

リーマンゼータ関数のだね例

1 チェビシェフ多項式

1-1

(1) $\cos 5\theta = f(\cos \theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ.

$$(2) \cos \frac{\pi}{10} \cos \frac{3\pi}{10} \cos \frac{7\pi}{10} \cos \frac{9\pi}{10} = \frac{5}{16}$$

(京都大)

解答

加法定理から、 $\cos 5\theta = \cos(3\theta + 2\theta)$

$s > 1$ において級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (1)$$

は収束する. $\zeta(s)$ を **リーマンのゼータ関数** と呼ぶ.

オイラーは

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (2)$$

であることを発見した.