

## PEC 3

### Presentación

Esta PEC corresponde al módulo de *Electrostática*.

### Competencias

#### Competencias Generales

- 11 Capacidad de utilizar los fundamentos matemáticos, estadísticos y físicos para comprender los sistemas TIC.
- 12 Capacidad de analizar un problema en el nivel de abstracción adecuado a cada situación y aplicar las habilidades y conocimientos adquiridos para abordarlo y resolverlo.

#### Competencias Específicas

- Comprender las leyes fundamentales de la electrostática tanto en el vacío como en presencia de materia para ser capaz de comprender los efectos subyacentes a la electrónica, la transmisión de información por medios telemáticos, etc.
- Interiorizar que el electromagnetismo es una interacción fundamental de la naturaleza para ser consciente de su presencia en nuestro entorno y ser capaz de tener presente sus leyes en los fenómenos en que está implicado.
- Saber trabajar las expresiones fundamentales de la teoría electromagnética con una base matemática vectorial para ser capaz de llevar a cabo previsiones precisas.

### Objetivos

- Cálculo del campo eléctrico creado por distribuciones discretas y continuas de carga.
- Aplicación del Teorema de Gauss
- Cálculo del potencial eléctrico de un sistema de cargas y de la energía necesaria para crearlo.

- Propiedades de los condensadores.

## Descripción de la PEC a realizar

La PEC está dividida en 2 partes: un cuestionario que encontrará en el Moodle de la asignatura y este documento que está formado por 6 cuestiones cortas y un problema.

## Recursos

### Recursos Básicos

Módulo de *Electrostática*.

### Recursos Complementarios

En el aula encontraréis información sobre recursos adicionales, así como PECs resueltas de semestres anteriores. Por otro lado, al final de cada módulo encontraréis una bibliografía recomendada.

## Criterios de valoración

**20 % Cuestionario Moodle**

**60 % Cuestiones cortas**

**20 % Problema**

Excepto en el Cuestionario Moodle, todas las respuestas deben justificarse adecuadamente.

## Formato y fecha de entrega

La PEC 3 se tiene que entregar antes del **26/04/2022 a las 23:59h** a través del **RAC** (Registro de Evaluación Continua). Se deberá hacer la entrega en un único fichero PDF con todas las respuestas (excepto el cuestionario Moodle) siempre que sea posible. En caso de que esto no pueda ser por algún motivo justificado, se podrán aceptar otros formatos habituales como por ejemplo Microsoft Office (.DOC, .DOCX), OpenOffice (.ODT), ficheros de texto (.TXT, .RTF) o L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X(.TEX).

El cuestionario se tiene que realizar on-line al Moodle del aula de Fundamentos Físicos de la Informática. La fecha límite es la misma que la de la PEC3 puesto que forma parte de ella.

**En el documento de entrega tendréis que añadir el siguiente texto: Certifico que he hecho esta PEC de forma completamente individual y solo con la ayuda que el PDC ha considerado oportuna.**

## Enunciados

---

### CUESTIONARIO MOODLE

Conectaos al Moodle de la asignatura y responded el cuestionario correspondiente a la PEC 3. Este cuestionario constará de una serie de preguntas tomadas **al azar** de entre los cuestionarios de cada semana. Dispondréis de hasta 2 intentos para realizarlo y la nota final será siempre la **más alta** de entre las obtenidas en cada intento.

Os recordamos que disponéis de los cuestionarios no evaluables correspondientes al temario de cada semana, con los que podéis practicar tantas veces como queráis sin penalización.

## CUESTIONES

### Cuestión 1

Tenemos dos cargas puntuales situadas en los puntos  $2\vec{i} + 0\vec{j}$  cm y  $0\vec{i} + 3\vec{j}$  cm tal y como se observa en la Figura 1. Datos:  $q_1 = -3$  nC y  $q_2 = 2$  nC.

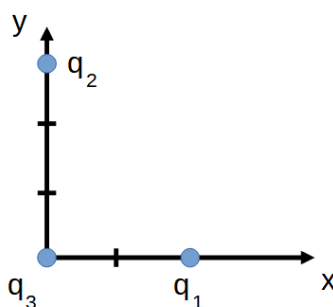


Figura 1: Disposición de cargas de la Cuestión 1.

- (a) Calculad el campo eléctrico  $\vec{E}_T$  en el origen de coordenadas.
- (b) Obtenga la fuerza electrostática resultante que ejercen  $q_1$  y  $q_2$  sobre una carga  $q_3 = 1$  nC situada en el origen de coordenadas como se observa en la Figura 1.

#### Solución:

- (a) Para obtener el campo eléctrico  $\vec{E}_T$  en el origen de coordenadas, utilizaremos conjuntamente la ecuación (14) (campo eléctrico creado por una carga puntual) y aplicaremos el principio de superposición ecuación (23) del módulo:

$$\vec{E}_T = \sum_{i=1}^{i=N} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{\|\vec{r} - \vec{r}'_i\|^2} \hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}'_i} \quad (1)$$

El primer paso es especificar los vectores de posición de las cargas, lo pasamos a metros para que esté en el S.I.:

$$\vec{r} = 0\vec{i} + 0\vec{j}; \quad \vec{r}_1 = 2 \cdot 10^{-2}\vec{i} + 0\vec{j}; \quad \vec{r}_2 = 0\vec{i} + 3 \cdot 10^{-2}\vec{j}; \quad (2)$$

y de ahí podemos encontrar los vectores diferencia y sus módulos, que son las distancias de cada carga al origen de coordenadas:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = (0\vec{i} + 0\vec{j}) - (2 \cdot 10^{-2}\vec{i} + 0\vec{j}) = -2 \cdot 10^{-2}\vec{i} \rightarrow \|\vec{r} - \vec{r}_1\| = 2 \cdot 10^{-2} \quad (3)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_2 = (0\vec{i} + 0\vec{j}) - 0\vec{i} + 3 \cdot 10^{-2}\vec{j} = -3 \cdot 10^{-2}\vec{j} \rightarrow \|\vec{r} - \vec{r}_2\| = 3 \cdot 10^{-2} \quad (4)$$

Los vectores unitarios los calcularemos como:

$$\hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}_1} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|} = \frac{-2 \cdot 10^{-2}\vec{i}}{2 \cdot 10^{-2}} = -\vec{i}; \quad \hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}_2} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_2}{\|\vec{r} - \vec{r}_2\|} = \frac{-3 \cdot 10^{-2}\vec{j}}{3 \cdot 10^{-2}} = -\vec{j}; \quad (5)$$

Sustituimos estos valores junto con los valores de las cargas que nos da el enunciado en la ecuación (1) y obtenemos el campo eléctrico:

$$\begin{aligned} \vec{E}_T &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{q_1}{\|\vec{r} - \vec{r}_1\|} \hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}_1} + \frac{q_2}{\|\vec{r} - \vec{r}_2\|} \hat{u}_{\vec{r}-\vec{r}_2} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{-3 \cdot 10^{-9}}{(2 \cdot 10^{-2})^2} (-\vec{i}) + \frac{2 \cdot 10^{-9}}{(3 \cdot 10^{-2})^2} (-\vec{j}) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ -7,5 \cdot 10^{-6}\vec{i} + 2,2 \cdot 10^{-6}\vec{j} \right] \\ &= -6,74 \cdot 10^4\vec{i} + 1,98 \cdot 10^4\vec{j} \text{ N/C} \end{aligned}$$

Por tanto, el campo eléctrico  $E_T$  en el origen de coordenadas vale  $E_T = (-6,74\vec{i} + 1,98\vec{j}) \cdot 10^4$  N/C

- (b) Para obtener la fuerza electrostática sobre la carga  $q_3$ , utilizaremos la relación que existe entre la Ley de Coulomb (ecuación (13) del módulo de *Electrostática*) y el campo eléctrico  $E_T$  (ecuación (15)), por lo que llegaremos a la ecuación (39):

$$\vec{F}_{qq'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{d^2} \hat{u} \rightarrow \vec{F}_T = q_3 \cdot \vec{E}_T \quad (6)$$

Sustituimos valores:

$$\vec{F}_T = q_3 \cdot \vec{E}_T = 1 \cdot 10^{-9}(-6,74\vec{i} + 1,98\vec{j}) \cdot 10^4 = (-6,74\vec{i} + 1,98\vec{j}) \cdot 10^{-5} \text{ N} \quad (7)$$

Por tanto, la fuerza total sobre  $q_3$  vale  $\vec{F}_T = (-6,74\vec{i} + 1,98\vec{j}) \cdot 10^{-5} \text{ N}$ .

## Cuestión 2

Tenemos 3 cargas de valor  $q_1 = q$ ,  $q_2 = -q$  y  $q_3 = q$ . ¿Cuál es la energía necesaria para situar las 3 cargas  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  en una región del espacio de modo que formen un triángulo de lado  $L$ ?

### Solución:

Para resolverlo utilizaremos el apartado 4.1 del módulo de *Electrostática* (Energía necesaria para crear un sistema de cargas).

Partimos de que tenemos todas las cargas en el infinito y llevamos la primera a su posición. Debido a que no hay ninguna carga es energéticamente “gratis”. A partir de aquí cualquier carga que acerquemos desde el infinito habrá que aportar energía para vencer el efecto de las que ya están.

Por tanto para llevar la segunda es necesario superar el efecto de la primera.

Para llevar la tercera carga y formar el triángulo de lado  $L$ , tenemos el efecto que ha hecho la carga 1 sobre la 2, y ahora es necesario superar el efecto que hará la primera sobre la tercera, y el efecto que hará la segunda sobre la tercera, por lo que si volvemos a utilizar la ecuación (69) tenemos:

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{\text{todas las parejas}} \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_i q_j}{d_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{q_1 q_2}{d_{12}} + \frac{q_1 q_3}{d_{13}} + \frac{q_2 q_3}{d_{23}} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( \frac{q_1 q_2}{d_{12}} + \frac{q_1 q_3}{d_{13}} + \frac{q_2 q_3}{d_{23}} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left( -\frac{q^2}{L} + \frac{q^2}{L} - \frac{q^2}{L} \right) \\
 U &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{L}
 \end{aligned}$$



### Cuestión 3

Disponemos de dos anillas situadas en el vacío, cargadas uniformemente, con una carga total  $+Q$  cada una. Calculad el flujo del campo electrostático total que generan a través de la superficie gaussiana  $S$  de la Figura 2. Tenga en cuenta que sólo media anilla queda dentro de la superficie cerrada  $S$ .

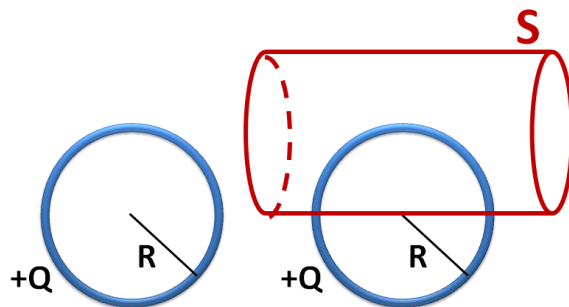


Figura 2: Situación estudiada en la Cuestión 3.

**Solución:** El teorema de Gauss (apartado 3.2 del Módulo de *Electrostática*) afirma que el flujo de campo eléctrico que atraviesa cualquier superficie cerrada ( $S$ ) es igual al valor de la carga neta que existe dentro de esa superficie ( $Q_{int}$ ) dividida por la constante dieléctrica del medio ( $\epsilon$ ) para un medio general, y  $\epsilon_o$  en el caso particular del vacío. Matemáticamente, si consideramos que las cargas están en el vacío, tenemos (ecuación (53) del Módulo de *Electrostática*):

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o} \quad (8)$$

Este teorema indica que sólo contribuyen al flujo electrostático las cargas interiores en la superficie gaussiana  $S$ .

Por tanto, en la cuestión que estudiamos sólo contribuye al flujo electrostático la mitad del anillo que está dentro de la superficie  $S$ . Dado que la densidad de carga del anillo es uniforme, la carga total interior a  $S$  será la proporción de anillo que está dentro de  $S$ , que es la mitad ( $Q/2$ ). Consecuentemente, el flujo electrostático que atraviesa  $S$  es:

$$\Phi = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_o} = \frac{(Q/2)}{\varepsilon_o} = \frac{Q}{2\varepsilon_o} \quad (9)$$

## Cuestión 4

Dentro de una caja cúbica de lado  $d = 20$  cm que se encuentra en el vacío hemos escondido una superficie esférica vacía de radio  $r = 3$  cm, tal y como indica la Figura 3. Medimos el flujo de campo electrostático que atraviesa la superficie del cubo y resulta ser  $\Phi = 3,2 \cdot 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \text{ C}^{-1}$ . ¿Cuál es la densidad superficial de carga,  $\sigma$ , de la esfera que se encuentra en el interior del cubo?

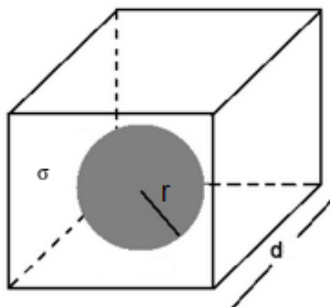


Figura 3: Cálculo del flujo de campo electrostático.

### Solución:

En el apartado 3.2 del módulo de *Electrostática* hemos estudiado el teorema de Gauss. Este teorema nos dice que el flujo de campo eléctrico que atraviesa cualquier superficie cerrada,  $S$ , es igual al valor de la carga neta que existe dentro de esa superficie,  $Q_{int}$ , dividida por la constante dieléctrica del medio,  $\epsilon$  ( $\epsilon_o$  en el caso particular del vacío). En la ecuación (53) del módulo de *Electrostática* podemos encontrar la expresión matemática del teorema de Gauss y es la siguiente:

$$\Phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_o} \quad (10)$$

Aplicando el teorema de Gauss podemos calcular cuál es la carga que se encuentra en el interior del cubo. Esta carga es la que corresponde a la esfera que hay en su interior.

$$3,2 \cdot 10^6 = \frac{Q_{int}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \rightarrow Q_{int} = 3,2 \cdot 10^6 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 28,3 \cdot 10^{-6} \text{ C} = 28,3 \mu\text{C} \quad (11)$$

Una vez conocida la carga y la superficie de la esfera (en el enunciado nos dan su radio) podemos calcular la densidad superficial de carga mediante la ecuación (2) del módulo de *Electrostática*:

$$Q = \sigma S \rightarrow \sigma = \frac{Q}{S} = \frac{28,3 \cdot 10^{-6}}{4\pi(3 \cdot 10^{-2})^2} = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ C/m}^2 \quad (12)$$

## Cuestión 5

Disponemos de una esfera conductora cargada con una carga  $Q$  uniforme y de radio  $R_1$ . Se encuentra rodeada por una corteza dieléctrica con permitividad  $\varepsilon$  y radio  $R_2$  (Figura 4). Calculad:

- (a) El desplazamiento eléctrico en la parte exterior de la esfera conductora.
- (b) El campo eléctrico en la parte exterior de la esfera conductora.
- (c) El potencial en el exterior de la esfera. Tome  $V(R_1) = 0$ .

NOTA: Tened presente que la parte exterior de la esfera conductora incluye tanto la corteza dieléctrica como la zona de vacío donde se encuentra.

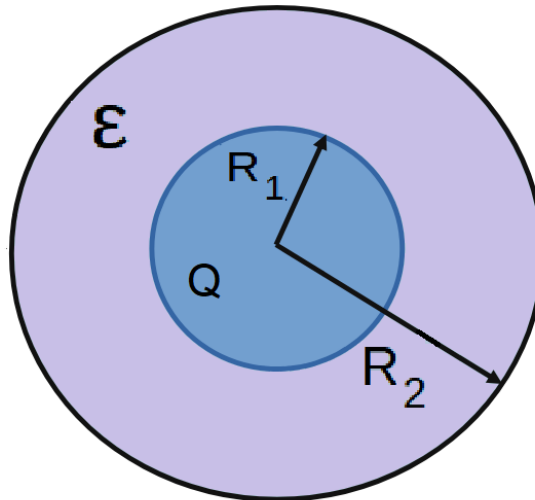


Figura 4: Esfera cargada rodeada de un dieléctrico situada en el vacío.

**Solución:**

- (a) Para calcular el campo de desplazamiento eléctrico utilizaremos la ecuación (85b) del módulo de *Electrostática* que es el Teorema de Gauss para el desplazamiento eléctrico.

$$\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{int} \quad (13)$$

Que en el caso de simetría esférica, teniendo en cuenta que aquí estamos considerando el módulo del campo  $D$  y que tiene dirección radial, podemos expresarlo como:

$$D \cdot S = Q_{int} \quad (14)$$

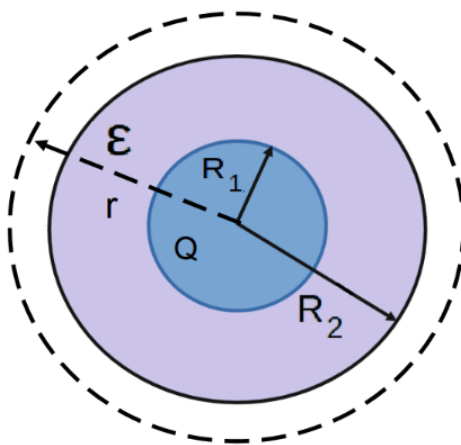


Figura 5: En discontinuo tenemos la superficie esférica de Gauss escogida.

Para obtener así el campo de desplazamiento eléctrico, necesitamos primero escoger una superficie adecuada y calcular la carga eléctrica en su interior. Escogeremos pues una superficie gaussiana esférica cuyo radio sea el punto donde queremos calcular el campo de desplazamiento eléctrico (Figura 5). En este caso, el área de la superficie esférica puede escribirse como  $S = 4\pi r^2$ . Teniendo en cuenta que en este caso  $Q_{int} = Q$ :

$$D4\pi r^2 = Q \rightarrow D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad (15)$$

Por tanto, el campo de desplazamiento eléctrico en el exterior de la esfera es  $D = \frac{Q}{4\pi r^2}$ . Si nos fijamos, el campo de desplazamiento eléctrico obtenido no depende de si hay dieléctrico o no, como era de esperar.

(b) En cuanto al campo eléctrico sí será diferente si ha dieléctrico o no, de modo que lo calcularemos por separado:

- Para obtener el campo eléctrico en presencia de dieléctrico (entre  $R_1$  y  $R_2$ ) utilizaremos la ecuación (86) del módulo, es decir, multiplicaremos el valor del campo de desplazamiento eléctrico obtenido en el apartado anterior por la permitividad del material. Que en el caso de simetría esférica, teniendo en cuenta que aquí estamos considerando el módulo del campo  $E$  y que tiene dirección radial, podemos expresarlo como:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}_\epsilon \rightarrow E_\epsilon = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon 4\pi r^2} \quad (16)$$

- Para obtener el campo eléctrico para  $r > R_2$  utilizaremos de nuevo la ecuación (86) del módulo, pero en este caso la permitividad eléctrica es  $\epsilon_0$ :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{\epsilon_0} \rightarrow E_{\epsilon_0} = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 4\pi r^2} \quad (17)$$

(c) En el apartado 4.3 del módulo de *Electrostática* se explica cómo encontrar la diferencia de potencial entre dos puntos A y B. La expresión para calcularla está dada por la ecuación (73), que reproducimos aquí por comodidad:

$$V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (18)$$

Si  $\vec{E}$  y  $\vec{r}$  son paralelos, como es el caso del problema, entonces  $\vec{E} \cdot d\vec{r} = E \cdot r$ :

$$V_B - V_A = - \int_A^B E \cdot dr \quad (19)$$

El enunciado nos dice que  $V(R_1) = 0$ , es decir, que tomamos  $R_1$  como origen del potencial. aquí también diferenciaremos entre la zona donde hay dieléctrico y donde no. El campo eléctrico de cada zona se ha obtenido en el apartado anterior. Teniendo en cuenta de nuevo que estamos en simetría esférica, que aquí estamos considerando el módulo de campos  $E_\epsilon$  y  $E_{\epsilon_0}$  y que tienen dirección radial, el potencial en estos casos será:

- En la zona donde hay dieléctrico ( $R_1 < r < R_2$ ):

$$V_\epsilon = - \int_{R_1}^r \frac{Q}{\epsilon 4\pi r^2} \cdot dr = - \frac{Q}{\epsilon 4\pi} \left[ \frac{1}{r} \right]_{R_1}^r \quad (20)$$

$$V_\epsilon = - \frac{Q}{\epsilon 4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_1} \right) \quad (21)$$

- En la zona donde no hay dieléctrico ( $r > R_2$ ) será:

$$V_{\varepsilon 0} = - \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{\varepsilon 4\pi r^2} \cdot dr - \int_{R_2}^r \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi r^2} \cdot dr = - \frac{Q}{\varepsilon 4\pi} \left[ \frac{1}{r} \right]_{R_1}^{R_2} - \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi} \left[ \frac{1}{r} \right]_{R_2}^r \quad (22)$$

Tenga en cuenta que siempre debemos empezar desde donde tenemos el potencial igual a cero, que en este caso es  $R_1$ .

$$V_{\varepsilon 0} = - \frac{Q}{\varepsilon 4\pi} \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) - \frac{Q}{\varepsilon_0 4\pi} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (23)$$



## Cuestión 6

Disponemos del circuito de la Figura 6, una fuente de alimentación de 220 V conectada en serie a dos condensadores que se encuentran conectados en paralelo entre sí. Los condensadores son planos de placas paralelas y tienen las mismas características geométricas (separación  $d = 2\text{ mm}$  y superficie  $S = 10\text{ mm}^2$ ), pero  $C_1$  tiene como material dieléctrico el vacío y  $C_2$  tiene un material dieléctrico con una constante dieléctrica relativa  $\varepsilon_r = 3$ . Calculad:

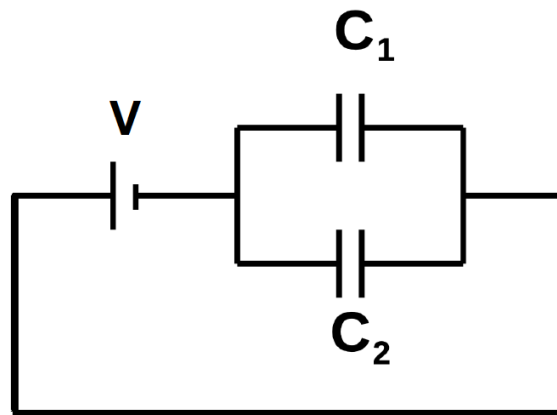


Figura 6: Asociación de la fuente de alimentación y condensadores de la Cuestión 6.

- (a) La diferencia de potencial entre los extremos de cada condensador.
- (b) Calculad las capacidades de los condensadores  $C_1$  y  $C_2$  y la capacidad total de esta asociación de condensadores.
- (c) La carga total almacenada en cada condensador y en el circuito.

### Solución:

- (a) En el módulo de *Circuitos RLC* había visto cómo conectar elementos de los circuitos. En este caso tenemos dos condensadores conectados en paralelo, por lo que la diferencia de potencial

entre los extremos de cada condensador es la misma. Dado que los dos están conectados a una diferencia de potencial de 220 V, la diferencia de potencial de cada condensador es también de 220 V.

- (b) En el apartado 6.4 del módulo de *Electrostática*, podemos encontrar una explicación detallada de la capacidad del condensador de placas planas paralelas. La ecuación (115) de dicho módulo nos proporciona la expresión para encontrar su capacidad. La reproducimos aquí por comodidad:

$$C_o = \varepsilon_o \frac{S}{d} \quad (24)$$

Que para esos condensadores sería:

$$C_1 = \varepsilon_o \frac{S}{d} = C_o \quad (25)$$

$$C_2 = \varepsilon_r \varepsilon_o \frac{S}{d} = 3C_o \quad (26)$$

Tal y como se explica en el ejemplo 23 del apartado 6.4 del módulo de *Electrostática*, en el caso de condensadores conectados en paralelo tenemos que sus capacidades se suman:

$$C_T = C_1 + C_2 = C_o + 3C_o = 4C_o \quad (27)$$

Ahora encontraremos los valores numéricos. Empezaremos por calcular  $C_o$  con los datos numéricos que proporciona el enunciado. Conviene tener presente que la superficie  $S$  y la distancia  $d$  están en  $\text{mm}^2$  y  $\text{mm}$  respectivamente, y deben pasarse a  $\text{m}^2$  y  $\text{m}$ . Con estas consideraciones obtenemos el siguiente resultado:

$$C_o = \varepsilon_o \frac{S}{d} = \frac{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} = 4,43 \cdot 10^{-14} = 44,3 \text{ fF} \quad (28)$$

Esto significa que las capacidades de los condensadores son:

$$C_1 = 44,3 \text{ fF} \quad (29)$$

$$C_2 = 3 \cdot C_o = 1,33 \cdot 10^{-13} = 0,133 \text{ pF} \quad (30)$$

y la capacidad de la asociación de ambos es:

$$C_T = 4 \cdot C_o = 1,77 \cdot 10^{-13} = 0,177 \text{ pF} \quad (31)$$

- (c) Podemos calcular la carga de cada condensador a partir de la ecuación (113) del módulo de *Electrostática*, que relaciona la capacidad con la carga y la diferencia de potencial:

$$C = \frac{Q}{|\Delta V|} \quad (32)$$

De ahí, si aislamos la carga:

$$Q = C \cdot |\Delta V| \quad (33)$$

Sustituyendo los valores de las capacidades obtenidos en el apartado anterior para cada condensador tenemos:

$$Q_1 = C_1 \cdot |\Delta V| = 4,43 \cdot 10^{-14} \text{ F} \cdot 220 \text{ V} = 9,7 \cdot 10^{-12} \text{ C} = 9,7 \text{ pC} \quad (34)$$

$$Q_2 = C_2 \cdot |\Delta V| = 1,33 \cdot 10^{-13} \text{ F} \cdot 220 \text{ V} = 2,9 \cdot 10^{-11} \text{ C} = 29 \text{ pC} \quad (35)$$

La carga total del circuito será la suma de las cargas de cada condensador:

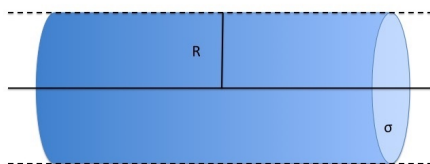
$$Q_T = Q_1 + Q_2 = 9,7 \text{ pC} + 29 \text{ pC} = 38,7 \text{ pC} \quad (36)$$

## PROBLEMA

Disponemos de un cilindro de radio  $R = 2$  cm y longitud infinita con densidad superficial de carga uniforme  $\sigma = 40$  nC/m<sup>2</sup> como se indica en la Figura 7a.

- (a) Calculad el campo eléctrico en el interior del cilindro
- (b) Calculad el campo eléctrico en el exterior del cilindro
- (c) Colocamos un hilo paralelo al cilindro a una distancia de  $r = 5$  cm (Hilo rojo de la Figura 7b). Este hilo está cargado con una densidad lineal  $\lambda = 2$  nC/m y tiene una longitud finita de 10 m. Calculad la fuerza eléctrica recibida por este hilo. (Considerad que el grosor de este hilo es despreciable)

a)



b)

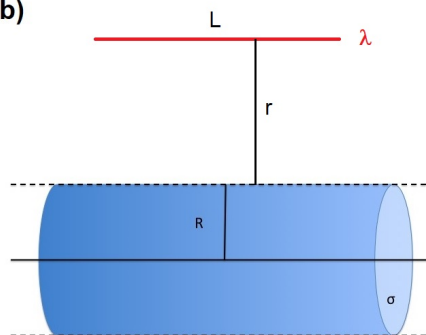


Figura 7: a) Cilindro infinito con densidad de carga  $\sigma$ . b) Cilindro infinito e hilo de longitud  $L$

**Solución:**

- (a) Si  $r < R$

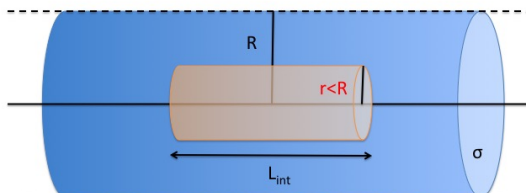


Figura 8: Cilindro infinito con densidad de carga  $\sigma$  con la superficie de Gauss también cilíndrica interior para el cálculo del campo eléctrico.

Para calcular el campo en el interior del cilindro, aplicaremos la ley de Gauss (eq.(53) en el apartado 3.2 del módulo de *Electrostática*) en el interior del cilindro como se muestra en la Figura 8. Definimos una superficie de Gauss cerrada que tiene forma cilíndrica, de radio  $r < R$  con dos tapas a los lados. En este caso no habrá carga interior en la superficie de Gauss y tendremos:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \quad (37)$$

Además, la integral sobre la superficie de Gauss interior en el cilindro la dividiremos en dos partes: una integral sobre la superficie cilíndrica y una integral sobre las tapas laterales. Fíjese que la simetría del sistema hace que podemos afirmar que el campo eléctrico sólo tendrá componente radial. Por tanto:

$$\begin{aligned} \oint_S E(r)\hat{r} \cdot d\vec{S} &= \int_{\text{Sup.cilindrica}} E(r)\hat{r} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{Tapas laterales}} E(r)\hat{r} \cdot d\vec{S} = \\ &= E(r) \int_{\text{Sup.cilindrica}} dS + 0 = E(r) \cdot 2\pi r L_{\text{int}} \end{aligned} \quad (38)$$

El vector campo eléctrico y lo normal en la superficie del cilindro son paralelos, y por tanto el producto escalar es directamente el producto. Por simetría, el módulo del campo eléctrico es constante en toda la superficie y podemos sacarlo fuera de la integral. Así pues, al final

la integral nos queda como el producto entre el módulo del campo eléctrico y la superficie del cilindro. Asimismo, la integral sobre las tapas es cero puesto que el vector normal en las tapas es perpendicular al vector campo eléctrico.

Así pues, igualando la ecuación (37) y la ecuación (38) obtenemos:

$$0 = E(r) \cdot 2\pi r L_{\text{int}} \longrightarrow E(r) = 0 \quad r < R \quad (39)$$

(b) Si  $r \geq R$

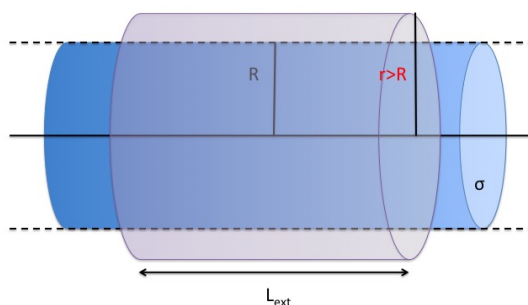


Figura 9: Cilindro infinito con densidad de carga  $\sigma$  con la superficie de Gauss también cilíndrica exterior para el cálculo del campo eléctrico.

De forma similar al apartado anterior, definimos una superficie de Gauss cerrada que tiene forma cilíndrica, de radio  $r > R$  con dos tapas a los lados. Puede ver esta superficie en la Figura 9.

Ahora sí que tenemos  $Q_{\text{int}}$  dentro de la superficie dada. La carga interna vendrá dada por la superficie del caparazón cilíndrico cargado que cae dentro de la superficie de Gauss:

$$Q_{\text{int}} = 2\pi R \sigma L_{\text{ext}} \quad (40)$$

La integral  $\oint_S E(r) \hat{r} \cdot d\vec{S}$  se calcula exactamente igual que antes. Así pues, ahora tenemos la igualdad:

$$\frac{2\pi R \sigma L_{\text{ext}}}{\epsilon_0} = E(r) \cdot 2\pi r L_{\text{ext}} \longrightarrow E(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} \quad r \geq R \quad (41)$$

Si nos fijamos, el resultado no depende de  $L_{ext}$ .

Sustituimos por los valores numéricos y tenemos:

$$E(r) = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \frac{R}{r} = \frac{40 \cdot 10^{-9}}{8,85 \cdot 10^{-12}} \frac{2 \cdot 10^{-2}}{r} = \frac{90,4}{r} \text{N} \quad (42)$$

- (c) El cálculo de la fuerza recibida por el hilo se puede simplificar gracias a que éste se encuentra paralelo al cilindro y, por tanto, el campo  $E$  es uniforme en todo él. Esto nos permite reducir el problema a un simple producto de una carga por un campo, ahorrándonos tener que integrar (recuerde que esto sólo es posible si el campo es uniforme a lo largo de toda la región donde se calcula la fuerza):

$$F = \int E \cdot dq = E \int dq = Q \cdot E \quad (43)$$

La carga  $Q$  debemos calcularla de forma similar al caso del apartado (b), en este caso tenemos una densidad lineal  $\lambda$  uniforme. A diferencia del caso anterior, ahora la longitud  $L$  sí que es conocida:

$$Q = \lambda L = 2 \cdot 10^{-9} \cdot 10 = 20 \text{ nC} \quad (44)$$

Ya podemos sustituir los dos valores numéricos ( $Q = 20 \text{ nC}$  que acabamos de encontrar y  $E = 1807,91 \text{ N/C}$  del apartado anterior) en la ecuación (43):

$$F = Q \cdot E = 20 \cdot 10^{-9} \cdot 1807,91 = \mathbf{3,62 \cdot 10^{-5} \text{ N}} \quad (45)$$

Como la densidad de carga del cilindro y la densidad de carga del hilo son positivas, la fuerza es repulsiva.