complejidad, la reducción y completitud, la clase NP-completo y algunos de los problemas intratables más importantes que se conocen.

Competencias

En esta PEC se trabajan las siguientes competencias del Grado de Ingeniería Informática:

- Capacidad para utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- Capacidad para analizar un problema en el nivel de abstracción adecuado en cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para resolverlo.

Objetivos

Los objetivos concretos de esta PEC son:

- Entender los conceptos de intratabilidad y no-determinismo.
- Conocer las diferentes clases de complejidad y saber clasificar los problemas en cada una de estas.
- Entender el concepto de reducción entre problemas y saber demostrar cuando un problema es NP-completo.
- Reconocer problemas intratables que aparecen de forma habitual en informática y en ingeniería.
- Entender y saber aplicar las técnicas básicas de reducción polinómica de los problemas NP-completos.

Descripción de la PEC a realizar

1. (Valoración de un 20 % = (2 %+2 %+2 %+7 %+7 %)

   Responder a las tres preguntas siguientes:

   a) Dadas las siguientes fórmulas booleanas:

   1) $(\bar{a} \wedge (\bar{b} \vee c)) \vee a$.
   2) $(\bar{a} \vee \bar{b}) \wedge (c \vee \bar{b})$.
   3) $(\bar{a} \vee \bar{b} \vee c) \wedge (c \vee \bar{b}) \wedge a$.
   4) $(\bar{b} \wedge a \wedge c) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (a \vee \bar{b} \vee c)$.
   5) $(\bar{b} \vee a \vee c) \wedge (c \vee \bar{b} \vee a)$.

   Se pide:

   1) ¿Cuáles **no** están en FNC? Justificar la respuesta.
   2) ¿Cuáles **no** son instancias de un problema SAT? Justificar la respuesta.
   3) ¿Cuáles **no** son instancias de un problema 3SAT? Justificar la respuesta.

   b) Expresar en FNC la siguiente expresión lógica (detallar los pasos seguidos):

   $$a \wedge (\bar{b} \rightarrow (c \wedge d)).$$

   c) Expresar como una instancia del problema 3SAT la fórmula booleana siguiente (detallar los pasos seguidos):

   $$a \vee \overline{(\bar{b} \vee c)}.$$

Solución:

a) Solución de la Pregunta (a).

1) No están 1) ni 4) porque en ambos casos hay claúsulas que están relacionadas con disyunciones.
2) Como las instancias de SAT son expresiones booleanas en FNC, no están 1) ni 4).
3) No lo son 1) ni 4) porque no están en FNC. Las expresiones 2) y 3) tampoco lo son porque no todas las cláusulas cumplen el estar formadas por tres disyunciones de literales.

b) Usando que la expresión lógica $\bar{b} \to (c \wedge d)$ es equivalente a $b \vee (c \wedge d)$, y la propiedad distributiva tenemos que

$$\begin{aligned} a \wedge (\bar{b} \to (c \wedge d)) = \\ a \wedge ((b \vee (c \wedge d)) = \\ a \wedge (b \vee c) \wedge (b \vee d). \end{aligned}$$

c) Por las Leyes de Morgan y la distributidad se obtiene:

$$\begin{aligned} a \vee (\overline{\bar{b} \vee c}) = \\ a \vee (b \wedge \bar{c}) = \\ (a \vee b) \wedge (a \vee \bar{c}). \end{aligned}$$

Ya tenemos la expresión en FNC. Para pasarla a instancia de 3SAT basta con adjuntar una variable auxiliar a cada cláusula. Quedaría:

$$\begin{aligned} a \vee (\overline{\bar{b} \vee c}) = \\ (a \vee b) \wedge (a \vee \bar{c}) = \\ (a \vee b \vee d) \wedge (a \vee b \vee \bar{d}) \wedge (a \vee \bar{c} \vee e) \wedge (a \vee \bar{c} \vee \bar{e}). \end{aligned}$$

---

2. (Valoración de un 20 % = (2 % + 2 % + 2 % + 2 % + 2 %) + (2 % + 2 % + 2 % + 2 % + 2 %))

Responder a las dos preguntas siguientes:

a) Decir si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas justificando las respuestas

1) Si $A \in NP$ y B es NP-completo, entonces siempre se tiene que $A \leq_p B$ y $B \leq_p A$.
2) Si A es un problema cuyas soluciones puede validarse en tiempo polinomial entonces necesariamente $A \leq_p 3SAT$.
3) Si un problema es P entonces es seguro que lo podemos resolver en un tiempo exponencial.
4) Si un problema es NP entonces es seguro que lo podemos resolver en un tiempo exponencial.
5) Si A es un problema cuyas soluciones puede validarse en tiempo polinomial entonces necesariamente A es P.

b) Sean A, B y C tres problemas distintos que satisfacen $A \leq_p B$ y $A \leq_p C$. Justificar si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas.

1) Si $B \leq_p A$ entonces A y C son polinómicamente equivalentes.
2) Si B es NP-completo entonces C nunca puede ser NP-completo.
3) Si $C \in P$ entonces $A \in P$.
4) Si A es NP-completo entonces nunca puede ocurrir que $C \in NP$.
5) Si $C \in P$ entonces nunca puede ocurrir que $A \in NP$.

Solución:

a) Respuestas a la primera pregunta:
   1) Falso. Sólo podemos concluir que $A \leq_p B$.
   2) Cierto. Como el problema A pertenece a NP, puede reducirse a $3SAT$ ya que $3SAT$ es NP-completo.
   3) Cierto. Ya que la clase de complejidad P está contenida en la clase EXP.
   4) Cierto. Ya que nuestro problema está en NP y la clase de complejidad NP está contenida en la clase EXP.
   5) Falso. Sólo sabemos que el problema está en NP.

b) Respuestas a la segunda pregunta:
   1) Falso. Sólo podemos concluir que A y B son polinómicamente equivalentes.
   2) Falso. No hay nada que impida que C sea NP-completo.
   3) Cierto. Ya que en caso contrario A no podría reducirse polinómicamente a C.
   4) Falso. Si C es NP-completo, sí sería posible.
   5) Falso. Puede ocurrir que $A \in P \subset NP$.

---

3. (Valoración de un 20 % = 6 % +7 %+7 %)

Responder a las tres preguntas siguientes:

a) Expresar en forma de función $Prob : I \to S$, donde I es el conjunto de instancias y S el de soluciones, el siguiente problema decisional:

$PAR(x)$. Dado un número entero $x \in Z$, devuelve CIERTO si x es par, y FALSO si no lo es.

Después, proporcionar un conjunto de testigos T y una función verificadora

$$v : I \times T \to \{0, 1\}$$

para el mismo, esbozando (o justificando) el pseudocódigo del programa que calcularía esta función verificadora.

b) Expresar en forma de función

$$Prob : I \to S,$$

donde I es el conjunto de instancias y S el de soluciones, el siguiente problema de cálculo:

$FACTORES(x)$. Dado un número natural distinto del 1. Esto es, $x \in N - \{1\}$, devuelve su descomposición en factores primos.

Después, expresar este problema de cálculo como un problema decisional

$$Prob' : I' \to \{0, 1\}.$$

c) Consideremos el problema $k - CUT$, donde k es un entero positivo, cuyas instancias son grafos no-dirigidos $G = (V, E)$; y el problema (decisional) responde a la cuestión de si existe o no una partición de V en k subconjuntos disjuntos $V_1, V_2, ..., V_k$ con $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \cdots \cup V_k = V$, tales que sólo existan aristas entre vértices pertenecientes a distintos subconjuntos. Se pide probar que $k - CUT$ es NP-completo, haciendo un argumento de reducción polinómica con alguno de los problemas estándares estudiados en los módulos de la asignatura.

Solución:

a) El problema decisional es

$$PAR : \ Z \to \{0, 1\}$$

definido como $PAR(z) = 1$ si z es par y $PAR(z) = 0$ si z es impar. Al ser el problema calculable en tiempo polinómico, podemos tomar como T cualquier conjunto no vacío, por ejemplo $T = \{a\}$ y definir $v : Z \times \{a\} \to \{0, 1\}$ como $v(z, a) = 1$ si z es par y $v(z, a) = 0$ si z es impar, siendo v cualquier función que compruebe que un número es par en tiempo polinómico (por ejemplo tomando la congruencia módulo 2).

b) El problema de cálculo lo podemos plantear como

$$FACTORES : (N - \{1\}) \to C$$

donde C es el conjunto formado por todas las secuencias finitas ordenadas (de menor a mayor) de números primos, definida como $FACTORES(n) = (p_1, p_2, ..., p_n)$ donde $(p_1, p_2, ..., p_n)$ es la descomposición de n en factores primos.

Podemos expresar este problema de cálculo como uno decisional en la forma:

$$FACTORES' : ((N - \{1\}), C) \times \to \{0, 1\}$$

definido como $FACTORES'(n,(p_1,p_2,...,p_n)) = 1$ si $n = p_1p_2\cdots p_n$ y

$$FACTORES'(n,(p_1,p_2,...,p_n)) = 0$$

si $n \neq p_1p_2\cdots p_n$.

c) Podemos obtener una reducción polinómica de $k-CUT$ al problema de k-coloración de grafos $k-COLORING$, tomando como función de reducción la identidad (una instancia del problema decisional $k-COLORING$ sería también G). Esto es consecuencia de que si $V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \cdots \cup V_k = V$ con $V_i \cap V_j = \emptyset$ cuando $i \neq j$, podemos definir la función de k-coloreado $f : V \to \{1,2,...,k\}$ como $f(V_i) = i$ para $i \in \{1,2,...,k\}$. Como $k-COLORING$ es NP-completo, concluimos que $k-CUT$ es NP. De manera análoga se tiene que $k-COLORING \leq_p k-CUT$. Aquí dada la función de k-coloreado $f : V \to \{1,2,...,k\}$, definimos $V_i = \{v \in V : f(v) = i\}$ para $i \in \{1,2,...,k\}$.

---

4. (Valoración de un 20 % = 5 %+15 %)

Denotemos por MQ y por MT a los problemas consistentes en multiplicar dos matrices cuadradas arbitrarias, y en multiplicar dos matrices cuadradas triangulares superiores arbitrarias (una matriz cuadrada se dice triangular superior si por debajo de la diagonal principal todas sus entradas son 0), respectivamente.

Formalmente, las instancias de MQ son $\{(A,B)\}$, donde A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, y $MQ((A,B)) = AB$. Por otro lado, las instancias de MT son $\{(S,T)\}$, donde S y T son matrices cuadradas triangulares superiores del mismo tamaño, y $MT((S,T)) = ST$.

a) Expresar MQ y MT como problemas decisionales.

b) Demostrar que los problemas decisionales MQ y MT son polinómicamente equivalentes **dando de manera explícita las funciones de reducción**.

Solución:

a) Podemos expresar MQ como problema decisional tomando como conjunto de instancias

$$\{(A,B,C)\},$$

donde A, B y C son matrices cuadradas del mismo tamaño, y definiendo $MQ((A,B,C)) = 1$ si $AB = C$, $MQ((A,B,C)) = 0$ si $AB \neq C$. De manera análoga, podemos expresar MT como problema decisional tomando como conjunto de instancias $\{(A,B,C)\}$, donde A, B y C son matrices cuadradas triangulares superiores del mismo tamaño, y definiendo $MS((A,B,C)) = 1$ si $AB = C$, $MS((A,B,C)) = 0$ si $AB \neq C$.

b) La reducción polinómica $MT \leq_p MQ$ es trivial. La función de reducción es la inclusión.
Consideremos entonces la reducción $MQ \leq_p MT$:
Observemos que podemos reducir la multiplicación de dos matrices arbitrarias de tamaño $n \times n$ a una multiplicación de dos matrices triangulares superiores de tamaño $3n \times 3n$ como sigue:

$$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & AB \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De aquí la función de reducción f entre las instancias de MQ y de MT sería:

$$f((A,B,C)) = (\begin{pmatrix} 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & C \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}).$$

La condición $MQ(A,B,C) = MS(f(A,B,C))$ para toda instancia (A,B,C) de MQ, se comprueba fácilmente.
Finalmente, la reducción se realiza en tiempo polinómico ya que las operaciones involucradas, (preparación de las matrices triangulares superiores, multiplicación de las mismas y extracción de AB de su producto), tienen todas coste polinomial.

---

5. (Valoración de un 20 %) Cuestionario de evaluación Moodle

Dentro del aula de la asignatura, en el Campus Virtual, encontraréis la herramienta Moodle en la parte derecha. En este Moodle hay un cuestionario con diversas preguntas que debéis resolver como último ejercicio de esta PEC.

Leed atentamente las siguientes instrucciones **antes de abrir el cuestionario**:

- Los contenidos que se evalúan en este cuestionario corresponden a los módulos 6 y 7 de la asignatura. Es importante que hayáis asimilado estos conocimientos **antes de abrir el cuestionario**.
- Para visualizar correctamente el cuestionario, utilizad Chrome o Firefox.
- El cuestionario estará abierto durante el plazo de la PEC y lo podéis resolver cuando queráis. De todas formas, una vez lo abráis tendréis un **tiempo limitado** para resolverlo (40 minutos).

  Importante: El cuestionario quedará cerrado a las 23:59 de la fecha límite de entrega. Si empezáis a hacerlo después de las 23:19 del último día, ¡tendréis menos de cuarenta minutos para hacerlo!
- Las respuestas a las preguntas se tienen que introducir directamente en el cuestionario Moodle. No es necesario que las entreguéis junto con el resto de respuestas de la PEC.

- Las preguntas del cuestionario son aleatorias: cada estudiante recibirá un enunciado diferente.
- En algunas preguntas tendréis que introducir la respuesta en un formato específico (p. ej. con los valores ordenados de una determinada forma y sin espacios). Es muy importante **seguir fielmente el formato indicado** a la hora de introducir vuestra respuesta.
- Disponéis de **2 intentos** para resolver el cuestionario. El objetivo de tener dos intentos es poder solventar posibles problemas que hayáis tenido en la realización del cuestionario, ya sean problemas técnicos o bien que hayáis abierto el cuestionario por error. Por tanto, debéis tener en cuenta que:
  - La nota que obtendréis en el cuestionario será la de vuestro último intento.
  - Después del 1r intento, no recibiréis la calificación obtenida ni recibiréis feedback sobre vuestra propuesta de solución. Por lo tanto, no recomendamos usar el 2o intento para intentar mejorar nota, ya que puede ser que obtengáis una nota inferior.
  - Si usáis el 2o intento, el enunciado que encontraréis será diferente del del 1r intento.
  - Podéis realizar los dos intentos en días diferentes, siempre que sea dentro del plazo de la PEC. Dispondréis de 40 minutos para cada intento.
  - Cada vez que iniciéis el cuestionario contará como un intento, aunque no enviéis la respuesta. Por ejemplo, **si habéis hecho el 1r intento y volvéis a abrir el cuestionario, invalidaréis vuestro 1r intento y os quedaréis con la nota del 2o**.

Recursos

Recursos Básicos

- Módulo didáctico 6. Complejidad computacional.
- Módulo didáctico 7. Problemas intratables.
- Colección de problemas

Recursos Complementarios

- Ejemplos de aplicaciones de la teoría de grafos.
- Applets interactivos sobre algoritmos de grafos.

Criterios de valoración

- La PEC se tiene que resolver **de forma individual**. En caso que hayáis consultado recursos externos, es necesario referenciarlos.
- Es necesario justificar la respuesta de cada apartado. Se valorará tanto el resultado final como la justificación dada.
- En los apartados donde sea necesario aplicar algún algoritmo, se valorará la elección del algoritmo apropiado, los pasos intermedios, el resultado final y las conclusiones que se deriven.

Formato y fecha de entrega

Hay que entregar **un único documento** PDF con las respuestas de todos los ejercicios. El nombre del fichero tiene que ser: **PEC3_Apellido1Apellido2Nombre.pdf**.

Este documento se tiene que entregar en el espacio **Entrega y Registro de EC** del aula **antes de las 23:59 del día 01/06/2023**. **No se aceptarán entregas fuera de plazo.**